КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ, ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

Кафедра экономико-математического моделирования

И.И. ИСМАГИЛОВ, Е.И. КАДОЧНИКОВА,

А.В. КОСТРОМИН, Л.Д. БАДРИЕВА

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы
студентов, обучающихся по направлению
080100.62 «Экономика»

Казань 2014

УДК 330.43

ББК Ув631я73-1

Принято на заседании кафедры экономико-математического моделирования
Протокол № 1от 18 сентября 2014 года

Рецензент:
кандидат экономических наук,
доцент кафедры экономико-математического моделирования **Е. Л. Фесина**

Исмагилов И. И., Кадочникова Е.И., Костромин А. В., Бадриева Л. Д.
Эконометрика: учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлению 080100.62 «Экономика» / И. И. Исмагилов, Е.И.Кадочникова, А. В. Костромин, Л. Д. Бадриева. – Казань: Казан. ун-т, 2014. – 51 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы по дисциплине «Эконометрика» при обучении студентов по направлению 080100.62 «Экономика». Цель пособия – развить знания, умения и практические навыки применения методов эконометрики и тестирования качества эконометрических моделей.

Содержание

Введение

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с программой дисциплины «Эконометрика» и призвано помочь в организации самостоятельной работы студентов по углубленному изучению всех разделов курса. Пособие охватывает темы: Экономическая и статистическая интерпретация модели парной регрессии, Оценка качества модели множественной регрессии, Модели одномерных временных рядов, Понятие о системах эконометрических уравнений.

По каждой теме даются задания для самостоятельного решения, типовые задачи и указывается список рекомендуемой литературы.

Тема 4. Экономическая и статистическая интерпретация модели парной регрессии

Задачи для самостоятельного решения

1. Зависимость спроса на кухонные комбайны y от цены x по 20 торговым точкам компании имеет вид:

$$\ln y = 6{,}8 - 0{,}6 \ln x + \varepsilon$$
$$(2{,}7)(-2{,}8)$$

В скобках – фактическое значение t – критерия. Ранее предполагалось, что увеличение цены на 1 % приводит к уменьшению спроса на 1,2 %. Можно ли утверждать, что приведенное уравнение регрессии подтверждает это предположение?

—Да, на уровне значимости 0,01

—Нет, на уровне значимости 0,01

—Да, на уровне значимости 0,05

—Да, на уровне значимости 0,1

2. Для двух видов продукции А и Б зависимость удельных постоянных расходов от объема выпускаемой продукции выглядят следующим образом:

$$y_A = 15 + 8 \ln x,$$
$$y_Б = 25x^{0,3}$$

Сравнить эластичности затрат по каждому виду продукции при x=50 и определить объем выпускаемой продукции обоих видов, при котором их эластичность будут одинаковы

___ $Э_А = 0{,}17,\ \ Э_Б = 0{,}30,\ \ x_А = 4{,}3,\ \ x_Б\,любое$

___ $Э_А = 0{,}20,\ \ Э_Б = 0{,}40,\ \ x_А = 4{,}3,\ \ x_Б = 12{,}7$

___ $Э_А = 0{,}20,\ \ Э_Б = 0{,}30,\ \ x_А = 5{,}8,\ \ x_Б\ любое$

___ $Э_А = 0{,}17,\ \ Э_Б = 0{,}25,\ \ x_А = 4{,}3,\ \ x_Б\ любое$

3. Следующее уравнение парной регрессии:

$$y = 5 - 6x + \varepsilon$$

построено по 15 наблюдениям. При этом $r_{xy} = -0{,}7$. Доверительный интервал для коэффициента регрессии в этой модели имеет вид:

—(-11,11; -0,89) с вероятностью 0,99

—(-9,67;-2,33) с вероятностью 0,99

—(-9,01; -2,99) с вероятностью 0,95

—(-8,53; -2,32) с вероятностью 0,9

4. Уравнение регрессии потребления материалов *y* от объема производства *x*, построенное по 15 наблюдениям, имеет вид:

$$\underset{(4{,}0)}{y = 5 + 5x + \varepsilon}$$

В скобках – фактическое значение *t* – критерия. Коэффициент детерминации для этого уравнения равен:

—0,552

—0,575

—0,439

—0,648

5. По совокупности 15 предприятий торговли изучается зависимость между ценой *x* на товар А и прибылью *y* торгового предприятия. При оценке регрессионной модели были получены следующие результаты:

$\sum(y-\hat{y})^2=32000$, $\sum(y-\bar{y})^2=40000$. Тогда индекс корреляции, фактическое значение F - критерия и значимость уравнения регрессии следующие:

— $R=0{,}447,\ F_{факт.}=3{,}25;$ уравнение статистически не значимо на уровнях 0,01 и 0,05

— $R=0{,}64,\ F_{факт.}=6{,}15;$ уравнение статистически значимо только на уровне 0,1

— $R=0{,}830,\ F_{факт.}=2{,}78;$ уравнение статистически значимо только на уровнях 0,1 и 0,05

— $R=0{,}8,\ F_{факт.}=5{,}12;$ уравнение статистически значимо на всех уровнях

6. Изучалась зависимость вида $y=a\cdot x^b$. Для преобразованных в логарифмах переменных получены следующие данные:

$$\sum xy=4{,}2087,\quad \sum x=8{,}2370,\quad \sum x^2=9{,}2334,\quad \sum y=3{,}9310,\quad n=10.$$

Здесь параметр b равен:

—0,4

—0,7

—0,6

—0,5

7. Зависимость объема продаж y от расходов на рекламу x характеризуется по 12 предприятиям концерна следующим образом:

$y=10{,}6+0{,}6\cdot x,\quad \sigma_x=4{,}7,\quad \sigma_y=3{,}4.$

Определите коэффициент корреляции, регрессионную сумму квадратов отклонений, t-статистику коэффициента регрессии, F-статистику

—R_{xy}=0,83; $S^2_{регр}$=7,95; F=22,04,t_b=4,69

—R_{xy}=0,83; $S^2_{регр}$=5,35; F=12,t_b=3,9

—R_{xy}=0,43; $S^2_{регр}$=3,74; F=5,t_b=2,4

—R_{xy}=0,43; $S^2_{регр}$=3,48; F=7,t_b=2,5

8. Уравнение регрессии имеет вид: $ln\ y$ = 4,5 + 0,003x + $ln\ e$. При значении фактора, равном 85, коэффициент эластичности y по x составит:

—0,255

—0,003

—0,00066

—0,0536

—0,00063

9. Уравнение регрессии имеет вид: $ln\ y = 4{,}5 + 0{,}003\ ln\ x + ln\ e$. При значении фактора, равном 85, коэффициент эластичности y по x составит:

—0,003

—0,255

—0,00066

—0,0536

—0,00071

10. Уравнение регрессии имеет вид: $y = 4{,}5 + 0{,}003\ ln\ x + e$. При значении фактора, равном 85, коэффициент эластичности y по x составит:

—0,00066

—0,255

—0,003

—0,0536

—0,00063

11. Уравнение регрессии имеет вид: $y = 4{,}5 + 0{,}003x + e$. При значении фактора, равном 85, коэффициент эластичности y по x составит:

—0,0536

—0,255

—0,003

—0,00063

—0,0582

Решение типовых задач

Задача 1.Зависимость объема продаж (Y) от расходов на рекламу (X) характеризуется по 12 предприятиям концерна следующим образом:

$$y = 10{,}6 + 0{,}6 \cdot x$$
$$\sigma_x = 4{,}7$$
$$\sigma_y = 3{,}4$$

Задание: определите линейный коэффициент парной корреляции, регрессионную сумму квадратов отклонений, постройте таблицу дисперсионного анализа для оценки значимости уравнения в целом, определите F-статистику, t-статистику и доверительный интервал коэффициента регрессии.

Решение:

Для определения коэффициента корреляции применим формулу:

$$r_{yx} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{,}6 \cdot \frac{4{,}7}{3{,}4} = 0{,}829$$

Значение коэффициента корреляции свидетельствует о тесной линейной взаимосвязи между объемом продаж и расходами на рекламу.

Коэффициент детерминации составит:

$$R^2 = r_{yx}{}^2 = 0{,}829^2 = 0{,}687$$

Определим регрессионную сумму квадратов отклонений:

$$\sum(\hat{y}_x - \overline{y})^2 = R^2 \cdot \sum(y - \bar{y})^2 = R^2 \cdot \sigma^2{}_y \cdot (n-1) = 0{,}687 \cdot 3{,}4^2 \cdot (12-1) = 87{,}359$$

Составим таблицу дисперсионного анализа и определим F-статистику Фишера.

Дисперсионный анализ результатов регрессии

Источники вариации	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений	Дисперсия на одну степень свободы	F-статистика	
				факт.	табл., α=0,05
Регрессионная (объясненная)	1	87,359	87,359	21,949	4,96
Остаточная	10	39,801	3,9801		
Общая	11	127,16	11,56		

Поскольку $F_{факт} > F_{табл}$, то признается статистическая значимость, надежность уравнения регрессии.

Связь между F-статистикой Фишера, t-статистикой Стьюдента для коэффициента регрессии, t-статистикой Стьюдента для коэффициента корреляции выражается равенством:

$$t_r^{\ 2} = t_b^{\ 2} = F = 21{,}949$$

Значит, $t_b = \sqrt{21{,}949} = 4{,}685$. Табличное значение t-статистики для α=0,05, ν=10 составляет 2,2281. Поскольку $t_{факт} > t_{табл}$, то коэффициент регрессии *b* статистически значимо отличен от нуля.

Определим доверительный интервал для коэффициента регрессии b с вероятностью 95%: $b \pm t \cdot m_b$

Случайная ошибка коэффициента регрессии b определяется по формуле:

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2 / (n-2)}{\sum (x - \bar{x})^2}} = \frac{b}{t_b} = \frac{0{,}6}{4{,}685} = 0{,}128$$

Для расчета доверительного интервала определим предельную ошибку:

$$\Delta = t \cdot m_b = 2{,}2281 \cdot 0{,}128 = 0{,}285$$

95%-е границы доверительного интервала, в котором лежит истинное значение коэффициента регрессии, составят:

$$b - \Delta \le \beta \le b + \Delta$$
$$0{,}315 \le \beta \le 0{,}885.$$

В границы интервала ноль не попадает, следовательно, оцениваемый параметр отличен от нуля и сформировался под влиянием систематически действующего фактора x.

Задача 2. Исследуя спрос на продукцию фирмы, аналитический отдел собрал данные по 20 торговым точкам компании и представил их в виде:

$$\ln y = 6{,}8 - 0{,}6 \ln x + \varepsilon,$$
$$(2{,}7) \quad (-2{,}8)$$

где *y* – объем спроса,

x – цена единицы продукции.

В скобках приведены фактические значения t – критерия.

Задание: ранее предполагалось, что увеличение цены на 1% приводит к уменьшению спроса на 1,2%. Можно ли утверждать, что приведенные результаты подтверждают это предположение?

Решение:

Уравнение регрессии в прологарифмированном виде. Судя по форме записи, уравнение имеет степенной вид и записывается так:

$$\hat{y} = e^{6,8} \cdot x^{-0,6}$$

Надо проверить предположение о том, что эластичность спроса по цене равна –1,2. В степенной зависимости эластичность равна показателю степени b, поэтому оценка эластичности равна –0,6. Таким образом, задача сводится к проверке статистической гипотезы H_0: b=-1,2 при альтернативной H_1:b≠-1,2. Критическая область двусторонняя, поэтому проверка гипотезы может быть заменена построением доверительного интервала для b и, если проверяемое значение b=-1,2 попадает в него, то нуль-гипотеза не отклоняется; в противном случае принимается альтернативная гипотеза.

Доверительный интервал строится по формуле:

$$-0,6-m_b*t_{таб} < b < -0,6+m_b*t_{табл}.$$

Определим стандартную ошибку параметра b из формулы:

$$m_b = \frac{b}{t_b} = \frac{-0,6}{-2,8} = 0,2143$$

Для определения $t_{табл}$ зададим уровень значимости, равный 0,05, следовательно:$t_{табл}(\alpha;\ n\text{-}2) = t_{табл}(0,05;18) = 2,1$(используем таблицу критических точек распределения Стьюдента для двустороннего α=0,05).

Доверительный интервал равен:

$$-0,6-0,2143*2,1 < b < -0,6+0,2143*2,1$$

или -1,05 < b < -0,15.

Значение, равное –1,2, в интервал не попадает, следовательно, предположение о значении коэффициента эластичности на уровне значимости 0,05 следует отклонить. Однако, если задать значимость на уровне 0,01, то $t_{табл}$=2,88, и интервал будет таким: -1,217 < b < 0,017

Следовательно, на уровне значимости 0,01 первоначальное предположение не может быть отклонено, поскольку значение –1,2 попадает в доверительный интервал.

Можно проверить статистическую гипотезу напрямую, вычислив t–статистику для разницы между гипотетическими и вычисленным значениями b:

$$t_{b-bo} = \frac{b-b_0}{m_b} = \frac{-0{,}6-(-1{,}2)}{0{,}2143} = 2{,}8.$$

Сравним полученную статистику по абсолютной величине с критическим значением на заданном уровне значимости. На уровне α=0,05: $\left|t_{b-b_0}\right| = 2{,}8 > \left|t_{табл}\right| = 2{,}1;$

Нуль-гипотеза отклоняется, эластичность спроса по цене не может быть равна –1,2. На уровне α=0,01: $\left|t_{b-b_0}\right| = 2{,}8 \le \left|t_{табл}\right| = 2{,}88;$нуль-гипотеза не отклоняется, эластичность может быть равна –1,2.

Задача 3. Для двух видов продукции А и Б зависимости удельных постоянных расходов от объема выпускаемой продукции выглядят следующим образом:

$$\hat{y}_A = 15 + 8\ln x,$$

$$\hat{y}_Б = 25x^{0,3}.$$

Задание: сравнить эластичность затрат по каждому виду продукции при x=50 и определить объемы продукции обоих видов, при котором эластичности будут одинаковы.

Решение:

Регрессионная зависимость для продукции А является полулогарифмической, и для вычисления эластичности воспользуемся формулой:

$$Э_А = \frac{b}{a + b\ln x} = \frac{8}{15 + 8\ln 50} = 0{,}173.$$

Для продукции Б регрессионная зависимость является степенной, где коэффициент эластичности равен показателю степени при любых значениях независимой переменной, следовательно:$Э_Б$ = 0,3. Теперь определим точку, в которой эластичности по обоим видам продукции одинаковы. Для продукции Б подходит любой объем, т.к. эластичность постоянна, а для определения объема выпуска продукции Б составим и решим уравнение: $\frac{8}{15 + 8\ln x} = 0{,}3$; отсюда $X_А$ = 4,3 единиц.

Таким образом, при объеме производства продукции А, равном 4,3, эластичности удельных постоянных расходов обоих видов продукции по объему выпуска одинаковы и равны 0,3.

Задача 4. Пусть имеется уравнение парной регрессии:

$$y = 5 - 6x + \varepsilon,$$

построенное по 15 наблюдениям. При этом r=-0,7.

Задание: определить доверительный интервал, в который с вероятностью 0,99 попадает коэффициент регрессии.

Решение:

Для построения доверительного интервала необходимо знать стандартную ошибку m_b коэффициента регрессии. Однако она не задана, и нужно определить ее косвенным путем. Для этого воспользуемся тем, что в парной регрессии существует связь между t- и F-статистиками: $t_b = \sqrt{F}$, F-статистику определим из формулы : $F = \frac{(-0{,}7)^2}{1-(-0{,}7)^2} * (15-2) = 12{,}5$; $t_b = \sqrt{12{,}5} = -3{,}53$(минус указываем ,так как знак оцененного коэффициента b отрицательный).

$$m_b = \frac{b}{t_b} = \frac{-6}{-3,53} \approx 1,7;$$

Доверительный интервал имеет вид ($t_{табл}(0,01;13)=3,01$):

-6 – 1,7*3,01 < b < -6 + 1,7*3,01 или -11,11 < b < -0,89.

Задача 5. Уравнение регрессии потребления материалов от объема производства, построенное по 15 наблюдениям, имеет вид:$y = 5 + 5x + \varepsilon$, $t_b=4,0$.

Задание: определить коэффициент детерминации для этого уравнения.

Решение:

Зная t-критерий для коэффициента регрессии, вычислим F-критерий для данного уравнения: $F = t_b^2 = 4^2 = 16$. Далее воспользуемся уравнением, из которого определим коэффициент детерминации при n=15:

$$r^2 = \frac{F}{n-2+F} = \frac{16}{15-2+16} = 0,552.$$

Задача 6. По совокупности 18 предприятий торговли изучается зависимость между ценой x на некоторый товар и прибылью y торгового предприятия. При оценке регрессионной модели были получены следующие результаты:

$$\Sigma(y-\hat{y})^2 = 23; \Sigma(y-\bar{y})^2 = 35.$$

Задание: Определить индекс корреляции и фактическое значение F-критерия, а также статистическую значимость уравнения регрессии. Построить таблицу дисперсионного анализа.

Решение:

В условиях задачи n=18; остаточная СКО равна 23, а общая СКО – 35. Для расчета индекса корреляции воспользуемся выражением:

$$R = \sqrt{1-\frac{23}{35}} = 0{,}586;\ R^2 = 0{,}343.$$

Фактическое значение F-критерия рассчитаем с помощью выражения:

$$F = \frac{0{,}343}{1-0{,}343} * (18-2) = 8{,}35.$$

При проверке статистической значимости уравнения в целом воспользуемся F-критерием и сравним его с критическим значением, задавшись уровнем значимости 0,05. Табличное (критическое) значение при этом равно: $F_{табл}(0{,}05;1;18\text{-}2) = 4{,}49$.Поскольку фактическое значение, равное 8,35, больше критического, нуль-гипотезу о статистической незначимости уравнения регрессии следует отклонить, и уравнение на уровне α=0,05 является значимым; статистическая связь между y и x считается доказанной. Однако, если задать α=0,01, то:Fкр = Fтабл(0,01;1;16)=8,53, и в этом случае нуль-гипотезу отклонить нельзя, на уровне α=0,01 уравнение не значимо.

Для построения таблицы дисперсионного анализа определим из балансового уравнения () величину факторной

СКО: $\sum(\hat{y}-\bar{y})^2 = \sum(y-\bar{y})^2 - \sum(y-\hat{y})^2 = 35-23 = 12.$

Поскольку мы имеем дело с парной регрессионной зависимостью, число степеней свободы факторной СКО принимаем равным единице. С учетом этих условий таблица дисперсионного анализа выглядит следующим образом:

Вариация y	СКО	Число степеней свободы	Дисперсия на 1 степень свободы	$F_{фактич} = \frac{D_{фактич}}{D_{ост}}$
Общая	35	17	-	-
Факторная	12	1	12	8,35
Остаточная	23	16	1,4375	

Задача 7. Зависимость среднемесячной производительности труда от возраста рабочих характеризуется моделью: $y = a + bx + cx^2$.Ее использование привело к результатам, представленным в таблице:

№ п/п	Производительность труда рабочих, тыс.руб. (у)		№ п/п	Производительность труда рабочих, тыс. руб. (у)	
	фактическая	расчетная		фактическая	расчетная
1	16	15	6	18	16
2	13	14	7	11	13
3	15	14	8	12	12
4	12	10	9	14	14
5	14	16	10	15	17

Задание: оценить качество модели, определив ошибку аппроксимации, индекс корреляции.

Решение:

Средняя ошибка аппроксимации рассчитывается по формуле:

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\Sigma\left|\frac{y-\hat{y}}{y}\right| * 100\%;$$

и характеризует среднее отклонение расчетных значений от фактических. Это значение считается приемлемым, если оно не превышает 8-10%.

Для приведенных в таблице данных имеем:

$$\overline{A} = \frac{1}{10}\left[\left|\frac{16-15}{16}\right| + \left|\frac{13-14}{13}\right| + \ldots + \left|\frac{15-17}{15}\right|\right] * 100\% = 9{,}42\%,$$

что оказывается в допустимых границах и говорит о приемлемой точности аппроксимации регрессионной модели.

Индекс корреляции рассчитаем по формуле , предварительно определив общую и остаточную СКО: $\Sigma(y-\bar{y})^2 = \Sigma y^2 - n\bar{y}^2$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\Sigma y = 14$,

$$\Sigma(y-\bar{y})^2 = 16^2 + 13^2 + \ldots + 15^2 - 10*14^2 = 2000 - 1960 = 40,$$

$$\Sigma(y-\hat{y})^2 = (16-15)^2 + (13-14)^2 + \ldots + (15-17)^2 = 23,$$

$$R = \sqrt{1 - \frac{23}{40}} = 0{,}652, R^2 = 0{,}425.$$

Задача 8. Для следующих уравнений регрессии:

а) $y = 3{,}7 + 0{,}0024x + e$

б) $y = 3{,}7 + 0{,}0024\ln x + e$

в) $\ln y = 3{,}7 + 0{,}0024\ln x + \ln e$

г) $\ln y = 3{,}7 + 0{,}0024x + \ln e$

Задание: определить коэффициенты эластичности при значении фактора, равном 85.

Решение:

а) Уравнение регрессии является линейным, поэтому коэффициент эластичности равен $Э = y'\frac{x}{y} = \frac{bx}{a+bx} = \frac{0{,}0024 \cdot 85}{3{,}7 + 0{,}0024 \cdot 85} = 0{,}052$.

б) Здесь имеем дело с полулогарифмической зависимостью: $Э = y'\frac{x}{y} = \frac{b}{a + b\ln x} = \frac{0{,}0024}{3{,}7 + 0{,}0024 \cdot \ln 85} = 0{,}000647$.

в) Это преобразованная (путем логарифмирования) степенная зависимость; её коэффициент эластичности постоянен и равен показателю степени, т.е. 0,0024.

г) В данном случае зависимость показательная (или экспоненциальная), в преобразованном виде логарифмируется только зависимая переменная. В любой из трех форм записи экспоненциальной регрессии коэффициент эластичности равен произведению коэффициента при факторе на значение самого фактора, т.е. $Э = y'\dfrac{x}{y} = 0{,}0024 \cdot 85 = 0{,}204$.

Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 4, 5.
2. Валентинов В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: Практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 2, 3. (http://znanium.com)
3. Эконометрика: [Электронный ресурс] Учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 2,3 (http://znanium.com)
4. Практикум по эконометрике: учебное пособие / Под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. – Раздел 1.
5. Уткин В. Б. Эконометрика [Электронный ресурс]: Учебник / В. Б. Уткин; Под ред. проф. В. Б. Уткина. - 2-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. - 564 с.: Гл. 9 (http://znanium.com)
6. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2005. Гл. 2.

Тема 6. Оценка качества модели множественной регрессии

Задачи для самостоятельного решения

1. Уравнение регрессии, построенное по 15 наблюдениям, имеет вид:

$$\begin{array}{lllll} y = & 12{,}4 - & 9{,}6x_1 + & ?\,x_2 - & 6{,}3x_3 \\ m_в & (\ ) & (3{,}2) & (0{,}12) & (\ ) \\ t_в & (1{,}55) & (\ ) & (4{,}0) & (-3{,}15) \end{array}$$

Пропущенные значения, а также доверительный интервал для b_3 с вероятностью 0,99 равны:

___ $m_a = 8;\quad t_{в_1} = -3{,}0;\quad m_{в_3} = 2{,}0;\quad (-12{,}51; -0{,}09)$

___ $m_a = 8;\quad t_{в_1} = -3{,}0;\quad b_2 = 0{,}48;\quad (-10{,}7; -1{,}9)$

__ $m_a = 8; \quad b_2 = 0{,}48; \quad m_{в_3} = 2{,}0; \quad (1{,}9;10{,}7)$

__ $t_{в_1} = -3{,}0; \quad b_2 = -0{,}48; \quad m_{в_3} = 2{,}0; \quad (-9{,}89;-2{,}71)$

2. Уравнение регрессии в стандартизированном виде имеет вид:

$\hat{t}_y = 0{,}37t_{x_1} - 0{,}52t_{x_2} + 0{,}43t_{x_3}$, $V_y = 18\%; \quad V_{x_1} = 25\%; \quad V_{x_2} = 38\%; \quad V_{x_3} = 30\%.$

Частные коэффициенты эластичности равны:

$0{,}266; \quad -0{,}246; \quad 0{,}258$

$0{,}266; \quad -0{,}258; \quad 0{,}246$

$0{,}258; \quad -0{,}266; \quad 0{,}263$

$0{,}258; \quad -0{,}246; \quad 0{,}266$

3. По 18 наблюдениям получены следующие данные:

$\hat{y} = a + 0{,}36x_1 - 0{,}255x_2 + 2{,}86x_3$

$R^2 = 0{,}65$; $\bar{y} = 70$; $\bar{x}_1 = 110$; $\bar{x}_2 = 150$; $\bar{x}_3 = 85$

Значения скорректированного коэффициента детерминации, частных коэффициентов эластичности и параметра a равны:

__ $0{,}575; \quad 0{,}57; \quad -0{,}55; \quad 3{,}47; \quad -174{,}45$

__ $0{,}575; \quad 0{,}55; \quad -0{,}57; \quad 3{,}47; \quad 174{,}45$

__ $0{,}603; \quad 0{,}57; \quad -0{,}55; \quad 3{,}47; \quad -174{,}45$

__ $0{,}603; \quad 0{,}55; \quad -0{,}57; \quad 2{,}17; \quad 278{,}7$

4. Уравнение регрессии в стандартизованном виде имеет вид:

$\hat{t}_y = -0{,}82t_{x_1} + 0{,}65t_{x_2} - 0{,}43t_{x3,}$ $V_y = 32\%; V_{x1} = 38\%; V_{x2} = 43\%; V_{x3} = 35\%$

Как влияют факторы на результат и каковы значения частных коэффициентов эластичности?

—Наибольшее влияние на результат оказывает фактор x_1, наименьшее x_3;

$\bar{Э}_1 = -0{,}691; \ \bar{Э}_2 = 0{,}484; \ \bar{Э}_3 = -0{,}393$

—Наибольшее влияние на результат оказывает фактор $x_{3,}$ наименьшее - x_2;

$\bar{Э}_1 = -0{,}691; \ \bar{Э}_2 = 0{,}484; \ \bar{Э}_3 = 0{,}393$

—Наибольшее влияние на результат оказывает фактор $x_{2,}$ наименьшее - x_1;

$\overline{Э}_1 = 0,484; \ \overline{Э}_2 = -0,691; \ \overline{Э}_3 = -0,393$

—Наибольшее влияние на результат оказывает фактор $x_{1,}$ наименьшее - x_3;

$\overline{Э}_1 = 0,393; \ \overline{Э}_2 = 0,484; \ \overline{Э}_3 = -0,691$

5. Имеются следующие данные:

$\bar{y} = 15,0; \ \bar{x}_1 = 6,5; \bar{x}_2 = 12,0; \ \sigma_y = 4,0;$

$\sigma_{x1} = 2,5; \ \sigma_{x_2} = 3,5; \ r_{yx1} = 0,63; \ r_{yx2} = 0,78; \ r_{x1x2} = 0,52.$

Уравнения регрессии y на x_1 и x_2 в стандартизованном и натуральном масштабах имеют вид:

___$\hat{t}_y = 0,308\hat{t}_{x1} + 0,620\hat{t}_{x2}; \ \hat{y} = 3,294 + 0,492x_1 + 0,709x_2$

___$\hat{t}_y = 0,620\hat{t}_{x1} + 0,308\hat{t}_{x2}; \ \hat{y} = 3,294 + 0,709x_1 + 0,492x_2$

___$\hat{t}_y = 0,308\hat{t}_{x1} + 0,620\hat{t}_{x2}; \ \hat{y} = -3,294 + 0,709x_1 + 0,492x_2$

___$\hat{t}_y = 0,620\hat{t}_{x1} + 0,308\hat{t}_{x2}; \ \hat{y} = -3,294 + 0,492x_1 + 0,709x_2$

6. При построении регрессионной зависимости некоторого результативного признака на 8 факторов по 25 измерениям коэффициент детерминации составил 0,736. После исключения 3 факторов коэффициент детерминации уменьшился до 0,584. Обоснованно ли было принятое решение на уровнях значимости 0,1, 0,05 и 0,01:

—Да, только на уровнях 0,05 и 0,01

—Да, на всех уровнях значимости

—Нет, на всех уровнях значимости

—Да, только на уровне 0,01

—Да, только на уровнях 0,1 и 0,05

7. По данным 150 наблюдений о доходе индивидуума *Y*, уровне его образования X_1, и возрасте X_2 определите, можно ли считать на уровне значимости 5% линейную регрессионную модель *Y* на X_1 и X_2 гетероскедастичной, если суммы квадратов остатков после упорядочения данных по уровню образования

следующие: RSS_1 (для 50 значений с наименьшим уровнем образования) = 894,1; RSS_2 (для 50 значений с наибольшим уровнем образования) = 3918,2:
—гипотеза об отсутствии гетероскедастичности отвергается
—гипотеза об отсутствии гетероскедастичности принимается
—на основе имеющихся данных такую гипотезу нельзя проверить

8. При построении регрессионной зависимости $y = f\left(x_1 x_2, \dots x_9\right)$ по 40 измерениям коэффициент детерминации составил 0,618. После исключения факторов x_4 и x_5 коэффициент детерминации уменьшился до 0,547. Обоснованно ли было принятое решение на уровнях значимости 0,1; 0,05 и 0,01?
—да, только на уровнях 0,01 и 0,05
—да, только на уровне 0,1
—нет, на всех уровнях значимости
—да, только на уровне 0,01
—да, на всех уровнях значимости
—да, только на уровнях 0,1 и 0,05

9. При анализе данных на гетероскедастичность вся выборка была после упорядочения разбита на три подвыборки. Затем по результатам парных регрессий остаточная СКО в первой подвыборке составила 6450, в третьей – 3480. Подтверждается ли наличие гетероскедастичности на уровнях 0,1; 0,05 и 0,01, если объем данных в каждой подвыборке равен 25?
—да, только на уровне 0,1
—да, только на уровнях 0,1 и 0,05
—да, на всех уровнях
—нет, на всех уровнях
—да, только на уровнях 0,05 и 0,01
—да, только на уровне 0,01

Решение типовых задач

Задача 1. Уравнение регрессии, построенное по 17 наблюдениям, имеет вид:

$$\begin{array}{lllll} y = & ?+ & 0{,}36x_1 - & 9{,}6x_2 + & ?\,x_3 \\ m_{b_j} & (3) & (\ ) & (3{,}0) & (5{,}0) \\ t_{b_j} & (1{,}4) & (1{,}5) & (\ ) & (2{,}4) \end{array}$$

Задание: расставить пропущенные значения, а также построить доверительный интервал для b_2 с вероятностью 0,99.

Решение: Пропущенные значения определяем с помощью формулы:

$$\hat{a} = t_a \cdot m_a = 1{,}4 \cdot 3{,}0 = 4{,}2; \quad m_{b_1} = \frac{\hat{b}_1}{t_{b_1}} = \frac{0{,}36}{1{,}5} = 0{,}24; \qquad t_{b_2} = \frac{\hat{b}_2}{m_{b_2}} = \frac{-9{,}6}{3{,}0} = -3{,}2;$$

$$\hat{b}_3 = t_{b_3} \cdot m_{b_3} = 2{,}4 \cdot 5{,}0 = 12{,}0.$$

Таким образом, уравнение регрессии со статистическими характеристиками выглядит так:

$$\begin{array}{lllll} y = & 4{,}2 + & 0{,}36x_1 - & 9{,}6x_2 + & 12x_3 \\ m_{b_j} & (3) & (0{,}24) & (3{,}0) & (5{,}0) \\ t_{b_j} & (1{,}4) & (1{,}5) & (-3{,}2) & (2{,}4) \end{array}$$

Доверительный интервал для b_2 строим по формуле (24). Здесь уровень значимости равен 0,01, а число степеней свободы равно $n - p - 1 = 17 - 3 - 1 = 13$, где $n = 17$ – объём выборки, $p = 3$ – число факторов в уравнении регрессии. Отсюда $t\ (0{,}01;13) = 3{,}0123; \quad m_{b_2} = 3{,}0; \quad \hat{b}_2 = -9{,}6;$

$-9{,}6 - 3{,}0123 \cdot 3{,}0 < \beta_2' < -9{,}6 + 3{,}0123 \cdot 3{,}0$, или $\beta_2' \in (-18{,}64; -0{,}56)$. Этот доверительный интервал накрывает истинное значение параметра β_2' с вероятностью, равной 0,99.

Задача 2. Уравнение регрессии в стандартизованных переменных выглядит так: $\hat{t}_y = -0{,}82t_{x_1} + 0{,}65t_{x_2} - 0{,}43t_{x3}$.

При этом вариации всех переменных равны следующим величинам:

$$V_y = 32\%; V_{x1} = 38\%; V_{x2} = 43\%; V_{x3} = 35\%.$$

Задание: сравнить факторы по степени влияния на результирующий признак и определить значения частных коэффициентов эластичности.

Решение: Стандартизованные уравнения регрессии позволяют сравнивать факторы по силе их влияния на результат. При этом, чем больше по абсолютной величине коэффициент при стандартизованной переменной, тем сильнее данный фактор влияет на результирующий признак. В рассматриваемом уравнении самое сильное воздействие на результат оказывает фактор x_1, имеющий коэффициент – 0,82, самое слабое – фактор x_3 с коэффициентом, равным – 0,43.

В линейной модели множественной регрессии обобщающий (средний) коэффициент частной эластичности определяется выражением, в которое входят средние значения переменных и коэффициент при соответствующем факторе уравнения регрессии натурального масштаба. В условиях задачи эти величины не заданы. Поэтому воспользуемся выражениями для вариации по переменным: $V_y = \frac{\sigma_y}{|\bar{y}|} \cdot 100\%;\quad V_{x_j} = \frac{\sigma_y}{|\bar{x}_j|} \cdot 100\%.$

Коэффициенты b_j связаны со стандартизованными коэффициентами β_j соотношением (15), которое подставим в формулу:

$$\bar{Y}_j = b_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} = \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} \cdot \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} = \beta_j \frac{V_y}{V_{x_j}}.$$

При этом знак коэффициента эластичности будет совпадать со знаком β_j: $\bar{Y}_1 = -0{,}82 \cdot \frac{32}{38} = -0{,}691;\quad \bar{Y}_2 = 0{,}65 \cdot \frac{32}{43} = 0{,}484;\quad \bar{Y}_3 = -0{,}43 \cdot \frac{32}{35} = -0{,}393.$

Задача 3. По 32 наблюдениям получены следующие данные:

$$\hat{y} = a + 1{,}864x_1 - 2{,}56x_2 + 2{,}86x_3;\quad R^2 = 0{,}58;$$
$$\bar{y} = 110; \bar{x}_1 = 80; \bar{x}_2 = 140; \bar{x}_3 = 130.$$

Задание: определить значения скорректированного коэффициента детерминации, частных коэффициентов эластичности и параметра *a*.

Решение: Значение скорректированного коэффициента детерминации определим по одному из равенств (27):

$$\overline{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-p-1} = 1 - \left(1 - 0{,}58\right)\frac{32-1}{32-3-1} = 0{,}535.$$

Частные коэффициенты эластичности (средние по совокупности) вычисляем по формулам (19):

$$\overline{Э}_1 = 1{,}864 \cdot \frac{80}{110} = 1{,}356; \quad \overline{Э}_2 = -2{,}56 \cdot \frac{140}{110} = -3{,}258; \quad \overline{Э}_3 = 2{,}86 \cdot \frac{130}{110} = 3{,}38.$$

Поскольку линейное уравнение множественной регрессии выполняется при подстановке в него средних значений всех переменных, определяем параметр a (уравнение (17)):

$$a = 110 - 1{,}864 \cdot 80 + 2{,}56 \cdot 140 - 2{,}86 \cdot 130 = -52{,}52.$$

Задача 4. По некоторым переменным имеются следующие статистические данные: $\bar{y} = 15{,}0$; $\bar{x}_1 = 6{,}5$; $\bar{x}_2 = 12{,}0$; $\sigma_y = 4{,}0$; $\sigma_{x_1} = 2{,}5$; $\sigma_{x_2} = 3{,}5$; $r_{yx_1} = 0{,}63$; $r_{yx_2} = 0{,}78$; $r_{x_1x_2} = 0{,}52$.

Задание: построить уравнение регрессии в стандартизованном и натуральном масштабах.

Решение: Поскольку изначально известны коэффициенты парной корреляции между переменными, начать следует с построения уравнения регрессии в стандартизованном масштабе. Для этого надо решить систему нормальных уравнений (14), которая в случае двух факторов имеет вид:

$$\begin{cases} \beta_1 + r_{x_1x_2}\beta_2 = r_{yx_1}, \\ r_{x_1x_2}\beta_1 + \beta_2 = r_{yx_2}, \end{cases}$$

или, после подстановки исходных данных:

$$\begin{cases} \beta_1 + 0{,}52\beta_2 = 0{,}63, \\ 0{,}52\beta_1 + \beta_2 = 0{,}78. \end{cases}$$

Решаем эту систему любым способом, получаем: $\beta_1 = 0{,}3076$, $\beta_2 = 0{,}62$.

Запишем уравнение регрессии в стандартизованном масштабе:

$$\hat{t}_y = 0{,}3076 t_{x_1} + 0{,}62 t_{x_2}.$$

Теперь перейдем к уравнению регрессии в натуральном масштабе, для чего используем формулы:

$$b_1 = 0{,}3076 \cdot \frac{4{,}0}{2{,}5} = 0{,}4922; \quad b_2 = 0{,}62 \cdot \frac{4{,}0}{3{,}5} = 0{,}7086;$$
$$a = 15 - 0{,}4922 \cdot 6{,}5 - 0{,}7086 \cdot 12 = 3{,}298.$$

Уравнение регрессии в натуральном масштабе имеет вид:

$$\hat{y} = 3{,}298 + 0{,}4922x_1 + 0{,}7086x_2.$$

Задача 5. При построении линейной множественной регрессии $y = f(x_1, \ldots, x_{10})$ по 48 измерениям коэффициент детерминации составил 0,578. После исключения факторов x_3, x_7 и x_8 коэффициент детерминации уменьшился до 0,495.

Задание: Обоснованно ли было принятое решение об изменении состава влияющих переменных на уровнях значимости 0,1, 0,05 и0,01?

Решение: Пусть R_1^2 - коэффициент детерминации уравнения регрессии при первоначальном наборе факторов, R_2^2 - коэффициент детерминации после исключения трех факторов. Выдвигаем гипотезы:

$$\mathrm{H}_0 : R_1^2 - R_2^2 = 0; \ \mathrm{H}_1 : R_1^2 - R_2^2 > 0$$

Основная гипотеза предполагает, что уменьшение величины R^2 было несущественным, и решение об исключении группы факторов было правильным. Альтернативная гипотеза говорит о правильности принятого решения об исключении.

Для проверки нуль – гипотезы используем следующую статистику:

$F = \dfrac{R_1^2 - R_2^2}{1 - R_1^2} \cdot \dfrac{n - p - 1}{k}$,где n = 48, p = 10 – первоначальное количество факторов, k = 3 – количество исключаемых факторов. Тогда $F_{набл} = \dfrac{0{,}578 - 0{,}495}{1 - 0{,}578} \cdot \dfrac{48 - 10 - 1}{3} = 2{,}426$

Сравним полученное значение с критическим $F(\alpha; 3; 39)$ на уровнях 0,1; 0,05 и 0,01:

$F(0{,}1; 3; 37) = 2{,}238;$

$F(0{,}05; 3; 37) = 2{,}86;$

$F(0{,}01; 3; 37) = 4{,}36$.

На уровне α = 0,1 $F_{набл} > F_{кр}$, нуль – гипотеза отвергается, исключение данной группы факторов не оправдано, на уровнях 0,05 0,01 нуль – гипотеза не может быть отвергнута, и исключение факторов можно считать оправданным.

Задача 6. По совокупности 30 предприятий концерна изучается зависимость прибыли y (млн. руб.) от выработки продукции на одного работника x_1 (ед.) и индекса цен на продукцию x_2 (%). Данные приведены в таблице:

Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение	Линейный коэффициент парной корреляции
y	250	38	ryx1=0,68
x1	54	12	ryx2=0,63
x2	112	21	rx1x2=0,42

Задание:

1. Постройте уравнение множественной регрессии в стандартизованной и натуральной форме.
2. Определите показатели частной и множественной корреляции.
3. Найдите частные коэффициенты эластичности и сравните их с β-коэффициентами.

Решение:

1. Линейное уравнение множественной регрессии y от x_1 и x_2 имеет вид: $y=a+b_1*x_1+b_2*x_2+e$. Для расчета его параметров применим метод стандартизации переменных и построим искомое уравнение в стандартизованном масштабе: $t_y=\beta_1*t_{x1}+\beta_2*t_{x2}$.

Расчет β-коэффициентов выполним по формулам:

$$\beta_1 = \frac{r_{yx1} - r_{yx2}\cdot r_{x1x2}}{1 - r^2_{x1x2}} = \frac{0{,}68 - 0{,}63\cdot 0{,}42}{1 - 0{,}42^2} = \frac{0{,}4154}{0{,}8236} = 0{,}5044.$$

$$\beta_2 = \frac{r_{yx2} - r_{yx1}\cdot r_{x1x2}}{1 - r^2_{x1x2}} = \frac{0{,}63 - 0{,}68\cdot 0{,}42}{1 - 0{,}42^2} = \frac{0{,}3444}{0{,}8236} = 0{,}4182.$$

Получим уравнение $t_y = 0{,}5044 t_{x1} + 0{,}4182 t_{x2}$.

Для построения уравнения в натуральной форме рассчитаем b_1 и b_2, используя формулы для перехода от βi к bi:

$$\beta_i = b_i \cdot \frac{\sigma_{xi}}{\sigma_y}; b_i = \beta_i \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_{xi}}$$

$$b_1 = \frac{0{,}5044 \cdot 38}{12} = 1{,}5973; b_2 = \frac{0{,}4182 \cdot 38}{21} = 0{,}7567.$$

Значение *a* определим из соотношения:

$$a = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x}_1 - b_2 \cdot \bar{x}_2 = 250 - 1{,}5973 \cdot 54 - 0{,}7567 \cdot 112 = 250 - 86{,}2542 - 84{,}7504 = 78{,}9954.$$

Получим уравнение: $y=79{,}00+1{,}60*x_1+0{,}76*x_2+e$.

2. Линейные коэффициенты частной корреляции рассчитываются по рекуррентной формуле:

$$r_{yx1\cdot x2} = \frac{r_{yx1} - r_{yx2} \cdot r_{x1x2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx2})(1-r^2_{x1x2})}} = \frac{0{,}68 - 0{,}63 \cdot 0{,}42}{\sqrt{(1-0{,}63^2)(1-0{,}42^2)}} = \frac{0{,}4154}{\sqrt{0{,}4967}} = 0{,}5894;$$

$$r_{yx2\cdot x1} = \frac{r_{yx2} - r_{yx1} \cdot r_{x1x2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx1})(1-r^2_{x1x2})}} = \frac{0{,}63 - 0{,}68 \cdot 0{,}42}{\sqrt{(1-0{,}68^2)(1-0{,}42^2)}} = \frac{0{,}3444}{\sqrt{0{,}4428}} = 0{,}5176;$$

$$r_{x1x2\cdot y} = \frac{r_{x1x2} - r_{yx1} \cdot r_{yx2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx1})(1-r^2_{yx2})}} = \frac{0{,}42 - 0{,}68 \cdot 0{,}63}{\sqrt{(1-0{,}68^2)(1-0{,}63^2)}} = \frac{-0{,}0084}{\sqrt{0{,}3242}} = -0{,}0148.$$

Если сравнить значения коэффициентов парной и частной корреляции, то приходим к выводу, что из-за умеренной межфакторной связи (r_{x1x2}=0,42) коэффициенты парной корреляции оказались завышены.

Расчет линейного коэффициента множественной корреляции выполним по формуле:

$$R_{yx1x2} = \sqrt{r_{yx1} \cdot \beta_1 + r_{yx2} \cdot \beta_2} = \sqrt{0{,}68 \cdot 0{,}5044 + 0{,}63 \cdot 0{,}4182} = \sqrt{0{,}6065} = 0{,}7788.$$

Зависимость *y* от x_1 и x_2 характеризуется как тесная, в которой 61% вариации прибыли определяются вариацией выработки продукции и индекса цен на продукцию. Прочие факторы, не включенные в модель, составляют соответственно 39% от общей вариации *y*.

Общий F-критерий проверяет гипотезу о статистической значимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи:

$$F = \frac{R^2_{yx1x2}}{1-R^2_{yx1x2}} : \frac{m}{n-m-1} = \frac{0{,}6065}{1-0{,}6065} \cdot \frac{27}{2} = 20{,}82.$$

$$F_{\alpha,v1,v2} = 3{,}35.$$

Сравнивая 20,82>3,35, с вероятностью 1-α=0,95 делаем заключение о статистической значимости уравнения в целом и показателя тесноты связи R_{yx1x2}, которые сформировались под неслучайным воздействием факторов x_1 и x_2.

3. Для характеристики относительной силы влияния x_1 и x_2 на y рассчитаем частные коэффициенты эластичности.

$$Э_{yxj} = b_j \cdot \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}};$$

$$Э_{yx1} = \frac{1,5973 \cdot 54}{250} = 0,3450\%$$

$$Э_{yx2} = \frac{0,7567 \cdot 112}{250} = 0,3390\%.$$

С увеличением выработки продукции одним работником x_1 на 1% от ее среднего уровня прибыль y возрастает на 0, 35% от своего среднего уровня; при повышении индекса цен x_2 на 1% прибыль возрастает на 0,34% от своего среднего уровня. Очевидно, что сила влияния выработки на размер прибыли немного выше, чем индекса цен. К аналогичным выводам о силе влияния факторов приходим при сравнении модулей значений β_1 и β_2.

Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 6.

2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: Практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 5. (http://znanium.com)

3. Эконометрика: [Электронный ресурс] Учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 4. (http://znanium.com)

4. Практикум по эконометрике : учебное пособие / Под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. - Раздел 2.

5. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2005. –Гл. 3.

Тема 15. Модели одномерных временных рядов

Задачи для самостоятельного решения

1. На основе помесячных данных за последние 4 года была построена аддитивная модель временного потребления тепла. Скорректированные значения сезонной компоненты приведены в таблице:

Таблица 4

Помесячные значения сезонных компонент

Январь	+ 30	май	- 20	сентябрь	- 10
февраль	+ 25	июнь	- 34	октябрь	?
март	+ 15	июль	- 42	ноябрь	+22
апрель	- 2	август	- 18	декабрь	+27

Уравнение тренда выглядит так:

$T = 350 + 1{,}3t$

Значение сезонной компоненты за октябрь, а также точечный прогноз потребления тепла на 1 квартал следующего года равны:

—7; 1315

—7; 1315

—7; 1245

—10; 1245

2. На основе поквартальных данных построена мультипликативная модель некоторого временного ряда. Скорректированные значения сезонной компоненты равны:

I квартал – 1,6

II квартал – 0,8

III квартал – 0,7

IV квартал - ?

Уравнение тренда имеет вид: $T = 11{,}6 - 0{,}1t \quad (t = 1,...,48)$

Значение сезонной компоненты за IV квартал и прогноз на II и III кварталы следующего года равны:

—0,90; 5,28 и 4,55

—1,00; 10,72 и 5,28

—0,90; 4,55 и 5,28

—0,80; 5,28 и 10,72

3. На основе квартальных данных объемов продаж 1995 – 2000гг. была построена аддитивная модель временного ряда. Трендовая компонента имеет вид $T = 260 + 3t \quad (t = 1,2,...)$. Показатели за 2000 г. приведены в таблице:

Таблица 5

Компоненты аддитивной модели в 2000 г.

Квартал	Фактический объем продаж	Компонента аддитивной модели		
		трендовая	сезонная	случайная
1	270	T_1	S_1	-9
2	y_2	T_2	10	+4
3	310	T_3	40	E_3
4	y_4	T_4	S_4	E_4
ИТОГО:	2000			

Отдельные недостающие данные в таблице равны:

__$y_4 = 1080$; $S_1 = -44$; $E_3 = -59$

__$y_2 = 1011$; $T_3 = 1124$; $E_4 = -59$

__$T_1 = 1009$; $S_4 = 22$; $E_3 = -59$

__$T_2 = 1112$; $S_4 = 22$; $y_4 = 1080$

1. Дана таблица:

Таблица 6

Динамика объема предложения за 5 лет.

Момент времени	*t-3*	*t-2*	*t-1*	*t*	*t+1*
S^*	70				
S	85	100	120	135	—

где $S^*, S -$ ожидаемый и действительный объемы предложения. В соответствии с моделью адаптивных ожиданий, где $\lambda = 0{,}45$ значения S^* соответственно равны:

—76,75; 87,21; 101,97; 116,83

—78,25; 90,21; 105,25; 120,14

—76,75; 87,21; 105,25;120,14

—78,25; 90,21; 106,60; 122,22

5. На основе квартальных данных с 2000 г. по 2004 г. получено уравнение $y = -0{,}67 + 0{,}0098\ x_{t1} - 5{,}62\ x_{t2} + 0{,}044\ x_{t3}$ ESS =110,3, RSS = 21,4 (ESS – объясненная сумма квадратов, RSS – остаточная сумма квадратов). В уравнение были добавлены три фиктивные переменные, соответствующие трем первым кварталам года, величина ESS увеличилась до 120,2. Проверьте гипотезу о сезонности (α =0,05):

—гипотезу об отсутствии сезонности отвергаем, т.к. F=3,76 (>Fкр)

—гипотезу об отсутствии сезонности отвергаем, т.к. F=4,2 (>Fкр)

—гипотезу о наличии сезонности отвергаем, т.к. F=3,76 (<Fкр)

—гипотезу о наличии сезонности отвергаем, т.к. F=4,2 (<Fкр)

6. Модель зависимости объемов продаж компании от расходов на рекламу имеет вид $y = -0{,}67 + 4{,}5\ x_t + 3\ x_{t-1} + 1{,}5\ x_{t-2} + 0{,}5\ x_{t-3}$

Краткосрочный, долгосрочный мультипликатор и средний лаг равны:

—краткосрочный 0,5 , долгосрочный 9,5, средний лаг 2,3

—краткосрочный 4,5 , долгосрочный 9,5, средний лаг 0,791

—краткосрочный -0,67 , долгосрочный 9,5, средний лаг 0,7

7. На основе квартальных данных получено уравнение множественной регрессии и ESS = 120,32, RSS = 41,4. (ESS – объясненная сумма квадратов, RSS – остаточная сумма квадратов). Для этой же модели были раздельно проведены регрессии на основе данных:

1-й квартал 1991 г. - 1-й квартал 1995 г. и 2-й квартал 1995 г. – 4 квартал 1996г., соответственно получены следующие значения сумм квадратов остатков RSS_1 =

22,25, RSS_2=12,32. Гипотеза о том, что произошли структурные изменения на уровне α =0,05:

—подтвердилась, т.к. F = 1,8 , что больше $F_{кр}$

—не подтвердилась, т.к. F = 0,8 , что меньше $F_{кр}$

—подтвердилась, т.к F = 3,54, что больше $F_{кр}$

8. На основе квартальных данных с 1991 года по 1996 год с помощью МНК получено следующее уравнение:

$$Y_t = \underset{(2,14)}{1,12} - \underset{(0,0034)}{0,0098}\, x_{t1} - \underset{(3,42)}{5,62}\, x_{t2} + \underset{(0,009)}{0,044}\, x_{t3}$$

В скобках указаны стандартные ошибки коэффициентов регрессии, ESS (объясненная сумма квадратов) = 116,32; RSS (остаточная сумма квадратов) = 31,43

Проверьте значимость коэффициентов и модели в целом при уровне значимости α = 0,05:

—все коэффициенты модели значимы и модель в целом также значима

—модель в целом значима, но часть коэффициентов незначима

—все коэффициенты незначимы и модель также статистически незначима

—на основе имеющихся данных проверить такие гипотезы невозможно

Решение типовых задач

Задача 1. Имеются следующие условные данные о средних расходах на конечное потребление за 8 лет:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_t	7	8	8	10	11	12	14	16

Задание: В предположении, что расходы на конечное потребление в текущем году зависят от расходов на конечное потребление предыдущих лет, определите коэффициенты автокорреляции первого и второго порядков.

Решение:

Коэффициент автокорреляции уровней ряда первого порядка характеризует зависимость между соседними уровнями ряда y_t и y_{t-1} и определяется по формуле:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_1)\cdot(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^{n}(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2} \cdot}, \text{ где}$$

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t}{n-1} = \frac{8+8+10+11+12+14+16}{7} = \frac{79}{7} = 11{,}29;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}}{n-1} = \frac{7+8+8+10+11+12+14}{7} = \frac{70}{7} = 10.$$

Коэффициент автокорреляции уровней второго порядка измеряет зависимость между уровнями ряда y_t и y_{t-2} и определяется по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \bar{y}_3)\cdot(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^{n}(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}, \text{ где}$$

$$\bar{y}_3 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_t}{n-2} = \frac{8+10+11+12+14+16}{6} = \frac{71}{6} = 11{,}83;$$

$$\bar{y}_4 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_{t-2}}{n-2} = \frac{7+8+8+10+11+12}{6} = \frac{56}{6} = 9{,}33.$$

Составим расчетные таблицы:

Расчет коэффициента автокорреляции первого порядка

t	y_t	y_{t-1}	$y_t-\bar{y}_1$	$y_{t-1}-\bar{y}_2$	$(y_t-\bar{y}_1)*(y_{t-1}-\bar{y}_2)$	$(y_t-\bar{y}_1)^2$	$(y_{t-1}-\bar{y}_2)^2$
1	7	-	-	-	-	-	-
2	8	7	-3,29	-3	9,87	10,8241	9
3	8	8	-3,29	-2	6,58	10,8241	4

4	10	8	-1,29	-2	2,58	1,6641	4
5	11	10	-0,29	0	0,00	0,0841	0
6	12	11	0,71	1	0,71	0,5041	1
7	14	12	2,71	2	5,42	7,3441	4
8	16	14	4,71	4	18,84	22,1841	16
Итого	86	70	-0,03	0	44,0	53,4287	38

$$r_1 = \frac{44}{\sqrt{53{,}43 \cdot 38}} = 0{,}976.$$

Полученное значение свидетельствует об очень тесной зависимости между расходами на конечное потребление текущего и предшествующего годов и, следовательно, о наличии во временном ряде сильной линейной тенденции.

Расчет коэффициента автокорреляции второго порядка

t	y_t	y_{t-2}	$y_t-\bar{y}_3$	$y_{t-2}-\bar{y}_4$	$(y_t-\bar{y}_3)*(y_{t-2}-\bar{y}_4)$	$(y_t-\bar{y}_3)^2$	$(y_{t-2}-\bar{y}_4)^2$
1	7	-	-	-	-	-	-
2	8	-	-	-	-	-	-
3	8	7	-3,83	-2,33	8,9239	14,6689	5,4289
4	10	8	-1,83	-1,33	2,4339	3,3489	1,7689
5	11	8	-0,83	-1,33	1,1039	0,6889	1,7689
6	12	10	0,17	0,67	0,1139	0,0289	0,4489
7	14	11	2,17	1,67	3,6239	4,7089	2,7889
8	16	12	4,17	2,67	11,1339	17,3889	7,1289
Итого	86	56	0,02	0,02	27,3334	40,8334	19,3334

$$r_2 = \frac{27{,}3334}{\sqrt{40{,}8334 \cdot 19{,}3334}} = 0{,}973.$$

Полученные результаты подтверждают вывод о том, что временной ряд расходов на конечное потребление содержит линейную тенденцию.

Задача 2. Пусть имеется следующий временной ряд:

t :   1   2   3….9

y_t : 25…………10

Известно также, что $\sum y_t = 130$; $\sum y_t^2 = 3100$; $\sum\limits_{t=2}^{n} y_t y_{t-1} = 2552.$

Определить для этого временного ряда значение коэффициента автокорреляции 1 – ого порядка.

Решение**:** Значение коэффициента определим по формуле (3):

$$r_1 = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n}\left(y_t - \bar{y}_1\right)\left(y_{t-1} - \bar{y}_2\right)}{\sqrt{\sum\limits_{t=2}^{n}\left(y_t - \bar{y}_1\right)^2 \sum\limits_{t=2}^{n}\left(y_{t-1} - \bar{y}_2\right)^2}}$$

Распишем все компоненты этой формулы. Числитель преобразуем следующим путем:

$$\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \bar{y}_1\right)\left(y_{t-1} - \bar{y}_2\right) = \sum_{t=2}^{n}\left(y_t y_{t-1} - \bar{y}_1 y_{t-1} - \bar{y}_2 y_t + \bar{y}_1 \bar{y}_2\right) =$$

$$= \sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1} - \bar{y}_1 \sum_{t=2}^{n} y_{t-1} - \bar{y}_2 \sum_{t=2}^{n} y_t + (n-1)\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2$$

Здесь $n = 9,$ значения средних вычисляем по формулам (4); при этом значения сумм рассчитываются с учетом крайних значений временного ряда:

$$\sum_{t=2}^{n} y_{t-1} = \sum_{t=1}^{n} y_t - y_n = 130 - 10 = 120$$

$$\sum_{t=2}^{n} y_t = \sum_{t=1}^{n} y_t - y_1 = 130 - 25 = 105$$

$$\bar{y}_1 = \frac{105}{8} = 13{,}125; \quad \bar{y}_2 = \frac{120}{8} = 15$$

Отсюда

$$\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \bar{y}_1\right)\left(y_{t-1} - \bar{y}_2\right) = 2552 - 13{,}125 \cdot 120 - 15 \cdot 105 +$$

$$+ 8 \cdot 13{,}125 \cdot 15 = 977.$$

Аналогично рассчитываем каждый член в знаменателе:

$$\sum_{t=2}^{n}(y_t-\bar{y}_1)^2=\sum_{t=2}^{n}\left(y_t^2-2\bar{y}_1\cdot y_t+\bar{y}_1^2\right)=$$

$$=\sum_{t=2}^{n}y_t^2-2\bar{y}_1\cdot\sum_{t=2}^{n}y_t+(n-1)\bar{y}_1^2=$$

$$=\sum_{t=1}^{n}y_t^2-y_1^2-2\bar{y}_1\cdot\sum_{t=2}^{n}y_t+(n-1)\bar{y}_1^2=$$

$$=3100-25^2-2\cdot 13{,}125\cdot 105+8\cdot 13{,}125^2=1096{,}87.$$

$$\sum_{t=2}^{n}(y_t-\bar{y}_2)^2=\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1}^2-2\bar{y}_2\cdot y_{t-1}+\bar{y}_2^2\right)=$$

$$=\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}^2-2\bar{y}_2\cdot\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}+(n-1)\bar{y}_2^2=$$

$$=\sum_{t=1}^{n}y_t^2-y_n^2-2\bar{y}_2\cdot\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}+(n-1)\bar{y}_2^2=$$

$$=3100-10^2-2\cdot 15\cdot 120+8\cdot 15^2=1200.$$

Результат определим по формуле (3):

$$r_1=\frac{977}{\sqrt{1096{,}875\cdot 1200}}=\frac{977}{1147{,}28}=0{,}852$$

Задача 3. На основе квартальных данных объемов продаж предприятия за 1995-2000 гг. была построена аддитивная модель временного ряда, трендовая компонента которой имеет вид:

$$T=200+3\cdot t\quad (t=1,2,\ldots).$$

Показатели за 1999 г. приведены в таблице:

Квартал	Фактический объем продаж	Компонента аддитивной модели		
		трендовая	сезонная	случайная
1	2	3	4	5
1	200			- 11
2			15	+ 5
3	250		32	
4				

Задание: Определить недостающие в таблице данные, зная что общий объем продаж за 1999 г. составил 1000 тыс. у.е.

Решение: В первую очередь определим все значения трендовой компоненты. Чтобы использовать имеющееся уравнение тренда, надо определить моменты времени, относящиеся к 1999 г. Поскольку модель относится к периоду 1995м – 2000 гг., т.е. охватывает 6 лет, квартальные временные отметки изменяются от 1 до 24. В этом случае 1999 г. (предпоследний в исследуемом периоде) соответствует моментам времени 17, 18, 19 и 20.

Подставим в уравнение тренда, получим:

$$T_1 = 200 + 3 \cdot 17 = 251;$$

$$T_2 = 200 + 3 \cdot 18 = 254;$$

$$T_3 = 200 + 3 \cdot 19 = 257;$$

$$T_4 = 200 + 3 \cdot 20 = 260.$$

Далее недостающие величины для первого, второго и третьего кварталов вычисляем по балансу из уравнения (1) для аддитивной модели временного ряда:

$$S_1 = y_1 - T_1 - E_1 = 200 - 251 - (-11) = -40;$$

$$y_2 = T_2 + S_2 + E_2 = 254 + 15 + 5 = 274;$$

$$E_3 = y_3 - T_3 - S_3 = 250 - 257 - 32 = -39.$$

Осталось определить только величины для четвертого квартала, где известно только значение трендовой компоненты. В условиях задачи задан общий объем продаж за год. Поскольку известны продажи за три первых квартала, четвертый определяется легко:

$$y_4 = 1000 - (y_1 + y_2 + y_3) = 1000 - (200 + 274 + 250) = 276.$$

Для расчета сезонной компоненты за 4 – й квартал воспользуемся тем, что в аддитивной модели сумма сезонных компонент за один период должны равняться нулю:

$$S_4 = -(S_1 + S_2 + S_3) = -(40 + 15 + 32) = -7.$$

Последнее значение в таблице – случайную компоненту за 4 – й квартал – вычисляем по балансу из формулы (1), поскольку все остальные компоненты уже известны:

$$E_4 = y_4 - T_4 - S_4 = 276 - 260 + 7 = 23.$$

Квартал	Фактический объем продаж	Компонента аддитивной модели		
		трендовая	сезонная	случайная
1	2	3	4	5
1	200	251	- 40	-11
2	274	254	15	+ 5
3	250	257	32	- 39
4	276	260	- 7	+ 23

Задача 4. На основе поквартальных данных за 9 последних лет была построена мультипликативная модель некоторого временного ряда. Уравнение тренда в этой модели имеет вид:

$$T_1 = 10{,}8 + 0{,}1 \cdot t.$$

Скорректированные значения сезонной компоненты равны: в 1 – м квартале – 1,5; в 3 – м квартале – 0,6; в 4 – м квартале – 0,8.

Задание: Определить сезонную компоненту за 2 – й квартал и прогноз моделируемого показателя за 2 – й и 3 – й кварталы следующего года.

Решение: В мультипликативной модели сумма скорректированных сезонных компонент за один период должны равняться количеству этих коэффициентов, т.е. четырем. Отсюда находим недостающую сезонную компоненту за 2 – й квартал:

$$S_2 = 4 - (S_1 + S_3 + S_4) = 4 - (1{,}5 + 0{,}6 + 0{,}8) = 1{,}1.$$

Для прогнозирования по мультипликативной модели воспользуемся соотношением (2), в котором не будем учитывать случайную компоненту. При этом следует иметь в виду, что 2 – й и 3 – й кварталы будущего года будут относиться в рамках рассматриваемой модели соответственно к 38 – й и 39 – й отметкам времени соответственно:

$$\hat{y}_{38} = (10{,}8 + 0{,}1 \cdot 38) \cdot 1{,}1 = 16{,}06;$$

$$\hat{y}_{39} = (10{,}8 + 0{,}1 \cdot 39) \cdot 0{,}6 = 8{,}82.$$

Задача 5. На основе помесячных данных за последние 5 лет была построена аддитивная временная модель потребления тепла в районе. Скорректированные значения сезонной компоненты приведены в таблице

Январь	+ 27	Май	- 20	Сентябрь	- 10
Февраль	+ 22	Июнь	- 34	Октябрь	+ 12
Март	+ 15	Июль	- 42	Ноябрь	+20
Апрель	- 2	Август	- 18	Декабрь	?

Уравнение тренда выглядит так:

$$T = 300 + 1{,}1 \cdot t.$$

Задание: Определить значение сезонной компоненты за декабрь, а также точечный прогноз потребления тепла на 2 – й квартал следующего года.

Решение: В аддитивной модели временного ряда сумма скорректированных сезонных компонент за один период, в данном случае за год, должна равняться нулю. Отсюда значение сезонной компоненты за декабрь:

$$S_{12} = 0 - \sum_{i=1,(i \neq 12)}^{12} S_i = 0 - (27 + 22 + 15 - 2 - 20 - 34 - 42 - 18 - 10 + 12 + 20) = -30.$$

Прогноз потребления тепла рассчитывается по формуле (1), в которой не учитывается случайная составляющая, поскольку она не прогнозируется. Здесь для расчета трендовой компоненты следует иметь в виду, что второму кварталу следующего года (апрель, май, июнь) соответствуют отметки времени 64, 65 и 66. Прогноз за весь второй квартал складывается из прогнозов за апрель, май и июнь.

$$\hat{y}(апрель) = (300 + 1{,}1 \cdot 64) - 2 = 368{,}4;$$

$$\hat{y}(май) = (300 + 1{,}1 \cdot 65) - 20 = 351{,}5;$$

$$\hat{y}(июнь) = (300 + 1{,}1 \cdot 66) - 34 = 338{,}6;$$

$$\hat{y}(2 - й\ квартал) = 368{,}4 + 351{,}5 + 338{,}6 = 1058{,}5.$$

Задача 6. Дана таблица:

Момент времени	$t-3$	$t-2$	$t-1$	t	$t+1$

S^*	130				
S	145	165	190	210	-

где S^*, S - ожидаемый и действительный объемы предложения.

Задание: Определить значения S^* в соответствии с моделью адаптивных ожиданий, приняв $\lambda = 0{,}55.$

Решение: Расчет ожидаемых значений проводим по формуле:

$$S^*_{t+1} = \lambda S_t + (1-\lambda) S^*_t ,$$

которая модифицируется для каждого момента времени $(t-2,\ t-1,\ t)$:

$$S^*_{t-2} = \lambda S_{t-3} + (1-\lambda) S^*_{t-3} = 0{,}55 \cdot 145 + (1-0{,}55) \cdot 130 = 138{,}25;$$
$$S^*_{t-1} = \lambda S_{t-2} + (1-\lambda) S^*_{t-2} = 0{,}55 \cdot 165 + (1-0{,}55) \cdot 138{,}25 = 152{,}96;$$
$$S^*_{t} = \lambda S_{t-1} + (1-\lambda) S^*_{t-1} = 0{,}55 \cdot 190 + (1-0{,}55) \cdot 152{,}96 = 173{,}33;$$
$$S^*_{t+1} = \lambda S_{t} + (1-\lambda) S^*_{t} = 0{,}55 \cdot 210 + (1-0{,}55) \cdot 173{,}33 = 193{,}50.$$

Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 12.

2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: Практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 9. (http://znanium.com)

3. Эконометрика: [Электронный ресурс] Учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 5. (http://znanium.com)

4. Практикум по эконометрике: учебное пособие / Под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007.- Разделы 5,6.

5. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2005. – Гл. 6.

Тема 19. Понятие о системах эконометрических уравнений

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах необходимо:

- провести идентификацию системы;
- ответить на вопрос, является ли данная модель идентифицируемой и если да, то какого типа;
- записать приведенную форму модели;
- предложить метод оценки структурных коэффициентов системы.

1. Модель денежного рынка:

$$R_t = a_1 + b_{11} \cdot M_t + b_{12} Y_t + \varepsilon_1,$$

$$Y_t = a_2 + b_{21} R_t + b_{22} I_t + \varepsilon_2,$$

где R - процентная ставка;

Y - ВВП;

M - денежная масса;

I - внутренние инвестиции;

t - текущий период.

2.Модель Менгеса:

$$\begin{aligned}
Yt &= a_1 + b_{11}Y_{t-1} + b_{12}I_t + \varepsilon_1, \\
I_t &= a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Q_t + \varepsilon_2, \\
C_t &= a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}C_{t-1} + b_{33}P_t + \varepsilon_3, \\
Q_t &= a_4 + b_{41}Q_{t-1} + b_{42}R_t + \varepsilon_4,
\end{aligned}$$

где Y - национальный доход;

C - расходы на личное потребление;

I - чистые инвестиции;

Q - валовая прибыль экономики;

P - индекс стоимости жизни;

R - объем продукции промышленности;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

3.Одна из версий модифицированной модели Кейнса:

$$C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1,$$
$$I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2,$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$

где C - расходы на потребление;

Y - доход;

I - инвестиции;

G - государственные расходы;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

4. Модель мультипликатора-акселератора:

$$C_t = a_1 + b_{11}R_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1,$$
$$I_t = a_2 + b_{21}(R_t - R_{t-1}) + \varepsilon_2,$$
$$R_t = C_t + I_t,$$

где C - расходы на потребление;

R - доход;

I - инвестиции;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

5. Конъюнктурная модель:

$$C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1,$$
$$I_t = a_2 + b_{21}r_t + b_{21}r_t + b_{22}I_{t-1} + \varepsilon_2,$$
$$r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}V_t + \varepsilon_3,$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$

где C - расходы на потребление;

Y - ВВП;

I - инвестиции;

r - процентная ставка;

M - денежная масса;

G - государственные расходы;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

6. Модель протекционизма Сальватора (упрощенная версия):

$$M_t = a_1 + b_{12}N_t + b_{13}S_t + b_{14}E_{t-1} + b_{15}M_{t-1} + \varepsilon_1,$$
$$N_t = a_2 + b_{21}M_t + b_{23}S_t + b_{26}Y_t + \varepsilon_2,$$
$$S_t = a_3 + b_{31}M_t + b_{32}N_t + b_{37}X_t + \varepsilon_3,$$

где M - доля импорта в ВВП;

N - общее число прошений об освобождении от таможенных пошлин;

S - число удовлетворенных прошений об освобождении от таможенных пошлин;

E - фиктивная переменная, равная 1 для тех лет, в которые курс доллара на международных валютных рынках был искусственно завышен, и 0 – для всех остальных лет;

Y - реальный ВВП;

X - реальный объем чистого экспорта;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

7. Макроэкономическая модель (упрощенная версия модели Клейна):

$$C_t = a_1 + b_{21}Y_t + b_{13}T_t + \varepsilon_1,$$
$$I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{24}K_{t-1} + \varepsilon_2,$$
$$Y_t = C_t + I_t,$$

где C - потребление;

I - инвестиции;

Y - доход;

T - налоги;

K - запас капитала;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

8. Макроэкономическая модель экономики США (одна из версий):

$C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_{1t}$ (функция потребления);

$I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{23}r_t + \varepsilon_{2t}$ (функция инвестиций);

$r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{34}M_t + b_{35}r_{t-1} + \varepsilon_{3t}$ (функция денежного рынка);

$Y_t = C_t + I_t + G_t$ (тождество дохода),

где C - потребление;

Y - ВВП;

I - инвестиции;

r - процентная ставка;

M - денежная масса;

G - государственные расходы;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

9. Модель Кейнса (одна из версий):

$C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$ (функция потребления);

$I_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_{2t}$ (функция инвестиций);

$Y_t = C_t + I_t + G_t$ (тождество дохода),

где C - потребление;

Y - ВВП;

I - инвестиции;

G - государственные расходы;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

10. Модель денежного и товарного рынков:

$R_t = a_1 + b_{12}Y_t + b4M_t + \varepsilon_1$ (функция денежного рынка);

$Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{23}I_t + b_{25}G_t + \varepsilon_2$ (функция товарного рынка);

$I_t = a_3 + b_{31}R_t + \varepsilon_3$ (функция инвестиций),

где R - процентная ставка;

Y - реальный ВВП;

M - денежная масса;

I - внутренние инвестиции;

G - реальные государственные расходы.

11. Для прогнозирования спроса на свою продукцию предприятие использует следующую модель, характеризующую общую экономическую ситуацию в регионе:

$$Q_t = a_1 + b_{11}Y_t + \varepsilon_{1t},$$
$$C_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_{2t},$$
$$I_t = a_3 + b_{32}(Y_{t-1} - K_{t-1}) + \varepsilon_{3t},$$
$$Y_t = C_t + I_t,$$

где Q - реализованная продукция в период t;

Y - ВДС региона;

C - конечное потребление;

I - инвестиции;

K - запас капитала;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

12. Модифицированная модель Кейнса:

$$C_t = a_1 + b_{11}Y_t + \varepsilon_1,$$
$$I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2,$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$

где Y - доход;

C - расходы на потребление;

I - инвестиции;

G - государственные расходы;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

13. Макроэкономическая модель:

$$C_t = a_1 + b_{11}D_t + \varepsilon_{1t},$$
$$I_t = a_2 + b_{22}Y_t + b_{23}Y_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$
$$Y_t = D_t + T_t,$$
$$D_t = C_t + I_t + G_t,$$

где C - расходы на потребление;

Y - чистый национальный продукт;

D - чистый национальный доход;

I - инвестиции;

T - косвенные налоги;

G - государственные расходы;

t - текущий период;

$t-1$ - предыдущий период.

14. Дана следующая структурная форма модели:

$$C_t = b_1 + b_2 S_t + b_3 P_t,$$
$$S_t = a_1 + a_2 R_t + a_3 R_{t-1} + a_4 t,$$
$$R_t = S_t + P_t,$$

где C_t - личное потребление в период t;

S_t - зарплата в период t;

P_t - прибыль в период t;

R_t - общий доход в период t;

R_{t-1} - общий доход в период $t-1$;

$t-1$ - предыдущий период.

15. Предложение и спрос на рынке характеризуются следующей моделью:

$$q_1 = a_1 + b_1 p + \varepsilon_1,$$
$$q_2 = a_2 + b_2 p + \varepsilon_2,$$
$$q_1 = q_2$$

где $q_1 -$ спрос на товар;

q_2 - предложение количества товара;

p - цена, по которой заключаются сделки.

16. Гипотетическая модель экономики:

$$C_t = a_1 + b_{11} Y_t + b_{12} J_t + \varepsilon_1,$$
$$J_t = a_2 + b_{21} Y_{21} Y_{t-1} + \varepsilon_2,$$
$$T_t = a_3 + b_{31} Y_t + \varepsilon_3,$$
$$Y_t = C_t + J_t + G_t,$$

где C - совокупное потребление в период t;

Y - совокупный доход в период t;

J - инвестиции в период t;

T - налоги в период t;

G - государственные доходы в период t.

17. Модель спроса и предложения кейнсианского типа:

$$Q_t^s = a_1 + a_2 P_t + a_3 P_{t-1} + \varepsilon_1 \quad \text{(предложение)}$$

$$Q_t^d = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + \varepsilon_2 \quad \text{(спрос)}$$

$$Q_t^s = Q_t^d \quad \text{(тождество)}$$

где Q_t^d - спрос на товар в момент времени t;

Q_t^s - предложение товара в момент времени t;

P_t - цена товара в момент времени t;

Y_t - доход в момент времени t;

P_{t-1} - цена товара в предыдущий период.

18. Модель спроса и предложения на деньги:

$$R_t = a_1 + b_{11}M_t + b_{12}Y_t + \varepsilon_1,$$
$$Y_t = a_2 + b_{21}R_t + \varepsilon_2,$$

где R - процентные ставки в период t;

Y - ВВП в период t;

M - денежная масса в период t.

19. Модель денежного рынка:

$$R_t = a_1 + b_{11}M_t + b_{12}Y_t + \varepsilon_1,$$
$$Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{22}I_t + \varepsilon_2,$$
$$I_t = a_3 + b_{33}R_t + \varepsilon_3,$$

где $R -$ процентные ставки;

$Y -$ ВВП;

M - денежная масса;

$I -$ внутренние инвестиции.

Решение типовых задач

Задача 1. Имеется следующая структурная модель:

$$\begin{cases} y_1 = b_{13} \cdot y_3 + a_{11} \cdot x_1 + a_{13} \cdot x_3, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + b_{23} \cdot y_3 + a_{22} \cdot x_2, \\ y_3 = b_{32} \cdot y_2 + a_{31} \cdot x_1 + a_{33} \cdot x_3. \end{cases}$$

Задание: Оценить модель на идентификацию.

Решение:

Модель имеет три эндогенные (y_1,y_2,y_3) и три экзогенные (x_1,x_2,x_3) переменные. Проверим каждое уравнение системы на необходимое (Н) и достаточное (Д) условия идентификации. Для удобства проверки составим матрицу из коэффициентов при переменных системы:

уравнение	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
1	-1	0	b_{13}	a_{11}	0	a_{13}
2	b_{21}	-1	b_{23}	0	a_{22}	0
3	0	b_{32}	-1	a_{31}	0	a_{33}

Первое уравнение.

Н: эндогенных переменных – 2 (y_1,y_3),

Отсутствующих экзогенных -1(x_2).

Выполняется необходимое равенство: 2=1+1, следовательно, уравнение точно идентифицируемо.

Д: в первом уравнении отсутствуют y_2 и x_2. Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

Уравнение	Отсутствующие переменные	
	y_2	x_2
второе	-1	a_{22}
третье	b_{32}	0

$$DetA = -1 \cdot 0 - b_{32} \cdot a_{22} \neq 0.$$

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2; следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и первое уравнение точно идентифицируемо.

Второе уравнение.

Н: эндогенных переменных - 3 (y_1,y_2,y_3),

отсутствующих экзогенных – 2(x_1,x_3).

Выполняется необходимое равенство: 3=2+1, следовательно, уравнение точно идентифицируемо.

Д: во втором уравнении отсутствуют x_1 и x_3. Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

Уравнение	Отсутствующие переменные	
	x_1	x_3
первое	a_{11}	a_{13}
третье	a_{31}	a_{33}

$$DetA = a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13} \neq 0.$$

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2, следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и второе уравнение точно идентифицируемо.

Третье уравнение.

Н: эндогенных переменных -2 (y_2,y_3),

Отсутствующих экзогенных – 1 (x_2).

Выполняется необходимое равенство:2=1+1, следовательно, уравнение точно идентифицируемо.

Д: в третьем уравнении отсутствуют y_1 и x_2. Построим матрицу из коэффициентов при них в других уравнениях системы:

Уравнение	Отсутствующие переменные	
	y_1	x_2
первое	-1	0
второе	b_{21}	a_{22}

$$DetA = -1 \cdot a_{22} - b_{21} \cdot 0 \neq 0.$$

Определитель матрицы не равен 0, ранг матрицы равен 2, следовательно, выполняется достаточное условие идентификации, и третье уравнение точно идентифицируемо. Следовательно, исследуемая система точно идентифицируема и может быть решена косвенным методом наименьших квадратов.

Запишем приведенную форму модели:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3, \\ y_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \delta_{23} \cdot x_3, \\ y_3 = \delta_{31} \cdot x_1 + \delta_{32} \cdot x_2 + \delta_{33} \cdot x_3. \end{cases}$$

Задача 2. Имеется следующая структурная модель:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_{2,} \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{22}x_{2,} \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_{3.} \end{cases}$$

Задание: Проверить модель на идентификацию, применив необходимое условие идентификации.

Решение: Сначала определим идентифицируемость структурной модели. Ограничимся для простоты применением счетного правила.

Первое и третье уравнения структурной модели имеют D = 2, Н = 1. В первом уравнении две эндогенные переменные – y_1, y_2, в третьем тоже две – y_2, y_3; в обоих уравнениях не хватает по одной экзогенной переменной: в первом отсутствует x_3, в третьем – x_2. В этих уравнениях выполняется равенство D + 1 = Н, и они идентифицируемы. Во втором уравнении присутствуют все три эндогенные переменные, а отсутствуют две экзогенные – x_1 и x_3. Здесь также выполняется равенство D + 1 = Н, и второе уравнение также идентифицируемо. Поскольку все три уравнения структурной модели идентифицируемы, система также идентифицируема.

Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006.- Гл. 13.

2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: Практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 13. (http://znanium.com)

3. Практикум по эконометрике: учебное пособие / Под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007.- Раздел 4.

4. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2005. – Гл. 5.

5. Эконометрика: [Электронный ресурс] Учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 7. (http://znanium.com)