В.Т. Дубровин

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть III

КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
2014

УДК 517.5
ББК 22.16Я73
Д79

Печатается по рекомендации
кафедры математической статистики
Института ВМ и ИТ
Казанского (Приволжского) федерального университета

Научный редактор-
докт. ф.-м. н., проф. каф. мат. стат. КФУ **А.В. Лапин**

Рецензенты:
канд. ф.-м. наук, доц. каф. мат. стат. КФУ **А.М. Сидоров**
канд. ф.-м. наук, доц. КГАСУ **Ф.Г. Габбасов**

Дубровин В.Т.

Д79 Лекции по математическому анализу: учебное пособие / В.Т. Дубровин. – Казань: Казан. ун-т, 2014. Ч.III. – 166с.

ISBN 978-5-00019-165-1

В предлагаемом учебном пособии излагается теория кратного интеграла Римана, интегралов, зависящих от параметра, криволинейных и поверхностных интегралов, рядов Фурье. Темы, связанные с вычислением, сопровождаются набором решённых задач.

УДК. 517.5
ББК 22.16Я73

ISBN 978-5-00019-165-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данной книги положены лекции, читавшиеся автором в течение ряда лет, для студентов специальности "Прикладная математика" Казанского Федерального Университета. Весь материал излагается в виде, непосредственно преподносимом на лекциях и поэтому может быть использован в качестве конспекта будущих лекций. Наличие практически готового текста лекций позволит студентам предварительно ознакомиться с излагаемым материалом, освободит их от тщательного конспектирования и даст тем самым возможность уделить больше внимания пониманию содержания лекций.

К разделам теории, где положены практические занятия, прилагаются практические задачи с решениями.

Третья часть лекций по математическому анализу содержит следующие разделы: интегральное исчисление функций многих переменных; интегралы, зависящие от параметра; криволинейные и поверхностные интегралы; элементы теории поля; ряды Фурье.

Отметим, что начало и конец материала, рекомендуемого для самостоятельного изучения, выделяются значком ● Все доказательства различного вида утверждений завершаются значком ▬. Решения и доказательства в примерах отмечены значком ▲.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 1

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть в трехмерном пространстве задана непрерывная поверхность $z = f(Q) = f(x,y)$, где $Q = (x,y) \in \Omega$, Ω - некоторое ограниченное (двумерное) множество, для которого возможно определить понятие площади. Допустим, что $f(x,y) > 0$, $(x,y) \in \Omega$. Определим объем тела, ограниченного сверху нашей поверхностью, снизу плоскостью $Z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью, проходящей через границу множества Ω, с образующей, параллельной оси Z.

Разделим Ω на конечное число частей, которые могут пересекаться разве лишь по своим границам. Части $\Omega_1, \cdots, \Omega_N$ такие, что можно определить их площади (двумерные меры), которые будем обозначать соответственно $m\Omega_1, \cdots, m\Omega_N$.
Величину: $d(A) = \sup\limits_{p',p''\in A} ||p' - p''||$ будем называть диаметром множества A.
Составим сумму: $V_n = \sum\limits_{j=1}^{N} f(Q_j) m\Omega_j$, где $Q_j = (\xi_j, \eta_j)$, $j = 1, \ldots, N$ произвольная точка из Ω_j.

Естественно считать V_N приближенным выражением искомого объема. Чем больше N, тем точнее приближение. Поэтому, естественно, объем нашего тела можно определить как предел суммы V_N:

$$\lim_{\max\limits_j d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j) m\Omega_j \tag{1}$$

если, конечно, предел этот существует и равен одному и тому же числу независимо от способа разбиения Ω и выбора точек Q_j.

Если смотреть на (1) как на операцию, которая производится над функцией f, то эта операция называется операцией двойного интергрирования по Риману функции f на множестве Ω, а ее результат определенным двойным интергралом (Римана) функции f на Ω и обозначается:

$$V = \lim_{\max\limits_j d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j) m\Omega_j = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy =$$
$$= \int\limits_{\Omega} f(Q)dQ = \int\limits_{\Omega} f d\Omega.$$

Аналогичным образом может быть определено понятие n-кратного интеграла Римана. Функция f полагается определенной на n-мерном множестве Ω, которое разбивается на части $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, для которых определяется n-мерный аналог двумерной меры (площади) - n-мерная мера. Таким образом в связи с определением кратных интегралов появляется необходимость в четком определении понятия меры множества и выяснении ее свойств. Поэтому мы сейчас начнем изложение теории меры по Жордану, связанной с теорией интеграла Римана.

§ 1.1 Измеримые по Жордану множества

При изложении теории множеств, измеримых по Жордану, мы ограничимся двумерным случаем, т.е случаем плоских множеств из R_2.

Договоримся обозначать плоскость $\mathbf{R}_2$ с определенной прямоугольной системой координат (x, y) буквой $\mathbf{R}$ и ту же плоскость, но в другой повернутой системе координат (ξ, η) - буквой $\mathbf{R}'$. $\Delta = \Delta_{R'} = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}' : a_1 \leqslant \xi \leqslant a_2; b_1 \leqslant \eta \leqslant b_2\}$, где $a_1 < a_2, b_1 < b_2$ - прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (ξ, η).

Все прямоугольники будем считать замкнутыми множествами.

Определение. Объединение (сумму) конечного числа прямоугольников $\Delta_R \subset \mathbf{R}$, пересекающихся только по частям своих границ, будем называть элементарным множеством (э.м.) и обозначать σ_R или σ.

По определению полагаем: площадь $|\sigma|$ э.м. σ равна сумме площадей прямоугольников Δ, из которых состоит σ. Очевидно, площадь $|\sigma|$ не зависит от способа представления σ как конечной суммы Δ.

Пустое множество будем считать э.м. и его площадь равной 0.

Отметим без доказательства ряд простых свойств э.м. :

1. Если $\sigma_1 \subset \sigma_2$, то $|\sigma_1| \leqslant |\sigma_2|$

2. Сумма э.м. σ'_R, σ''_R есть э.м. σ_R и выполянется неравенство $|\sigma_R| = |\sigma'_R + \sigma''_R| \leqslant |\sigma'_R| + |\sigma''_R|$.

   Оно обращается в равенство, если σ'_R и σ''_R пересекаются разве что по части их границ.

3. Разность двух э.м. $\sigma'_R - \sigma''_R$ не обязательно есть замкнутое множество, поэтому она не обязательно есть э.м. Она может быть э.м. (быть может пустым), лишь если $\sigma'_R \subset \sigma''_R$, или если σ'_R и σ''_R не пересекаются. Но замыкание $\overline{\sigma'_R - \sigma''_R}$ есть всегда э.м., и при этом выполняется неравенство: $\overline{|\sigma'_R - \sigma''_R|} \geqslant$ $\geqslant |\sigma'_R| - |\sigma''_R|$.

   Оно обращается в равенство, если $\sigma''_R \subset \sigma'_R$

4. Если э.м. σ_R рассечь прямой, параллельной одной из осей системы координат в $\mathbf{R}$, то оно разделится на два э.м. σ'_R и σ''_R.

   Прежде чем сформулировать еще одно 5-е свойство э.м., мы определим необходимые для этого понятия.

Рассмотрим два семейства прямых: $x = kh, y = lh$, где k, l равны $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, ; h = 2^{-N}, N \in \mathbf{N}$. Оба семейства определяют прямоугольную сетку S_N, которая разбивает $\mathbf{R}$ на квадраты Δ_h со сторонами h, параллельными осям системы координат в $\mathbf{R}$. При переходе от S_N к S_{N+1} каждый квадрат сетки S_N делится на четыре равных квадрата.

Пусть $G \subset \mathbf{R}, G$ - ограничено и непусто. Обозначим через $\underset{\sim}{\omega}_N(G) = \underset{\sim}{\omega}_N$ э.м., состоящее из квадратов Δ_h сетки S_N, которые полностью входят в G, а через $\overset{\sim}{\omega}_N(G) = \overset{\sim}{\omega}_N$ - э.м., состоящее из квадратов Δ_h сетки S_N, каждый из которых содержит хотя бы одну точку множества G.

Очевидно, что:

$$\begin{gathered} \underset{\sim}{\omega}_1 \subset \underset{\sim}{\omega}_2 \subset \underset{\sim}{\omega}_3 \subset \ldots, \\ \overset{\sim}{\omega}_1 \supset \overset{\sim}{\omega}_2 \supset \overset{\sim}{\omega}_3 \supset \ldots, \\ \underset{\sim}{\omega}_N(G) \subset G \subset \overset{\sim}{\omega}_{N'} \quad , \end{gathered} \tag{1}$$

где N, N' - произвольные натуральные числа.

Из (1) следует, что существуют конечные пределы $m_i G = \lim\limits_{N \to \infty} \mid \underset{\sim}{\omega}_N \mid, m_e G = \lim\limits_{N \to \infty} \mid \overset{\sim}{\omega}_N \mid, m_i G \leqslant m_e G$.

Определение. Число $m_i G$ называется внутренней мерой Жордана множества G, а число $m_e G$ называется внешней мерой Жордана множества G.

Договоримся в дальнейшем слово "Жордана" опускать в целях краткости.

Таким образом нами было доказано, что ограниченное множество $G \subset \mathbf{R}$ имеет внутреннюю и внешнюю меры $m_i G$ и $m_e G$, также при этом $m_i G \leqslant m_e G$.

Определение. Множество $G \subset R$ называется измеримым по Жордану, если $m_i G = m_e G = mG$. Число mG называется при этом жордановой двумерной мерой G.

После приведенного определения можно сформулировать нужное нам свойство э.м. σ.

5. Э.м. σ есть измеримое по Жордану множество, при этом $m\sigma = |\sigma|$.

Доказательство. Очевидно, что для данного э.м. σ и данного $\varepsilon > 0$ можно указать два э.м. σ' и σ'' такие, что:

1) $\sigma' \subset \sigma \subset \sigma''$

2) $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$

3) Точки границ σ' и σ'' отстоят от любой точки границы σ на расстоянии больше некоторого положительного числа α.

Выберем в системе координат плоскости $\mathbf{R}$ сетку S_N такую, что $\sqrt{2}h = \sqrt{2} \cdot 2^{-N} < \alpha$. $\Rightarrow$ Любой квадрат сетки, содержащий хотя бы точку границы э.м. σ ,принадлежит множеству $\sigma'' - \sigma'$. $\Rightarrow$. Если ω_Γ — объединение таких квадратов, то $\omega_\Gamma \subset \sigma'' - \sigma'$. $\Rightarrow |\omega_\Gamma| \leqslant |\sigma'' - \sigma'| = |\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$. В то же время $\widetilde{\omega}_N(\sigma) - \underset{\sim}{\omega}_N(\sigma) = \omega_\Gamma$, поэтому $|\widetilde{\omega}_N(\sigma)| - |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| = |\widetilde{\omega}_N(\sigma) - \underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| < \varepsilon$. Очевидно: $\forall n \in \mathbf{N}, |\widetilde{\omega}_N(\sigma)| \geqslant |\sigma| \geqslant |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)|$. $\Rightarrow \forall n > N$: $(|\widetilde{\omega}_N(\sigma)| - |\sigma|) + (|\sigma| - |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)|) < \varepsilon \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |\widetilde{\omega}_N(\sigma)| = m_e\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| = m_i\sigma = |\sigma|$. ■

Теперь нам предстоит решить следующие задачи:

1. Установить необходимые и достаточные условия измеримости множества по Жордану.
2. Доказать замкнутость класса множеств, измеримых по Жордану, относительно операций пересечения, объединения и разности.
3. Доказать аддитивность меры Жордана, т.е. свойство $m(G_1 + G_2) = mG_1 + mG_2$, если G_1 и G_2 пересекаются разве лишь по своим границам.

Прежде всего докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть множество $G \subset \mathbf{R}$ ограничено. Тогда справедливы равенства

$$m_iG = \lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| = \sup_N |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| = \sup_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| = \sup_{\sigma \subset G} |\sigma| \qquad (1)$$

$$m_eG = \lim_{N\to\infty} |\widetilde{\omega}_N(\sigma)| = \inf_N |\widetilde{\omega}_N(\sigma)| = \inf_{\sigma_R \supset G} |\sigma_R| = \inf_{\sigma \supset G} |\sigma| \qquad (2)$$

Доказательство. Докажем равенства (1). Равенства (2) доказываются аналогично.

Первое равенство в (1) есть просто определение m_iG. Второе равенство очевидно, так как величина $|\underset{\sim}{\omega}_N(G)|$ возрастает вместе с N, причем последовательность $|\underset{\sim}{\omega}_N(G)|$ ограничена сверху.
$\underset{\sim}{\omega}_N(G)$ есть одновременно некоторое э.м. σ_R, а σ_R есть некоторое э.м. σ, поэтому

$$m_iG = \sup_N |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| \leqslant \sup_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| \leqslant \sup_{\sigma \subset G} |\sigma| \tag{3}$$

Далее, пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Так как $\sigma \subset G$, то справедливы неравенства

$$|\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| + \varepsilon \leqslant |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| + \varepsilon \leqslant m_iG + \varepsilon \tag{4}$$

Но, как мы уже знаем, э.м. σ измеримо (см. св. э.м. 5), поэтому можно взять N настолько большим, что $|\sigma| \leqslant |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| + \varepsilon$. Отсюда и из (4) следует $|\sigma| \leqslant |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| + \varepsilon$ при любом $\sigma \subset G$. $\Rightarrow \sup\limits_{\sigma \subset G} |\sigma| \leqslant m_iG + \varepsilon$.
Так как $\varepsilon > 0$ произвольное число, то $\sup\limits_{\sigma \subset G} |\sigma| \leqslant m_iG$. Отсюда следуют третье и четвертое равенства из (1). Действительно, $m_iG \leqslant \sup\limits_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| \leqslant \sup\limits_{\sigma \subset G} |\sigma| \leqslant m_iG$, поэтому $\sup\limits_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| = \sup\limits_{\sigma \subset G} |\sigma| = m_iG$ ■

Замечание. Последний член в (1) и (2) показывает, что m_iG, m_eG инвариантны относительно любого поворота системы координат.

Теорема 1 (1-й критерий измеримости множеств). Для того, чтобы множество G было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало два э.м. $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}$ ($\underset{\sim}{\sigma} \subset G \subset \widetilde{\sigma}$) таких, что $|\widetilde{\sigma}| - |\underset{\sim}{\sigma}| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G - измеримо, т.е. $m_iG = m_eG = mG$ или иначе (см. лемму 1) $\sup\limits_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| = \inf\limits_{\sigma_R \supset G} |\sigma_R| = mG$. Следовательно, для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ э.м. $\underset{\sim}{\sigma}_R$ и $\widetilde{\sigma}_R$

такие, что $\underset{\sim}{\sigma}_R \subset G$, $\widetilde{\sigma}_R \supset G$ и $mG - \varepsilon/2 \leqslant |\underset{\sim}{\sigma}_R| \leqslant |\widetilde{\sigma}_R| \leqslant mG + \varepsilon/2$.

Из чего следует $|\widetilde{\sigma}_R| - |\underset{\sim}{\sigma}_R| < \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существуют э.м. $\underset{\sim}{\sigma} \subset G \subset \widetilde{\sigma}$ и $|\widetilde{\sigma}| - |\underset{\sim}{\sigma}| < \varepsilon$. $\Rightarrow |\underset{\sim}{\sigma}| \leqslant m_iG \leqslant m_eG \leqslant |\widetilde{\sigma}|$ (здесь мы использовали равенства из леммы 1: $m_iG = \sup\limits_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R|$, $m_eG = \inf\limits_{\sigma_R \supset G} |\sigma_R|$) и так как, кроме этого, $|\widetilde{\sigma}| - |\underset{\sim}{\sigma}| < \varepsilon$ то $m_eG - m_iG < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $m_eG = m_iG$. $\Rightarrow G$ - измеримо. Достаточность доказана. ■

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что измеримое множество ограничено.

Следствие 1. Для того, чтобы множество G было измеримо и $mG = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало э.м. $\sigma_0 \supset G$ такое, что $|\sigma_0| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. G - измеримо. Тогда из теоремы 1 следует: $\exists$ э.м. $\widetilde{\sigma}$ и $\underset{\sim}{\sigma}$ такие, что

$$\underset{\sim}{\sigma} \subset G \subset \widetilde{\sigma} \text{ и } |\widetilde{\sigma}| - |\underset{\sim}{\sigma}| < \varepsilon \tag{1}$$

$$mG = 0 \Rightarrow \sup_{\sigma \subset G} |\sigma| = 0. \Rightarrow |\underset{\sim}{\sigma}| = 0 \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем $|\widetilde{\sigma}| < \varepsilon$ и $\widetilde{\sigma} \supset G$. Необходимость доказана.
Достаточность. Пусть существуют э.м. $\widetilde{\sigma} \supset G$ такое, что $|\widetilde{\sigma}| < \varepsilon$. Возьмем за $\underset{\sim}{\sigma}$ пустое множество, причем $|\underset{\sim}{\sigma}| = 0$. Тогда $\underset{\sim}{\sigma} \subset G \subset \widetilde{\sigma}$, $|\widetilde{\sigma}| - |\underset{\sim}{\sigma}| < \varepsilon$ и из теоремы 1 следует измеримость G. В то же время $0 \leqslant mG \leqslant |\widetilde{\sigma}| < \varepsilon$, а так как $\varepsilon > 0$ произвольное число, то $mG = 0$.
Достаточность доказана. ■

● Теорема 2 (2-й критерий измеримости множества). Для того, чтобы множество G было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы его граница Γ имела меру нуль, т.е. для

$\forall\varepsilon > 0$ должно существовать э.м. σ_0, покрывающее Γ и имеющее меру $|\sigma_0| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G - измеримо. Тогда для $\forall\varepsilon > 0$ существуют два э.м. σ'_R и σ''_R такие, что $\sigma'_R \subset G \subset \sigma''_R$ и $|\sigma''_R| - |\sigma'_R| < \varepsilon$ (см. теорему 1). Очевидно, что $\Gamma \subset \sigma''_R - \sigma'_R \subset \overline{\sigma''_R - \sigma'_R} = \sigma_0$ и $|\sigma_0| = |\sigma''_R| - |\sigma'_R| < \varepsilon$, т.е. границу Γ удалось покрыть э.м. σ_0, имеющим площадь (меру) меньшую, чем ε.

Достаточность. Пусть для $\forall\varepsilon > 0$ существует э.м. $\sigma_0 \supset \Gamma$, причем $|\sigma_0| < \varepsilon$. Положим $\sigma'' = G + \sigma_0$, $\sigma' = \overline{G - \sigma_0}$.

Очевидно, что σ' и σ'' будут э.м. и при этом $\sigma' \subset G \subset \sigma''$, $\overline{\sigma'' - \sigma'} = \sigma_0$, $|\sigma''| - |\sigma'| = |\sigma_0| < \varepsilon$. Что согласно теореме 1 означает измеримость G.● ■

Лемма 2. Объединение двух множеств G_1 и G_2, имеющих меру нуль, в свою очередь, имеет меру нуль.

Доказательство. Так как $mG_1 = 0$, $mG_2 = 0$, то согласно следствию из теоремы 1 для $\forall\varepsilon > 0$ существуют два э.м. σ' и σ'' такие, что $\sigma' \supset G_1$, $\sigma'' \supset G_2$ и $|\sigma'| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\sigma''| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для э.м. $\sigma = \sigma' + \sigma''$ справедливо: $\sigma \supset G_1 + G_2$, $|\sigma| \leqslant |\sigma'| + |\sigma''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Отсюда следует, что $m(G_1 + G_2) = 0$. ■

Лемма 3. Если множество $G_1 \subset G_2$, а множество G_2 имеет меру нуль, то G_1 так же имеет меру нуль.

Утверждение леммы 3 очевидно.

Теорема 3 (замкнутость класса измеримых множеств относительно теоретико-множественных операций). Если два множества G_1 и G_2 измеримы, то измеримы $G_1 \bigcup G_2$, $G_1 \bigcap G_2$, $G_1 \backslash G_2$.

Доказательство. Пусть $\Gamma(G)$ - граница множества G. Очевидно справедливы следующие теоретико-множественные включения

$$\Gamma(G_1 \bigcup G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2), \qquad \Gamma(G_1 \bigcap G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)$$

$$\Gamma(G_1 \backslash G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2) \tag{1}$$

Так как множества G_1 и G_2 измеримы, то по теореме 2: $m\Gamma(G_1) = m\Gamma(G_2) = 0$. Но тогда по лемме 2 $m(\Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)) = 0$. Отсюда и из (1), благодаря лемме 3, следует $m\Gamma(G_1 \bigcup G_2) = 0$, $m\Gamma(G_1 \bigcap G_2) = 0$, $m\Gamma(G_1 \backslash G_2) = 0$. Следовательно, по теореме 2, множества $G_1 \bigcup G_2$, $G_1 \bigcap G_2$, $G_1 \backslash G_2$ - измеримы. ■

Теорема 4. Если измеримое множество G рассечь на две части G_1 и G_2 при помощи куска кривой L, имеющей меру нуль, то G_1 и G_2 будут измеримы.

Доказательство. Очевидно, что $\Gamma(G_1) \subset \Gamma(G) + L$, $\Gamma(G_2) \subset \Gamma(G) + L$. Отсюда (так как $m\Gamma(G) = 0, mL = 0$) на основании теоремы 2, леммы 2 и леммы 3: $m\Gamma(G_1) = 0, m\Gamma(G_2) = 0$. Последнее означает измеримость множеств G_1 и G_2. $\blacksquare$

Следствие. Если G измеримое множество, то любая сетка S_N делит G на измеримые части.

Теорема 5 (аддитивность меры Жордана) Если множества G_1 и G_2 измеримы и имеют общие точки, принадлежащие разве что их границам, то $m(G_1 + G_2) = mG_1 + mG_2$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Множества G_1 и G_2 измеримы, поэтому существуют э.м. $\sigma_1' = \sigma_{1,R}'$, $\sigma_1'' = \sigma_{1,R}''$, $\sigma_2' = \sigma_{2,R}'$, $\sigma_2'' = \sigma_{2,R}''$, такие, что $\sigma_1' \subset G_1 \subset \sigma_1''$, $\sigma_2' \subset G_2 \subset \sigma_2''$,
$mG_1 - \varepsilon < |\sigma_1'| < |\sigma_1''| < mG_1 + \varepsilon$, $mG_2 - \varepsilon < |\sigma_2'| < |\sigma_2''| < mG_2 + \varepsilon$.
Положим $\sigma' = \sigma_1' + \sigma_2'$, $\sigma'' = \sigma_1'' + \sigma_2''$. σ' и σ'' э.м. и при этом $\sigma' \subset G_1 + G_2 \subset \sigma''$, $|\sigma''| \leqslant |\sigma_1''| + |\sigma_2''|$, $|\sigma'| = |\sigma_1'| + |\sigma_2'|$. Последнее равенство справедливо потому, что σ_1' и σ_2' пересекаются с G_1 и G_2 разве лишь по границам. Теперь будет верна цепочка неравенств $(mG_1 - \varepsilon) + (mG_2 - \varepsilon) < |\sigma_1'| + |\sigma_2'| = |\sigma'| \leqslant m_i(G_1 + G_2) = m_e(G_1 + G_2) \leqslant |\sigma''| \leqslant |\sigma_1''| + |\sigma_2''| < (mG_1 + \varepsilon) + (mG_2 + \varepsilon)$, из которых следует $(mG_1 - \varepsilon) + (mG_2 - \varepsilon) < m(G_1 + G_2) < (mG_1 + \varepsilon) + (mG_2 + \varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из полученного неравенства получаем аддитивность меры: $m(G_1 + G_2) = mG_1 + mG_2$. $\blacksquare$

Следствие. Если G_1 и G_2 измеримы и $G_1 \subset G_2$, то $m(G_2 \backslash G_1) = mG_2 - mG_1$.

Доказательство. Измеримость $G_2 \backslash G_1$ доказана в теореме 3. Очевидно, $G_2 = G_1 + (G_2 \backslash G_1)$. $\Rightarrow$ (по теореме 5) $\Rightarrow mG_2 = mG_1 + m(G_2 \backslash G_1). \Rightarrow m(G_2 \backslash G_1). = mG_2 - mG_1$. $\blacksquare$

Примеры множеств, измеримых по Жордану.

Пример 1. Функция $f(x) \geqslant 0$ и интегрируема на $[a, b]$. Пусть $\Omega = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Тогда Ω измеримо и $m\Omega = \int\limits_a^b f(x)dx = I$.

Доказательство. Пусть $\underset{*}{S}_\Delta$ и $\overset{*}{S}_\Delta$ соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы функций f, соответствующие разбиению Δ отрезка $[a, b]$. Так как $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует такое Δ, что $I - \varepsilon/2 < \underset{*}{S}_\Delta \leqslant \overset{*}{S}_\Delta < I + \varepsilon/2$, ($\varepsilon > 0$ - произвольное число). Очевидно, $\underset{*}{S}_\Delta$ - есть площадь э.м. σ', которое принадлежит Ω, а $\overset{*}{S}_\Delta$ - есть площадь э.м. σ'', которое содержит Ω. Таким образом, мы имеем два э.м. σ' и σ'' такие, что $\sigma' \subset \Omega \subset \sigma''$ и $|\sigma''| - |\sigma'| = \overset{*}{S}_\Delta - \underset{*}{S}_\Delta < \varepsilon$. $\Rightarrow$ множество Ω измеримо и $m\Omega = I$ $\blacksquare$

Пример 2. Непрерывная (плоская) кривая Γ на плоскости R_2 является множеством точек, имеющим нулевую меру, если она взаимооднозначно проектируется на отрезок $[a, b]$ некоторой прямой L.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что Γ находится по одну сторону от прямой L. Построим прямоугольную систему координат XOY с осью x, совпадающей с L. Тогда Γ будет графиком некоторой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$. Множество Ω (определенное как в примере 1) - измеримо. Следовательно, Γ (как часть границы Ω) имеет двумерную меру нуль. $\blacksquare$

Пример 3. Плоское ограниченное множество Ω измеримо, если его граница Γ состоит из конечного числа точек и кусков непрерывных кривых, каждый из которых проектируется взаимооднозначно на одну из осей прямоугольной системы координат.

Доказательство. Γ состоит из конечного числа множеств, имеющих (см. пример 2) меру нуль. Следовательно, $m\Gamma = 0$ и (по теореме 2) множество Ω измеримо. $\blacksquare$

Упражнение.

Рассмотреть теорию измеримых по Жордану n - мерных множеств.

Литература: [1], гл. 12, §12.5, стр. 17-21.

---

§ 1.2 Понятие кратного интеграла

Пусть $\mathbf{R}_n$ - n мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ и измеримое (следовательно, ограниченное) множество; на Ω задана функция $f(x)$, $x \in \Omega$.

Введем разбиение Ω на частичные множества, т.е. представим Ω в виде суммы $\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N$ конечного числа измеримых множеств Ω_i, пересекающихся разве лишь по своим границам. Различные разбиения множества Ω будем обозначать символами $\Delta, \Delta_1, \Delta'$ и $\Delta = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$. Заметим, что измеримое множество всегда можно разбить на изиеримые части(см. теорему 4, §1.1).

Максимальным диаметром множеств Ω_i назовем величину $\delta = \delta(\Delta) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} d(\Omega_i)$.

Интегральной суммой Римана функции $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ относительно разбиения $\Delta = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$ называется сумма $S_\Delta = S_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\xi_i) m\Omega_i$, где ξ_i - произвольная точка из Ω_i, $m\Omega_i$ - мера Жордана множеств Ω_i.

Определение 1^0. Функция $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ называется интергрируемой по Риману на Ω, если для любой последовательности разбиений $\Delta_k = (\Omega_1^{(k)}, \ldots, \Omega_{N_k}^{(k)})$ такой, что $\delta(\Delta_k) \to 0 (k \to \infty)$, существует предел $I = \lim\limits_{k} \sum\limits_{i=1}^{N_k} f(\xi_i^{(k)}) m\Omega_i^{(k)}$, при любом выборе $\xi_i^{(k)} \in m\Omega_i^{(k)}$. Число I называется n - кратным интегралом Римана функции f по множеству Ω и обозначается: $I = \int\limits_\Omega f(x)dx = \int\limits_\Omega f(x)d\Omega$.

Замечание. n - кратный интеграл от f по Ω записывается ещё так:

$$I = \int \underset{\Omega}{\ldots} \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Это обозначение удобно, так как вычисление кратного интеграла сводится к вычислению однократных интегралов в отдельности по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Как и в случае однократного интеграла определение интегрируемой по Риману на $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ функции f и n - кратного интеграла можно дать и на языке ε, δ.

Определение 2^0. Функция $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ называется интегрируемой по Риману на Ω и $I = \int\limits_{\Omega} f(x)dx$ - интегралом от f на Ω, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N)(\delta(\Delta) < \delta \Rightarrow |S_\Delta(f) - I| < \varepsilon)$, при любых $\xi_i \in \Omega_i$.

Замечание. Определения 1^0 и 2^0 эквивалентны. Доказательство этого факта проводится как и в случае однократного интеграла.

Примеры вычислений кратных интегралов с использованием определений 1^0 и 2^0.

1. $f(x) = c-const$ на измеримом множестве Ω. Такая функция интегрируема на Ω и $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = c \cdot m\Omega$.

   Доказательство. Для любого разбиения $\Delta=(\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$: $S_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{N} c \cdot m\Omega_i = c \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} m\Omega_i = c \cdot m\Omega$. Поэтому, согласно определению 2°, $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = c \cdot m\Omega$. ■

2. $f\colon \Omega \to R$ – конечная функция, причем $m\Omega = 0$. Тогда $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0$.

   Доказательство. Пусть $\Delta_k = (\Omega_1^{(k)}, \ldots, \Omega_{N_k}^{(k)})$ – последовательность разбиений множества Ω такая, что $\delta(\Delta_k) \to 0$ при $k \to \infty$. По условию $m\Omega = 0. \Rightarrow m\Omega_i^{(k)} = 0$ (при $\forall i, k$), так как $\Omega_i^{(k)} \subset \Omega$. Поэтому (согласно определению 1^0): $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \lim\limits_{k} \sum\limits_{i=1}^{N_k} f(\xi_i^{(k)}) m\Omega_i^{(k)} = 0$. ■

§ 1.3 Интегрируемость и ограниченность функции

Функция f в примере 2 может быть и неограниченной на Ω. Таким образом, из интегрируемости f на Ω не всегда следует ограниченность f на Ω.

Введем следующее определение. Ω называется множеством, удовлетворяющим свойству (A), если оно измеримо и если для $\forall \varepsilon > 0$ существует разбиение множества Ω на измеримые части Ω_i такие, что $m\Omega_i > 0$ и $d(\Omega_i) < \varepsilon$ для любых $i = 1, \ldots, N$.
Утверждение. Любое открытое множество Ω обладает свойством (A).

Доказательство. Прямоугольная сетка с кубиками ω такими, что $d(\omega) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ любое число), разделяет Ω на непустые измеримые части Ω_i. Пусть Ω_i есть часть ω и $x_0 \in \Omega_i$. Так как Ω открытое множество,то существует шар $Ш(x_0)$ с центром в x_0 такой, что $Ш(x_0) \subset \Omega$ и $Ш(x_0) \bigcap \omega \subset \Omega_i$. Нетрудно увидеть, что $m(Ш(x_0) \bigcap \omega) > 0$. Следовательно и $m\Omega_i > 0$. ■

Замечание. Замыкание открытого множества обладает свойством (A).

Пример множества, не обладающего свойством (A).

Пусть $K = \{(x, y) \colon \big|\big|(x, y) - (0, 0)\big|\big| < 1\}$ - круг с центром в $(0, 0)$ и радиусом 1. Тогда множество Ω_i, состоящее из K и отрезка $[1, 3]$, не обладает свойством (A). Ω - измеримо, так как его граница состоит из непрерывных кусков, но Ω нельзя, например, при $\varepsilon < \frac{1}{2}$, разбить на измеримые части положительной меры с диаметром, меньшим ε.

Теорема. Функция f, интегрируемая на множестве Ω со свойством (A), ограничена на Ω.

Доказательство. Ω - обладает свойством (A). Следовательно, при любом $\delta > 0$ существует разбиение $\Delta = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$ множества Ω такое, что $m\Omega_i > 0$, $\max\limits_i d(\Omega_i) < \delta$. Допустим, что f не ограничена на Ω. $\Rightarrow f$ не ограничена, по крайней мере на одном Ω_i - допустим на Ω_1. Запишем интегральную сумму, соответствующую разбиению Δ: $S_\Delta(f) = f(\xi_1) m\Omega_1 + \sum\limits_{i=2}^{N} f(\xi_i) m\Omega_i$. При заданном Δ и фиксированных ξ_i $(i = 2, \ldots, N)$ сумма $\sum\limits_{i=2}^{N} f(\xi_i) m\Omega_i$ постоянна, а величина $f(\xi_1) m\Omega_1$ - не ограничена, так как $m(\Omega_1) > 0$, а f - не ограничена на Ω_1. Мы получили, что $S_\Delta(f)$ - не ограничена. $\Rightarrow f$ не интегрируема на Ω, что противоречит условию теоремы. $\Rightarrow f$ - ограничена на Ω. ■

Договоримся везде в дальнейшем предполагать при исследовании функции f на произвольном измеримом множестве, что f - ограничена на Ω.

§ 1.4 Верхняя и нижняя интегральные суммы. Основная теорема

Пусть Ω - измеримое множество из $\mathbf{R}_n$; $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $|f(x)| \leqslant K - const$, $x \in \Omega$. Рассмотрим два различных разбиения $\Delta = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$ и $\Delta' = (\Omega_1, \ldots, \Omega_{N'})$ множества Ω на измеримые части. Определение 1. Разбиение Δ' называется продолжением разбиения Δ ($\Delta' \supset \Delta$), если Δ' получается из Δ, разбиением некоторых множеств Ω_i на конечное число частей $\Omega_i = \sum\limits_{k=1}^{e_i} \Omega_{ik}, i = 1, \ldots, N$

Определение 2. Суммы $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{N} M_i m\Omega_i, \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i m\Omega_i$, где $M_i = \sup\limits_{x\in\Omega_i} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in\Omega_i} f(x)$, называются соответственно верхней и нижней интегральными суммами функции f относительно разбиения Δ.

- Свойства $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta(f)$ и $\underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta(f)$:

1^0. При любых $\xi_i \in \Omega_i$ справедливы неравенства: $\underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta(f) \leqslant \mathrm{S}_\Delta(f) \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta(f)$ $\left(\mathrm{S}_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\xi_i) m\Omega_i,\ \xi_i \in \Omega_i\right)$.

Доказательство. Для любых $\xi_i \in \Omega_i$: $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$, $i = 1, \ldots, N$. $m\Omega_i \geqslant 0$, поэтому $m_i \cdot m\Omega_i \leqslant f(\xi_i) \cdot m\Omega_i \leqslant M_i \cdot m\Omega_i$. Суммируя данные неравенства по $i = 1, \ldots, N$, получим утверждение свойства 1^0. ■

2^0. Если $\Delta' \supset \Delta$, то $\underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \leqslant \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta$.

Доказательство. Неравенство $\underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'}$ уже доказано (см. 1^0). Докажем, например, неравенство $\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta$.

Запишем $\overset{*}{S}_{\Delta'}$ следующим образом:

$$\overset{*}{S}_{\Delta'} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{e_i} M_{ik} m\Omega_{ik}, \text{ где } M_{ik} = \sup_{x\in\Omega_{ik}} f(x) \qquad (1)$$

Аналогичным образом запишем сумму $\overset{*}{S}_{\Delta}$

$$\overset{*}{S}_{\Delta} = \sum_{i=1}^{N} M_i m\Omega_i = \sum_{i=1}^{N} M_i \sum_{k=1}^{e_i} m\Omega_{ik} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{e_i} M_i m\Omega_{ik} \qquad (2)$$

$\Omega_{ik} \subset \Omega_i$, поэтому $M_{ik} \leqslant M_i$. Таким образом, из (1) и (2) следует $\overset{*}{S}_{\Delta'} \leqslant \overset{*}{S}_{\Delta}$. $\blacksquare$

3^0. Для любых разбиений Δ_1 и Δ_2 множества Ω справедливо неравенство $\underset{*}{S}_{\Delta_1} \leqslant \overset{*}{S}_{\Delta_2}$.

Доказательство. Пусть Δ - новое разбиение, полученное наложением Δ_1 на Δ_2 ($\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$). Тогда Δ есть продолжение Δ_1 и Δ_2 (см. 2^0) и, следовательно, имеем $\underset{*}{S}_{\Delta_1} \leqslant \underset{*}{S}_{\Delta} \leqslant \overset{*}{S}_{\Delta} \leqslant \overset{*}{S}_{\Delta_2}$.

Следовательно, $\underset{*}{S}_{\Delta_1} \leqslant \overset{*}{S}_{\Delta_2}$● $\blacksquare$

Определение 3. Числа $\underline{I} = \underline{I}(f) = \sup\limits_{\Delta} \underset{*}{S}_{\Delta}$, $\overline{I} = \overline{I}(f) = \inf\limits_{\Delta} \overset{*}{S}_{\Delta}$ называются соответственно нижним и верхним интегралами функции f на множестве Ω.

Замечание. Для любой ограниченной на Ω функции f всегда существуют: $\underline{I}(f)$ и $\overline{I}(f)$. Справедливость замечания следует из ограниченности сверху (снизу) множества $\{\underset{*}{S}_{\Delta}\}(\{\overset{*}{S}_{\Delta}\})$ соответственно.

Теорема 1 (основная). Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}_n$, Ω - измеримое множество, на котором определена ограниченная функция $f(|f(x)| \leqslant K - const)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1^0 $\underline{I} = \overline{I}$.

2^0 Для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \Delta\ (\overset{*}{S}_{\Delta} - \underset{*}{S}_{\Delta} < \varepsilon)$.

3^0 Для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ \Delta\ (\delta(\Delta) < \delta \Rightarrow \overset{*}{S}_{\Delta} - \underset{*}{S}_{\Delta} < \varepsilon)$.

4^0 Функция f интегрируема на Ω и $\int\limits_{\Omega} f dx = I$, при этом $I = \underline{I} = \overline{I}$.

Доказательство. Доказательством будем проводить по схеме:
$4^0 \overset{1}{\Rightarrow} 3^0 \overset{2}{\Rightarrow} 2^0 \overset{3}{\Rightarrow} 1^0 \overset{4}{\Rightarrow} 2^0 \overset{5}{\Rightarrow} 3^0 \overset{6}{\Rightarrow} 4^0$.

$\overset{1}{\Rightarrow}$. Пусть f интегрируема на Ω и $\int\limits_{\Omega} f d\Omega = I$. Тогда, по определению 2^0, имеем $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ \Delta \ (\delta(\Delta) < \delta \Rightarrow |I - S_\Delta| < \frac{\varepsilon}{2})$, при любых $\xi_i \in \Omega_i$.

Иначе, $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum\limits_{i=1}^{N} f(\xi_i) m\Omega_i < I + \frac{\varepsilon}{2}$, при любых $\xi_i \in \Omega_i$. Из данных неравенств следует $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum\limits_{i=1}^{N} \sup\limits_{\xi_i \in \Omega_i} f(\xi_i) m\Omega_i \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}$,

$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \inf\limits_{\xi_i \in \Omega_i} f(\xi_i) m\Omega_i < I + \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Т.о., мы получили, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ \Delta \ (\delta(\Delta) < \delta \Rightarrow \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon)$. Условие 3^0 доказано.

$\overset{2}{\Rightarrow}$. Данное утверждение тривиально.

$\overset{3}{\Rightarrow}$. Пусть Δ разбиение, для которого $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ любое число. Очевидно, $\underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta$, поэтому $\underline{I} - \overline{I} < \varepsilon$. Отсюда, так как ε - любое число > 0 и $\underline{I}$, $\overline{I}$ - числа, не зависящие от ε, следует $\underline{I} = \overline{I}$, т.е. 1^0.

$\overset{4}{\Rightarrow}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют разбиения Δ_1 и Δ_2 такие, что

$$\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1}, \qquad \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ имеем $\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1} \leqslant \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда и из 1^0 следует $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon$, т.е. 2^0.

$\overset{5}{\Rightarrow}$. Нужно показать, что если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ разбиение $\Delta_* =$

$(\Omega_1^*,\ldots,\Omega_N^*)$, для которого $\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_*} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_*} < \varepsilon$, то существует $\delta > 0$ такое, что для $\forall$ разбиения $\Delta(\delta(\Delta) < \delta \Rightarrow \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} < \varepsilon)$.

Пусть Γ_* объединение всех граничных точек множеств Ω_i^* при любых $i = 1,\ldots,n$. Так как Ω_i^* измеримы, то $m\Gamma_* = 0$. Следовательно, существует элементарное множество (э.м.) σ', покрывающее Γ_*, причем $\mid \sigma' \mid < \frac{\varepsilon}{2K}$. Введем новое э.м. σ, которое содержит строго внутри себя σ', но при этом $\mid \sigma \mid < \frac{\varepsilon}{2K}$. Пусть $\delta > 0$ есть настолько малое положительное число, что расстояние от любой точки Γ_* до границы σ больше, чем δ. Зададим разбиение Δ такое, что $\delta(\Delta) < \delta$. Пусть ω_i - частичные множества разбиения Δ (для удобства будем обозначать их просто буквой ω без индекса). Пусть ω' - частичные множества разбиения Δ, которые содержат в себе точки Γ_*, а ω'' - все остальные частичные множества Δ.

Тогда имеем $\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} = \sum(M'-m')m\omega' + \sum(M''i-m'')m\omega''$, где $M' = \sup\limits_{x\in\omega'} f(x)$, $m' = \inf\limits_{x\in\omega'} f(x)$, $M'' = \sup\limits_{x\in\omega''} f(x)$, $m'' = \inf\limits_{x\in\omega''} f(x)$.

Так как $\delta(\Delta) < \delta$, то все $\omega' \subset \sigma$ и $m(\sum\omega') = \sum m\omega' \leqslant |\sigma| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Поэтому

$$\sum(M'-m')m\omega' \leqslant 2K\cdot\sum m\omega' \leqslant 2K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon \qquad (1)$$

Запишем сумму $\sum(M''-m'')m\omega''$ в виде кратной суммы $\sum(M''-m'')m\omega'' = \sum\limits_i(\sum^i(M''-m'')m\omega'')$, где $\sum^i$ обозначает сумму слагаемых, соответствующих частичным множествам ω'' разбиения Δ, попавшим полностью в частичное множество Ω_i^* старого разбиения Δ_*.

Имеем

$$\sum(M''-m'')m\omega'' = \sum_i\left(\sum{}^i(M''-m'')m\omega''\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i(M_i^*-m_i^*)\sum{}^i m\omega'' \leqslant \sum_i(M_i^*-m_i^*)m\Omega_i^* < \varepsilon \qquad (2)$$

в силу 2^0. Из (1) и (2) следует $\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} < 2\varepsilon$ для $\forall\ \Delta$ с $\delta(\Delta) < \delta$, т.е. справедливо 3^0.

$\overset{6}{\Rightarrow}$. Пусть верно 3^0. Тогда справедливо и 1^0, т.к. $3^0 \Rightarrow 2^0 \Rightarrow 1^0$. По 3^0 имеем $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ такое, что $\forall \ \Delta(\delta(\Delta) < \delta \Rightarrow \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon)$.

В то же время, для любых разбиений Δ имеем $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \leqslant \mathrm{S}_\Delta \leqslant \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta$, при $\forall \xi_i \in \Omega_i$;

$$\underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \tag{3}$$

По 1^0 $\underline{I} = \overline{I}$. Отсюда и из (3), полагая $I = \underline{I} = \overline{I}$, получаем: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ \Delta(\delta(\Delta) < \delta \Rightarrow \mid I - S_\Delta \mid < \varepsilon)$ при $\forall \xi_i \in \Omega_i$. Последнее означает, что f интегрируема на Ω и, что $\int\limits_\Omega f dx = I$, т.е. 4^0 верно.

■

Замечание. Основную теорему можно переформулировать так: "Функция f интегрируема на Ω тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $1^0 - 3^0$".
Как следствия из основной теоремы можно доказать следующие теоремы.

● Теорема 2. Пусть $\Delta_k = (\Omega_1^{(k)}, \ldots, \Omega_{N_k}^{(k)})$ - последовательность разбиений измеримого множества Ω такая, что $\delta(\Delta_k) \to 0$ при $k \to +\infty$. Если для функции f, ограниченной и определенной на Ω, существует

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{N_k} f(\xi_i^{(k)}) m\Omega_i^{(k)} = \lim_{k \to +\infty} S_{\Delta_k}(f) = I \tag{$*$}$$

при любых $\xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$, то f интегрируема на Ω и $\int\limits_\Omega f dx = I$.

Доказательство. Из $(*)$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ k \in \mathbf{N}$ такое, что $I - \frac{\varepsilon}{2} < S_{\Delta_k} < I + \frac{\varepsilon}{2}$, при $\forall \ \xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$. Возьмем верхнюю и нижнюю грани $S_{\Delta_k}(f)$ по $\xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$. Получим $I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_k} \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_k} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}. \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \Delta_k$ такое, что $\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_k} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_k} < \varepsilon$. Следовательно, по п. 2^0 основной теоремы, f интегрируема на Ω и $\int\limits_\Omega f dx = I$.●

$\blacksquare$

<u>Замечание.</u> Из теоремы 2 следует, что для доказательства интегрируемости f на Ω достаточно убедиться, что существует предел (1) (при любом выборе $\xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$) для одной какой-нибудь последовательности разбиений Δ_k с $\delta(\Delta_k) \to 0$.

● <u>Теорема 3.</u> Пусть f ограничена на измеримом множестве Ω. Для того, чтобы f была интегрируема на Ω, необходимо и достаточно, чтобы для какой-нибудь последовательности $\Delta_k = (\Omega_1^{(k)}, \ldots, \Omega_{N_k}^{(k)})$ разбиений Ω такой, что $\delta(\Delta_k) \to 0$ при $k \to +\infty$ существовал

$$\lim_{k\to+\infty} S^0_{\Delta_k}(f) = \lim \sum_{i=1}^{N_k}{}^0 f(\xi_i^{(k)}) m\Omega_i^{(k)} = I, \text{ при } \forall \xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)} \qquad (*)$$

где интегральные суммы $S^0_{\Delta_k}(f)$ распространяются только на частичные множества $\Omega_i^{(k)}$, не прилегающие к границе Γ множества Ω. При этом $\int\limits_\Omega f dx = I$.

<u>Доказательство.</u> <u>Необходимость.</u> Пусть f интегрируема на Ω и $\int\limits_\Omega f dx = I$. Докажем $(*)$. Пусть $\Delta_k = (\Omega_1^{(k)}, \ldots, \Omega_{N_k}^{(k)})$ - последовательность разбиений множества Ω такая, что $\delta(\Delta_k) \to 0$ при $k \to +\infty$; $\Omega_\Gamma^{(k)}$ - объединение частичных множеств $\Omega_i^{(k)}$, имеющих общие точки с Γ. Покажем, что сумма мер $\sum\limits_i{}^\Gamma m\Omega_i^{(k)} = m\Omega_\Gamma^{(k)}$ тех частей разбиения, которые прилегают к Γ, стремится к нулю при $k \to +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ и σ э.м., покрывающее Γ и такое, что $|\sigma| < \varepsilon$. Будем считать, что σ строго покрывает Γ. Пусть ρ - расстояние между Γ и границей σ. Так как $\delta(\Delta_k) \to 0$ при $k \to +\infty$, то существует $k_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall\ k > k_0 : \delta(\Delta_k) < \rho$. Очевидно, что для $k > k_0$ все $\Omega_i^{(k)}$, входящее в Ω_Γ, принадлежат σ, т.е $m\Omega_\Gamma^{(k)} = \sum^\Gamma m\Omega_i^{(k)} < |\sigma| < \varepsilon$. f - ограничена на $\Omega(|f(x)| \leqslant K$, для $\forall x \in \Omega)$, поэтому $\left|\sum\limits_i{}^\Gamma f(\xi_i^{(k)}) m\Omega_i^{(k)}\right| \leqslant K \cdot \sum\limits_i{}^\Gamma m\Omega_i^{(k)}$, и, следовательно, $\sum\limits_i{}^\Gamma f(\xi_i^{(k)}) m\Omega_i^{(k)} \to 0$ при

$k \to +\infty$, при $\forall \ \xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$, что позволяет записать $\int\limits_\Omega f(x)dx = \lim\limits_k \sum\limits_{i=1}^{N_k} f(\xi_i^{(k)})m\Omega_i^{(k)} = \lim\limits_k \sum\limits_i^0 f(\xi_i^{(k)})m\Omega_i^{(k)} = I$, при $\forall \xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$.Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть справедливо $(*)$. Так как $\lim\limits_k \sum\limits_i^0 f(\xi_i^{(k)})m\Omega_i^{(k)} = I$ и $\lim\limits_k \sum\limits_i^\Gamma f(\xi_i^{(k)})m\Omega_i^{(k)} = 0$ при $\forall \ \xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$, то существует $\lim\limits_k \sum\limits_{i=1}^{N_k} f(\xi_i^{(k)})m\Omega_i^{(k)} = I$, при $\forall \ \xi_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$. Следовательно, (см. теорему 2) f интегрируема на Ω и $\int\limits_\Omega f(x)dx = I$. ● ▬

§ 1.5 Примеры функций, интегрируемых в $\mathbf{R}_n$

Теорема 1. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R_n}$, Ω - измеримое и замкнутое множество. Если f непрерывна на Ω, то она интегрируема на Ω.

Доказательство. Ω - измеримое множество. Следовательно Ω - ограниченное множество. По условию Ω - замкнутое множество. Таким образом Ω - компактно. Мы получили, что f - непрерывна на компактном множестве, из чего следует равномерная непрерывность f на Ω, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ p, p' \in \Omega :\ \mid f(p) - f(p') \mid < \varepsilon$, если $\| \ p - p' \ \| < \varepsilon$. Пусть $\Delta = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$ - разбиение Ω такое, что $\delta(\Delta) < \delta$ и пусть

$$M_j = \sup_{p \in \Omega_j} f(p), \quad m_j = \inf_{p \in \Omega_j} f(p).$$

Тогда $M_j - m_j = \sup\limits_{p', p'' \in \Omega_j} (f(p') - f(p'')) \leqslant \varepsilon$, так как $\delta(\Delta) < \delta$.

Следовательно,

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = \sum_{j=1}^N (M_j - m_j)m\Omega_j \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^N m\Omega_j = \varepsilon m\Omega = \varepsilon_1$$

и из 2^0 основной теоремы следует, что f интегрируема на Ω. ▬

● Теорема 2. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R_n}$, f - ограничена на Ω, Ω - измеримо и замкнуто, f - непрерывна на Ω, за исключением точек, образующих множество Λ нулевой меры. Тогда f - интегрируема на Ω.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и σ - элементарное множество (без границы), покрывающее Λ, и имеющее меру $\mid \sigma \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\Omega \backslash \sigma$ будет замкнутым, измеримым множеством. По условию f интегрируема на $\Omega \backslash \sigma$. Произведем разбиение Δ' множества $\Omega \backslash \sigma$ ($\Omega \backslash \sigma = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N$) такое, что $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon$. Заметим, что такое разбиение существует по "Основной теореме". Далее, определим разбиение Δ множества Ω ($\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N + \sigma\Omega$). Положим $\widehat{M} = \sup\limits_{p \in \sigma\Omega} f(p)$, $\widehat{m} = \inf\limits_{p \in \sigma\Omega} f(p)$. Для разбиения Δ получим оценку

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = (\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'}) + (\widehat{M} - \widehat{m}) m(\sigma\Omega) < \varepsilon + 2K \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_1,$$

где $K > \mid f(p) \mid$, $\forall\, p \in \Omega$.
Из полученной оценки, согласно 2^0 основной теоремы, следует интегрируемость f на Ω.● ■

§ 1.6 Свойства кратных интегралов

Теорема 1. Пусть $\Omega = \Omega' + \Omega''$, где Ω' и Ω'' - измеримые множества, пересекающиеся разве что по своим границам. Если f ограничена и интегрируема на Ω, то она также интегрируема на Ω' и Ω'', и наоборот, если f ограничена и интегрируема на Ω' и Ω'' то f интегрируема на Ω. При этом $\int\limits_{\Omega} f dx = \int\limits_{\Omega'} f dx + \int\limits_{\Omega''} f dx$.

Доказательство. Пусть f интегрируема на Ω. Тогда по основной теореме: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение Δ множества Ω такое, что $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon \qquad (*)$

Будем считать, что разбиение Δ содержит в себе границы множеств Ω' и Ω'' (в противном случае мы возьмем более мелкое разбиение, для которого на основании 3^0 основной теоремы неравенство $(*)$ будет также верным).
Разбиение Δ индуцирует на Ω' и Ω'' разбиения Δ' и Δ''.

Очевидно, что

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = (\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'}) + (\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta''} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta''}) \tag{1}$$

В правой части (1) каждое слагаемое неотрицательно, поэтому из $(*)$ следует, что $\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} < \varepsilon, \quad \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta''} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta''} < \varepsilon.$

Отсюда, согласно 2^0 основной теоремы, следует, что f интегрируема на Ω' и Ω''.

Наоборот, пусть f ограничена и интегрируема на Ω' и Ω''. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиения Δ' и Δ'' множеств Ω' и Ω'' такие, что $\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta''} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta''} < \frac{\varepsilon}{2}.$

Разбиения Δ' и Δ'' дают разбиение Δ множества Ω. Очевидно, что $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = (\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta'}) + (\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta''} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta''})$, поэтому $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon.$

Отсюда по 2^0 основной теоремы следует интегрируемость f на Ω

Первая часть утверждения теоремы доказана. Докажем равенство интегралов. Очевидно, справедливо равенство

$$S_{\Delta_k} = S_{\Delta'_k} + S_{\Delta''_k}, \tag{2}$$

где $\Delta_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ - последовательность разбиений множеств Ω такая, что $\delta(\Delta_k) \to 0$ при $k \to +\infty$; Δ'_k и Δ''_k - последовательности разбиений соответственно множеств Ω' и Ω'', индуцируемые последовательностью разбиений Δ_k. Так как f интегрируема на Ω и на Ω' и Ω'', то переходя к пределу при $k \to +\infty$ в (2), мы получим необходимое равенство. ■

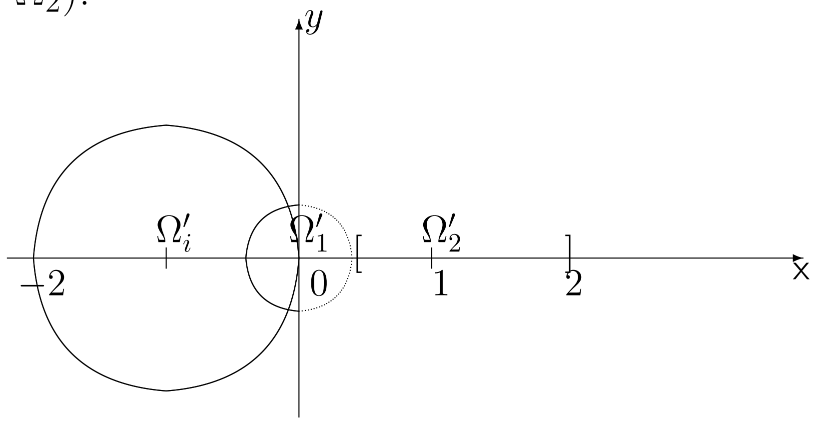
Следствие. Если ограниченную и интегрируемую на Ω функцию f изменить на некотором множестве $E \in \Omega$, имеющем жорданову меру нуль, так, что измененная функция f_1 останется ограниченной на Ω, то f_1 будет интегрируемой на Ω и $\int\limits_\Omega f dx = \int\limits_\Omega f_1 dx$.

Доказательство. Множество $\Omega \backslash E$ измеримо. f, согласно теореме 1, интегрируема на $\Omega \backslash E$, поэтому f_1 также интегрируема на $\Omega \backslash E$, т.к. $f_1 = f$ на $\Omega \backslash E$. $mE = 0$, поэтому $\int\limits_E f dx = \int\limits_E f_1 dx$. По теореме 1 f_1 будет интегрируема на Ω и $\int\limits_\Omega f_1 dx = \int\limits_{\Omega\backslash E} f_1 dx + \int\limits_E f_1 dx = \int\limits_{\Omega\backslash E} f dx + \int\limits_E f dx = \int\limits_\Omega f dx.$ ■

Замечание. Для неограниченной функции из существования интегралов $\int\limits_{\Omega_1} f dx$, $\int\limits_{\Omega_2} f dx$ из теоремы 1 не всегда следует интегрируемость f по всему Ω.
Рассмотрим пример, доказывающий замечание. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in \Omega_1 \\ \dfrac{1}{\mathsf{x}}, \text{ если } (\mathsf{x}, 0) \in \Omega_2 \end{cases},$$

где $\Omega_1 = \{x \in \mathbf{R}_2 \colon ||x + 1|| \leqslant 1\}$, $\Omega_2 = \{(\mathsf{x}, 0) \in \mathbf{R}_2 \colon 0 < \mathsf{x} \leqslant 2\}$. Очевидно, что $\int\limits_{\Omega_1} f dx = 0$, $\int\limits_{\Omega_2} f dx = 0$, но при этом $\int\limits_{\Omega} f dx$ не существует (здесь $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$).



Действительно, разбиение Δ множества Ω состоит из множеств Ω_1', Ω_2', Ω_i', $i \neq 1, 2$ (см. рис). На множестве Ω_1' значение ξ_1 можно выбрать так, что $f(\xi_1) = \frac{N}{m\Omega_1'}$, где N - сколь угодно большое число; $m\Omega_2' = 0$; $f(\xi_i) = 0$ на множествах Ω_i', $i \neq 1, 2$. Таким образом, $S_\Delta = f(\xi_1) m\Omega_1' = N$. Что доказывает неинтегрируемость f на Ω. ∎

Теорема 2. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ ограничены и интегрируемы на Ω, то функции:

1. $f(x) \pm \varphi(x)$,
2. $c\varphi(x)$, $c - const$,
3. $\mid f(x) \mid$,
4. $f(x) \cdot \varphi(x)$,
5. $\frac{1}{f(x)}$, $\mid f(x) \mid \geqslant d > 0$,

интегрируемы на Ω. При этом

$$\int\limits_{\Omega}(f \pm \varphi)dx = \int\limits_{\Omega} f dx + \int\limits_{\Omega} \varphi dx \qquad (1),$$

$$\int\limits_{\Omega} c\varphi dx = c\int\limits_{\Omega} \varphi dx \qquad (2).$$

Интегрируемость указанных функций и равенства (1) и (2) доказываются аналогично тому, как это было сделано в подобной одномерной теореме (см. [8]).

Теорема 3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и интегрируемы на Ω и $f(x) \leqslant \varphi(x)$, $x \in \Omega$, то $\int\limits_{\Omega} f dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \varphi dx$.

Доказательство. Так как $f(x) \leqslant \varphi(x)$ на Ω, то для любой последовательности разбиений $\Delta_k = (\Omega_1^{(k)}, \dots, \Omega_{N_k}^{(k)})$ множества Ω:

$$S_{\Delta_k}(f) = \sum_{i=1}^{N_k} f(\xi_i^{(k)})m\Omega_i^{(k)} \leqslant S_{\Delta_k}(\varphi) = \sum_{i=1}^{N_k} \varphi(\xi_i^{(k)})m\Omega_i^{(k)} \qquad (1).$$

Пусть Δ_k такая, что $\delta(\Delta_k) \to 0$ при $k \to +\infty$. Переходя в (1) к пределу при $k \to +\infty$, получим нужное неравенство. ∎

● Теорема 4. Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на Ω, то справедливы неравенства $\left|\int\limits_{\Omega} f dx\right| \leqslant \int\limits_{\Omega} |f| dx \leqslant K \cdot m\Omega$, где $K = \sup\limits_{x\in\Omega} \mid f(x) \mid$.

Доказательство. f - интегрируема на Ω. Следовательно, и $\mid f \mid$ - интегрируема на Ω. Кроме того $- \mid f(x) \mid \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, $x \in \Omega$. Отсюда, по теореме 3, следуют неравенства $-\int\limits_{\Omega} |f| dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |f| dx$, которые равносильны неравенству $\left|\int\limits_{\Omega} f dx\right| \leqslant \int\limits_{\Omega} |f| dx$. Неравенство $\int\limits_{\Omega} |f| dx \leqslant K \cdot m\Omega$ следует из теоремы 3, так как $|f| \leqslant K$ на Ω, а $\int\limits_{\Omega} K dx = K \cdot m\Omega$.● ∎

Теорема 5 (о среднем) Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и интегрируемы на Ω, $\varphi(x) \geqslant 0$ на Ω, тогда $\int\limits_{\Omega} f \cdot \varphi dx = c \int\limits_{\Omega} \varphi dx$, где $m \leqslant c \leqslant M$, $M = \sup\limits_{x \in \Omega} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in \Omega} f(x)$.

Доказательство. $m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow$ (т.к. $\varphi(x) \geqslant 0$) $\Rightarrow m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x)$. Интегрируя эти неравенства, получим $m \int\limits_{\Omega} \varphi dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f \cdot \varphi dx \leqslant M \int\limits_{\Omega} f dx$ или $\int\limits_{\Omega} f \cdot \varphi dx = c \int\limits_{\Omega} \varphi dx$, где $m \leqslant c \leqslant M$. ■

● Замечание. Если к условиям теоремы добавить, что Ω - замкнутое, линейно связное множество и, что f - непрерывна на Ω, то существует $\xi \in \Omega$ такое, что $\int\limits_{\Omega} f \cdot \varphi dx = f(\xi) \int\limits_{\Omega} \varphi dx$

Доказательство. Ω - измеримо. Следовательно, Ω - ограничено. А так как, по условию, Ω ещё и замкнуто, то оно компактно. Таким образом, f непрерывна на компактном множестве Ω. Следовательно, f достигает на Ω своих точных граней, т.е. существуют точки x_1 и x_2 такие, что $\sup\limits_{x \in \Omega} f(x) = f(x_2) = M$, $\inf\limits_{x \in \Omega} f(x) = f(x_1) = m$. Ω - линейно связное множество, поэтому существует находящаяся в Ω непрерывная кривая $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))$, $t \in [0, 1]$, соединяющая точки $x_1 = \Psi(0)$ и $x_2 = \Psi(1)$. Функция $\Phi(t) = f(\Psi(t))$, $t \in [0, 1]$ непрерывна $[0, 1]$ (как суперпозиция непрерывных функций), $\Phi(0) = m$, $\Phi(1) = M$, поэтому существует точка $t_0 \in [0, 1]$, в которой $\Phi(t_0) = c$, или $f(\xi) = c$, где $\xi = \Psi(t_0)$.● ■

§ 1.7 Вычисление кратного интеграла интегрированием по отдельным переменным

В разделе излагается и доказывается метод вычисления кратных интегралов путем интегрирования по отдельным переменным с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
Теорема 1. Пусть функция $f(u, v)$ задана и интегрируема на прямоугольнике $\Delta = \{(u, v)\colon a \leqslant u \leqslant b,\ c \leqslant v \leqslant d\}$. Тогда $\iint\limits_{\Delta} f(u, v) du dv = \int\limits_a^b du (\int\limits_c^d f(u, v) dv) = \int\limits_c^d dv (\int\limits_a^b f(u, v) du)$, где

выражение $\int\limits_c^d f(u,v)dv$ следует понимать как интеграл Римана от $f(u,v)$ при фиксированном u (если он существует) или (если он не существует) как произвольное число, находящееся между нижним и верхним интегралами функций $f(u,v)$ по $v \in [c,d]$ при фиксированном u. Интеграл по u на $[a,b]$ в выражении $\int\limits_a^b du(\int\limits_c^d f(u,v)dv)$ существует в смысле Римана.

Замечание. Если существует $\int\limits_c^d f(u,v)dv$ при любом $u \in [a,b]$, то выражение $\int\limits_a^b du(\int\limits_c^d f(u,v)dv)$ следует понимать как результат последовательного риманова интегрирования функции $f(u,v)$ сначала по v, а затем по u. Утверждение, аналогичное приведенному, верно и для выражения $\int\limits_c^d du(\int\limits_a^b f(u,v)dv)$

Доказательство. Прямоугольник Δ есть множество, удовлетворяющее свойству (A) (см. §1.3), поэтому из интегрируемости f на Δ следует её ограниченность на Δ. Для любого $u \in [a,b]$ будем рассматривать $f(u,v)$ как функцию от v на $[c,d]$. Так как она ограничена, то для нее существует нижний и верхний интегралы $\underline{I}(u) \leqslant \overline{I}(u)$, $u \in [a,b]$. Пусть $\Phi(u)$ произвольная функция, удовлетворяющая неравенствам $\underline{I}(u) \leqslant \Phi(u) \leqslant \overline{I}(u)$, $u \in [a,b]$. Покажем, что $\Phi(u)$ интегрируема на $[a,b]$ и что $\int\limits_a^b \Phi(u)du = \iint\limits_\Delta f(u,v)dudv$.

Для этого достаточно (см. теорему 2 §1.4) произвести разбиение r отрезка $[a,b]$ на равные части $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = b$, $h = u_i - u_{i-1} = (b-a)/N$ и показать существование предела

$$\lim_{h\to 0} S_r(\Phi) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Phi(\xi_i)h = \iint\limits_\Delta f(u,v)dudv,$$

$$\text{при } \forall\, \xi_i \in [u_{i-1}, u_i] \qquad (1)$$

Произведем разбиение ρ отрезка $[c,d]$ на N равных частей $c = v_0 < v_1 < \ldots < v_N = d$, $k = v_j - v_{j-1} = (d-c)/N$. Разбиения r и ρ порождают разбиение $r \times \rho$ прямоугольника Δ на равные прямоугольники $\Delta_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$. Запишем верхнюю и нижнюю интегральные суммы функции f относительно разбиения $r \times \rho$ на Δ: $\overset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f) = h \cdot k \sum\limits_i \sum\limits_j M_{ij}$, $\underset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f) = h \cdot k \sum\limits_i \sum\limits_j m_{ij}$, где $M_{ij} = \sup\limits_{x\in\Delta_{ij}} f(x)$, $m_{ij} = \inf\limits_{x\in\Delta_{ij}} f(x)$.

Очевидно, справедливы неравенства:

$\Phi(\xi_i) \leqslant \overline{I}(\xi_i) = \inf\limits_{\rho'} \sum\limits_j \sup\limits_{v\in\Delta_j} f(\xi_i, v) \cdot \mid \Delta_j \mid \leqslant \sum\limits_j \sup\limits_{v\in[v_{j-1},v_j]} f(\xi_i, v) \cdot k \leqslant k \cdot \sum\limits_j M_{ij}$. Здесь ρ' разбиение $[c,d]$: $[c,d] = \sum\limits_j \Delta_j$. Аналогично получим $\Phi(\xi_i) \geqslant k \cdot \sum\limits_j m_{ij}$. Из полученных неравенств следует

$\sum\limits_{i=1}^N \Phi(\xi_i) \cdot h \leqslant k \cdot h \sum\limits_{i=1}^N \sum\limits_{j=1}^N M_{ij} = \overset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f)$,

$\sum\limits_{i=1}^N \Phi(\xi_i) \cdot h \geqslant k \cdot h \sum\limits_{i=1}^N \sum\limits_{j=1}^N m_{ij} = \underset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f)$,

или

$$\underset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f) \leqslant \sum_{i=1}^N \Phi(\xi_i) \cdot h = S_r(\Phi) \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}, \text{ при } \forall\ \xi_i \in [u_{i-1}, u_i] \quad (2)$$

Функция f интегрируема на Δ, поэтому (согласно теореме 2 §1.4) $I = \iint\limits_\Delta f(u,v)dudv = \lim\limits_{N\to\infty} S_{r\times\rho}(f) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^N \sum\limits_{j=1}^N f(\xi_i, \eta_j)hk$, при $\forall\ (\xi_i, \eta_j) \in \Delta_{ij}$. Тогда, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall\ N > N_0$: $I - \frac{\varepsilon}{2} < S_{r\times\rho}(f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, при $\forall\ (\xi_i, \eta_i) \in \Delta_{ij}$. Так как данные неравенства выполняются для любых $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta_{ij}$, то $I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f) \leqslant \overset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}$ при $\forall\ N > N_0$. Отсюда следует

$$\lim_{N\to\infty} \underset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f) = \lim_{N\to\infty} \overset{*}{\mathrm{S}}_{r\times\rho}(f) = I \quad (3)$$

Переходя к пределу в (2) и учитывая (3), получим

$\iint\limits_{\Delta} f(u,v)dudv = \int\limits_a^b \Phi(u)du.$ ∎

Рассмотрим n - мерный прямоугольник
$\Delta = \{x = (x_1, \dots, x_n) \colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \dots, n\}$. Пусть
$\Delta' = \{u = (x_1, \dots, x_m) \colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \dots, m\}$,
$\Delta'' = \{v = (x_{m+1}, \dots, x_n) \colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = m+1, \dots, n\}$. Тогда $x = (u, v)$ и будем писать $\Delta = \Delta' \times \Delta''$.

Теорема 2. Пусть $f(x) = f(u,v)$ интегрируема на $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ и интегрируема на Δ'' при любом фиксированном $u \in \Delta'$. Тогда $\iint\limits_{\Delta} f(u,v)dudv = \int\limits_{\Delta'} du(\int\limits_{\Delta''} f(u,v)dv)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы его не приводим.

Теорема 3. Пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ интегрируема на Δ и интегрируема при любом $k = 1, \dots, n-1$ и любых допустимых $(x_1, \dots, x_k)$ по $\Delta^k = \{u^k = (x_{k+1}, \dots, x_n) \colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = k+1, \dots, n\}$. Тогда имеет место формула $\int \underset{\Delta}{\dots} \int (f(x_1, \dots, x_n)dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)dx_n$.

Доказательство. Применяя последовательно теорему 2, получим $\int \underset{\Delta}{\dots} \int (f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\Delta^1} f(x_1, u^1)du^1 = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{\Delta^2} f(x_1, x_2, u^2)du^2 = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)dx_n$. ∎

Используя теорему 2, докажем утверждение, помогающее в общем случае свести вычисление кратных интегралов к последовательному интегрированию по отдельным переменным. Пусть Ω - измеримое множество в R_n, $e_1 = \{x_1 \colon (x_1, \dots, x_n) \in \Omega\}$ - проекция Ω на ось x_1, $\Omega_{x_1^0} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \colon x_1 = x_1^0\}$ - сечение Ω плоскостью $x = x_1^0$.

Теорема 4. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ ограничена на Ω и интегрируема на Ω и на Ω_{x_1} при $\forall\ x_1 \in e_1$, причем e_1 - измеримое одномерное множество. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \int \ldots \int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{e_1} dx_1 \int\limits_{\Omega_{x_1}} f(x_1, \ldots, x_n) \cdot dx_1 \ldots dx_n. \qquad (*)$$

<u>Доказательство.</u> Поместим Ω в некоторый n - мерный прямоугольник $\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \ldots, n\}$. Заметим, что Ω измеримо и, следовательно, ограничено, поэтому указанный прямоугольник Δ существует. Продолжим функцию f с Ω на Δ, положив $\overline{f} = \begin{cases} f \text{ на } \Omega \\ 0 \text{ на } \Delta \backslash \Omega. \end{cases}$

Далее, запишем

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \int\limits_{\Delta} \overline{f}(x)dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\Delta^1} \overline{f}(x_1, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_{e_1} dx_1 \int\limits_{\Omega_{x_1}} f(x_1, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n \qquad (1)$$

Здесь $\Delta^1 = \{(x_2, \ldots, x_n)\colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 2, \ldots, n\}$.
Поясним равенства (1). Первое равенство верно, так как Ω и Δ измеримы и $\overline{f} = 0$ на $\Delta \backslash \Omega$. Второе равенство верно по теореме 2 (f интегрируема на Δ^1 при любом $x_1 \in [a, b]$, так как она равна нулю вне Ω_{x_1}). Третье равенство верно, так как $\overline{f} = 0$, когда $x_1 \notin e_1$ и $\overline{f} = 0$, когда $x_1 \in e_1$ и $(x_1, \ldots, x_n) \notin \Omega_{x_1}$.

<u>Следствие.</u> Пусть $e_2(x_1) = \{x_2\colon (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_{x_1}\}$ - проекция сечения Ω_{x_1} на ось x_2; $\Omega_{x_1 x_2^0} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_{x_1}\colon x_2 = x_2^0\}$ - сечение Ω_{x_1} плоскостью $x_2 = x_2^0$. Допустим также, что все множества $e_2(x_1)$, $(x_1 \in e_1)$, $\Omega_{x_1 x_2}$, $(x_2 \in e_2(x_1))$ - измеримы, а функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема на $\Omega_{x_1 x_2}$ при любых допустимых x_1 и x_2. Тогда, применяя теорему 4 к внутреннему интегралу из $(*)$, получим $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \int\limits_{e_1} dx_1 \int\limits_{e_2(x_2)} dx_2 \int\limits_{\Omega_{x_1 x_2}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_3 \ldots dx_n$.

Этот процесс применения теоремы 4 мы можем продолжить дальше. В результате получим окончательный результат

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \int\limits_{e_1} dx_1 \int\limits_{e_2(x_1)} dx_2 \ldots \int\limits_{e_n(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \quad (**),$$

где
$e_1 = \{x_1\colon (x_1,\dots,x_n)\in\Omega\}$ - проекция Ω на ось x_1,
$e_2(x_1) = \{x_2\colon (x_1,\dots,x_n)\in\Omega_{x_1}\}$ - проекция Ω_{x_1} на ось x_2,
....
$e_n(x_1,\dots,x_{n-1}) = \{x_n\colon (x_1,\dots,x_n)\in\Omega_{x_1,\dots,x_{n-1}}\}$ - проекция $\Omega_{x_1,\dots,x_{n-1}}$ на ось x_n. Все одномерные множества $e_1, e_2(x_1),\dots,e_n(x_1,\dots,x_{n-1})$ предполагаем измеримыми, а все интегралы в правой части (∗∗) существуют.

Примеры вычисления кратных интегралов повторным интегрированием

I. Двойные интегралы

1. Вычислить повторный интеграл

$$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x+y)dy.$$

▲В интеграле $\int_0^x \cos(x+y)dy$ переменная x зафиксирована, поэтому $\int_0^x \cos(x+y)dy = \int_0^x \cos(x+y)\,d(x+y) = \sin(x+y)\Big|_0^x = \sin 2x - \sin x$. Далее $\int_0^{\pi/2}(\sin 2x - \sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2x d2x - \int_0^{\pi/2}\sin x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = 0.$▲

2. Свести двойной интеграл $\iint_G f(x,y)dxdy = I$ к повторному двумя способами, если G - область, ограниченная кривыми $x=1, y=x^2, y=2x (x\le 1)$.

▲1 способ. Область G изображена на Рис. 1.

При каждом значении x из отрезка $[0,1]$ переменная y изменяется от x^2 до $2x$, т.е. область G можно представить в виде $G=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1, x^2\le y\le 2x\}$. Исходя из вида области G интеграл I можно записать в виде повторного

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{2x} f(x,y)dy$$

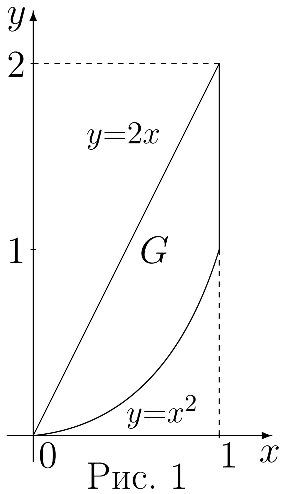


Рис. 1

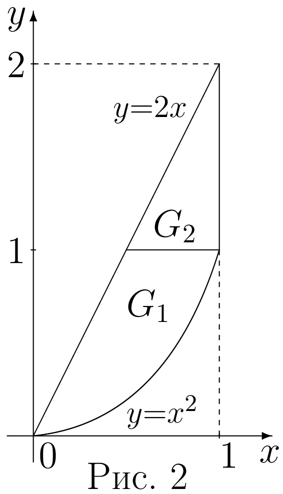


Рис. 2

2 способ. Разобьём область G на две части G_1 и G_2 (см. Рис. 2).

В области G_1 переменная y изменяется от 0 до 1, а при каждом значении y переменная x изменяется от $\frac{y}{2}$ (значение x на прямой $y = 2x$) до $\sqrt{y}$ (значение x на параболе $y = x^2$). Поэтому

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

В области G_2 переменная y изменяется от 1 до 2, а при каждом значении y переменная x изменяется от $y/2$ до 1. Поэтому

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y/2}^{1} f(x,y)dx$$

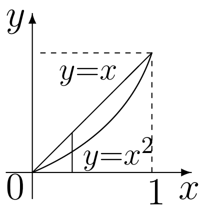
В итоге получаем:

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y/2}^{1} f(x,y)dx. \blacktriangle$$

3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (x+y^2)dxdy$ по области G, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = x^2$.

▲Нарисуем область G



Далее запишем двойной интеграл по области G в виде повторного:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x+y^2)dy.$$

$$\int\limits_{x^2}^{x}(x+y^2)dy = (xy+\frac{y^3}{3})\Big|_{x^2}^{x} = x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6.$$

Далее вычислим внешний интеграл по x:

$$\int\limits_0^1 (x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{21}x^7)\Big|_0^1 = \frac{5}{42}.$$▲

4. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy.$$

▲Нарисуем область G, которую ограничивают кривые $y = \sqrt{2x-x^2}, y = \sqrt{2x}, 0 \le x \le 2$ (см. Рис. 3)

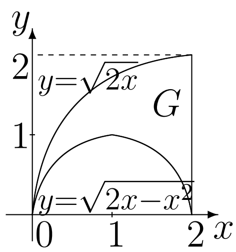


Рис. 3

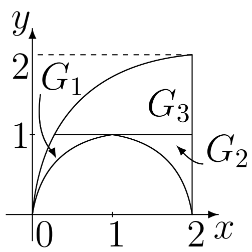


Рис. 4

Повторный интеграл I равен двойному интегралу по области G. Чтобы изменить порядок интегрирования, в повторном интеграле I, нужно разбить область G на три части (см. Рис. 4): G_1, G_2, G_3.

$G_1 = \{(x,y)\colon 0 \le y \le 1, y^2/2 \le x \le 1-\sqrt{1-y^2}\}$,

$G_2 = \{(x,y)\colon 0 \le y \le 1, 1+\sqrt{1-y^2} \le x \le 2\}$,

$G_3 = \{(x,y)\colon 1 \le y \le 2, y^2/2 \le x \le 2\}$.

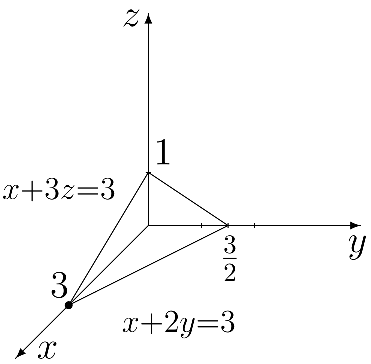
Здесь $x = y^2/2$ - решение уравнения $y = \sqrt{2x}$ относительно x, а $x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$ - решение уравнения $y = \sqrt{2x-x^2}$ относительно x. Записав каждый из интегралов по G_1, G_2, G_3 в виде повторных, получим $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy +$

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_3} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2/2}^{2} f(x,y)dx. \blacktriangle$$

II. Тройные интегралы.

1. Тройной интеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$ записать в виде повторного с указанным порядком (слева направо), если область G ограничена плоскостями $x=0, y=0, z=0, x+2y+3z=3$ а)$(x;y;z)$ б)$(z;x;y)$.

$\blacktriangle$Нарисуем область интегрирования G:



а) Спроектируем область G на плоскость (x,y). Получим треугольник $0 \le x \le 3, 0 \le y \le \frac{3-x}{2}$. Каждой точке (x,y) из этого треугольника соответствует изменение z от 0 до $\frac{3-x-2y}{3}$. Таким образом, $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$

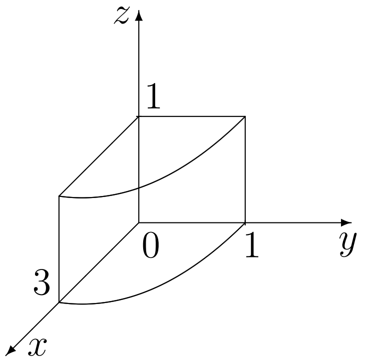
$$\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{3-x-2y}{3}} f(x,y,z)dz.$$

б) Спроектируем область G на плоскость (z,x). Получим треугольник $0 \le z \le 1, 0 \le x \le 3-3z$. Каждой точке (z,x) из этого треугольника соответствует изменение y от 0 до $\frac{3-x-3z}{2}$. Таким образом,

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{3-3z} dx \int\limits_0^{\frac{3-x-3z}{2}} f(x,y,z)dy. \blacktriangle$$

2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, если $f(x,y,z) = xy, G$ - ограничена поверхностями $x^2+y^2 = 1, z=0, z=1, x \ge 0, y \ge 0$.

$\blacktriangle$Нарисуем область G. Спроектируем G на плоскость (x,y). Получим четверть круга $0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$. Каждой точке (x,y) из этой четверти круга соответствует изменение z от 0 до 1. Запишем теперь исходный тройной интеграл в виде повторного:



$$\iiint\limits_G xy\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^1 xy\,dz = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.\blacktriangle$$

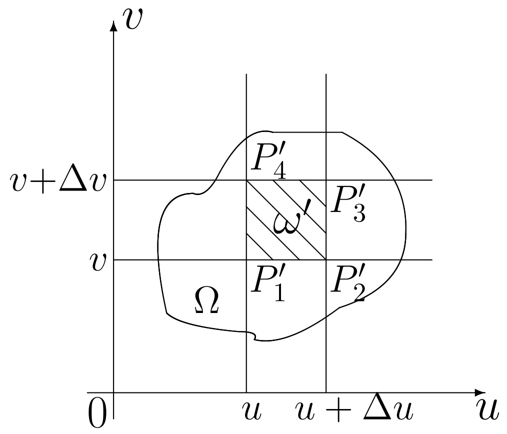
§ 1.8 Замена переменных в кратном интеграле

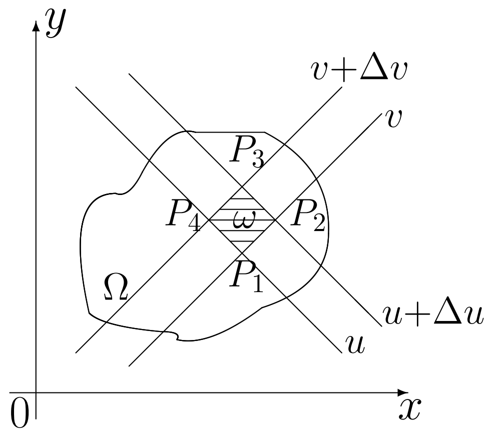
При изложении данного вопроса мы ограничимся не очень строгим изложением доказательства формулы замены переменных в двойном интеграле и формулировкой теоремы в общем случае. Что вполне соответствует обычному стилю изложения темы на лекциях. Рассмотрим интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, где Ω измеримая область. Пусть

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ (u,v) \in \Omega', \tag{1}$$

причем функции φ и ψ взаимооднозначно отображают Ω' на Ω и непрерывны вместе со своими частными производными в области Ω'. Покажем, как видоизменяется $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, если в нем произвести замену переменных (1).

Рассмотрим на плоскости (u,v) прямоугольную сетку со сторонами прямоугольников длины Δu и Δv. При отображении (1) на плоскости (x,y) ей будет соответствовать криволинейная сетка, разбивающая плоскость на криволинейные четырехугольники. Пусть ω' - прямоугольник, целиком лежащий в области Ω', с вершинами $P_1' = (u,v)$, $P_2' = (u+\Delta u, v)$, $P_3' = (u+\Delta u, v+\Delta v)$, $P_4' = (u, v+\Delta v)$. И ω - соответствующий ему криволинейный четырехугольник, целиком лежащий в области Ω и имеющий вершины $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$.





Площади прямоугольников ω' и ω обозначим $|\omega'|$ и $|\omega|$. Очевидно, что $|\omega'| = \Delta u{\cdot}\Delta v$. Вычислим $|\omega|$. Для чего определим координаты точек $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ - вершин ω:

$P_1(x_1, y_1),\ x_1 = \varphi(u, v),\ y_1 = \psi(u, v),$
$P_2(x_2, y_2),\ x_2 = \varphi(u + \Delta u, v),\ y_2 = \psi(u + \Delta u, v),$
$P_3(x_3, y_3),\ x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v),\ y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v),$
$P_4(x_4, y_4),\ x_4 = \varphi(u, v + \Delta v),\ y_4 = \psi(u, v + \Delta v).$

Будем считать линии $P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_3P_4,\ P_4P_1$ попарно параллельными прямыми, а приращения функции φ и ψ будем заменять соответствующими дифференциалами. Тогда

$$x_1 = \varphi(u, v),\ y_1 = \psi(u, v),$$
$$x_2 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,\ y_2 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,$$
$$x_3 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_3 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v,$$
$$x_4 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_4 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.$$

При сделанных допущениях, площадь $|\omega|$ равна удвоенной площади треугольника $P_1P_2P_3$ и вычисляется по формуле

$$|\omega| = \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$
$$= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\cdot\Delta v = \left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\cdot\Delta v.$$

Обозначим $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}, \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = I$. Тогда $|\omega| = |I| \cdot |\omega'|$.

Мы определили разбиения Δ и Δ' областей Ω и Ω' (ω и ω' - полные частичные множества этих разбиений). Имеем

$$S^0_\Delta(f) = \sum\nolimits^0 f(x,y) \cdot |\omega| = \sum\nolimits^0 F(u,v) \cdot |I| \cdot |\omega'| = S^0_{\Delta'}(F \cdot |I|), \quad (2)$$

где $F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$; интегральные суммы S^0_Δ и $S^0_{\Delta'}$ распространяются соответственно на ω и ω' полностью, лежащие в Ω и Ω'; (x,y), (u,v) - произвольные точки из ω и ω' соответственно.

Функция f интегрируема на Ω . Тогда из теоремы 3 (§1.4) следует $\lim\limits_{\delta(\Delta')\to 0} S^0_\Delta(f) = \lim\limits_{\delta(\Delta)\to 0} S^0_\Delta(f) = \lim\limits_{\delta(\Delta)\to 0} \sum\nolimits^0 f(x,y) \cdot |\omega| = \iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy$, для любых (x,y).

Отсюда и из (2) вытекает, что существует $\lim\limits_{\delta(\Delta')\to 0} \sum F(\upsilon,\nu) \cdot |I| \cdot |\omega'| = \lim\limits_{\delta(\Delta')\to 0} S^0_{\Delta'}(F \cdot |I|) = \iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy$, при любых $(u,v) \in \omega$.

Таким образом (опять по теореме 3 (§1.4)), функция $F(u,v) \cdot |I|$ интегрируема на Ω' и $\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Omega F(u,v) \cdot |I| dudv$.

Это и есть формула замены переменных в двойном интеграле.

Пример. (Двойной интеграл в полярных координатах). Пусть Ω - измеримая область в плоскости R_2, где введены полярные координаты (r,φ) и пусть функции $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $r \geqslant 0,\ 0 < \varphi \leqslant 2\pi$ определяют взаимнооднозначное соответствие между Ω' и областью Ω из R_2 с прямоугольными координатами. Тогда $I = I(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi, -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, \ \ r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$, поэтому $\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$. Мы получили формулу перехода к полярным координатам в двойном интеграле.

Теорема (о замене переменных). Пусть в $\mathbf{R}_n$ задана измеримая область Ω и пусть $\mathbf{R}'_n$ другое n - мерное евклидово пространство и в нем задана измеримая область Ω'. Предположим, что точки $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \Omega'$ переходят в точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ при помощи отображения

$$x_i = \varphi_i(x') = \varphi_i(x'_1, \ldots, x'_n),\ i = 1, \ldots, n;\ x' \in \Omega', \qquad (*)$$

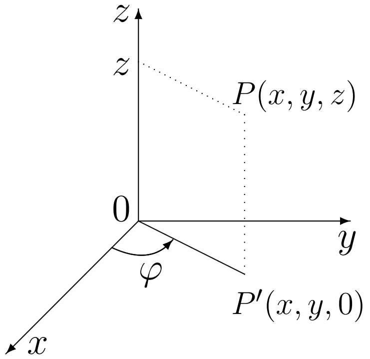
которое мы будем обозначать: $x = Ax'$.
Будем предполагать, что отображение A обладает следующими свойствами:

1. Взаимно-однозначно отображает Ω' на Ω.

2. Функции $\varphi_i(x')$ непрерывны и имеют на Ω' непрерывные частные производные с якобианом $I(x') = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$.
   Пусть, далее, задана ограниченная и интегрируемая на Ω функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, преобразующаяся при помощи $(*)$ в функцию $F(x') = f(Ax') = f(\varphi_1(x'), \ldots, \varphi_n(x'))$, $x' \in \Omega'$.
   Тогда справедлива формула замены переменных в кратном интеграле $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{\Omega'} F(x') \cdot |I(x')|dx' = \int\limits_{\Omega'} F(x'_1, \ldots, x'_n) \cdot |I(x'_1, \ldots, x'_n)|\, dx'_1 \ldots dx'_n$.

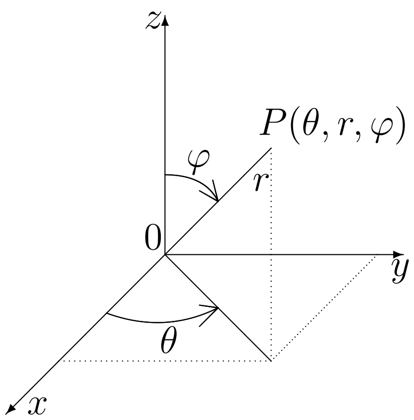
Рассмотрим два примера наиболее употребляемых замен при вычислении тройых интегралов.

Цилиндрические координаты. Пусть $P(x, y, z)$ - произвольная точка в пространстве $(x, y, z), P'$ - проекция точки P на плоскость (x, y) (см. Рис.).



Точка P однозначно задаётся тройкой чисел (r, φ, z), где (r, φ) - полярные координаты точки P' на плоскости $(x, y), z$ - аппликата точки P. Тройка чисел (r, φ, z) называется цилиндрическими координатами точки P. Переход от прямоугольных координат (x, y, z) к цилиндрическим (r, φ, z) задается формулами $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$ $(o \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty)$. Якобиан данного отображения $I(r,\varphi,z)=r$. Пусть Ω' - измеримая область в $\mathbf{R}_3$, где введены цилиндрические координаты и пусть функции $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$ устанавливают взаимнооднозначное соответствие между Ω' и областью Ω из $\mathbf{R}_3$ с прямоугольными координатами. Используя теорему о замене переменных, получим формулу перехода к цилиндрическим координатам в $\mathbf{R}_3$: $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,drd\varphi dz$.

Сферические координаты. В сферических координатах положение точки P в пространстве определяется тремя числами $r,\ \varphi,\ \theta$, где r - расстояние от точки P до начала координат, φ - угол между отрезком OP и осью OZ, θ - угол между проекцией OP на плоскость OXY и осью OX (см. рис.).



Для любой точки пространства имеем: $0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta<2\pi$.

Прямоугольные координаты точки P выражаются через сферические следующим образом:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z=r\cos\varphi \tag{1}$$

Пусть Ω' - измеримая область в $\mathbf{R}_3$, где введены сферические координаты и пусть функции (1) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между Ω' и областью Ω из R_3 с прямоугольными координатами. Якобиан преобразования (1) $I(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi$. Применяя теорему о замене переменных, получим формулу $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz =$

$\iiint\limits_{\Omega'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$ перехода к сферическим координатам в $\mathbf{R}_3$.

Вычисление кратных интегралов с помощью замены переменных.

I. Двойные интегралы.

1. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_{G}(x^2+y^2)dxdy$, где G - круг $x^2+y^2\leq 2x$.

▲Перейдем к полярным координатам с полюсом в точке $(0,0)$: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Якобиан $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$. Нарисуем область G (см. Рис.1).

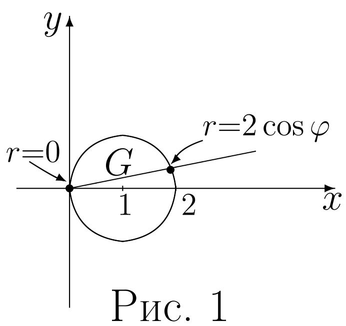


Рис. 1

Из рисунка видно, что в качестве промежутка изменения φ можно взять отрезок $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Подставляя $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ в уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2x$, получим: $r = 2\cos\varphi$. Таким образом r меняется от 0 до $2\cos\varphi$. И прообразом области G при отображении $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ будет область G', которую ограничивает кривая $r = 2\cos\varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. В результате замены переменных $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ двойной интеграл I преобразуется в двойной интеграл по области G' по переменным r и φ:

$$I = \iint\limits_{G'} r^3 dr d\varphi.$$

Полученный двойной интеграл сводим к повторному:

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^3 dr.$$

Вычислим полученный повторный интеграл:

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi.$$▲

2. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_G x^2y^2 dxdy$, где $G = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

▲Область интегрирования G представляет собой кольцо, поэтому при вычислении данного интеграла удобнее сделать замену переменных - перейти к полярным координатам: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При этом отображении прообразом кольца является прямоугольник $G' = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Таким образом,

$$I = \iint\limits_{G} x^2y^2dxdy = \iint\limits_{G'} r^5 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi dr d\varphi.$$

Далее, сводим двойной интеграл к повторному: $I = \int\limits_1^2 dr \int\limits_0^{2\pi} r^5 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \int\limits_1^2 r^5 dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{sin^2 2\varphi}{4} d\varphi =$ $= \int\limits_1^2 r^5 dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\varphi}{8} d\varphi = \frac{63}{6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{21\pi}{8}$.▲

II. Тройные интегралы.

1. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{\Omega}((x+y)^2 - z)dxdydz$, где область Ω ограничена поверхностями: $z = 0, (z-1)^2 = x^2 + y^2$.

▲Область Ω представляет собой конус (см. Рис.).

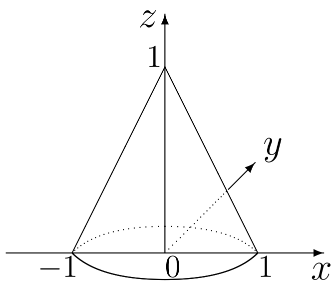


Рис.

Перейдем к цилиндрическим координатам $(r, \varphi, z) : x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$. Прообразом области Ω будет область $\Omega' = \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z \leq 1 - r\}$. Таким образом, получим $I = \iiint\limits_{\Omega}((x+y)^2 - z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'}(r^2(1 + \sin 2\varphi) - z)r dr d\varphi dz$. Сводя тройной интеграл по области Ω' к последовательному интегрированию трёх определенных интегралов, получим

$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{1-r} (r^2(1 + \sin 2\varphi) - z)r dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 [r^3(1-r)(1 + \sin 2\varphi) - \frac{1}{2}r(1-r)^2]dr = \int\limits_0^{2\pi} [\frac{1}{20}(1 + \sin 2\varphi) - \frac{1}{24}]d\varphi = \frac{\pi}{60}$.▲

2. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$, где Ω - область, ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

▲Область Ω представляет собой шар, ограниченный сферой, уравнение которой можно записать в виде $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ (см. Рис.)

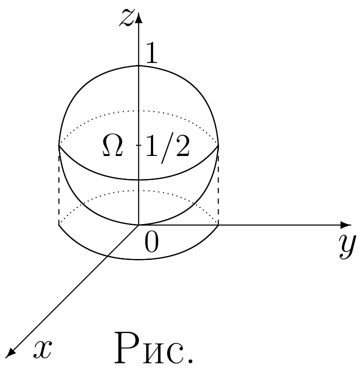


Рис.

При вычислении данного интеграла удобно перейти к сферическим координатам $(r, \varphi, \theta) : x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = z \cos \varphi$, причем переменная θ изменяется от 0 до 2π, а при каждом значении θ переменная φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Подставляя выражения x, y, z через r, φ, θ в уравнение сферы, получим $r^2 = r \cos \varphi$, откуда следует, что при заданных значениях φ и θ r меняется от 0 до $\cos \varphi$. Таким образом, прообразом области Ω при переходе к сферическим координатам будет область $\Omega' = \{(r, \varphi, \theta) : 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le \cos \varphi\}$. Якобиан данного отображения $I(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \varphi$. Вычисляя тройной интеграл по области Ω' с помощью повторного интегрирования, получим

$$I = \iiint\limits_{\Omega'} r^3 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\cos \varphi} r^3 \sin \varphi dr =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot = \frac{\pi}{10}. \blacktriangle$$

§ 1.9 Площадь поверхности

Пусть в $\mathbf{R}_3$ поверхность S задается уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$ (здесь $\overline{\Omega}$ - замыкание области).
Допустим, что Ω - измеримая область и, что $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ - непрерывны на $\overline{\Omega}$.

Разобьем Ω на измеримые части $\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N$, пересекающиеся попарно разве лишь по своим границам. Пусть (x_i, y_i) - произвольная точка на Ω_i, $i = 1, \ldots, N$; $P_i = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ - соответствующая точка на поверхности S. В каждой точке P_i проведем касательную плоскость L_i к поверхности S. Обозначим через l_i кусок плоскости L_i, проекцией которого на плоскость $z = 0$ служит частичное множество Ω_i. Пусть $|l_i|$ - площадь l_i.

<u>По определению</u> назовем площадью поверхности S предел

$|S| = \lim\limits_{\max\limits_i d(\Omega_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} |l_i|.$

Получим формулу для вычисления $|S|$.
Косинус острого угла нормали n_i к поверхности S в точке P_i с осью z равен $\cos(n_i, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}}$, где $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)$, $q_i = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)$. Очевидно, $m\Omega_i = |e_i| \cdot \cos(n_i, z)$. Поэтому $|S| = \lim\limits_{\max\limits_i d(\Omega_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} \sqrt{1+p_i^2+q_i^2} m\Omega_i = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1+p_i^2+q_i^2}\, dxdy.$

Мы получили формулу для вычисления площади поверхности, заданной в явном виде $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$.

Глава 2
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Мы будем изучать функции, получающиеся при интегрировании по x функции двух переменных x, y. Интегрирование по x может быть собственным, а также и несобственным. Соответственно мы будем иметь собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Заметим, что интегрирование в том и ином случае понимается в смысле Римана.

§ 2.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

1. Случай постоянных пределов интегрирования.

Определение. Функция $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)$, где $f(x,y)$ определена на прямоугольнике $\Pi = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ и интегрируема по x на $[a,b]$ при любом фиксированном $y \in [c,d]$, называется интегралом, зависящим от параметра y с постоянными пределами интегрирования.

Сформулируем и докажем ряд теорем, отвечающих на вопросы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости интервалов, зависящих от параметра.

Теорема 1 (непрерывность интеграла, зависящего от параметра). Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике Π, то функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. $\Delta I = I(y+\Delta y) - I(y) = \int\limits_a^b f(x, y+\Delta y)dx -$

$$- \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx. \quad (1)$$

Функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике П, который является замкнутым множеством. $\Rightarrow$ $f(x,y)$ равномерно непрерывна на П. $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\forall x \in [a,b], \forall y, y+\Delta y \in [c,d]$таких, что $|\Delta y| < \delta$:

$$|f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что при $|\Delta y| < \delta$ справедливо неравенство $|\Delta I| < \varepsilon$. Таким образом, функция $I(y)$ непрерывна в любой точке $y \in [c,d]$. $\blacksquare$

Теорема 2 (дифференцирование интеграла, зависящего от параметра). Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на П, то функция $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и $I'(y) = \frac{dI}{dy} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$, т. е. интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Доказательство. $\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y} = \int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} dx$, поэтому $I'(y) = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} dx$. Покажем, что $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$. Для этого нужно установить, что если $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$ такое, что $|\Delta y| < \delta$, то $\left|\int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} dx - \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx\right| < \varepsilon$. По формуле Лагранжа имеем $\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\cdot\Delta y)$, где $0 < \theta < 1$.

По условию теоремы, производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на П. $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ равномерно непрерывна на П. $\Rightarrow$ $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\cdot\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, если $|\Delta y| < \delta$. Используя эту оценку, получим $\left|\int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} dx - \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx\right| = \left|\int\limits_a^b (\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\cdot\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) dx\right| \leq \int\limits_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\cdot\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| dx <$

ε, если $|\Delta y| < \delta$. ■

Теорема 3 (интегрирование интеграла, зависящего от параметра). Если $f(x, y)$ непрерывна на П, то функция $I(y)$ интегрируема на $[c, d]$, при этом $\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x, y)dx)dy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x, y)dy)dx,$ (∗)

т. е. интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком интеграла.

Доказательство. По теореме 1 $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$. $\Rightarrow$ $I(y)$ интегрируема на $[c, d]$. Таким образом, первое равенство в (∗) справедливо. Второе равенство в (∗) следует из равенства повторных интегралов $\int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x, y)dx)dy, \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x, y)dy)dx$, которые равны двойному интегралу $\iint\limits_{\Pi} f(x, y)dxdy$. ■

Примеры на собственные интегралы, зависящие от параметра с постоянными пределами интегрирования.

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

$$I_1(y) = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx, \quad I_2(y) = \int\limits_0^1 \ln(x^2 + y^2)dx$$

являются непрерывными функциями на отрезке $[c, d]$, где $c > 0$.

▲Подинтегральные функции $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \ln(x^2 + y^2)$ будут непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, c \le y \le d\}$. Поэтому на основании теоремы 1 мы имеем: $I_1(y)$ и $I_2(y)$ - непрерывны на $[c, d]$, где $c > 0$.▲

2. Рассмотрим интегралы $I_1(y)$ и $I_2(y)$ из примера 1. Вычислить $I_1'(y)$ и $I_2'(y)$.

▲Функции $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ и $\ln(x^2 + y^2)$ непрерывны в прямоугольнике П. $\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)_y' = -\frac{x}{x^2+y^2}$, $\left(\ln(x^2 + y^2)\right)_y' = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Мы видим, что данные частные производные будут непрерывны в П. Таким образом условия теоремы 2 выполняются и мы можем вычислить производные от $I_1(y)$ и $I_2(y)$, применяя данную теорему:

$I_1'(y) = \left(\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx\right)_y' = \int\limits_0^1 \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)_y' dx = -\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{x^2+y^2})$,

$I_2'(y) = \left(\int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dx\right)_y' = \int\limits_0^1 \left(\ln(x^2+y^2)\right)_y' dx = \int\limits_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dx = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$.

Полученные результаты легко проверить, непосредственно вычислив $I_1(y)$ и $I_2(y)$, а затем продифференцировав по y:

$I_1(y) = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx = y\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}d\frac{x}{y} = y\cdot\frac{x}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_0^1 - y\int\limits_0^1 \frac{x}{y}d\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} - y\int\limits_0^1 \frac{x}{y}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} - y\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} - y\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} - \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} - \frac{y}{2}\left(\ln(1+y^2) - \ln y^2\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{y}{2}\ln\frac{y2}{1+y^2}$.

$I_2(y) = \int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dx = x\ln(x^2+y^2)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 xd\ln(x^2+y^2) = \ln(1+y^2) - \int\limits_0^1 x\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}dx = \ln(1+y^2) - 2\int\limits_0^1 \frac{x^2+y^2-y^2}{x^2+y^2}dy = \ln(1+y^2) - 2\int\limits_0^1 dy + 2y^2\int\limits_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} = \ln(1+y^2) - 2 + 2y\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$.

$I_1'(y) = \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\cdot(-\frac{1}{y^2}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{1+y^2}) + \frac{y}{2}\cdot\frac{1+y^2}{y^2}\cdot\frac{2y(1+y^2)-y^2 2y}{(1+y^2)^2} = -\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{1+y^2}) + \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{1+y^2})$.

$I_2'(y) = \frac{2y}{1+y^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y} + 2y\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}(-\frac{1}{y^2}) = \frac{2y}{1+y^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y} - \frac{2y}{1+y^2} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$.▲

3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^d - x^c}{\ln x}dx,$$

где $0 < c \le d$.

▲Пусть $f(x,y) = x^y, (x,y) \in \Pi = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, c \le y \le d\}$, где $c > 0$. Очевидно, что данная функция непрерывна на Π, следовательно условия теоремы 3 соблюдены, поэтому

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_0^1 x^y dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_c^d x^y dy. \qquad (*)$$

Заметим, что
$\int\limits_0^1 dx \int\limits_c^d x^y dy = \int\limits_0^1 \frac{x^d - x^c}{\ln x} dx$.

Поэтому из $(*)$ следует $\int\limits_0^1 \frac{x^d - x^c}{\ln x} dx = \int\limits_c^d dy \int\limits_0^1 x^y dx = \int\limits_c^d \frac{1}{1+y} dy = \ln(1+y)\Big|_c^d = \ln\frac{1+d}{1+c}$.▲

4. Вычислить интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + y^2 \cos^2 x) dx, \quad y \ne 0.$$

▲Пусть $y > 0$. Функции $f(x,y) = \ln(\sin^2 x + y^2 \cos^2 x)$ и $f'_y(x,y) = \frac{2y\cos^2 x}{sin^2 x + y^2 \cos^2 x}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \alpha_1 \le y \le \alpha_2\}$, где $\alpha_1 > 0$. Поэтому по теореме 2, имеем
$I'(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2y\cos^2 x}{\sin^2 x + y^2\cos^2 x} dx$.

Используя подстановку $t = \operatorname{tg} x$, найдем $I'(y) = 2y \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+y^2)} = \frac{2y}{y^2-1} \int\limits_0^{+\infty} (\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+y^2}) dt = \frac{2y}{y^2-1}(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{t}{y})\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{y+1}$

Отсюда следует
$I(y) = \int I'(y)dy = \int \frac{\pi}{y+1} dy = \pi\ln(y+1) + C$. $I(1) = 0$, поэтому $C = -\pi\ln 2$, и, следовательно, $I(y) = \pi\ln(y+1) - \pi\ln 2 = \pi\ln(\frac{y+1}{2})$ при $y > 0$. Функция $I(y)$ четная, поэтому если $y < 0$,

то $I(y) = I(-y) = \pi \ln((-y+1)/2)$. Таким образом, при $y \neq 0$, имеем

$$I(y) = \pi \ln((|y|+1)/2). \blacktriangle$$

2. Случай пределов интегрирования, зависящих от параметра.

Определение. Функция $I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$, где $f(x,y)$ определена на прямоугольнике Π (который заключает в себе область D, определенную соотношениями $\{a(y) \leq x \leq b(y), c \leq y \leq d\}$) и интегрируема по x на отрезке $[a(y), b(y)]$ при любом $y \in [c,d]$, называется интегралом, зависящим от параметра y с пределами интегрирования, зависящими от параметра.

Исследуем непрерывность и дифференцируемость по параметру таких интегралов.

Теорема 1. Пусть $f(x,y)$ непрерывна на Π, а функции $a(y), b(y)$ непрерывны на $[c,d]$. Тогда функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. Пусть y_0 – произвольная точка из $[c,d]$. Запишем

$$I(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx + \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx - \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} dx. \quad \text{(см. Рис.)}$$

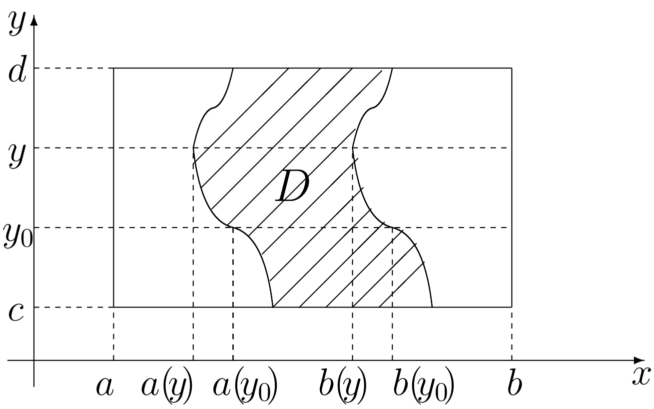


Рис.

Первый интеграл в данном выражении является инетгралом, зависящим от параметра y с постоянными пределами интегрирования, поэтому по теореме 1 из §2.1, этот интеграл есть непрерывная функция от y, т. е. $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx = I(y_0)$. (1)

Для других двух интегралов получим оценки $\left|\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx\right| \le M\cdot|b(y)-b(y_0)|$, $\left|\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)dx\right| \le M\cdot|a(y)-a(y_0)|$, где $M=\sup\limits_{\Pi}|f(x,y)|$. (2)

По условию теоремы $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны на $[c,d]$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{y\to y_0} b(y)=b(y_0)$, $\lim\limits_{y\to y_0} a(y)=a(y_0)$.

Поэтому из (2) следует $\lim\limits_{y\to y_0}\left|\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx\right| = 0$, $\lim\limits_{y\to y_0}\left|\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)dx\right| = 0$, Отсюда и из (1) получаем, что $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$, т. е. $I(y)$ непрерывна в точке y_0. Так как y_0 произвольная точка из $[c,d]$, то $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$. ∎

Теорема 2. Пусть $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на П. Пусть далее функции $a(y)$ и $b(y)$ дифференцируемы на $[c,d]$. Тогда функция $I(y)$ будет дифференцируема на $[c,d]$ и

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + b'(y)f(b(y),y) - a'(y)f(a(y),y). \qquad (*)$$

Доказательство. Зафиксируем $y_0\in[c,d]$ и представим $I(y)$ в следующем виде: $I(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx + \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx - \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)dx = I_1+I_2-I_3$. $I_1(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx$ – зависит от параметра y и имеет постоянные пределы интегрирования. По условию теоремы $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на П, поэтому по теореме 2 §2.1 $I_1(y)$ дифференцируема по y на $[c,d]$ и $I_1'(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$. В частности $I_1'(y_0) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx$. (1)

Докажем, что $I_2(y)$ имеет производную в точке y_0 и одновременно найдем эту производную. Так как $I_2(y)=0$, то достаточно доказать существование предела

$$\lim_{y\to y_0} \frac{1}{y-y_0} \cdot \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx, \tag{2}$$

который и будет равен искомой производной $I_2'(y_0)$. По теореме о среднем имеем $\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx = f(\overline{x},y)(b(y)-b(y_0))$, (3)

где $b(y_0) \le \overline{x} \le b(y)$.

Функция $f(x,y)$ непрерывна на П и при $y \to y_0 : \overline{x} \to b(y_0)$. Поэтому $f(\overline{x},y) \to f(b(y_0),y_0)$ при $y \to y_0$. (4)

При $y \to y_0$ $\frac{1}{y-y_0} \cdot (b(y)-b(y_0)) \to b'(y_0)$, (5)

так как функция $b(y)$ дифференцируема на $[c,d]$. Подставляя (3) в (2) и, учитывая (4) и (5), получим

$$I_2'(y) = b'(y_0)f(b(y_0),y_0). \tag{6}$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$I_3'(y) = a'(y_0)f(a(y_0),y_0). \tag{7}$$

Точка y_0 произвольна, поэтому из $(1),(6),(7)$ следует утверждение теоремы 2. ■

Пример. Найти $I'(y)$, если $I(y) = \int\limits_{\cos y}^{\sin y} \operatorname{sh}(yx^2)dx$.

▲$f(x,y) = \operatorname{sh}(yx^2)$ и $f_y'(x,y) = x^2\operatorname{ch}(yx^2)$ непрерывные функции от переменных x,y; $\cos y, \sin y$ дифференцируемые функции. Таким образом условия теоремы 2 выполняются и $I'(y) = \int\limits_{\cos y}^{\sin y} x^2\operatorname{ch}(yx^2)dx + \cos y\cdot\operatorname{sh}(y\sin^2 y) + \sin y\cdot\operatorname{sh}(y\cos^2 y)$.▲

§ 2.2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Несобственные интегралы, зависящие от параметра с особенностью в бесконечности (определения, критерий Коши, достаточные признаки).

Пусть $\Pi_\infty = \{(x, y) : a \le x < +\infty, c \le y \le d\}$.

Определение 1. Функция $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx$, где $f(x, y)$ задана на Π_∞ и при любом $y \in [c, d]$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx$ существует как несобственный, называется несобственным интегралом (с особенностью в $+\infty$), зависящим от параметра y, при этом говорят, что $I(y)$ сходится на $[c, d]$.

Определение 2. Несобственный интеграл $I(y)$ называется равномерно сходящимся по параметру y на $[c, d]$, если он сходится на $[c, d]$ и, если $\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) \ge a$ такое, что для $\forall R > A$ и для $\forall y \in [c, d] : \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра). $I(y)$ равномерно сходится по y на $[c, d]$ тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) \ge a$ такое, что $\forall R'$ и $R'' > A$ и для $\forall y \in [c, d] : \left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$.

Справедливость теоремы 1 вытекает непосредственно из определения 2 равномерной сходимости. Предлагается провести доказательство самостоятельно.

Приведем и докажем ряд достаточных признаков сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 2 (признак Вейерштрасса). Пусть $f(x, y)$ определена на Π_∞ и $\forall y \in [c, d]$ интегрируема по x на любом отрезке $[a, R]$. Пусть далее для всех точке Π_∞ справедливо:

$$|f(x, y)| \le g(x). \qquad (*)$$

Тогда из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует равномерная сходимость по y на $[c, d]$ интеграла $I(y)$.

Доказательство. Из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) \geq a$ такое, что $\forall R'' > R' \geq A : \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon$.

Из неравенства $(*)$ следует $\left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x, y)dx \right| \leq \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon$ для $\forall y \in [c, d]$. Отсюда, по теореме 1, следует равномерная сходимость по y на $[c, d]$ интеграла $I(y)$. ▬

Замечание. Признак Вейерштрасса является достаточным признаком равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, гарантирующим и абсолютную сходимость.

Доказательство. Из $(*)$ следует $\int\limits_{R'}^{R''} |f(x, y)|dx \leq \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon, \forall y \in [c, d]$, что доказывает замечание. ▬

Теорема 3 (признак Дирихле). Пусть $f(x, y)$ определена на Π_∞ и при $\forall y \in [c, d]$ интегрируема по x на любом отрезке $[a, R]$ и с некоторой константой M удовлетворяет условию $|F(x, y| = \left| \int\limits_a^x f(t, y)dt \right| \leq M$. Пусть также функция $g(x)$ (определенная на $[a, +\infty))$ монотонно не возрастая, стремится к 0 при $x \to +\infty$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)g(x)dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$.

Доказательство. Пусть $[R', R'']$ – произвольный отрезок на $[a, +\infty)$. Применяя формулу интегрирования по частям, запишем $\int\limits_{R'}^{R''} f(x, y)g(x)dx = F(x, y)g(x)\Big|_{R'}^{R''} - \int\limits_{R'}^{R''} F(x, y)g'(x)dx$ (здесь $F(x, y) = \int\limits_a^x f(t, y)dt, y \in [c, d]$).

По условию теоремы $|F(x, y)| \leq M$ при $\forall y \in [c, d]$. Функция

$g(x) \geq 0$ и $g'(x) \leq 0$, так как $g(x)$ монотонно стремится к 0, не возрастая при $x \to +\infty$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)g(x)dx\right| \leq M(g(R') + g(R'')) + M\int\limits_{R'}^{R''}(-g'(x))dx =$$

$$= 2Mg(R'), \forall y \in [c,d] \tag{1}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $\exists A \geq a$ такое, что при $R' \geq A$ справедливо: $g(R') < \frac{\varepsilon}{2M}$. Учитывая эту оценку и (1), получим $\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)g(x)dx\right| < \varepsilon, \forall y \in [c,d]$. Отсюда, по теореме 1, следует утверждение теоремы 3. ∎

Теорема 4 (признак Дини). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и ≥ 0 на Π_∞, и пусть для $\forall y \in [c,d]$ сходится несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$. Пусть далее функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$. Тогда интеграл $I(y)$сходится равномерно по y на $[c,d]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$, которые (по доказанному ранее) непрерывны на $[c,d]$. Так как $f(x,y) \geq 0$ на Π_∞, то $I_n(y)$ неубывающая последовательность при $\forall y \in [c,d]$. Следовательно $I_n(y) \to I(y)$ на $[c,d]$, где $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$. По признаку Дини для функциональных последовательностей получаем, что $I_n(y) \to I(y)$ равномерно на $[c,d]$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $I(y) - I_N(y) = \int\limits_{a+N}^{+\infty} f(x,y)dx < \varepsilon, \forall y \in [c,d]$. Так как $f(x,y) \geq 0$, то $\forall R \geq a+N$ и $\forall y \in [c,d] : 0 \leq \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx < \varepsilon$. Таким образом, $I(y)$ сходится равномерно по y на $[c,d]$. ∎

Примеры на равномерную сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

1. Пользуясь критерием Коши, доказать, что интеграл $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^y}$ сходится равномерно по y на $[2;10]$.

▲Для любой пары $b_1, b_2, 1 < b_1 < b_2$ и любого $y \in [2;10]$ имеет место неравенство

$$0 < \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^y} \le \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b_2 - \operatorname{arctg} b_1.$$

Функция $\operatorname{arctg} z$ имеет предел при $z \to +\infty$, поэтому по притерию Коши для предела функции, для любого $\varepsilon > 0$ существует $B > 1$ такое, что для любой пары b_1, b_2 из неравенства $B < b_1 < b_2$ следует неравенство $0 < \operatorname{arctg} b_2 - \operatorname{arctg} b_1 < \varepsilon$, т. е. $0 < \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^y} < \varepsilon$, для $B < b_1 < b_2$ и любых $y \in [2;10]$. Отсюда, по притерию Коши равномерной сходимости несобственных интегралов (теорема 1), следует равномерная сходимость $I(y)$ по y на $[2;10]$.▲

2. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость интеграла $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2(yx)}{1+x^2} dx, y \in \mathbf{R}$

▲Для всех $y \in \mathbf{R}$: $\left|\frac{\cos^2(yx)}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл $I(y)$ сходится равномерно на множестве $\mathbf{R}$.▲

3. Доказать, что интеграл $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx$ сходится равномерно по y на множестве $[b;+\infty)$, где $b > 0$.

▲Пусть $F(x,y) = \int\limits_0^{x} \sin(yt) dt$. Тогда $F(x,y) = \frac{\cos(yx)-1}{y}$ и $|F(x,y)| \le \frac{2}{b}$ для любых $x \in [0;+\infty)$ и для любых $y \ge b$. Кроме того, $\frac{1}{x} \to 0$ (монотонно) при $x \to +\infty$, причем функция $\frac{1}{x}$ не зависит от y. По признаку Дирихле интеграл $I(y)$ сходится равномерно по y на множестве $[b;+\infty)$, где $b > 0$.▲

4. Доказать, что интеграл $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx$ сходится неравномерно на множестве $[0;1]$.

▲Используем критерий Коши:

"Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) \in (a, +\infty)$ такое, что $\forall R', R''(R \le R' \le R'')$ и $\forall y \in E$:

$$\left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \text{ "}.$$

Если условие критерия Коши не выполняется, т. е. $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall R \in (a, +\infty) \exists y_0 \in E, \exists R', R''(R' \ge R, R'' \ge R)$ такие, что

$$\left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx \right| \ge \varepsilon_0,$$

то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx$ сходится неравномерно на множестве E. Пусть $0 < R < 1$. Выберем $y = R$ и $R' = \frac{\pi}{3R}, R'' = \frac{\pi}{2R}$ (очевидно, что $R' > R$ и $R'' > R$). Тогда

$$\int\limits_{R'}^{R''} \frac{\sin(yx)}{x} dx = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \varepsilon_0 > 0. \qquad (1)$$

При $R \ge 1$ выберем $y = \frac{1}{R}$ и $R' = \frac{\pi}{3} R, R'' = \frac{\pi}{2} R$ (очевидно, что $R' > R$ и $R'' > R$). Тогда

$$\int\limits_{R'}^{R''} \frac{\sin(yx)}{x} dx = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \varepsilon_0 > 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$, что условие критерия Коши (равномерной сходимости) не выполняется и следовательно интеграл $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx$ сходится неравномерно на $[0;1]$.▲

Замечание. Доказать неравномерную сходимость $I(y)$ на $[0;1]$ можно используя определение равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра.

▲Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится неравномерно по y на E, если $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall R \geq a \exists R' > R, \exists y_0 \in E$ такие, что

$$\left| \int\limits_{R'}^{+\infty} f(x,y)dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $R \geq a$ и $R' > R$. Тогда $\left| \int\limits_{R'}^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx \right| = \left| \int\limits_{yR'}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| = \left| \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| = \varepsilon_0$, если выбрать $y = \frac{1}{R'}$. Таким образом, $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx$ сходится неравномерно на $[0;1]$.▲

2. Свойства непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра с особенностью в бесконечности.

Теорема 1 (непрерывность). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на Π_∞, а $I(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $I(y)$ – непрерывная функция от y на $[c,d]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx.$$

Все функции $I_n(y)$ непрерывны на $[c,d], I_n(y) \to I(y)$ на $[c,d]$. Интеграл $I(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) \geq a, \forall n > A, \forall y \in [c,d] : |I_n(y) - I(y)| = \left| \int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$. Это значит, что $I_n(y) \to I(y)$ равномерно на $[c,d]$. Так как $I_n(y)$ непрерывны на $[c,d]$, то следовательно $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$. ■

Теорема 2 (дифференцируемость). Пусть функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на Π_∞. Пусть далее для некоторого $y \in [c,d]$ сходится интеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}dx$ сходится равномерно по $y \in [c,d]$. При этих условиях функция $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}dx$, т. е. в условиях теоремы 2 дифференцирование по параметру может производиться под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$. По теореме о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра, функция $I_n(y)$ дифференцируема по y на $[c,d]$:

$$I'_n(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}dx. \tag{1}$$

В условиях теоремы сказано, что $I(y)$ сходится в некоторой точке $y \in [c,d]$. $\Rightarrow I_n(y) \to I(y)$ в некоторой точке $y \in [c,d]$. Также по условию теоремы: $I'_n(y)$ сходится равномерно по $y \in [c,d]$. Из перечисленных условий, по соответствующей теореме о дифференцировании функциональной последовательности, следует $I'_n(y) \to I'(y)$. Следовательно $I'(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}dx = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}dx.$ ■

Теорема 3 (интегрирование). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на Π_∞, а интеграл $I(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $I(y)$ можно интегрировать по параметру y на $[c,d]$, причем

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d (\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx)dy = \int\limits_a^{+\infty} (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx, \tag{$*$}$$

т. е. в условиях теоремы несобственный инетграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком несобственного интеграла.

Доказательство. $f(x,y)$ – непрерывна на Π_∞, поэтому по теореме 1 функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на $[c,d]$.

Из равномерной сходимости $I(y)$ на $[c,d]$ следует: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ A \geq a\ \forall\ R > A\ \forall y \in [c,d] \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$. Считая $R > A$ и используя возможность перестановки порядка интегрирования для собственных интегралов, зависящих от параметра, запишем:

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^R f(x,y)dx + \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^R f(x,y)dx\right)dy + \int\limits_c^d \left(\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^R \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx + \int\limits_c^d \left(\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy.$$

Отсюда следует $\left|\int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^R \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx\right| = \left|\int\limits_c^d \left(\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy\right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \cdot (d-c) = \varepsilon, \forall R > A.$

Последнее означает, что $\int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$ сходится и равен $\int\limits_c^d I(y)dy$, т. е. мы доказали $(*)$. ■

Следствие. Если $f(x,y)$ – непрерывна и ≥ 0 на Π_∞ и $I(y)$ – непрерывна на $[c,d]$, то справедлива формула $(*)$.

Доказательство. По признаку Дини $I(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$. Таким образом, все условия теоремы 3 выполняются и, следовательно, справедлива формула $(*)$. ■

Теорема 4 (несобственное интегрирование). Пусть $f(x,y) \geq 0$ и непрерывна при $x \geq a$ и $y \geq c$. Пусть, далее, интегралы $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ и $K(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$ непрерывны, соответственно, при $y \geq c$ и $x \geq a$. Тогда из сходимости одного из следующих несобственных интегралов

$$\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy = \int\limits_c^{+\infty} \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy, \int\limits_a^{+\infty} K(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx$$

следует сходимость другого и равенство этих интегралов.

<u>Доказательство.</u> Допустим, что сходится $\int\limits_{c}^{+\infty} I(y)dy$. Докажем, что сходится $\int\limits_{a}^{+\infty} K(x)dx$ и что он равен $\int\limits_{c}^{+\infty} I(y)dy$, т. е. нужно доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > a \forall \overline{R} \geq A \left| \int\limits_{c}^{+\infty} I(y)dy - \int\limits_{a}^{\overline{R}} K(x)dx \right| < \varepsilon. \qquad (1)$$

По условиям теоремы $f(x,y) \geq 0$ и непрерывна на полуполосе $\{(x,y) : 0 \leq x \leq \overline{R}, c \leq y < +\infty\}$, интеграл $K(x)$ непрерывен при $x \geq a$. Таким образом, выполнены все условия следствия из теоремы 3, поэтому для $\forall \overline{R} \geq a : \int\limits_{a}^{\overline{R}} K(x)dx = \int\limits_{a}^{\overline{R}}(\int\limits_{c}^{+\infty} f(x,y)dy)dx = \int\limits_{c}^{+\infty}(\int\limits_{a}^{\overline{R}} f(x,y)dx)dy.$ (2)

Преобразуем разность из (1), используя сходимость $\int\limits_{c}^{+\infty} I(y)dy$ и равенства (2): $\int\limits_{c}^{+\infty} I(y)dy - \int\limits_{a}^{\overline{R}} K(x)dx = \int\limits_{c}^{+\infty}(\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx)dy - \int\limits_{c}^{+\infty}(\int\limits_{a}^{\overline{R}} f(x,y)dx)dy = \int\limits_{c}^{+\infty}(\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_{a}^{\overline{R}} f(x,y)dx)dy = \int\limits_{c}^{+\infty}(\int\limits_{\overline{R}}^{+\infty} f(x,y)dx)dy = \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^{+\infty}(\int\limits_{\overline{R}}^{+\infty} f(x,y)dx) + \int\limits_{c}^{\overline{\overline{R}}}(\int\limits_{\overline{R}}^{+\infty} f(x,y)dx)dy$, для $\forall \overline{\overline{R}} > c.$ (3)

Оценим интегралы из соотношения (3). По условию $\int\limits_{c}^{+\infty} I(y)dy$ сходится. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \overline{\overline{R}} > c$ такое, что $0 \leq \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^{+\infty} I(y)dy < \frac{\varepsilon}{2}$. $\Rightarrow 0 \leq \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^{+\infty}(\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx)dy < \frac{\varepsilon}{2}$. $\Rightarrow$ (т. к. $f(x,y) \geq 0$) $\Rightarrow$ При выбранном $\overline{\overline{R}} > c$ и $\forall \overline{R} \geq a : 0 \leq \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^{+\infty} (\int\limits_{\overline{R}}^{+\infty} f(x,y)dx)dy < \frac{\varepsilon}{2}$ (4)

Зафиксируем $\overline{\overline{R}}$ так, чтобы выполнялось (4). На полуполосе $\{(x,y) : a \leq x < +\infty, c \leq y \leq \overline{\overline{R}}\}$ функция $f(x,y)$ удовлетворяет всем условиям признака Дини равномерной сходимости несобственных интегралов, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \, \exists A \geq a \, \forall \overline{R} \geq A \forall y \in [c, \overline{\overline{R}}] : 0 \leq \int\limits_{\overline{R}}^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2(\overline{\overline{R}}-c)}$.

Отсюда следует оценка $0 \leq \int\limits_{c}^{\overline{\overline{R}}} (\int\limits_{\overline{R}}^{+\infty} f(x,y)dx)dy < \frac{\varepsilon}{2}$. (5)

Из $(3),(4),(5) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \geq a \forall \overline{R} \geq A$ будет верно (1). ▬

Примеры вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра.

1. Дифференцируя по параметру, вычислить интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos(yx)}{x} e^{-ax} dx, \text{ где } y > 0, a > 0.$$

▲Функции $f(x,y) = \frac{1-\cos(yx)}{x} e^{-ax}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-ax}\sin(yx)$ непрерывны на множестве $x > 0, y > 0$. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(yx)dx$ сходится равномерно и y на множестве $y > 0$. Таким образом, условия теоремы 2 выполняются и производная $I(y)$ выражается интегралом

$$I'(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(yx)dx = \frac{y}{y^2+a^2}$$

Отсюда следует

$$I(y) = \frac{1}{2}\ln(y^2+a^2) + C$$

При $y = 0$ интеграл $I(y)$ обращается в 0, поэтому $C = -\frac{1}{2}\ln a^2$ и окончательно

$$I(y) = \frac{1}{2}\ln(a + \frac{y^2}{a^2}).\blacktriangle$$

2. Используя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

$\blacktriangle$Интеграл $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}dx = \frac{1}{y}$ сходится равномерно относительно y для $y \geq y_0 > 0$. Функция $f(x,y) = e^{-yx}$ – непрерывна по x, y. Таким образом, условия теоремы 3 выполняются и следовательно $\int\limits_a^b I(y)dy = \int\limits_a^b (\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}dx)dy = \int\limits_0^{+\infty} (\int\limits_a^b e^{-yx}dx)dy = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int\limits_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}.\blacktriangle$

3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, с особенностью в конечной точке.

Пусть функция $f(x,y)$ задана на $\overline{\Pi} = \{(x,y) : a \leq x < b, a \leq y \leq d\}$ и пусть при $\forall y \in [c,d]$ интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ имеет единственную особенность в точке b и сходится (как несобственный).

При перечисленных условиях определена функция

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (*)$$

Определение 1. Функция $I(y)$ называется несобственным интегралом с особенностью в конечной точке "b", зависящим от параметра y.

Определение 2. Несобственный интеграл $(*)$ называется равномерно сходящимся по y на $[c,d]$, если он сходится для

$\forall y \in [c,d]$ и для $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in [a,b)$, зависящее только от ε, такое, что $\forall R \in (A,b) \forall y \in [c,d] : \left|\int\limits_R^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$.

Для несобственных интегралов с особенностью в конечной точке b, зависящих от параметра y, формулируются и доказываются: критерий Коши; признаки Вейерштрасса, Дини; теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости по параметру. Мы ограничимся формулировкой критерия Коши и признака Вейерштрасса.

<u>Теорема 1 (критерий Коши).</u> Для равномерной сходимости несобственного интеграла $I(y)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) \in [a,b)$, такая, что $\forall R', R''(A < R' < R'' < b) \forall y \in [c,d] : \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$.

<u>Теорема 2 (признак Вейерштрасса).</u> Пусть $f(x,y)$ определена на $\overline{\Pi}$ и $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a,b'], b' < b$. Пусть далее на $\overline{\Pi} : |f(x,y)| \le g(x)$. Тогда из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует равномерная сходимость по $y \in [c,d]$ интеграла $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$.

Все остальные утверждения (признаки Дини, теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости по параметру) формулируются с аналогичными изменениями, поэтому предлагается сформулировать их самостоятельно.

Доказательство перечисленных утверждений аналогичны доказательствам подобных из предыдущего раздела, в силу чего мы их не приводим.

<u>Замечание.</u> При изучении тем 1 и 2 параметр y был скалярным. На самом деле параметр y может быть вектором $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Исключение составляет теорема о несобственном интегрировании по параметру, т. к. мы не изучали кратного несобственного интегрирования. Формулировка остальных теорем при замене скалярного параметра на векторный сохраняется с учетом следующих естественных изменений: в теоремах о дифференцировании по параметру под знаком

интеграла дифференцирование будет частным, т. е. будет браться частная производная по $y_i, i = \overline{1, n}$; области $\Pi, \overline{\Pi}, \Pi_\infty$ будут определяться также с соответствующими изменениями
$\Pi = \{(x, y) : a \le x \le b, c_i \le y_i \le d_i, i = \overline{1, n}\}$,
$\overline{\Pi} = \{(x, y) : a \le x < b, c_i \le y_i \le d_i, i = \overline{1, n}\}$,
$\Pi_\infty = \{(x, y) : a \le x < \infty, c_i \le y_i \le d_i, i = \overline{1, n}\}$.

§ 2.3 Интегралы Эйлера

I. Бета-функция.

Эйлеровым интегралом 1-го рода или "бета функцией" называется интеграл

$$B(a, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx. \qquad (*)$$

В этом интеграле a и b считаются параметрами.
При $a \ge 1$ и $b \ge 1$ подинтегральная функция в $(*)$ непрерывна, и поэтому интеграл в правой части выражения $(*)$ является собственным. Если $a < 1$ и $b < 1$, то интеграл $(*)$ будет несобственным интегралом, зависящим от параметров a и b.

1. Область сходимости бета-функции.

Интеграл $B(a, b)$, если и имеет особенности, то только в точках $x = 0, x = 1$. Исследуем этот интеграл на сходимость при $a < 1$ и $b < 1$. Для этого разложим его на два интеграла
$B_1(a, b) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, B_2(a, b) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$
Интеграл $B_1(a, b)$, при $a < 1$, имеет особую точку $x = 0$. При любом b справедливо неравенство $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \le M(b)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx$, где $M(b) = \max\limits_{x \in [0, \frac{1}{2}]} (1-x)^{b-1}$.

Интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx$ сходится как несобственный при $a > 0$, поэтому интеграл $B_1(a, b)$ сходится при $\forall a > 0$ и $\forall b$.

В то же время имеем $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \geq m(b)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx$, где $m(b) = \min\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]}(1-x)^{b-1}$.

Интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx$ расходится при $a \leq 0$, следовательно, итнтеграл $B_1(a,b)$ расходится при $\forall a \leq 0$ и $\forall b$. Аналогично показывается, что интеграл $B_2(a,b)$ сходится при $b > 0$ и расходится при $b \leq 0$ (все это при $\forall a$).

Таким образом, мы установили, что интеграл $B(a,b)$ сходится, т. е. функция $B(a,b)$ определена только при $a > 0$ и $b > 0$.

2. Непрерывность бета-функции.

Докажем, что $B(a,b)$ непрерывна в квадранте $a > 0, b > 0$. Для чего достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла $(*)$ относительно параметров a и b при $a \geq a_0 > 0$ и $b \geq b_0 > 0$ для любых фиксированных положительных значений a_0, b_0. Так как $a_0 - 1 \leq a - 1, b_0 - 1 \leq b - 1$, то при $0 < x < 1$ справедливо неравенство $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq x^{a_0-1}(1-x)^{b_0-1}$.

Отсюда и из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 x^{a_0-1}(1-x)^{b_0-1}dx$ вытекает, в силу признака Вейерштрасса, равномерная сходимость интеграла $B(a,b)$ для указанных значений a и b. Таким образом, непрерывность $B(a,b)$ при $a > 0$ и $b > 0$ доказана.

3. Некоторые свойства бета-функции.

$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx =$ (после замены $x = 1-t$) $=$

$-\int\limits_1^0 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt = \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt = B(b,a)$.

Таким образом, функция $B(a,b)$ является симметричной относительно a и b.

Пусть $b > 1$. Интегрируя по частям, находим $B(a,b) = \int\limits_0^1 (1-x)^{b-1}d(\frac{x^a}{a}) = \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\Big|_0^1 + \frac{b-1}{a}\cdot\int\limits_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx = \frac{b-1}{a}\cdot$

$\int\limits_0^1 [x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)](1-x)^{b-2}dx = \frac{b-1}{a} \cdot \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$

Решая полученное уравнение относительно $B(a,b)$, получим

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} \cdot B(a,b-1). \tag{1}$$

Эту формулу можно применять с целью уменьшения "b", пока "b" остается больше 1.

В виду симметричности $B(a,b)$ имеет место формула

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} \cdot B(a-1,b), \tag{2}$$

которую можно применять с целью уменьшения "a", если $a > 1$. Формулы (1) и (2) называются формулами приведения для функции $B(a,b)$.

Если $b \in \mathbf{N}$ и $b > 1$, то из (1) следует $B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a+1} \cdot B(a,1)$, но $B(a,1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a}$.

Такиим образом, $B(a,n) = B(n,a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1)}$.

Если, кроме того, $a \in \mathbf{N}$ и $a > 1$, то $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$.

II. Гамма-функция.

Интеграл $\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ называется эйлеровым интегралом 2-го рода или "гамма-функцией". В этом интеграле a-параметр.

1. Область сходимости гамма-функции.

Интеграл $\Gamma(a)$ имеет два типа особеностей:

1. интегрирование на полупрямой $0 \le x < +\infty$
2. при $a < 1$ в окрестности 0 подинтегральная функция неограничена, т. е. 0 – особая точка.

Чтобы разделить эти особенности, разобьем область интегрирования на две части: $\Gamma(a) = \int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx +$

$\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \Gamma_1(a) + \Gamma_2(a)$.

$\Gamma_1(a) \le \int\limits_0^1 x^{a-1}dx < +\infty$, при $a > 0$. $\Gamma_1(a) \ge \frac{1}{e} \cdot \int\limits_0^1 x^{a-1}dx = +\infty$, при $a \le 0$. Таким образом, интеграл $\Gamma_1(a)$ сходится при $a > 0$. $\Gamma_2(a) \le c \cdot \int\limits_1^{+\infty} e^{-x/2}dx < +\infty$, (здесь $c = \max\limits_{x\in[1,+\infty)} x^{a-1}e^{-x/2}$), т. е. интеграл $\Gamma_2(a)$ сходится при любом a. Итак, мы доказали, что областью сходимости гамма-функции $\Gamma(a)$ является полупрямая $a > 0$.

2. Непрерывность гамма-функции.

Для доказательства непрерывности $\Gamma(a)$ на полупрямой $a > 0$, достаточно установить равномерную сходимость интегралов $\Gamma_1(a)$ и $\Gamma_2(a)$ относительно параметра a при $0 < a_0 \le a \le a_1$ для любых фиксированных значений a_0 и a_1, удовлетворяющих условию $0 < a_0 < a_1$.

Так как $a \ge a_0 > 0$, то $x^{a-1}e^{-x} \le x^{a_0-1} \forall x \in [0,1]$. Интеграл $\int\limits_0^1 x^{a_0-1}dx < +\infty$ (т. к. $a_0 > 0$), поэтому по признаку Вейерштрасса $\Gamma_1(a)$ сходится равномерно при $\forall a \ge a_0$.

Пусть $0 < a \le a_1$. Тогда $x^{a-1}e^{-x} \le x^{a_1-1}e^{-x} \forall x \in [1,+\infty)$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^{a_1-1}e^{-x}dx < +\infty$ (т. к. $a_1 > 0$), поэтому по признаку Вейерштрасса $\Gamma_2(a)$ сходится равномерно при $\forall a \le a_1$.

Таким образом, интеграл $\Gamma(a) = \Gamma_1(a) + \Gamma_2(a)$ сходится равномерно по a на $[a_0, a_1]$ и, следовательно, $\Gamma(a)$ непрерывна при $a > 0$.

3. Формула приведения для гамма-функции.

Применяя формулу интегрирования по частям к функции $\Gamma(a+1)$ при $a > 0$, получим $\Gamma(a+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-x}dx =$

$$(-x^a e^{-x})|_0^{+\infty} + a\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = a \cdot \Gamma(a).$$

Последовательно применяя полученную формулу для любого $a > n-1$ и любого $n \in \mathbf{N}$, получим $\Gamma(a+1) = a \cdot (a-1) \cdot \cdots \cdot (a-n+1) \cdot \Gamma(a-n+1)$. Полученное соотношение называется формулой приведения для гамма-функции $\Gamma(a)$.

Если $a = n$, где $n \in \mathbf{N}$, то $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n! \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = n!$, т. к. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

III. Связь между эйлеровыми интегралами.

$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$. Сделаем подстановку $x = ty (t > 0)$. $\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} (ty)^{a-1}e^{-ty}tdy. \Rightarrow \frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int\limits_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-ty}dy$. Заменим a на $a+b$ и t на $t+1$. Получим $\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy$. Умножим обе части данного равенства на t^{a-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$.

$$\Gamma(a+b) \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}(\int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy)dt. \quad (1)$$

Покажем, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt = B(a,b)$. Для этого сделаем в интеграле $B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ подстановку $x = \frac{t}{1+t}$, где $t \in (0, +\infty)$. Получим $B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$.

Интегралы справа в (1) переставим. В результате получим $\Gamma(a+b) \cdot B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}(\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-ty}dt)dy = \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y} \cdot \frac{\Gamma(a)}{y^a}dy = \Gamma(a) \cdot \int\limits_0^{+\infty} y^{b-1}e^{-y}dy = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b)$.

Таким образом нами доказана формула

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (2)$$

Убедимся теперь в возможности изменения порядка интегрирования в правой части (1). Для этого нужно проверить выполнение условий теоремы 4 (несобственное интегрирование) §2.2.

Пусть сначала $a > 1$ и $b > 1$. Тогда

1. Функция $f(t,y) = t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(1+t)y} \geq 0$ и непрерывна на квадранте $t \geq 0, y \geq 0$.

2. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t,y)dy = t^{a-1}\int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy = \frac{\Gamma(a+b)t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$ есть непрерывная функция от t при $t \geq 0$.

3. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t,y)dy = y^{a+b-1}e^{-y}\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-ty}dy = \Gamma(a)y^{b-1}e^{-y}$ есть непрерывная функция от y при $y \geq 0$.

4. Сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}(\int\limits_0^{+\infty} f(t,y)dt)dy$ установлена непосредственным вычислением.

Итак, при $a > 1, b > 1$ условия теоремы 4 выполняются и, следовательно, формула (2) справедлива. Если же $a > 0, b > 0$, то по доказанному справедлива формула $B(a+1,b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\cdot\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b-2)}$. Из этой формулы с помощью формул приведения для функций $B(a,b), \Gamma(a)$ мы получим формулу (2), но уже при условии $a > 0, b > 0$.

Примеры применения интегралов Эйлера.

1. Доказать

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = 1$$

$\blacktriangle x = t^{\frac{1}{n}}. \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt = \frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})$.

$\Gamma(\frac{1}{n}) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt = n\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt^{\frac{1}{n}} = ne^{-t}t^{\frac{1}{n}}\Big|_0^{+\infty} - n\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}}de^{-t} = n\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{n}}dt = n\Gamma(\frac{1}{n}+1)$.

Используя полученное равенство, найдем $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \Gamma(1+\frac{1}{n})$.

Функция $\Gamma(x)$ непрерывна при $x > 0$. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \Gamma(1) = 1$.▲

2. Выразить через интегралы Эйлера

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x dx, \text{ где } a, b > 0.$$

▲Пусть $t = \sin x$. Тогда
$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x dx = \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t^2)^{\frac{b}{2}-1} dt.$
Далее положим $t^2 = y$. Получим
$\int\limits_0^1 t^{a-1}(1 - t^2)^{\frac{b}{2}-1} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^{\frac{a-1}{2}}(1-y)^{\frac{b}{2}-1} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^{\frac{a}{2}-1}(1 - y)^{\frac{b}{2}-1} dy = \frac{1}{2} B(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{a+b}{2})}$.▲

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Глава 3

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе мы рассмотрим обобщение понятия определенного интеграла, определяемого для функций, опрделенных на отрезке, на случай плоской или пространственной кривой.

Интегралы такого рода называются криволинейными.

§ 3.1 Кривая в 3-мерном пространстве. Длина дуги кривой, заданной параметрически

1. Кривая в 3-мерном пространстве.

Определение 1. При непрерывном возрастании $t \in [a, b]$ непрерывная вектор-функция $x(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \in R_3$, описывает некоторую траекторию, которую называют непрерывной кривой Г, заданной параметрически через параметр t.

Определение 2. Кривая Г называется гладкой на $[a, b]$, если она задается при помощи гладкой вектор-функции $x(t)$.

Замечание. $x(t)$ называется гладкой вектор-функцией, если она имеет непрерывную $\neq 0$ производную на $[a, b]$ или, что эквивалентно, если компоненты $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ вектор-функции $x(t)$ есть гладкие скалярные функции на $[a, b]$, имеющие производные, одновременно $\neq 0$.

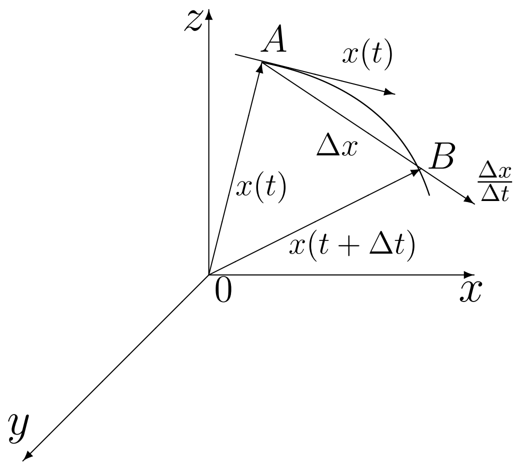
Пусть $t = \lambda(\tau)$ в уравнение $x(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$. Получим $x^*(t) = (\varphi(\lambda(\tau)), \psi(\lambda(\tau)), \chi(\lambda(\tau))), \tau \in [c, d]$.

Полученное уравнение, очевидно, определяет ту же кривую Γ, но через параметр τ.

Определение 3. Кривая Γ называется ориентированной, если при параметрическом представлении Γ используется функция $\lambda(\tau)$ с определенной монотонностью (или строго возрастает, или строго убывает).

Определение 4. Если функция $\lambda(\tau)$ строго возрастает, то кривую Γ обозначают Γ_+. Если же $\lambda(\tau)$ строго убывает, то эту же кривую Γ называют ориентированной противоположно и обозначают Γ_-.

Пусть в пространстве R_3 с прямоугольной системой координат (x, y, z) задана гладкая кривая Γ с помощью вектор-функции $x(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), t \in [a, b]$. $A \in \Gamma, B \in \Gamma, A = x(t), B = x(t + \Delta t)$, т. е. A и B - это концы векторов $x(t)$ и $x(t + \Delta t)$. $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$.



При $\Delta t \to 0$ точка B, двигаясь по Γ, стремится к точке A, а секущая, проходящая через точки A и B, стремится занять положение определенной прямой, которую называют касательной к кривой в точке A. Поэтому вектор $\dot{x} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ лежит на касательной к Γ в точке A. Длина $\| \dot{x} \|$ вектора $\dot{x}$ есть предел длины вектора $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, т. к. $\left| \| \dot{x} \| - \|\frac{\Delta x}{\Delta t}\| \right| \leq \left\| \dot{x} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \right\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Очевидно, что если t время, а конец вектора $x(t)$ описывает движение некоторой точки, то $\dot{x}(t)$ есть вектор, выражающий скорость этой точки в момент времени t. Длина его $\| \dot{x} \|$ есть скалярная величина скорости.

обозначим через α, β, γ углы, которое образует положительное направление касательной (направление $\dot{x}$)

соответственно с положительными направлениями осей координат x, y, z. Очевидно

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}},\ \cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\chi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}}.$$

- 2. Длина дуги кривой, заданной параметрически.

Пусть Γ непрерывная кривая $x(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), t \in [a, b]$.
Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Им соответствуют точки кривой $\Gamma : A = A_0, A_1 \ldots, A_n = B$. Если соединить их отрезками, то получим ломаную, вписанную в Γ.

Определение. Длина кривой Γ называется предел, к которому стремится сумма длин звеньев этой ломаной $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} |A_{k-1}, A_k|$ при $\delta = \max(t_k - t_{k-1}) \to 0; n \to +\infty$. Если этот предел существует, то говорят, что кривая Γ спрямляема на отрезке $[a, b]$ изменения параметра t.

Найдем формулу для длины кривой, заданной параметрически $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [a, b]$.

Теорема. Если Γ гладкая кривая, заданная параметрически $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [a, b]$, то длина кривой Γ высчитывается по формуле

$$S = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt. \qquad (*)$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и составим сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2}$, где $\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}), \Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}), \Delta z_k = \chi(t_k) - \chi(t_{k-1}), \delta = \max\limits_k \Delta t_k, \Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.
S_n – длина ломаной, вписанной в Γ вершинами в точках,

соответствующих значениям t_k. По формуле конечных приращений Лагранжа, запишем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'(\mu_k)^2 + \psi'(\nu_k)^2 + \chi'(\lambda_k)^2}\Delta t_k, \text{ где } \mu_k, \nu_k, \lambda_k \in (t_{k-1}, t_k).$$

Обозначим $\alpha(u,v,w) = \sqrt{\varphi'(u)^2 + \psi'(v)^2 + \chi'(w)^2}, \varepsilon_k = \alpha(\mu_k, \nu_k, \lambda_k) - \alpha(t_k, t_k, t_k)$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'(t_k)^2 + \psi'(t_k)^2 + \chi'(t_k)^2}\Delta t_k + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta t_k. \qquad (1)$$

Покажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta t_k \to 0$ при $\delta \to 0$. По условию функция $\alpha(u,v,w)$ непрерывна на кубе $\Delta = \{a \le u, v, w \le b\}$. Очевидно, что расстояние между точками (t_k, t_k, t_k) и $(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)$ куба Δ не превосходит $\delta\sqrt{3}$, поэтому $|\varepsilon_k| = |\alpha(t_k, t_k, t_k) - \alpha(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)| \le \sup\limits_{||(u,v,w)-(\mu,\nu,\lambda)||<\delta\sqrt{3}} |\alpha(u,v,w) - \alpha(\mu,\nu,\lambda)| = \omega(\delta\sqrt{3}) \to 0$, при $\delta \to 0$. (последнее справедливо, так как функция $\alpha(u,v,w)$ равномерно непрерывна на замкнутом кубе Δ). Таким образом, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta t_k\right| \le \omega(\delta\sqrt{3}) \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta t_k = (b-a)\omega(\delta\sqrt{3}) \to 0$ при $\delta \to 0$. Отсюда и из (1), т. к. $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$ непрерывны на $[a,b]$, следует $S = \lim\limits_{\delta\to 0} S_n = \lim\limits_{\delta\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'(t_k)^2 + \psi'(t_k)^2 + \chi'(t_k)^2}\Delta t_k = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}dt$ ■

<u>Замечание 1.</u> Из теоремы следует, что любая гладкая кривая, заданная параметрически на $[a,b]$, спрямляема на $[a,b]$.

<u>Замечание 2.</u> Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x), x \in [a,b]$, где f имеет непрерывную производную на $[a,b]$, то длина дуги выражается (как нам известно) формулой $S = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$. Для получения этой формулы достаточно подставить в $(*)$ $x = x, y = f(x), z = 0$.

<u>Замечание 3.</u> Длину дуги s кривой Γ можно рассматривать при параметрическом задании Γ как один из допустимых параметров.

Доказательство. Пусть $s = S(t) = \int\limits_a^t \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2 + \chi'(\tau)^2} d\tau, s \in [0, \Lambda], \Lambda$ – длина кривой Г. Известно, что $S(t)$ (как функция верхнего предела интегрирования) непрерывно дифференцируема:

$$S'(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} > 0, S(a) = 0.$$

отсюда следует, что $S(t)$ – строго возрастающая функция, отображающая отрезок $[a, b]$ изменения параметра t на некоторый отрезок $[0, \Lambda]$ изменения s, и существует обратная к ней функция $t = \Lambda(s), s \in [0, \Lambda]$. Причем $\Lambda(s)$ – непрерывна и имеет непрерывную производную $\Lambda'(s) > 0$. Таким образом, s можно рассматривать как один из допустимых параметров гладкой кривой $\Gamma : x = \varphi(\Lambda(s)), y = \psi(\Lambda(s)), z = \chi(\Lambda(s)), s \in [0, \Lambda]$. ●

§ 3.2 Криволинейный интеграл 1-го рода.

Пусть в R_3 с прямоугольной системой координат (x, y, z) задана гладкая кривая $\Gamma : x = \varphi(s), y = \psi(s), z = \chi(s), s \in [0, \Lambda]$, где параметром служит длина дуги $s; \Lambda$ – длина кривой Г.

Пусть на Г, или множестве, содержащем Г, задана непрерывная функция $F(x, y, z)$.

Разобьем кривую Г на n частей точками $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (здесь A_0, A_m – соответственно, начало и конец кривой Г). Пусть M_i – произвольная точка на дуге $\overset{\smile}{A_{i-1}, A_i}$, σ_i – длина дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}, A_i}$, $\sigma = \max\limits_i \sigma_i$. Составим интегральную сумму $I_n(F) = \sum\limits_{i=1}^n F(M_i)\sigma_i$.

Определение 1. Если при $\sigma \to 0$ существует $\lim I_n(F) = I$, не зависящий от способа разбиения Г и выбора точек M_i, то I называется криволинейным интегралом 1-го рода и обозначается: $\int\limits_\Gamma F(x, y, z) ds$.

Вычисление криволинейного интеграла $\int\limits_\Gamma F(x, y, z) ds$ можно свести к вычислению обыкновенного определенного интеграла. Обозначим через $s_i (i = 1, \ldots, n)$ длину дуги, отвечающей точке A_i на кривой Γ. Тогда $\sigma_i = s_i - s_{i-1} = \Delta s_i$. Обозначив через $\overset{*}{s}_i$ значение длины дуги, отвечающее точке M_i, получим

$$I_n(F) = \sum_{i=1}^{n} F(M_i)\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} F(\varphi(\overset{*}{s}_i), \psi(\overset{*}{s}_i), \chi(\overset{*}{s}_i))\Delta s_i. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что интегральная сумма $I_n(F)$ является одновременно интегральной суммой для определенного интеграла, поэтому из (1) следует $\int\limits_{\Gamma} F(x, y, z)ds = \int\limits_{0}^{\Lambda} F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))ds$. Причем существование одного из интегралов влечет за собой существование другого.

Допустим теперь, что гладкая кривая Γ задана произвольным параметрическим уравнением $x = \varphi_1(t), y = \psi_1(t), z = \chi_1(t), t \in [a, b]$. Тогда кривая спрямляема, причем $s = S(t) = \int\limits_{a}^{t} \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \psi_1'(\tau)^2 + \chi_1'(\tau)^2}d\tau$. Отсюда следует, что $ds = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \psi_1'(t)^2 + \chi_1'(t)^2}dt$. заменяя в интеграле $\int\limits_{0}^{\Lambda} F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))ds$ переменную s на переменную t, получим

$$\int\limits_{\Gamma} F(x, y, z)ds =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} F(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \psi_1'(t)^2 + \chi_1'(t)^2}dt. \qquad (*)$$

Замечание 1. При изменении ориентации кривой Γ величина криволинейного интеграла 1-го рода не изменяется.

Доказательство. Кривую Γ можно задать уравнениями $x = \varphi(\Lambda - s), y = \psi(\Lambda - s), z = \chi(\Lambda - s), s \in [0, \Lambda]$ (Λ – длина кривой Γ). В этом случае кривая Γ получит противоположную ориентацию, но величина криволинейного интеграла 1-го рода не изменится:

$$\int\limits_0^\Lambda F(\varphi(\Lambda - s), \psi(\Lambda - s), \chi(\Lambda - s))ds =$$

$$= -\int\limits_\Lambda^0 F(\varphi(s'), \psi(s'), \chi(s'))ds' =$$

$$= \int\limits_0^\Lambda F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))ds.$$

$\blacksquare$

<u>Замечание 2.</u> Если кривая Γ плоская и задана явным уравнением $y = f(x), x \in [a, b]$, то формула вычисления криволинейного интеграла 1-го рода примет вид:

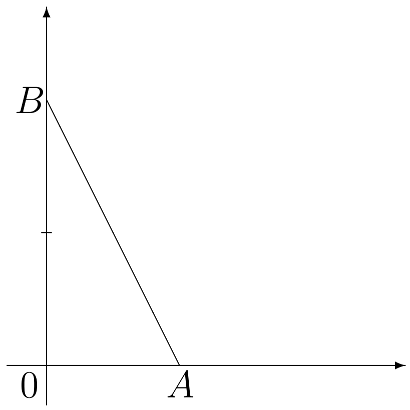
$$\int\limits_\Gamma F(x, y)ds = \int\limits_a^b F(x, f(x))\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

<u>Замечение 3.</u> Формула $(*)$ верна не только для гладкой, но и для непрерывной кусочно-гладкой кривой.

Кривая Γ называется непрерывной кусочно-гладкой, если ее можно задать при помощи непрерывной на $[a, b]$ вектор-функции $x(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ такой, что $[a, b]$ может быть разбито на конечное число частей точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, причем $x(t)$ на этих частях $[t_i, t_{i-1}]$ задает гладкие кривые $\Gamma_i, i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\int\limits_\Gamma F(x, y, z)ds = \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{\Gamma_i} F(x, y, z)ds = \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}dt = \int\limits_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}dt.$

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $I = \int\limits_{\Gamma}(2x+y)ds$, где Γ – ломаная $ABOA; A(1,0), B(0,2), O(0,0)$.

▲



Пусть I_1, I_2, I_3 – криволинейные интегралы от функции $2x+y$ по отрезкам OA, AB, BO соответственно. Отрезок OA задается уравнением $y = 0, 0 \le x \le 1$, поэтому $I_1 = \int\limits_0^1 3xdx = x^2|_0^1 = 1$. отрезок AB задается уравнением $y = -2x+2, 0 \le x \le 1$, поэтому $I_2 = \int\limits_0^1 2\sqrt{1+4}dx = 2\sqrt{5}$. Отрезок BO задается уравнением $x = 0, 0 \le y \le 2$. Отсюда следует $I_3 = \int\limits_0^2 ydy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 2$. Очевидно, что $I = I_1+I_2+I_3$ и следовательно $I = 3+2\sqrt{5}$.▲

2. Вычислить уриволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{\Gamma}(x^{4/3}+y^{4/3})ds$, где Γ – астроида $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$.

▲ Запишем параметрические уравнения астроиды: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$. Затем применим формулу для вычисления криволинейного интеграла первого рода в случае, когда кривая Γ задана параметрически: $\int\limits_{\Gamma}(x^{4/3}+y^{4/3})ds = \int\limits_0^{2\pi} a^{4/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)3a|\cos t\sin t|dt = 12a^{7/3}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^5 t\sin t + \sin^5 t\cos t)dt = 12a^{7/3}\left(-\frac{\cos^6 t}{6}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin^6 t}{6}\Big|_0^{\pi/2}\right) = 4a^{7/3}$. ▲

3. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}ds$, где Γ – кривая, заданная уравнением $(x^2+y^2)^{3/2} = a^2(x^2-y^2)$.

▲ Прежде всего докажем следующее утверждение: "Пусть Γ – гладкая кривая, заданная в полярных координатах уравнением

$r = r(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, а функция $F(x,y)$ непрерывна на Γ. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi."$$

Очевидно $x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi$. Таким образом мы имеем параметрическое задание кривой Γ и параметром является φ. Далее воспользуемся формулой для вычисления криволинейного интеграла первого рода, когда кривая Γ задана параметрически:

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Применим полученную формулу для вычисления интеграла $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}ds$. Для чего перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Уравнение кривой Γ примет вид $r = a^2\cos^2\varphi, \varphi \in \{\varphi : -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi/4, 3\pi/4 \le \varphi \le 5\pi/4\}$. Далее произведем вычисления:

$$\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}ds = 2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} a^4\cos 2\varphi\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{\sqrt{3}}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}d(\sqrt{3}\sin 2\varphi) = 2a^4 + \frac{a^4}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}+2). \blacktriangle$$

4. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $I = \int\limits_{\Gamma}(x+y)ds$, где Г – меньшая часть окружности

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2, \\ y=x, \end{cases}$$

ограниченная точками $A(0,0,R)$ и $B(R/2, R/2, R/\sqrt{2})$.

▲ Запишем параметрические уравнения данной части окружности в виде $x=t, y=t, z=\sqrt{R^2-2t^2}, 0 \le t \le R/2$. Тогда $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2} = \sqrt{1+1+\frac{4t^2}{R^2-2t^2}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{R^2-2t^2}}$ и по формуле вычисления криволинейного интеграла первого рода, когда Г задана параметрически, находим

$$I = \int\limits_0^{R/2} 2t\frac{R\sqrt{2}dt}{\sqrt{R^2-2t^2}} = -\frac{R\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{R/2}\frac{d(R^2-2t^2)}{\sqrt{R^2-2t^2}} = R^2(\sqrt{2}-1). \blacktriangle$$

§ 3.3 Криволинейный интеграл 2-го рода

Пусть в R_3 с прямоугольной системой координат (x,y,z), задана ориентированная гладкая кривая Г. Пусть на Г, или на множестве, содержащем Г, заданы непрерывные функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$. разобьем Г на n частей точками $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (здесь A_0, A_n – соответственно, начало и конец кривой Г). Пусть Δs_i – дуга кривой между точками A_{i-1} и $A_i; \Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ – проекции Δs_i на оси x, y, z, соответственно; σ_i – длина дуги $\Delta s_i; \sigma = \max\limits_i \sigma_i; M_i$ –произвольная точка на Δs_i. Составим интегральные суммы:

$$S_x = \sum_{i=1}^n P(M_i)\Delta x_i,\ S_y = \sum_{i=1}^n Q(M_i)\Delta y_i,\ S_z = \sum_{i=1}^n R(M_i)\Delta z_i.$$

<u>Определение.</u> Если при $\sigma \to 0$ суммы S_x, S_y, S_z имеют конечные пределы, не зависящие от выбора точек M_i и от способа разбиения Г, то величина $\lim\limits_{\sigma\to 0}(S_x + S_y + S_z) = \int\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy + Rdz) = \int\limits_{\Gamma}(\overline{a}ds)$ называется криволинейным

интегралом 2-го рода от вектора $\overline{a} = \overline{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ вдоль ориентированной кривой Γ.

Замечание 1. $\int\limits_{\Gamma}(\overline{a}ds) = \int\limits_{0}^{\Lambda}(\overline{a},\overline{\tau})ds =$, где $\overline{\tau} = (\varphi'(s), \psi'(s), \chi'(s))$ – единичный касательный вектор к Γ, заданной параметрически: $x=\varphi(s), y=\psi(s), z=\chi(s), s\in[0,\Lambda]$ (роль параметра играет длина дуги s).

Доказательство. $\int\limits_{\Gamma}(Pdx+Qdy+Rdz) = \lim\limits_{\sigma\to 0}(S_x+S_y+S_z) = \lim\limits_{\sigma\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(M_i)\Delta x_i + \lim\limits_{\sigma\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(M_i)\Delta y_i + \lim\limits_{\sigma\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(M_i)\Delta z_i = \lim\limits_{\sigma\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(M_i)\varphi'(\overset{*}{s}_i)\Delta s_i + \lim\limits_{\sigma\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(M_i)\psi'(\overset{*}{s}_i)\Delta s_i + \lim\limits_{\sigma\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(M_i)\chi'(\overset{*}{s}_i)\Delta s_i = \int\limits_{0}^{\Lambda}P(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\varphi'(s)ds + \int\limits_{0}^{\Lambda}Q(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\psi'(s)ds + \int\limits_{0}^{\Lambda}R(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\chi'(s)ds = \int\limits_{0}^{\Lambda}(P(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\varphi'(s) + Q(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\psi'(s) + R(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\chi'(s))ds = \int\limits_{0}^{\Lambda}(\overline{a},\overline{\tau})ds$. Здесь $\overset{*}{s}_i$ длина дуги, отвечающая точке M_i. ∎

Замечание 2. $\int\limits_{\Gamma_-}(\overline{a}ds) = -\int\limits_{\Gamma}(\overline{a}ds)$.

Доказательство. Для Γ_- единичной касательный вектор есть "$-\tau$".$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma_-}(\overline{a}ds) = \int\limits_{\Gamma}(\overline{a},-\overline{\tau})ds = -\int\limits_{\Gamma}(\overline{a},\overline{\tau})ds = -\int\limits_{\Gamma}(\overline{a}ds)$. ∎

● Замечание3. Если Γ задана: $x(t) = (\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t)), t\in[a,b]$, то $\int\limits_{\Gamma}(\overline{a}ds) = \int\limits_{a}^{b}(P(\varphi_1(t),\psi_1(t),\chi_1(t))\varphi_1'(t) + Q(\varphi_1(t),\psi_1(t),\chi_1(t))\psi_1'(t) + R(\varphi_1(t),\psi_1(t),\chi_1(t))\chi_1'(t))dt$.

Доказательство. Между длиной дуги s и параметром t существует связь, задаваемая уравнением: $s = S(t) =$

$\int\limits_a^t \sqrt{\varphi_1'(\tau), \psi_1'(\tau), \chi_1'(\tau)} d\tau, s \in [0\Lambda]$. Функция $S(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную > 0 на $[a, b]$

Используя эту связь, запишем уравнения $\Gamma : x = \varphi(s), y = \psi(s), z = \chi(s), s \in [0, \Lambda]$ (s – длина дуги Γ). Здесь $\varphi(s) = \varphi_1(S^{-1}(s)), \psi(s) = \psi_1(S^{-1}(s)), \chi(s) = \chi_1(S^{-1}(s)), t = S^{-1}(s)$ – функция, обратная к функции $s = S(t)$. Заметим, что функция $t = S^{-1}(s)$ существует, так как $s = S(t)$ монотонно возрастает.

По формуле из замечания 1 имеем $\int\limits_\Gamma (\overline{a} ds) = \int\limits_0^\Lambda (P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\varphi'(s) + Q(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\psi'(s) + R(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\chi'(s))ds.$

Сделаем замену $s = S(t)$. Получим

$$\int\limits_\Gamma (\overline{a} ds) = \int\limits_a^b (P(\varphi(S(t)), \psi(S(t)), \chi(S(t)))\varphi'(S(t)) +$$
$$+ Q(\varphi(S(t)), \psi(S(t)), \chi(S(t)))\psi'(S(t)) +$$
$$+ R(\varphi(S(t)), \psi(S(t)), \chi(S(t)))\chi'(S(t)))S'(t)dt =$$
$$= \int\limits_a^b (P(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\varphi_1'(t) + Q(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\psi_1'(t) +$$
$$+ R(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\chi_1'(t))dt, \text{ т. к.}$$

$\varphi(S(t)) = \varphi_1(S^-(S(t))) = \varphi_1(t)$
$\psi(S(t)) = \psi_1(S^-(S(t))) = \psi_1(t)$
$\chi(S(t)) = \chi_1(S^-(S(t))) = \chi_1(t)$
$\varphi'(S(t))S'(t) = \varphi_t'(S(t)) = \varphi_1'(t), \psi'(S(t))S'(t) = \psi_t'(S(t)) = \psi_1'(t), \chi'(S(t))S'(t) = \chi_t'(S(t)) = \chi_1'(t)$. ● ▬

Замечание 4. Формула из замечания 3 верна не только для гладкой, но и для непрерывной кусочно-гладкой кривой.

Замечание 5. Циркуляцией вектора $\overline{a}$ вдоль кривой Γ в заданном направлении называется криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_\Gamma (\overline{a} ds)$.

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \int\limits_{AB} 2xydx + x^2dy$ по трем кривым, соединяющим точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$, изображенным на рисунке.

▲

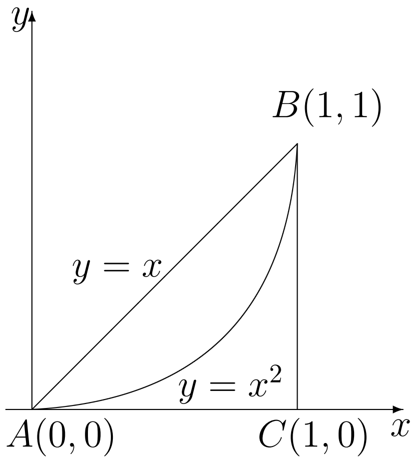


Рис.

1) Пусть кривая AB задана уравнением $y = x$. Тогда $I_1 = \int\limits_0^1 2x \cdot xdx + x^2dx = \int\limits_0^1 3x^2dx = x^3|_0^1 = 1$

2)Пусть кривая AB задана уравнением $y = x^2$. Тогда $I_2 = \int\limits_0^1 2x \cdot x^2dx + x^2 \cdot 2xdx = \int\limits_0^1 4x^3dx = x^4|_0^1 = 1$

3)Интегрируя по ломаной ACB, представим интеграл как сумму двух интегралов по отрезкам AC и CB. Для отрезка $AC: y = 0, 0 \le x \le 1$. Поэтому

$$\int\limits_{AC} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 2x \cdot 0dx + x^2 \cdot 0dx = 0.$$

для отрезка CB имеем: $x = x(y) = 1, 0 \le y \le 1$. Поэтому

$$\int\limits_{CB} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 2 \cdot 1 \cdot y \cdot 0dy + 1^2dy = y|_0^1 = 1.$$

Таким образом,

$$I_3 = \int\limits_{AC} 2xydx + x^2dy + \int\limits_{CB} 2xydx + x^2dy = 1.$$

Мы получим $I_1 = I_2 = I_3 = 1.$▲

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \int\limits_{AB} (4x + y)dx + (x + 4y)dy$, где кривая AB задана уравнением

$y = x^4, A(1,1), B(-1,1)$.

▲ Заметим, что x изменяется от 1 до -1. Поэтому $I = -\int\limits_{-1}^{1}(4x+x^4)dx+(x+4x^4)4x^3dx = -\int\limits_{-1}^{1}(4x+5x^4+16x^7)dx = -2$.▲

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\Gamma}(x+y)dx + (x-y)dy$, где Γ – окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

▲ Запишем параметрические уравнения данной окружности: $x = 1 + 2\cos t, y = 1 + 2\sin t, 0 \leq \leq 2\pi$. Далее воспользуемсяформулой вычисления криволинейного интеграла второго рода в случае параметрическии заданной кривой Γ. Получим

$$\int\limits_{\Gamma}(x+y)dx + (x-y)dy = \int\limits_{0}^{2\pi}(2+2\cos t+2\sin t)(-2\sin t)dt+$$

$$+(2\cos t - 2\sin t)2\cos t dt = \int\limits_{0}^{2\pi}(-4\sin t - 8\sin t\cos t+$$

$$+4\cos 2t)dt = 0. \text{ ▲}$$

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{\Gamma}(y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dx$$

вдоль замкнутого контура Γ, являющегося границей части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной в I октанте: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

▲ Контур Γ состоит из трех кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, каждая из которых является дугой единичной окружности, лежащей соответственно в координатной плоскости oxy, oyz, oxz. Поэтому

$$I = \sum_{k=1}^{3} I_k, \text{ где } I_k = \int\limits_{\Gamma_k}(y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz.$$

Найдем интеграл I_1. Та как кривая Γ_1 лежит в плоскости oxy, то $z = 0, dz = 0$ и $I_1 = \int\limits_{\Gamma_1} y^2dx - x^2dy$, где Γ_1 : $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$. Параметрическое уравнение Γ_1 имеет вид: $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$. По формуле вычисления криволинейного интеграла второго рода, когда кривая интегрирования задана параметрически, получим $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} (-\sin^3 t - \cos^3 t)dt = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 tdt - \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 tdt = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)d(\cos t) - \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)d\sin t = (\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} - (\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$.

Точно также вычисляются интегралы I_2 и I_3. При этом $I_1 = I_2 = I_3$. Следовательно, $I = -4$. ▲

§ 3.4 Формула Грина

Пусть задана область Ω с непрерывной кусочно-гладкой границей Γ, которая может состоять из конечного числа замкнутых, самонепересекающихся контуров таких, что Ω находится внутри одного из них и вне остальных.

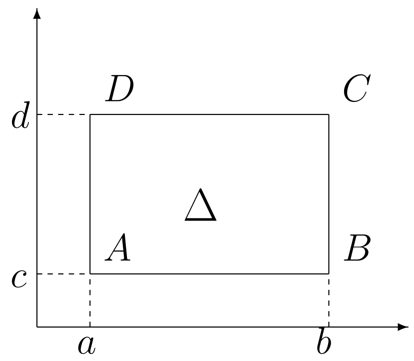
Определение 1. Если при движении по Γ область Ω остается слева (справа), то такое направление обхода называется положительным (отрицательным).

Определение 2. Граница Γ области Ω называется положительно ориентированной, если ее ориентация, как кривой, совпадает с положительным направлением обхода.

Теорема (Формула Грина). Если Ω – плоская область с непрерывной кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ, то справедлива формула $\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy)$, где функции $P = P(x, y), Q = Q(x, y), \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Разобьем доказательство формулы на части, усложняя последовательно вид обасти Ω.

1. Докажем формулу Грина для прямоугольника $\Delta = \{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$.

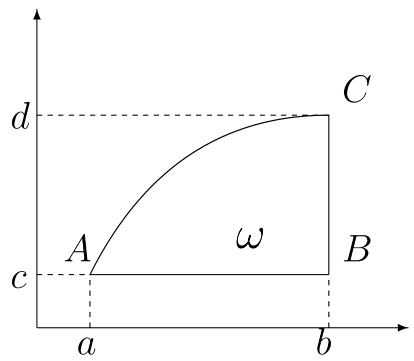


$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \Big) dy = \int\limits_c^d y \int\limits_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_c^d (Q(b,y) - Q(a,y))dy = \int\limits_c^d Q(b,y)dy + \int\limits_d^c Q(a,y)dy = \int\limits_{\Gamma_{BC}} Q(x,y)dy + \int\limits_{\Gamma_{DA}} Q(x,y)dy = \int\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy$, т. к. $\int\limits_{\Gamma_{CD}} Q(x,y)dy = \int\limits_{\Gamma_{AB}} Q(x,y)dy = 0$.

$-\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_a^b (P(x,d) - P(x,c))dx = \int\limits_{\Gamma_{CD}} P(x,y)dx + \int\limits_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx = \int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx$, т. к. $\int\limits_{\Gamma_{BC}} P(x,y)dx = \int\limits_{\Gamma_{DA}} P(x,y)dx = 0$. Формула Грина для Δ доказана.

2. Докажем формулу Грина для области ω, изображенной на рисунке, где дуга AC описывается непрерывной строго возрастающей на $[a,b]$ функцией $y = \lambda(x)$.

Обратную к ней функцию обозначим через $x = \mu(y), y \in [c,d]$.



$\iint\limits_{\omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{\mu(y)}^{b} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \Big) dy) = \int\limits_c^d (Q(b,y) - Q(\mu(y),y))dy = \int\limits_{\Gamma_{BC}} Q(x,y)dy - \int\limits_{\Gamma_{AC}} Q(x,y)dy = \int\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy$, т. к. $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Q(x,y)dy = 0$.

$-\iint\limits_{\omega} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^{\lambda(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \Big) dx = -\int\limits_a^b (P(x,\lambda(x)) - P(x,c))dx = \int\limits_{\Gamma_{CA}} P(x,y)dx + \int\limits_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx = \int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx$, т. к.

$\int\limits_{\Gamma_{BC}} P(x,y)dx = 0.$

Если область ω повернуть вокруг начала координат на угол $\pi/2, \pi, 3\pi/2$, оставив систему координат неизменной, то мы получим ещё три множества, которые вместе с ω мы будем называть областью типа ω. Заодно будем всякий прямоугольник называть областью типа ω. По аналогии доказывается, что формула Грина имеет место для любой области типа ω.

3. Пусть Ω – плоская область с непрерывной кусочно-гладкой границей Γ, которая состоит из конечного числа замкнутых, самонепересекающихся контуров таких, что Ω находится внутри одного из них и вне остальных. Очевидно такую область можно разрезать прямыми, параллельными осям координат (x,y), на конечное число частей, каждая из которых есть область типа ω (см. Рис.)

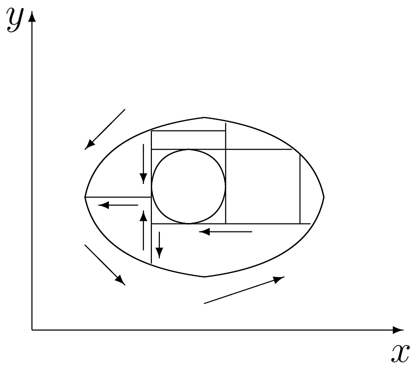


Рис.

Таким образом, $\Omega = \sum\limits_{k=1}^{N} \omega_k$, где ω_k – область типа ω. Пусть Γ_k – положительно ориентированный контур области ω_k. Тогда по пункту 2 имеем

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \sum_{k=1}^{N}\iint\limits_{\omega_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Gamma_k}(Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy).$$

Объясним последнее равенство: общая граница всех областей ω_k состоит из Γ и суммы конечного числа отрезков, каждый из которых принадлежит Ω и служит границей двух соседних областей типа ω. При этом отрезок обходится два раза в противоположных направлениях, и поэтому криволинейные интегралы, соответствкющие этим обходам, компенсируют друг друга. Остаестя только криволинейный интеграл по Γ. ∎

<u>Следствие.</u> (Вычисление площади области через криволинейный интеграл). Пусть Ω есть плоская область, к которой применима формула Грина и Γ – положительно ориентированная граница области. Тогда, если положить $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$, то из формулы Грина получим

выражение для площади области Ω:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(1+1)dxdy = |\Omega|. \qquad (*)$$

<u>Примеры применения формулы Грина</u>

1. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AO}(e^x \sin y - py)dx + (e^x \cos y - p)dy,$$

где кривая AO верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax, A(a,0), O(0,0)$ (Рис.).

▲ Введем обозначения $P = e^x \sin y - py, Q = e^x \cos y - p$. Дополним кривую интегрирования AO до замкнутого контура Γ отрезком OA оси x. В результате получим

$$I = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy - \int\limits_{OA} Pdx + Qdy.$$

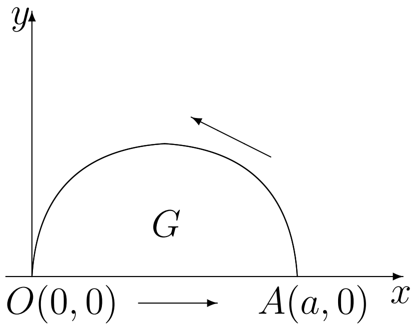


Рис.

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = p$ и по формуле Грина находим

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G} pdxdy,$$

где G – верхняя половина круга радиуса $a/2$. Интеграл $\iint\limits_{G} dxdy$ равен площади области G. Поэтому $\iint\limits_{G} pdxdy = p \cdot \frac{\pi a^2}{8}$. Далее вычислим $\int\limits_{OA} Pdx + Qdy$. Учитывая, что на этом отрезке $P = 0, dy = 0$, получим $\int\limits_{OA} Pdx + Qdy = 0$. Таким образом, $I = \frac{\pi a^2}{8} \cdot p$.▲

2. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t, y = b \sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$

▲ Используя формулу (*) из §3.4, вычислим $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(3ab\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 3ab\sin^4 t\cos^2 t)dt = \frac{3ab}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^2 t \cdot \sin^2 tdt = \frac{3ab}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 2tdt = \frac{3ab\pi}{8}$.▲

Глава 4
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 4.1 Понятие поверхности в трехмерном пространстве

Пусть в R_3 задана прямоугольная система координат (x, y, z).

Определение 1. Множество $S \subset R_3$, описываемое функцией $z = f(x, y)((x, y) \in G)$, где G – открытое множество в плоскости (x, y), называется поверхностью в R_3, заданной явно уравнением $z = f(x, y), (x, y) \in G$.

Определение 2. Поверхность S, заданная явно функцией $z = f(x, y), (x, y) \in G$, называется гладкой, если функция $z = f(x, y)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между G и S и является гладкой, т. е. имеет непрерывные производные 1-го порядка на G.

Замечание. Про поверхность из определения 2 мы будем говорить, что она проектируется на плоскость $z = 0$.

Если G – ограниченная область (открытое связное множество) с границей γ, а частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ можно продолжить по непрерывности на γ, то мы будем говорить, что продолженная таким образом функция $z = f(x, y)((x, y) \in \overline{G})$ описывает гладкий кусок $\overline{S}$. Множество $\Gamma = \overline{S} - S$ называется краем S (или $\overline{S}$). Проекция Γ на плоскость $z = 0$ есть γ.

Если γ – кусочно-гладкая кривая $x = \varphi(s), y = \psi(s)(0 \leq s \leq s_0)$, то Γ есть в свою очередь кусочно-гладкая кривая $x = \varphi(s), y = \psi(s), z = f(\varphi(s), \psi(s))(0 \leq s \leq s_0)$. В этом случае $\overline{S}$ будем называть элементарным гладким куском.

Определение 3. Поверхность, если ее можно разрезать на конечное число элементарных гладких кусков называется кусочно-гладкой.

Например, поверхность прямоугольного параллелепипеда кусочно-гладкая, но не гладкая.

Рассмотрим параметрический способ задания гладких поверхностей. Введем в R_3 (где задана прямоугольная система координат (x, y, z)) плоскость W параметров u и v. Пусть $\Omega \subset W$ – открытое множество и на нем заданы три функции от параметров $u, v : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)((u, v) \in \Omega)$ или векторная функция

$$x(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)). \qquad (*)$$

Определение 4. Геометрическое место S точек (x, y, z), определяемое функциями $(*)$, называется поверхностью, заданной параметрами $(u, v) \in \Omega$.

Определение 5. Поверхность S, заданная функциями $(*)$, называется гладкой, если $(*)$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между Ω и S и функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющие неравенству $\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 > 0$. Здесь $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$ – якобианы соответствующей пары функций из $(*)$ по переменным u и v.

§ 4.2 Интеграл по поверхности первого рода

Пусть на измеримой области Ω задана гладкая поверхность S. Далее, пусть на $\overline{S}$ (или в окрестности $\overline{S}$) задана функция $F(x, y, z)$. Произведем разбиение $\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N, \Omega_i$ – измеримые множества, пересекающиеся попарно лишь по своим границам. Каждой части Ω_i соответствует часть поверхности S_i. Пусть $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ – произвольная точка на $S_i; \sigma = \max\limits_i d(\Omega_i)$ – максимальный диаметр множеств Ω_i. Составим сумму $\prod_N = \sum\limits_{i=1}^{N} F(M_i)|S_i|$, где $|S_i|$ – площадь S_i.

Определение. Если при $\sigma \to 0$ существует $\lim \prod_n = I$, не зависящий от способа разбиения Ω и выбора точек M_i, то этот предел называется интегралом по поверхности S (первого рода) функции F или поверхностным интегралом первого рода по поверхности S функции F и обозначается

$$I = \int\limits_S F(x, y, z)ds. \tag{1}$$

Пусть гладкая поверхность S задана параметрически уравнениями $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)((u, v) \in \Omega)$ (здесь Ω – измеримая область) и путсь функция $F(x, y, z)$ непрерывна на $\overline{S}$. В перечисленных условиях интеграл (1) существует. При доказательстве этого факта нам понадобится формула площади поверхности, заданной параметрически. Получим такую формулу, используя формулу площади поверхности, заданной в явном виде уравнением

$$z = f(x, y)((x, y) \in G) : |S| = \iint\limits_G \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy, \tag{2}$$

где $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}$ – непрерывные функции на $\overline{G}$. Сделаем в интеграле (2) подстановку $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), (u, v) \in \overline{G}$, приводящую во взаимнооднозначное соответствие измеримые области Ω и G в предположении, что φ и ψ имеют непрерывные на $\overline{\Omega}$ частные производные первого порядка и якобиан $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ на $\overline{\Omega}$.
Положим $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \chi(u, v)$. Покажем, как производные $p = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$ выражаются через производные от z, x, y по u и v. для этого дифференцируем $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ по u и v:
$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$. Решая эти уравнения относительно p и q, получим $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{D(z,y)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}, q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{D(x,z)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$. Далее, на основании теоремы о замене переменных в

кратном интеграле, получим равенство $\iint\limits_{G}\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy=$ $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big/\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big/\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv.$

Отсюда следует формула поверхности S, когда поверхность задана параметрически уравнениями $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v), z=\chi(u,v), (u,v)\in\Omega$

$$|S|=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{\Big(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big)^2}dudv. \qquad (3)$$

Продолжим доказательство существования интеграла (1) в случае гладкой S, заданной параметрически, и в случае непрерывной функции $F(x,y,z)$. Пусть $M_i=(x_i,y_i,z_i)$ и $x_i=\varphi(u_i,v_i), y_i=\psi(u_i,v_i), z_i=\chi(u_i,v_i)((u_i,v_i)\in\Omega_i, i=1,\ldots,N)$. Тогда

$$\prod\nolimits_N=\sum_{i=1}^{N}F(M_i)|S_i|=\sum_{i=1}^{N}F(M_i)\iint\limits_{\Omega_i}||\dot{x}_u\times\dot{x}_v||dudv \qquad (4)$$

(здесь $x=x(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)), \dot{x}_u=\frac{\partial x}{\partial u}, \dot{x}_v=\frac{\partial x}{\partial v}, ||\dot{x}_u\times\dot{x}_v||$ – норма векторного произведения $\dot{x}_u\times\dot{x}_v$). Действительно, по формуле (3)

$$|S_i|=\iint\limits_{\Omega_i}\sqrt{\Big(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big)^2}dudv. \qquad (5)$$

Далее, $\dot{x}_u=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\chi}{\partial u}\right), \dot{x}_v=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)$, векторное произведение $\dot{x}_u\times\dot{x}_v=\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$. Отсюда следует $||\dot{x}_u\times\dot{x}_v||=\sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}$, что доказывает формулу (4).

Применим теорему о среднем к (4). Получим

$$\prod\nolimits_N=\sum_{i=1}^{N}F(M_i)\cdot\mu_i\cdot|\Omega_i|, \qquad (6)$$

где $a_i \le \mu_i \le A_i, A_i = \sup\limits_{(u,v)\in\Omega_i} || \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||, a_i = \inf\limits_{(u,v)\in\Omega_i} || \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||$.

Пусть $\varepsilon_N = \sum\limits_{i=1}^{N} F(M_i)(\mu_i - || \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||_i) \cdot |\Omega_i|$. Тогда из (6) следует

$$\prod\nolimits_N = \sum_{i=1}^{N} F(M_i) \cdot || \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||_i \cdot |\Omega_i| + \varepsilon_N \tag{7}$$

(здесь $|| \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||_i$ означает, что в $|| \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||$ подставлена точка $(u_i, v_i) \in \Omega_i$, соответствующая точке $M_i \in S_i$). Покажем, что $\varepsilon_N \to 0$ при $\sigma \to 0$.

$|\varepsilon_N| = \left|\sum\limits_{i=1}^{N} F(M_i)(\mu_i - || \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||_i) \cdot |\Omega_i|\right| \le K \sum\limits_{i=1}^{N}(A_i - a_i) \cdot |\Omega_i| \to 0$ при $\sigma \to 0$ (здесь $|F(M)| < K$, т. к. F ограничена в силу непрерывности на замкнутом множестве $\overline{S}$.) Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{N}(A_i - a_i)|\Omega_i| \to 0$ при $\sigma \to 0$ по основной теореме, т. к. по условию частные производные $\dot{x}_u$ и $\dot{x}_v$ непрерывны на $\overline{\Omega}$ и, следовательно, $|| \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||$ интегрируема на Ω. Из (7) и из того, что $\varepsilon_N \to 0$ при $\sigma \to 0$ следует

$$\lim_{\sigma\to 0} \prod_N = \lim_{\sigma\to 0} \sum_{i=1}^{N} F(M_i) || \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||_i \cdot \Omega_i =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} F(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot || \dot{x}_u \times \dot{x}_v || du dv. \tag{8}$$

Равенство (8) следует из того, что функция $F(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot || \dot{x}_u \times \dot{x}_v ||$ интегрируема на Ω. Таким образом, мы доказали, что справедлива формула $\int\limits_S F(x,y,z) ds = \iint\limits_{\Omega} F(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot || \dot{x}_u \times \dot{x}_v || du dv$, позволяющая сводить вычисление поверхностного интегграла первого рода к вычислению обычного кратного интеграла.

Замечание 1. Если гладкая поверхность S определяется явным уравнением $z = f(x,y)((x,y) \in G)$, где f непрерывна вместе с частными производными первого порядка на $\overline{G}$, то можно считать, что она задана параметрически через параметры $x, y : x = x, y = y, z = f(x, y)$. Тогда $|| \dot{x_u} \times \dot{x_v} || = \sqrt{1 + p^2 + q^2}(p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y})$ и, следовательно $\int\limits_S F(x, y, z)ds = \iint\limits_G F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy$.

Замечание 2. Если поверхность S является кусочно-гладкой, т. е. $S = \sum\limits_i S_i$, где S_i – элементарный гладкий кусок, то, чтобы вычислить интеграл по поверхности первого рода по S, нужно вычислить интеграл по поверхности первого рода по каждому куску S_i, указанным выше способом и сложить их.

Примеры вычисления поверхностных интегралов первого рода

1. Вычислить интеграл по поверхности первого рода

$$I = \iint\limits_S (x + y + z)ds,$$

где S – часть плоскости $x + 2y + 4z = 4$, выделяемая условиями $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

▲ Из уравнения плоскости $x + 2y + 4z = 4$ находим $z = \frac{1}{4}(4 - x - 2y)$. $\Rightarrow z'_x = -\frac{1}{4}, z'_y = -\frac{1}{2}$. $\Rightarrow ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$. $\Rightarrow I = \iint\limits_{\substack{x+2y\leq 4\\ x\geq 0, y\geq 0}} (x + y + \frac{1}{4}(4 - x - 2y))\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy = \frac{\sqrt{21}}{4}\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}(4-x)} (1 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y)dy = \frac{\sqrt{21}}{4}\int\limits_0^4 dx(y + \frac{3}{4}xy + \frac{1}{4}y^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}(4-x)} = \frac{\sqrt{21}}{4}\int\limits_0^4 (\frac{1}{2}(4 - x) + \frac{3}{4}x\frac{1}{2}(4 - x) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}(4 - x))^2)dx = \frac{\sqrt{21}}{4}\int\limits_0^4 (3x - \frac{x^3}{24})dx = \frac{7\sqrt{21}}{3}$.▲

2. Вычислить интеграл по поверхности первого рода

$$I = \iint\limits_S z^2 ds,$$

где S – полная поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$.
▲ Пусть S_1 – боковая поверхность конуса, S_2 – его основание. Тогда

$$I = \iint\limits_{S_1} z^2 ds + \iint\limits_{S_2} z^2 ds.$$

К первому интегралу применим формулу для вычисления интегралов по поверхности первого рода, когда поверхность задана явно уравнением. На боковой поверхности конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}dxdy.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} z^2 ds = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr = 8\sqrt{2}\pi.$$

На основании конуса $z = 2$, поэтому $\iint\limits_{S_2} z^2 ds = 4\iint_{x^2+y^2\leq 4} dxdy = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$. Итак,

$$I = 8\pi(2+\sqrt{2}). \ ▲$$

3. Вычислить интеграл по поверхности первого рода

$$I = \iint\limits_S \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

где S – часть цилиндрической поверхности $x = r\cos u, y = r\sin u, z = v, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq H$.

▲ Если поверхность задана параметрически уравнениями: $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), (u,v) \in \Omega$, то интеграл по поверхности первого рода от функции $F(x,y,z)$ вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_S F(x,y,z)ds = \iint\limits_\Omega F(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot || \dot{x_u} \times \dot{x_v} || dudv,$$

где $\dot{x_u} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\chi}{\partial u}\right), \dot{x_v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\chi}{\partial v}\right), \dot{x_u} \times \dot{x_v}$ – векторное произведение векторов $\dot{x_u} \times \dot{x_v}$. В нашем случае $\varphi(u,v) = r\cos u, \psi(u,v) = r\sin u, \chi(u,v) = v$, где $0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le h$. $\Rightarrow \dot{x_u} = (-r\sin u, r\cos u, 0), \dot{x_v} = (0,0,1) \Rightarrow || \dot{x_u} \times \dot{x_v} || = r$ и мы получим

$$\iint\limits_S \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iint\limits_{\substack{0\le u\le 2\pi \\ 0\le v\le H}} \frac{rdudv}{\sqrt{r^2+v^2}} = r\int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^H \frac{dv}{\sqrt{r^2+v^2}} =$$

$$= 2\pi r \ln\frac{H+\sqrt{r^2+H^2}}{r}. \blacktriangle$$

§ 4.3 Ориентация поверхностей

Если поверхность ограничивает некоторое тело, то у нее различают внешнюю и внутреннюю стороны. Примером такой поверхности является сфера. Если поверхность задача уравнением $z = f(x,y)$, то у нее различают верхнюю и нижнюю стороны. Указанные поверхности имеют две стороны. Существуют также так называемые односторонние поверхности. Приведем строгие определения.

Если каждой точке A, области G поставлен в соответствие вектор $\overline{a}(A)$, то говорят, что в области G задано векторное поле. Векторное поле $\overline{a}(A) = (a_1(A), a_2(A), a_3(A))$ называется непрерывным в области G, если функции $a_1(A), a_2(A), a_3(A)$ являются непрерывными в области G. Гладкая поверхность S в каждой внутренней точке A имеет непрерывную нормаль $\overline{n}(A)$.

Определение 1. Если на поверхности можно задать векторное поле нормалей, непрерывное на всей поверхности, то такая поверхность называется двусторонней. Поверхность, на которой не существует непрерывного векторного поля нормалей, называется односторонней.

Для двусторонней поверхности характерно следующее свойство: для любой точки $A \in S$ и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности S и не пересекающегося с границей поверхности, выбранное в точке A направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления (на противоположное) при возвращении в точку A. На односторонней поверхности существует контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное.

На любой двусторонней поверхности можно задать два непрерывных поля нормалей, противоположных по направлению: $\overline{n}(A)$ и $-\overline{n}(A)$. Выбирая одно из полей нормалей, мы выбираем сторону поверхности. Таким образом, двусторонняя поверхность имеет две стороны.

Определение 2. Двусторонние поверхности называются ориентированными, а выбор определенной стороны (выбор поля $\overline{n}(A)$ или $-\overline{n}(A)$) называется ориентацией поверхности.

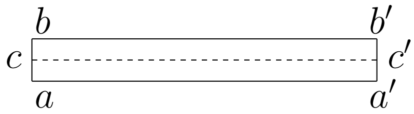
Если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ непрерывно дифференцируема, то на верхней стороне поверхности непрерывное поле нормалей можно задать вектор-функцией $\overline{n}(A) = \{-f'_x(A), -f'_y(A), 1\}$, на нижней стороне – вектор-функцией $-\overline{n}(A) = \{f'_x(A), f'_y(A), -1\}$.

Пусть поверхность задана параметрически при помощи уравнений $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), (u,v) \in \Omega$, или $x(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$, и является гладкой. Вектор $x(u,v)$ при фиксированном v описывает кривую, соответствующую изменению параметра u. Вектор $\dot{x}_u$ напрален по касательнойк этой кривой. Аналогично вектор $\dot{x}_v$ направлен по касательной к кривой, которая описывается вектором $x(u,v)$, когда u фиксировано, а v меняется. Если считать векторы $\dot{x}_u, \dot{x}_v$ выходящими из точки $x(u,v)$ поверхности S, то они определяют касательную плоскость, проходящую через них и точку $x(u,v) \in S$. Из условия $|| \ \dot{x}_u \times \dot{x}_v \ || > 0$ следует, что они не

коллинеарны. Изветсно, что результат векторного произведения – это вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через перемножаемые вектора. Следовательно, вектор $\dot{x}_u \times \dot{x}_v$ перпендикулярен касательной плоскости к поверхности S в точке $x(u, v)$ и выходит из точки $x(u, v)$. Таким образом, нормаль к поверхности S в точке $x(u, v)$ определяется вектором $\dot{x}_u \times \dot{x}_v$. При этом можно определить две, непрерывно зависящие от $(u, v) \in \Omega$, нормали $\overline{n}(A) = \pm(\dot{x}_u \times \dot{x}_v), A = (u, v) \in \Omega$.
Знаку "+"соответствует одна сторона поверхности S, а знаку "$-$" – другая сторона S. Таким образом, если поверхность S гладкая и определяется параметрически, то она будет ориентируемой.

Замечание. Существуют гладкие поверхности, не ориентируемые с помощью нормали.

Пример (лист Мебиуса). Возьмем прямоугольный лист бумаги, из которого исключены отрезки aa', bb', составляющие часть его границ.



Перекрутим его один раз и его стороны ab и $a'b'$ склеим так, чтобы точки a, b' и b, a' склеились попарно. Полученная поверхность есть лист Мебиуса. Интуитивно ясно, что это гладкая поверхность, если скручивать лист бумаги гладко, не ломая. Аналитическое доказательство этого факта громоздко, и поэтому мы приводить его не будем. Линии cc' (исходного прямоугольника) соответствует замкнутая линия на листе Мебиуса, у которой точки c и c' слились в одну точку. Выпустим из точки c нормаль $\overline{n}(c)$, произвольным, но определенным образом. Выбрав направление $\overline{n}(c)$ мы тем самым выбрали направление для всех точек $A \in cc'$, так как мы хотим, чтобы вектор $\overline{n}(A)$ непрерывно зависел от A. Однако, в точке c' вектор $\overline{n}(c')$ уже выбран, так как c' совпадает с c. очевидно, если точку A линии cc' двигать непрерывно от c к c', то нормаль $\overline{n}(A)$ будет стремится к "$-\overline{n}(c)$", а не к $\overline{n}(c)$, и, следовательно вектор-функция $\overline{n}(A)$ оказывается разрывной в точке $c = c' \in S$. Таким образом, мы доказали, что лист Мебиуса – односторонняя (неориентируемая) поверхность.

В случае, когда поверхность S имеет край Γ, возможна конструкция, связывающая ориентацию поверхности с помощью нормали с направлением обхода ее края Г. Опишем такую конструкцию. Пусть S – ориентированная поверхность, т. е. на S задана нормаль, непрерывно зависящая от A, и пусть Г – край (граница) S. Рассмотрим в трехмерном пространстве прямоугольную систему координат (x, y, z) с заданным направлением вращения вокруг оси z положительной оси x до совмещения с положительной осью y по кратчайшему пути (см. Рис. 1).

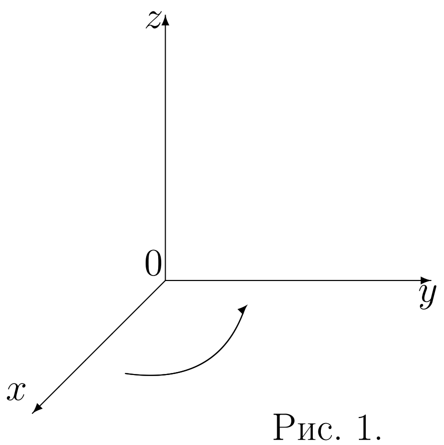


Рис. 1.

Пусть $A \in S$. Шар $\overline{Ш}(A)$ достаточно малого радиуса с центром в точке A высекает из S некоторый кусок $\sigma(A)$, содержащий точку A. Пусть $\gamma(A)$ – контур $\sigma(A)$, а $\overline{n}(A)$ – нормаль из A, направление которой соответствует ориентации S. Вращая $\sigma(A)$ вокруг $\overline{n}(A)$ в направлении, с которым связана система координат (направление $\overline{n}(A)$ берется за направление оси z), мы зададим направление обхода на $\gamma(A)$. Созданная конструкция естественным образом приводит к определенному направлению обхода на Г (см. Рис. 2).

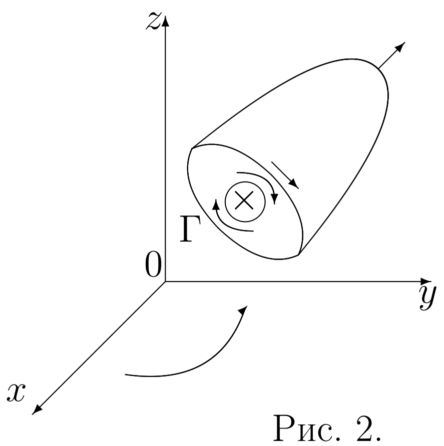


Рис. 2.

Если мы изменим систему координат (x, y, z), т. е. изменим направление вращения вокруг оси z на противоположное (положительная ось y вращается вокруг оси z до совмещения с положительной осью x по кратчайшему расстоянию), то при этом направление обхода Г станет противоположным. таким образом, задавая систему координат с заданным направлением вращения и ориентацию S, мы задаем направление обхода Г, и наоборот, задавая систему координат с заданным направлением вращения и направление обхода Г, мы задаем ориентацию S.

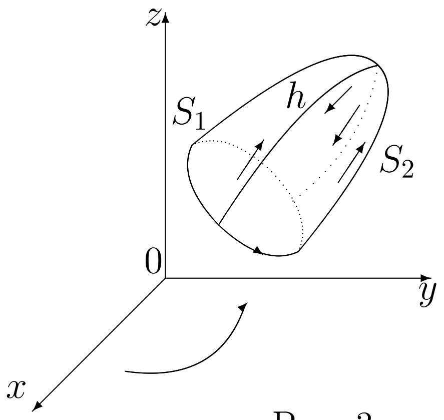
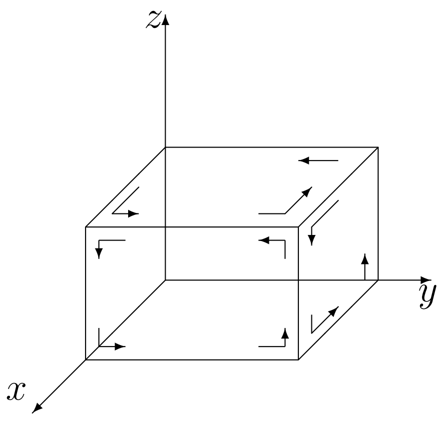


Рис. 3.

Допустим, что ориентированная гладкая поверхность S разрезана на две ориентированные так же поверхности S_1 и S_2 гладкой кривой h (см. Рис. 3). Тогда направление обхода контуров S_1 и S_2 (задаваемое согласно описанной выше конструкции) вдоль дуги h противоположно. Последний факт будет руководящим для того, чтобы правильно определить понятие ориентированной кусочно-гладкой поверхности.

Определени 3. Кусочно-гладкая поверхность S называется ориентированной, если каждый из ее элементарных гладких кусков ориентирован и возникающие при этом направления обхода контуров этих кусков согласованы в том смысле, что вдоль каждой дуги, где два таких контура совпадают, направления их обхода противоположны.

Пример. Здесь поверхность куба ориентирована при помощи внешней нормали.



§ 4.4 Интеграл по поверхности второго рода

Пусть в R_3, с прямоугольной системой координат x, y, z, дана область H и на ней определена непрерывная вектор-функция $\overline{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. В H задана ориентированная гладкая поверхность S^*. Будем обозначать через S ту же поверхность, но не ориентированную, т. е. сли с нее снята ориентация.

Определение 1. Поверхностным интегралом второго рода от вектор-функции $\overline{a}(x, y, z)$ по ориентированной поверхности S^* называется поверхностный интеграл первого рода $\int\limits_S (\overline{a}, \overline{n}) ds$, который обозначается $\int\limits_{S^*} (\overline{a} ds) = \int\limits_{S^*} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$.

Замечание. Потоком вектора $\overline{a}$ через ориентированную поверхность S^* называется поверхностный интеграл второго рода $\int\limits_{S^*} (\overline{a} ds)$.

Посмотрим, каким образом вычисляется поверхностный интеграл второго рода.

пусть ориентированная гладкая поверхность S^* задана параметрически уравнением $x(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)), (u, v) \in \Omega, || \dot{x_u} \times \dot{x_v} || > 0$, где Ω – измеримая область в плоскости параметров (u, v) и φ, ψ, χ – непрерывно дифференцируемые на $\overline{\Omega}$ функции. Выберем ту сторону поверхности, на которой единичная нормаль определяется равенством $\overline{n}(A) = \frac{\dot{x_u} \times \dot{x_v}}{||\dot{x_u} \times \dot{x_v}||}, A \in S^*$. тогда направляющие косинусы нормали выражаются равенствами

$\cos \alpha = \cos(\overline{n}, x) = \frac{1}{||\dot{x_u} \times \dot{x_v}||} \frac{D(y,z)}{D(u,v)}$,

$\cos \beta = \cos(\overline{n}, y) = \frac{1}{||\dot{x_u} \times \dot{x_v}||} \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$,

$\cos \gamma = \cos(\overline{n}, z) = \frac{1}{||\dot{x_u} \times \dot{x_v}||} \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$. Отсюда следует $\int\limits_{S^*} (\overline{a} ds) = \int\limits_S (\overline{a}, \overline{n}) ds = \int\limits_S (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) ds = \iint\limits_{\Omega} \Big(P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \frac{1}{||\dot{x_u} \times \dot{x_v}||} \cdot \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \frac{1}{||\dot{x_u} \times \dot{x_v}||} \cdot \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \frac{1}{||\dot{x_u} \times \dot{x_v}||} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \Big) \cdot || \dot{x_u} \times \dot{x_v} || dudv = \iint\limits_{\Omega} \Big(P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \Big) dudv$.

Мы получили формулу, по которой вычисляется поверхностный интеграл второго рода в случае ориентированной поверхности, заданной параметрически.

Часто удобно интеграл $\int\limits_S (\overline{a}, \overline{n}) ds$ вычислять в прямоугольных координатах. Посмотрим, к каким вычислениям это приводит в предположении, что гладкий кусок $\overline{S}$ поверхности взаимно однозначно проектируется на измеримые части всех трех координатных плоскостей. Рассмотрим гладкий кусок $\overline{S}$ поверхности, который описывается любой их трех функций $x = f_1(y,z), (y,z) \in \overline{S_x}, y = f_2(z,x), (z,x) \in \overline{S_y}, z = f_3(x,y), (x,y) \in \overline{S_z}$, где $\overline{S_x}, \overline{S_y}, \overline{S_z}$ – проекции поверхности $\overline{S}$ на плоскости $x = 0, y = 0, z = 0$, а функции f_1, f_2 и f_3 имеют непрерывные частные производные соответственно на $\overline{S_x}, \overline{S_y}, \overline{S_z}$.

Прежде чем двигаться дальше, мы определим понятие интеграла по плоской ориентированной области. Рассмотрим в плоскости две прямоугольные системы координат (см. Рис. 1. и Рис. 2.).

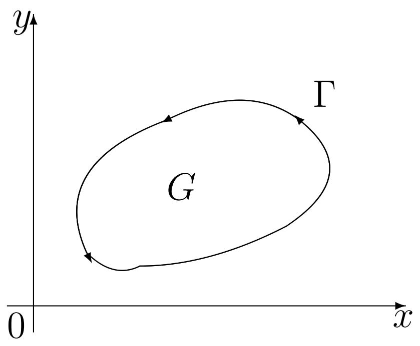


Рис. 1

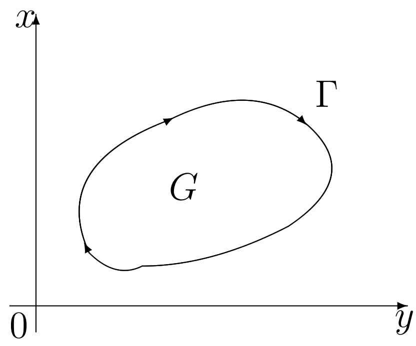


Рис. 2

В случае первой координатной системы (Рис. 1) область G считается положительно ориентированной, если при обходе ее границы Γ область остается слева. В случае второй координатной системы (Рис. 2) область G считается положительно ориентированной, если при обходе ее границы Γ область остается справа. Обозначение: $G_+(G_-)$ – положительно (отрицательно) ориентированная область, соответственно.

Определение 2. Пусть на G задана интегрируемая функция $f(x,y)$. Полагаем $\iint\limits_{G_+} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = -\iint\limits_{G_-} f(x,y)dxdy$.

Перейдем к вычислению $\int\limits_S (\overline{a}, \overline{n})ds$ в прямоугольных координатах. Обозначим через S_x^*, S_y^*, S_z^* соответствующие ориентированные проекции ориентированной поверхности S^* на плоскости $x = 0, y = 0, z = 0$.

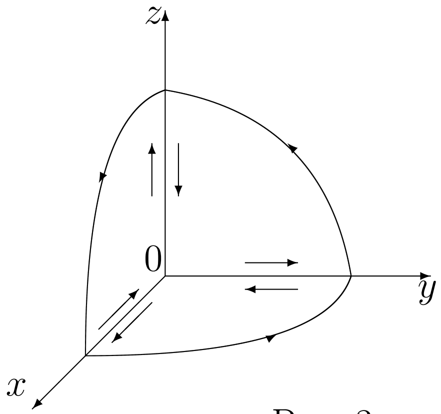


Рис. 3.

Обход контура поверхности S^* определяет при проектировании соответствующий обход площадок S_x^*, S_y^*, S_z^* (см. Рис. 3). Нормаль $\overline{n}$ к S образует угол с осью z, косинус которого равен $\cos(\overline{n}, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, p = \frac{\partial f_3}{\partial x}, q = \frac{\partial f_3}{\partial y}$. Дествительно, считая, что поверхность задана параметрически вектор-функцией $\mathsf{x}(y, y) = (x, y, f_3(x, y)), (x, y) \in \overline{S_z}$, мы имеем $\cos(\overline{n}, z) = \frac{D(x,y)}{D(x,y)} \cdot \frac{1}{||\dot{x_u} \times \dot{x_v}||} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$. Заметим, что знак "$+$"или "$-$"у $\cos(\overline{n}, z)$ выбирается в зависимости от ориентации S^*. Далее, имеем $\int\limits_S R(x, y, z)\cos(\overline{n}, z)ds = \int\limits_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) \cdot \frac{(\pm 1)}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy = \pm\int\limits_{S_z} R(x, y, f_3(x, y))dxdy = \int\limits_{S_z^*} R(x, y, f_3(x, y))dxdy = \int\limits_{S^*} R(x, y, z)dxdy$, где предпоследний интеграл взят по ориентированной прощадке S_z^*, а последний интеграл следует рассматривать как обозначение предпоследнего.

Чтобы вычислить последний интеграл $\int\limits_{S^*} R(x, y, z)dxdy$ следует подставить $f_3(x, y)$ вместо z и проинтегрировать по ориентированной проекции S_z^*. Из определения интеграла по ориентированной плоской области мы знаем, что $\int\limits_{S_z^*} = \pm\int\limits_{S_z}$, где нужно взять "$+$"или "$-$" в зависимости от того, будет ли площадка S_z^* ориентирована положительно или отрицательно. Заметим, что если выбрана верхняя сторона поверхности, то $\int\limits_{S_z^*} = \int\limits_{S_z}$, а для нижней стороны поверхности имеем $\int\limits_{S_z^*} = -\int\limits_{S_z}$.

Аналогичные результаты могут быть приведены и в отношении двух интегралов: $\int\limits_S P(x,y,z)\cos(\overline{n},x)ds = \int\limits_{S_x^*} P(f_1(y,z),y,z)dydz = \int\limits_{S^*} P(x,y,z)dydz$, $\int\limits_S Q(x,y,z)\cos(\overline{n},y)ds = \int\limits_{S_y^*} Q(x,f_2(z,x),z)dzdx = \int\limits_{S^*} Q(x,y,z)dzdx$.

Таким образом, мы доказали, что поверхностный интеграл второго рода от вектора $\overline{a}(x,y,z)$ по ориентированной поверхности S^*, ориентация которой определяется нормалью $\overline{n}$, может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_S(\overline{a},\overline{n})ds = \int\limits_{S^*} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy. \tag{1}$$

Замечание 1. Если поверхность S^* можно разрезать на конечное число частей, $S^* = \sum S_k^*$, каждая из которых проектируется на все три координатные плоскости, то, чтобы вычислить поверхностный интеграл второго рода по S^*, нужно вычислить поверхностные интегралы второго рода по каждому из кусков S_k^*, используя формулу (1), а затем сложить их.

Примером такой поверхности может служить сфера с центром в нулевой точке, которая разрезается плоскостями координат на 8 кусков, каждый из которых проектируется на все три координатные плоскости.

Замечание 2. Если S^* – ориентированная кусочно-гладкая поверхность, то по определению полагаем $\int\limits_{S^*}(\overline{a}ds) = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{S_k^*}(\overline{a}ds)$, где S_k^* – элементарный гладкий кусок.

Примеры вычисления поверхностных интегралов второго рода

1. Вычислить интеграл по поверхности второго рода

$$I = \iint\limits_{S^*} dxdy,$$

где S^* – нижняя сторона части конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, при $0 \le z \le 1$.

▲ Проекцией данной части конуса на плоскость oxy является круг $G: x^2+y^2 \leq 1$. Угол между нормалью к S^*, указывающей нижнюю сторону S^* и осью z является тупым, поэтому

$$I = -\iint\limits_G dxdy = -\pi. \blacktriangle$$

2. Вычислить интеграл по поверхности второго рода

$$I = \int\limits_{S^*} ydzdx,$$

где S^* – верхняя сторона части параболлоида $z = x^2 + y^2$ при $0 \leq z \leq 2$.

$\blacktriangle$ Разобьем данную поверхность на две части, описываемые уравнениями $y = \sqrt{z-x^2}$ при $y \geq 0$ и $y = -\sqrt{z-x^2}$ при $y \leq 0$. Обе части поверхности (обозначим их соответственно S_1^*, S_2^*) проектируются на область G плоскости oxz, граница которой состоит из дуги параболы $z = x^2$ и отрезка прямой $z = 2$, т. е. $G = \{(x,z) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq z \leq 2\}$.

Сведем поверхностные интегралы по S_1^* и S_2^* к двойным интегралам по области G. Получим

$$\iint\limits_{S_1^*} ydzdx = -\iint\limits_G \sqrt{z-x^2}dzdx,$$

$$\iint\limits_{S_2^*} ydzdx = \iint\limits_G -\sqrt{z-x^2}dzdx.$$

Таким образом, имеем

$I = \iint\limits_{S^*} ydzdx = \iint\limits_{S_1^*} ydzdx + \iint\limits_{S_2^*} ydzdx = -2\iint\limits_G \sqrt{z-x^2}dzdx = -2\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} \sqrt{z-x^2}dz = -2\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{3}(z-x^2)^{3/2}\Big|_{x^2}^{2} = -\frac{4}{3}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{3/2}dx.$

Сделаем замену переменной $x = \sqrt{2}\sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Получим

$$I = -\frac{4}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2^{3/2}\sqrt{2}\cos^4 t dt = -2\pi. \blacktriangle$$

3. Вычислить интеграл по поверхности второго рода

$$I = \iint\limits_{S^*} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$$

где S^* – внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.
▲ 1 метод. $I = I_1 + I_2 + I_3$, где $I_1 = \iint\limits_{S^*} x^2dydz, I_2 = \iint\limits_{S^*} y^2dzdx, I_3 = \iint\limits_{S^*} z^2dxdy$. Вычислим I_3. Подинтегральную функцию z^2 запишем так:
$z^2 = (z-c)^2 + c^2 + 2c(z-c)$.
Сумма первых двух членов, будучи интегрируемой по внешней стороне верхней полусферы и нижней полусферы, дает результаты разных знаков, которые взаимо уничтожаются. Последний член при интегрировании по внешней стороне верхней полусферы и нижней полусферы дает результаты одинаковых знаков (так как сам меняет знак при переходе от верхней полусферы к нижней), поэтому

$$I_3 = 4c \iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2} \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}dxdy = \frac{8}{3}\pi cR^3.$$

Аналогично вычисляется: $I_1 = \frac{8}{3}\pi aR^3, I_2 = \frac{8}{3}\pi bR^3$. Окончательно получаем

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

2 метод.

$$I = \iint\limits_{S^*} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds,$$

где $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичная нормаль, определяющая внешнюю сторону сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Здесь мы использовали определение интеграла по поверхности второго рода через интеграл по поверхности первого рода:

$$\iint\limits_{S^*} \overline{a} ds = \iint\limits_{S} (\overline{a}, \overline{n}) ds, \tag{$*$}$$

где $\overline{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, $\overline{n}$ – единичная нормаль к поверхности S, указывающая ее сторону. В нашем примере $\overline{a} = (x^2, y^2, z^2)$, а поверхностью S является сфера $F(x,y,z) = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2 = 0$. Вектором нормали к данной сфере будет вектор $\overline{N} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (2(x-a), 2(y-b), 2(z-c))$. $\Rightarrow \overline{n} = (\frac{x-a}{R}, \frac{y-b}{R}, \frac{z-c}{R})$. Используя формулу $(*)$, запишем

$$I = \iint\limits_{S} \Big(x^2 \cdot \frac{x-a}{R} + y^2 \cdot \frac{y-b}{R} + z^2 \cdot \frac{z-c}{R} \Big) ds.$$

Для вычисления данного интеграла запишем параметрические уравнения сферы: $x = a + R\cos v \sin u, y = b + R\sin v \sin u, z = c + R\cos u, 0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi$, а затем используем формулу для вычисления интеграла по поверхности первого рода, когда поверхность задана параметрически:

$$\iint\limits_{S} F(x,y,z) ds = \iint\limits_{\Omega} F(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot || \dot{x}_u \times \dot{x}_v || du dv,$$

где $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), (u,v) \in \Omega, x = x(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)), \dot{x}_u = (\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u}), \dot{x}_v = (\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \chi}{\partial v}), \dot{x}_u \times \dot{x}_v$ – векторное произведение $\dot{x}_u$ на $\dot{x}_v$.

В нашем случае $\varphi(u,v) = a + R\cos v \sin u, \psi(u,v) = b + R\sin v \sin u, z = c + R\cos u, \Omega = \{(u,v) : 0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi\}$. $\Rightarrow || \dot{x}_u \times \dot{x}_v || = R^2 \sin u$. $\Rightarrow I = \iint\limits_{\Omega} \Big[(a+R\cos v \sin u)^2 \frac{R\cos v \sin u}{R} + (b+R\sin v \sin u)^2 \frac{b+R\sin v \sin u}{R} + (c+R\cos u)^2 \frac{c+R\cos u}{R} \Big] R^2 \sin u du dv = \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^{\pi} R^2 \sin u \Big[(a+R\cos v \sin u)^2 \cdot \cos v \sin u + (b+R\sin v \sin u)^2 \cdot \sin v \sin u + (c+R\cos u)^2 \cos u \Big] du =$

$R^2\int\limits_0^{2\pi} 2aR\cos^2 v dv\int\limits_0^{\pi}\sin^3 u du \quad + \quad R^2\int\limits_0^{2\pi} 2bR\sin^2 v dv\int\limits_0^{\pi}\sin^3 u du \quad +$
$R^2\int\limits_0^{2\pi} 2cR dv\int\limits_0^{\pi}\cos^2 u\sin u du = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c).$▲

§ 4.5 Формула Гаусса-Остроградского

Пусть в R_3 задана прямоугольная система координат (x, y, z). G – область из R_3 с кусочно-гладкой границей S (здесь границей является поверхность). На $\overline{G}$ определен вектор $\overline{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))(x, y, z) \in \overline{G}$.

Пусть функции $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области Λ_z и $\lambda_1(x, y) \leq \lambda_2(x, y)$.

Определение 1. Область $\Lambda = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Lambda_z, \lambda_1(x, y) \leq z \leq \lambda_2(x, y)\}$ называется элементарной z - цилиндрической.

Определение 2. Область G называется z - цилиндрической, если $\overline{G} = \sum\limits_{k=1}^{N}\overline{G_k}$, где $\overline{G_k}$ – замыкания элементарных z - цилиндрических областей такие, что верхние и нижние куски границы G_k есть части ориентированной границы S^* области G.

Аналогично определяются элементарные x - цилиндрическая, y - цилиндрическая области, а также x –цилиндрические, y – цилиндрические.

Определение 3. Область G называется простой, если она является одновременно $x-, y-, z$ - цилиндрической областью.

Теорема. Пусть функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой замкнутой области G, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S. Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_G \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz = \int\limits_{S^*} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy, \quad (*)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности.

Замечание. Равенство ($*$) называется формулой Гаусса-Остроградского. Формула Гаусса-Остроградского говорит, что объемный интеграл от функции $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ по области G равен поверхностному интегралу 2-го рода от вектора $\overline{a}$ по границе этой области S, ориентированной в направлении ее внешней нормали.

Доказательство. Начнем с того, что рассмотрим в качестве области G область Λ – элементарную z - цилиндрическую область (см. Рис.), а в качестве вектора $\overline{a}$ вектор $(0,0,R)$.

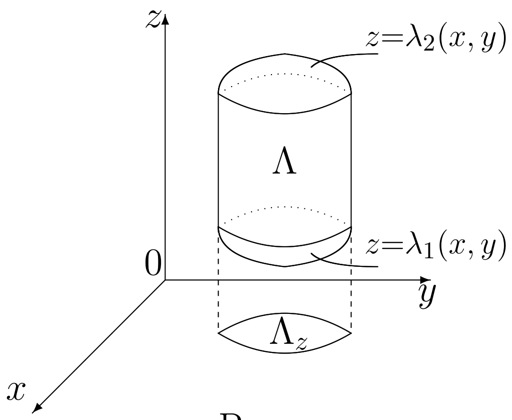


Рис.

Сверху и снизу область Λ ограничена поверхностями σ_2 и σ_1 (с кусочно-гладкими краями), определяемыми соответственно уравнениями $z=\lambda_2(x,y), z=\lambda_1(x,y), \lambda_1(x,y)\leq\lambda_2(x,y) ((x,y)\in\overline{\Lambda_z})$, где $\overline{\Lambda_z}$ – плоская область с кусочно-гладкой границей γ, а функции λ_1,λ_2 непрерывны на Λ_z и имеют непрерывные частные производные на открытом множестве Λ_z. С боков Λ ограничена цилиндрической поверхностью σ с направляющей γ и образующей параллельной оси z. Пусть S^* есть граница Λ, ориентированная при помощи внешней к Λ нормали. Тем самым $\sigma_1^*,\sigma_2^*,\sigma^*$ ориентированы.

Рассмотрим интеграл

$$\iiint\limits_{\Lambda}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{\Lambda_z}dxdy\Bigg(\int\limits_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\Bigg)=\iint\limits_{\Lambda_z}[R(x,y,\lambda_2(x,y))-R(x,y,\lambda_1(x,y))]dxdy\overset{1}{=}\iint\limits_{\sigma_{2,z}^*}R(x,y,\lambda_2(x,y))dxdy+\iint\limits_{\sigma_{1,z}^*}R(x,y,\lambda_1(x,y))dxdy\overset{2}{=}\int\limits_{\sigma_2^*}R(x,y,z)dxdy+\int\limits_{\sigma_1^*}R(x,y,z)dxdy+\int\limits_{\sigma^*}R(x,y,z)dxdy=\int\limits_{S^*}R(x,y,z)dxdy \qquad (1)$$

Объяснение равенства 1: нормаль $\overline{n}$ к σ_1^* и σ_2^* образует с осью z соответственно тупой и острый углы, поэтому проекции $\sigma_{1,z}^*,\sigma_{2,z}^*$ кусков σ_1^*,σ_2^* на плоскость $z=0$ ориентированы первая

отрицательно, а вторая положительно. Поэтому
$-\iint\limits_{\Lambda_z} R(x,y,\lambda_1(x,y))dxdy = \iint\limits_{\sigma^*_{1,z}} R(x,y,\lambda_1(x,y))dxdy,$
$\iint\limits_{\Lambda_z} R(x,y,\lambda_2(x,y))dxdy = \iint\limits_{\sigma^*_{2,z}} R(x,y,\lambda_2(x,y))dxdy.$

Объяснение равенства 2: равенство верно, так как $\int\limits_{\sigma^*} R(x,y,z)dxdy = \int\limits_{\sigma} R \cdot \cos(\overline{n}, z)ds = 0$, по причине того, что $\cos(\overline{n}, z) = 0$ вдоль σ^*.

Последний интеграл в (1) есть поверхностный интеграл второго рода от вектора $(0,0,R)$ по поверхности S^*. Таким образом, мы доказали формулу Гаусса - Остроградского для элементарной z - цилиндрической области и вектора $(0,0,R)$.

Докажем, что формула Гаусса - Остроградского справедлива для z - цилиндрической области и вектора $(0,0,R)$. Обозначим соответственно через $\sigma^*_{1,k}$ и $\sigma^*_{2,k}$ нижние и верхние куски границ $\overline{G_k}$, а через σ_k – боковые куски границ $\overline{G_k}$. Тогда $\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \sum\limits_{k=1}^{N} \iiint\limits_{G_k} \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \sum\limits_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{\sigma^*_{1,k}} R(x,y,z)dxdy + \int\limits_{\sigma^*_{2,k}} R(x,y,z)dxdy + \int\limits_{\sigma^*_k} R(x,y,z)dxdy\Big) = \int\limits_{S^*} R(x,y,z)dxdy$, так как $\int\limits_{\sigma^*_k} R(x,y,z)dxdy = 0$, а куски $\sigma^*_{1,k}$ и $\sigma^*_{2,k}$ либо составляют в совокупности поверхность S^*, либо множество $X = S^* - \sum\limits_{k=1}^{N}\sigma^*_{1,k} - \sum\limits_{k=1}^{N}\sigma^*_{2,k}$ есть часть S^*, нормаль в любой точке которой перпендикулярна оси z и поэтому $\int\limits_X R(x,y,z)dxdy = 0$. Итак, формула Гаусса - Остроградского верна для z - цилиндрической области и вектора $(0,0,R)$.

Понятия x - цилиндрической и y - цилиндрической области определяются аналогично понятию z - цилиндрической области. Например, x - цилиндрическая область обладает тем свойством, что ее замыкание можно разрезать на конечное число замыканий элементарных x - цилиндрических областей. Элементарная x - цилиндрическая область определяется так же, как элементарная z - цилиндрическая область, только роль z теперь играет x. По аналогии доказывается, что для x - цилиндрической области G справедливо равенство $\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \int\limits_{S^*} P(x,y,z)dzdx$, т. е. формула Гаусса - Остроградского для вектора $(P,0,0)$, а для y - цилиндрической области G – формула $\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \int\limits_{S^*} Q(x,y,z)dzdx$, т. е. формула Гаусса - Остроградского для вектора $(0,Q,0)$.

Пусть теперь область G является простой. Тогда, очевидно, для нее верна формула Гаусса - Остроградского для непрерывно дифференцируемого на $\overline{G}$ вектора $\overline{a} = (P,Q,R)$, т. е. верно равенство $\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \int\limits_{S^*} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, где интервал справа есть интеграл по поверхности S^*, ориентированной внешней нормалью к G. ■

Замечание 1. Если в формуле Гаусса - Остроградского положить $P = x, Q = y, R = z$, то получим формулу для вычисления объема области: $|G| = \frac{1}{3} \int\limits_{S^*} xdydz + ydzdx + zdxdy$ через интеграл по ее ориентированной (внешней нормалью) границе S^*.

Замечание 2. Области, с которыми обычно приходится иметь дело, является простыми областями.

Пример. Шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ есть простая область.

● Замечание 3. Формулу Гаусса - Остроградского можно записать в плоском случае, когда G есть плоская область, а $\overline{a}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) : \iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_\Gamma (\overline{a}, \overline{n}) ds$, где Γ – кусочно-гладкая граница $G, \overline{n}(A), A \in \Gamma$, – внешняя нормаль к Γ, ds – дифференцируемая дуга Γ.

Доказательство. Поверхностный интеграл второго рода в формуле Гаусса - Остроградского вычисляется через поверхностный интеграл первого рода:

$$\int\limits_{S^*} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int\limits_S (\overline{a}, \overline{n}) ds, \qquad (2)$$

где $\overline{n}$ – внешняя нормаль к поверхнсти S^*. В плоском случае интеграл справа в (2) становится криволинейным интегралом первого рода $\int\limits_{\Gamma}(\overline{a},\overline{n})ds$, где ds будет теперь дифференциалом дуги кривой Г.● ▬

Пример применения формулы Гаусса - Остроградского.

Пользуясь формулой Гаусса - Остроградского, вычислить интеграл (см. пример 3 из §4.5)

$$I = \iint\limits_{S^*} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$$

где S^* – внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.
▲ По формуле Гаусса - Остроградского имеем

$$I = \iiint\limits_{G} (2x+2y+2z)dxdydz,$$

где G – шар $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2$. Для вычисления данного тройного интеграла перейдем к сферическим координатам:
$x = a + r\sin\varphi\cos\theta, y = b + r\sin\varphi\sin\theta, z = c + r\cos\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Якобиан перехода равен $r^2\sin\varphi$. Уравнение границы области G имеет вид $r = R$. Следовательно,
$I = 2\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{R} r^2(a+b+c+r(\sin\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi)dr = \frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$.▲

§ 4.6 Формула Стокса

Пусть в R_3 задана прямоугольная система координат (x,y,z) и пусть в некоторой области $G \subset R_3$ задан вектор $\overline{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

Теорема (формула Стокса). Пусть S^* – ориентированная кусочно-гладкая поверхность, каждый элементарный кусок которой можно записать тремя способами:

$$z = f_1(x,y), (x,y) \in S_z;$$
$$x = f_2(y,z), (y,z) \in S_x;$$
$$y = f_3(z,x), (z,x) \in S_y,$$

где S_z, S_x, S_y – соответственно проекции элементарного куска на координатные плоскости $z = 0, x = 0, y = 0$, ограниченна кусочно-гладким контуром Γ и расположена внутри области G, в которой функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка. тогда справедлива формула: $\int\limits_{S^*} \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) dzdx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int\limits_{\Gamma} (\overline{a}dl)$, где Γ – контур поверхности S^*, ориентарованной соответственно ориентации поверхности S^*.

<u>Доказательство.</u> Пусть, для начала, S^* является ориентарованным элементарным куском, удовлетворяющим выше перечисленным условиям. Имеем

$$\int\limits_{S^*} \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) dzdx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy =$$

$$= \int\limits_{S} \Bigg(\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) \cos(\overline{n}, x) + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) \cos(\overline{n}, y) +$$

$$+ \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \cos(\overline{n}, z) \Bigg) ds. \qquad (1)$$

Выберем в правой части этого выражения члены, содержащие P. Тогда $-\int\limits_{S} \Big(\frac{\partial P}{\partial y} \cos(\overline{n}, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cos(\overline{n}, y)\Big) ds \overset{1}{=} -\int\limits_{S} \Big(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) \cos(\overline{n}, z) ds \overset{2}{=} -\iint\limits_{S_z^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f_1(x,y)) dxdy \overset{3}{=}$

$$\int\limits_{\Gamma_z} P(x, y, f_1(x,y)) dx = \int\limits_{\Gamma} P(x,y,z) dx. \qquad (2)$$

Поясним указанные равенства.

<u>Равенство 1</u>: следует из равенства $\cos(\overline{n}, y) = -\frac{\partial f_1}{\partial y} \cos(\overline{n}, z)$, которое следует из формул для $\cos(\overline{n}, x), \cos(\overline{n}, y), \cos(\overline{n}, z)$:
$\cos(\overline{n}, x) = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos(\overline{n}, y) = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos(\overline{n}, z) = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, где $p = \frac{\partial f_1}{\partial x}, q = \frac{\partial f_1}{\partial y}$.

Равенство 2.: справедливо (см. вычисление поверхностного интеграла второго рода в прямоугольных координатах).
Равенство 3.: следует из формулы Грина.

По аналогии с формулой (2) доказывается, что

$$\int\limits_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\overline{n},z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(\overline{n},x)\Big)ds = \int\limits_\Gamma Q(x,y,z)dy, \qquad (3)$$

$$\int\limits_S \Big(\frac{\partial R}{\partial y}\cos(\overline{n},x) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(\overline{n},y)\Big)ds = \int\limits_\Gamma R(x,y,z)dz, \qquad (4)$$

Из (1) – (4) следует формула Стокса в случае, когда S^* является ориентированным элементарным гладким куском.

Пусть теперь S^* – ориентированная кусочно-гладкая поверхность, т. е. $S^* = S_1^* + \ldots + S_N^*$, где S_k^* – ориентированные элементарные гладкие куски, удовлетворяющие условиям теоремы, и пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ – соответственно ориентированные контуры кусков $S_1^*, \ldots, S_N^*$. Тогда, согласно доказанному выше, $\int\limits_{S^*}\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy = \int\limits_S \Big(\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos(\overline{n},x) + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos(\overline{n},y) + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos(\overline{n},z)\Big)ds = \sum\limits_{k=1}^{N}\int\limits_{S_k}\Big(\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos(\overline{n},x) + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos(\overline{n},y) + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos(\overline{n},z)\Big)ds_k = \sum\limits_{k=1}^{N}\int\limits_{\Gamma_k}(\overline{a}dl_k) = \int\limits_\Gamma(\overline{a}dl)$, где dl_k – дифференциал дуги кривой Γ_k, а dl – дифференциал дуги кривой Γ. Последнее равенство справедливо, так как интегралы $\int\limits_{\Gamma_k}$, берущиеся вдоль внутренних частей кусков Γ_k (не принадлежащих Γ), проходятся два раза в противоположном направлении дают эффект равный нулю. $\blacksquare$

Примеры применения формулы Стокса.

1. Используя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_\Gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

где Γ - кривая пересечения пораболлоида $x^2 + y^2 + z = 3$ с плоскостью $x + y + z = 2$, ориентированная положительно отсносительно вектора $(1, 0, 0)$.

▲ Прежде всего поясним, что означает положительная ориентация кривой относительно вектора. Будем полагать, что замкнутая кривая <u>ориентирована положительно</u> относительно вектора $\overline{a}$, если направление на кривой (со стороны, в которую направлен вектор $\overline{a}$) противоположно направлению движения часовой стрелки, а <u>ориентирована отрицательно</u> относительно вектора $\overline{a}$, если направление на кривой совпадает с направлением движения часовой стрелки.

За поверхность S, ограниченную кривой Γ, примем часть секущей плоскости $x + y + z = 2$, лежащей внутри пораболлоида. Единичным вектором нормали к S, направленным соответственно направлению кривой L, является вектор $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Так как $P = y^2 - z^2, Q = z^2 - x^2, R^2 = x^2 - y^2$, то

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2(z + y), \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2(x + z),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(y + x).$$

Применяя формулу Стокса, получим

$$I = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_S (x + y + z) ds =$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{3}} \iint\limits_S ds = -\frac{8}{\sqrt{3}} \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.$$

На поверхности S: $z = 2 - x - y$. $\Rightarrow$ $z'_x = -1, z'_y = -1$. $\Rightarrow$ $I = -8 \iint\limits_D dxdy$, где D – проекция S на плоскость oxy. Найдем уравнение границы области D. Для чего решим относительно z систему уравнений $x^2 + y^2 + z = 3, x + y + z = 2$. Получим $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}$. таким образом, D – круг радиуса $\sqrt{3/2}$. отсюда следует

$$\iint\limits_D dxdy = \frac{3}{2}\pi.$$

Окончательно получаем $I = -12\pi$.▲

2. Вычислить различными способами криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} y dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

где Γ – окружность, по которой пересекаются сфера $x^2+y^2+z^2 = 4$ и плоскость $z = \sqrt{3}$, причем направление обхода Γ выбирается против хода часовой стрелки, еслии смотреть из точки $(0, 0, 2)$.

▲ <u>1 способ.</u> Вычислим интеграл I просто как криволинейный интеграл. Очевидно, что уравнения окружности Γ можно записать в виде $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$. Далее, перейдем к параметрическим уравнениям окружности: $x = const, y = \sin t, 0 \le t \le 2\pi. \to dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt, dz = 0. \Rightarrow$

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} (-\sin^2 t + 3\cos t) dt = -\pi.$$

<u>2 способ.</u> Вычислим интеграл I используя формулу Стокса. а) В качестве ориентированной поверхности S^*, которую ограничивает окружность Γ, возьмем верхнюю сторону части сферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ при $\sqrt{3} \le z \le 2$ (направление обхода Γ согласовано с ориентацией поверхности). Так как $P = y, Q = z^2, R = x^2$, то
$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1.$
Отсюда, по формуле Стокса, имеем

$$I = -\iint\limits_{S^*} 2z dy dz + 2x dz dx + dx dy.$$

Пусть $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор нормали верхней стороны поверхности S^*. Часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ при $\sqrt{3} \le z \le 2$ проектируется на координатные плоскости oyz, oxz, oxy соответственно в области
$G_1 = \{(y, z) : -\sqrt{4 - z^2} \le y \le \sqrt{4 - z^2}, \sqrt{3} \le z \le 2\}$,
$G_2 = \{(z, x) : \sqrt{3} \le z \le 2, -\sqrt{4 - z^2} \le x \le \sqrt{4 - z^2}\}$,
$G_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.

так как на область G_1 проектируются две части поверхности S^* : $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$, для которой $\cos\alpha \geq 0$, и $x = -\sqrt{4 - y^2 - z^2}$, для которой $\cos\alpha \leq 0$, то для интеграла по поверхности второго рода $I_1 = -\iint\limits_{S^*} 2zdydz$ получаем

$$I_1 = -\Big(\iint\limits_{G_1} 2zdydz - \iint\limits_{G_1} 2zdydz\Big) = 0.$$

Аналогично

$$I_2 = -\iint\limits_{S^*} 3xdzdx = -\Big(\iint\limits_{G_2} 2xdzdx - \iint\limits_{G_2} 2xdzdx\Big) = 0.$$

Учитывая, что $\cos\gamma > 0$, находим

$$I_3 = -\iint\limits_{S^*} dxdy = -\iint\limits_{G_3} dxdy = -\pi.$$

Следовательно, $I = I_1 + I_2 + I_3 = -\pi$.
б) В качестве ориентированной поверхности S^*, которую ограничивает окружность Γ возьмем верхнюю сторону части плоскости $z = \sqrt{3}$ при $x^2 + y^2 \leq 1$ (направление обхода Γ согласовано с ориентацией поверхности). Для верхней части плоскости $z = \sqrt{3}$ имеем $dz = 0, \overline{n} = (0, 0, 1)$. Поэтому

$$I = -\iint\limits_{S^*} 2zdydz + 2xdzdx + dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{S^*} dxdy = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dxdy = -\pi.$$

Таким образом, мы получим один и тот же результат как в случае 1 способа решения, так и в случае 2 способа (пункты а) и б)).

Замечание. Заметим, что второй способ решения является более громоздким по сравнению с первым. Второй способ рассматривается только с целью лучшего усвоения формулы Стокса. ▲

Глава 5

СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

§ 5.1 Определения скалярного и векторного полей

Скалярное поле. Пусть G – область в трехмерном пространстве (или на плоскости). Говорят, что в области G задано скалярное поле, если каждой точке $M \in G$ поставлено в соответствие некоторое число $U(M)$.

Примерами скалярных полей могут служить: поле температур в точках какого-нибудь тела; поле давления газа в точках некоторого объема; поле плотности масс какого-нибудь тела.

Поверхность (линия), на которой функция $U(M)$ принимает постоянное значение C, называется поверхностью (линией) уровня скалярного поля. Меняя значение постоянной C, мы получим семейство поверхностей (линий) уровня данного скалярного поля.

Физические скалярные поля не зависят от выбора системы координат: величина U является функцией лишь точки M (в этом случае скалярное поле называется стационарным). Если величина U зависит также от времени, то такое скалярное поле называется нестационарным.

Если в пространстве введена прямоугольная система координат (x, y, z), то скалярное поле описывается функцией трех переменных: $u = U(x, y, z), (x, y, z) \in G$.

Векторное поле. Говорят, что в области G задано векторное поле, если каждой точке $M \in G$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\overline{a}(M)$. Примерами векторных полей могут служить: электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряжения $\overline{E}$; магнитное поле, создаваемое в каждой точке вектором магнитной индукции $\overline{B}$; поле тяготения, создаваемое системой масс и характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения $\overline{F}$, действующей в этой точке на единичную массу; поле скорости потока жидкости, описываемое в каждой точке вектором скорости $\overline{V}$.

Геометрической характеристикой векторного поля $\overline{a}(M)$ являются векторные линии – кривые, в каждой точке M которых вектор $\overline{a}(M)$ направлен по касательной к кривой. Векторные линии поля тяготения, электрического и магнитного полей называются силовыми линиями, а поле скоростей – линиями тока.

Физические векторные поля не зависят от выбора системы координат: в каждой точке M вектор $\overline{a}(M)$ полностью определяется своим модулем $|\overline{a}(M)|$ и направлением. Если в пространстве введена прямоугольная система координат (x, y, z), то векторное поле $\overline{a}(M)$ описывается вектор-функцией $\overline{a}(x, y, z)$ или тремя скалярными функциями – ее координатами: $\overline{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

§ 5.2 Производная по направлению

Скалярное и векторное поля: $U(M) = U(x, y, z)$ и $\overline{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ называются дифференцируемыми n раз, если функции $U(x, y, z), P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ дифференцируемы n раз. В дальнейшем не оговаривая это особо, будем считать, что рассматриваемые поля дифференцируемы нужное нам число раз.

Определение 1. Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – произвольный единичный вектор. Производной скалярного поля $U(x, y, z)$ в точке $M = (x, y, z)$ по направлению $\overline{\omega}$ называется предел $\frac{\partial U}{\partial \omega}(M) = \lim\limits_{t \to 0+0} \frac{U(x+t\omega_1, y+t\omega_2, z+t\omega_3) - U(x,y,z)}{t}$, если он существует.

Замечание. Производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial \omega}(M)$ является скоростью изменения функции $U(M)$ по направлению $\overline{\omega}$ в точке M.

Теорема. Если скалярная функция $U(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то для нее имеет смысл производная в точке M_0 по направлению любого единичного вектора $\overline{\omega} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, выражаемая формулой $\frac{\partial U}{\partial \omega}(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$, где частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ взяты в точке M_0.

Доказательство. Функции $U(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0. Производные функций $x(t) = x_0 + t\cos\alpha, y(t) = y_0 + t\cos\beta, z(t) = z_0 + t\cos\gamma$ существуют и равны: $x'(t) = \cos\alpha, y'(t) = \cos\beta, z'(t) = \cos\gamma$. $\Rightarrow$ Сложная функция $\varphi(t) = U(x(t), y(t), z(t))$ имеет производную в точке $t = 0$ равную:

$$\left.\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \qquad (1)$$

В то же время,

$$\left.\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{U(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma) - U(x_0, y_0, z_0)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0+0}\frac{U(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma) - U(x_0, y_0, z_0)}{t}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение теоремы. ■

Аналогично определяется производная векторного поля $\overline{a}(M)$ по направлению $\overline{\omega}$.

Определение 2. Производной векторного поля $\overline{a}(x, y, z)$ в точке $M = (x, y, z)$ по направлению $\overline{\omega}$ называется вектор $\frac{\partial\overline{a}}{\partial\omega}(M) = \lim\limits_{t\to 0+0}\frac{\overline{a}(x+t\omega_1, y+t\omega_2, z+t\omega_3) - \overline{a}(x, y, z)}{t}$, при условии, что указанный предел существует.

Замечание. В прямоугольной системе координат (x, y, z) $\overline{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ и $\frac{\partial\overline{a}}{\partial\omega} = (\frac{\partial P}{\partial\omega}, \frac{\partial Q}{\partial\omega}, \frac{\partial R}{\partial\omega})$, где $\frac{\partial P}{\partial\omega}, \frac{\partial Q}{\partial\omega}, \frac{\partial R}{\partial\omega}$ – производные по направлению $\overline{\omega}$ от скалярных функций P, Q, R.

§ 5.3 Градиент скалярного поля

Определение. Вектор-функция $gradU = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$ называется градиентом скалярного поля $U(x, y, z)$.

Пусть $U(x,y,z)$ дифференцируема в точке (x,y,z). Обозначим: $a = \frac{\partial U}{\partial x}, b = \frac{\partial U}{\partial y}, c = \frac{\partial U}{\partial z}$. Очевидно $\cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \cos\mu = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \cos\nu = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ есть направляющие косинусы вектора $gradU$. Пусть дано некоторое направление $\overline{\omega} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Возьмем производную от функции U в точке (x,y,z) по направлению $\overline{\omega}$: $\frac{\partial U}{\partial\omega} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$. Преобразуем это выражение следующим образом: $\frac{\partial U}{\partial\omega} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cos\beta + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cos\gamma\Big) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}(\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma) = ||gradU||\cos(gradU, \overline{\omega})$. (*)

(Здесь $\cos(gradU, \overline{\omega})$ есть косинус угла между направлением градиента и направлением $\overline{\omega}$). Из полученной формулы видно, что $\frac{\partial U}{\partial\omega}$ достигает наибольшего значения $\frac{\partial U}{\partial\omega} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = ||gradU||$, если направление $\overline{\omega}$ совпадает с направлением $gradU$.

Производная по направлению $\overline{\omega}$: $\frac{\partial U}{\partial\omega}$ характеризует "скорость изменения" функции $U(x,y,z)$ в точке (x,y,z) по направлению $\overline{\omega}$, поэтому $gradU$ (как вектор) указывает направление максимального роста скалярного поля $U(x,y,z)$, а его длина $||gradU||$ дает величину "скорости изменения".

<u>Замечание.</u> Преобразование (*) мы смогли сделать, так как допустили, что $gradU \neq 0$, иначе производная по любому направлению была бы равна нулю.

§ 5.4 Дивергенция. Ротор. Оператор Гамильтона. Потенциальное и соленоидальное поле

<u>Дивергенция.</u>

<u>Определение.</u> <u>Дивергенцией</u> векторного поля $\overline{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ называется скалярная функция $div\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. (слово "дивергенция" означает "расходимость" ("расхождение")).

Формула Гаусса-остроградского утверждает: поток векторного поля $\overline{a}$ через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции по области, ограниченной данной поверхностью. Такова векторная трактовка формулы Гаусса-Остроградского.

Ротор.

Определение. Ротором (или вихрем) векторного поля $\overline{a}(x,y,z)=\overline{a}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ называется вектор-функция

$$rot\overline{a}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\overline{i}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)+\overline{j}\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)+\overline{k}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big).$$

В формуле Стокса утверждается, что поток $rot\overline{a}$ через ориентированную поверхность равен циркуляции векторного поля $\overline{a}$ вдоль контура, ограничивающего данную поверхность.

Оператор Гамильтона. Рассмотрим символический вектор $\nabla=\overline{i}\frac{\partial}{\partial x}+\overline{j}\frac{\partial}{\partial y}+\overline{k}\frac{\partial}{\partial z}$, называемый оператором Гамильтона. С помощью этого символического вектора удобно записывать и выполнять операции векторного анализа.

В результате умножения ∇ на скалярную функцию $U(x,y,z)$ получается $gradU$: $\nabla U\Big(\overline{i}\frac{\partial}{\partial x}+\overline{j}\frac{\partial}{\partial y}+\overline{k}\frac{\partial}{\partial z}\Big)U=\overline{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\overline{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\overline{k}\frac{\partial U}{\partial z}=gradU.$

Скалярное произведение вектора ∇ на вектор-функцию $\overline{a}(x,y,z)=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ дает $div\overline{a}:(\nabla,\overline{a})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=div\overline{a}.$ Заметим, что $div\overline{a}$ – скалярная функция.

Векторное произведение вектора ∇ на вектор - функцию $\overline{a}(x,y,z)=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ дает $rot\overline{a}$:

$$\nabla\times\overline{a}=\Big(\overline{i}\frac{\partial}{\partial x}+\overline{j}\frac{\partial}{\partial y}+\overline{k}\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times(\overline{i}P+\overline{j}Q+\overline{k}R)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=rot\overline{a}.$$

Заметим, что $rot\overline{a}$ – вектор.

Потенциальное и соленоидальное поле. Векторное поле $\overline{a}(M)$ называется потенциальным в области G, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля $U(M)$:

$$\overline{a}=gradU. \tag{1}$$

Функция $U(M)$ называется скалярным потенциалом векторного поля $\overline{a}(M)$. Если $\overline{a} = (P, Q, R)$, то из равенства (1) следует, что $P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}, R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Рассмотрим потенциальное поле $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Его потенциал $U = \frac{\overline{r}^2}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$. Вычислим ротор этого поля:

$$rot\overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot 0 + \overline{j} \cdot 0 + \overline{k} \cdot 0 = \overline{0}.$$

Вообще говоря, ротор любого потенциального поля равен нулю, поэтому говорят, что потенциальное поле является безвихревым. Действительно, пусть $\overline{a}(x, y, z)$ – потенциальное поле и $U(x, y, z)$ его скалярный потенциал, т. е. $\overline{a} = gradU$. Тогда

$$rot\overline{a} = rot\ gradU = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \overline{0}.$$

Условие потенциальности векторного поля можно сформулировать в терминах криволинейного интеграла.

● Теорема. Пусть на области $G \subset R_3$ задано векторное поле $\overline{a}(x, y, z) = \overline{a}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ непрерывное на G. Если интеграл от вектора $\overline{a}$ по любому замкнутому непрерывному кусочно-гладкому контуру Γ, принадлежащему G, равен нулю:

$$\int_{\Gamma} (\overline{a}dl) = 0, \qquad (*)$$

то векторное поле является потенциальным.

Доказательство. Прежде всего докажем, что из $(*)$ следует независимость криволинейного интеграла второго рода по кривой $\Gamma_{A_0A} \subset G$ (с началом в точке A_0 и концом в точке A) от формы кривой Γ_{A_0A}, т. е. если зафиксирована точка A_0, то

$$\int_{\Gamma_{A_0A}} (\overline{a}dl) = V(A) = V(x, y, z). \qquad (1)$$

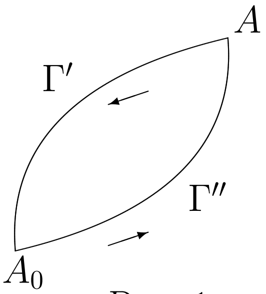


Рис. 1.

Из рисунка 1 видно: $\int\limits_{\Gamma'+\Gamma''} (\overline{a}dl) = \int\limits_{\Gamma''_{A_0A}} (\overline{a}dl) + \int\limits_{\Gamma'_{AA_0}} (\overline{a}dl) = 0$. Отсюда следует: $\int\limits_{\Gamma''_{A_0A}} (\overline{a}dl) = -\int\limits_{\Gamma'_{AA_0}} (\overline{a}dl)$. $\Rightarrow$ $\int\limits_{\Gamma''_{A_0A}} (\overline{a}dl) = \int\limits_{\Gamma'_{A_0A}} (\overline{a}dl)$. Последнее равенство доказывает (1).

Теперь докажем, что из (1) следует потенциальность поля $\overline{a}$. Чтобы доказать, что $\frac{\partial V}{\partial x} = P$ в точке $A_1 = (x_1, y_1, z_1) \in G$ будем рассуждать следующим образом. В пределах области G проведем отрезок A_2A_1, параллельный оси x. Пусть для определенности это будет отрезок $y = y_1, z = z_1, x_2 \le x \le x_1$. Таким образом, $A_2 = (x_2, y_1, z_1)$. Соединим A_0 с $A_2 = (x_2, y_1, z_1)$ произвольной непрерывной, кусочно-гладкой, ориентированной в направлении от A_0 к A_2 кривой Γ_1 и обозначим через Γ_2 отрезок A_2A, ориентированный от A_2 к $A \in A_2A_1$.

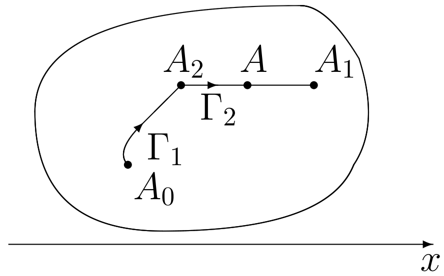


Рис. 2.

Тогда $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (рис. 2) и $V(x, y_1, z_1) =$

$$= \int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{\Gamma_2} Pdx, \quad (2)$$

так как очевидно, что $\int\limits_{\Gamma_2} Qdy = \int\limits_{\Gamma_2} Rdz = 0$. Кривая Γ_1 в дальнейшем рассуждении не будет изменяться, и поэтому $\int\limits_{\Gamma_1} Pdx+Qdy+Rdz$ можно считать константой, которую мы обозначим через C. Таким образом, $V(x, y_1, z_1) = C + \int\limits_{x_2}^{x} P(t, y_1, z_1)dt$. Функция P непрерывна, в частности непрерывна по x, поэтому $\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y_1, z_1)$. В частности, это равенство верно при $x = x_1$, и мы доказали нужное равенство. Аналогично доказываются равенства $\frac{\partial V}{\partial y} = Q, \frac{\partial V}{\partial z} = R$, строя специальные соединяющие точки A_0 и A_1 кривые, заканчивающиеся при подходе к A_1 отрезками, в первом случае параллельными оси

y, и во втором – оси z. Таким образом, мы доказали, что $gradV = \overline{a}$, т. е. поле $\overline{a}$ является потенциальным. ●

Соленоидальное поле. Векторное поле $\overline{a}(M)$ называется соленоидальным в области G, если в этой области $div\overline{a} = 0$.

Замечание. Из формулы Гаусса-остроградского следует, что поток соленоидального в области G векторного поля через замкнутую поверхность, ограничивающую область, целиком лежащую в G, всегда равен нулю.

Пример. $div\ rot\overline{a} = (\nabla, \nabla \times \overline{a}) = 0$, т. е. поле $rot\overline{a}$ является соленоидальным.

Примеры на скалярные и векторные поля.

1. Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля $u = xy$. Вычислить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках $(1, 1)$ и $(1, -1)$.

▲ Линии уровня функции $u = xy$ задаются уравнением $xy = c$, где c – произвольная постоянная, т. е. представляют собой семейство гипербол $y = \frac{c}{x}$, а также две прямые $x = 0$ и $y = 0$ (см. Рис.)

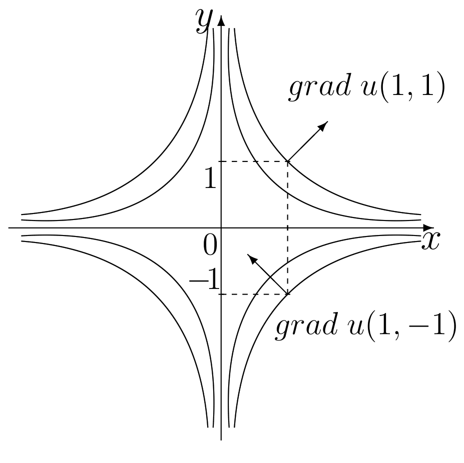


Рис.

Далее, $grad\ u = y\overline{i} + x\overline{j}$,
$grad\ u(1, 1) = \overline{i} + \overline{j}$,
$grad\ u(1, -1) = -\overline{i} + \overline{j}$.
На рисунке видно, что в указанных точках $grad\ \ u$ перпендикулярен линиям уровня, проходящим через точки. В точке (1,1) функция $u = xy$ быстрее всего возрастает в направлении от начала координат по биссектрисе I квадранта, и скорость её возрастания в этом направлении равна

$$\frac{\partial u}{\partial \omega}(1, 1) = |grad\ u(1, 1)| = \sqrt{2}.$$

В точке (1,-1) функция $u = xy$ возрастает быстрее всего в направлении к началу координат по биссектрисе IV квадранта и скорость её возрастания в этом направлении также равна $\sqrt{2}$.
▲

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz$ в точке $M(-2,3,4)$. Чему равна в этой точке производная поля u в направлении вектора $\overline{a} = (3,-4,12)$?

▲ По определению градиента, находим $grad\ u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M)\right) = (yz, xz, xy)\Big|_M = (12,-8,-6)$. Единичным вектором, сонаправленным с $\overline{a}$, является вектор $\overline{\omega} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{1}{13}(3,-4,12)$. Далее, по формуле вычисления производной от скалярной функции по направлению $\overline{\omega}$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \omega}(M) = \frac{3}{13}\cdot 12 + \frac{4}{13}\cdot 8 - \frac{12}{13}\cdot 6 = -\frac{4}{13}.\blacktriangle$$

3. Найти градиент сферического скалярного поля $u = \varphi(|\overline{x}|), |\overline{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \overline{x} = (x,y,z)$.

▲ Используя определение градиента, вычисляем $grad\ \varphi(|\overline{x}|) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(|\overline{x}|), \frac{\partial}{\partial y}\varphi(|\overline{x}|), \frac{\partial}{\partial z}\varphi(|\overline{x}|)\right) = \left(\varphi'(|\overline{x}|)\frac{x}{|\overline{x}|}, \varphi'(|\overline{x}|)\frac{y}{|\overline{x}|}, \varphi'(|\overline{x}|)\frac{z}{|\overline{x}|}\right) = \varphi'(|\overline{x}|)\frac{\overline{x}}{|\overline{x}|}$. Отметим, что из соотношения

$$\overline{a} = \varphi'(|\overline{x}|)\frac{\overline{x}}{|\overline{x}|} = grad\ \varphi(|\overline{x}|)$$

следует, что векторное поле $\overline{a}$ является потенциальным, а функция $\varphi(|\overline{x}|)$ – его потенциалом. ▲

4. Найти дивергенцию векторного поля $\overline{a}(x,y^2,z^3)$ в точке $M(-2,4,5)$.

▲ Используя определение дивергенции векторного поля $\overline{a} = (P,Q,R)$, находим $div\overline{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M), \frac{\partial Q}{\partial y}(M), \frac{\partial R}{\partial z}(M) = (1+2y+3z^2)\Big|_M = 1+8+75 = 84.$▲

5. Найти дивергенцию сферического векторного поля $\overline{a} = f(|\overline{x}|)\overline{x}, \overline{x} = (x,y,z), |\overline{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Определить вид функции $f(|\overline{x}|)$, для которой поле $\overline{a}$ является соленоидальным.

▲ Запишем данное поле в координатах $\overline{a} = f(|\overline{x}|)\overline{x} = (f(|\overline{x}|)x, f(|\overline{x}|)y, f(|\overline{x}|)z)$ и используя определение дивергенции, найдем $div\overline{a} = \frac{\partial}{\partial x}(f(|\overline{x}|)x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(|\overline{x}|)y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(|\overline{x}|)z) = f'(|\overline{x}|)\frac{x^2}{|\overline{x}|} + f(|\overline{x}|) + f'(|\overline{x}|)\frac{y^2}{|\overline{x}|} + f(|\overline{x}|) + f'(|\overline{x}|)\frac{z^2}{|\overline{x}|} + f(|\overline{x}|) = f'(|\overline{x}|)|\overline{x}| + 3f(|\overline{x}|)$.

Поле $\overline{a}$ является соленоидальным, если $div\overline{a} = 0$. Отсюда следует
$$f'(|\overline{x}|)|\overline{x}| + 3f(|\overline{x}|) = 0.$$
Решим данное дифференциальное уравнение, разделяя переменные:
$$\frac{df}{f} = -\frac{3d|\overline{x}|}{|\overline{x}|}.$$
После интегрирования получим
$$\ln|f| = -3\ln|\overline{x}| + \ln C,$$
откуда $f(|\overline{x}|) = \frac{C}{|\overline{x}|^3}$, где C – произвольная постоянная. Таким образом, дивергенция сферического векторного поля $\overline{a} = f(|\overline{x}|)\overline{x}$ равна нулю, когда $f(|\overline{x}|) = \frac{C}{|\overline{x}|^3}$, т. е. в случае поля $\overline{a} = \frac{C}{|\overline{x}|^3}\overline{x}$. Такое поле называется кулоновскими. Заметим, что поле является соленоидальным в любой области, не содержащей начала координат. ▲

6. Найти ротор сферического векторного поля $\overline{a} = f(|\overline{x}|)\overline{x}, \overline{x} = (x, y, z), |\overline{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

▲ В координатах поле $\overline{a}$ записывается следующим образом: $\overline{a} = (f(|\overline{x}|)x, f(|\overline{x}|)y, f(|\overline{x}|)z)$. Далее, по определению ротора найдем
$$rot\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(|\overline{x}|)x & f(|\overline{x}|)y & f(|\overline{x}|)z \end{vmatrix} = \overline{i}\Big(\frac{\partial}{\partial y}f(|\overline{x}|)z - \frac{\partial}{\partial z}f(|\overline{x}|)y\Big) + \overline{j}\Big(\frac{\partial}{\partial z}f(|\overline{x}|)x - \frac{\partial}{\partial x}f(|\overline{x}|)z\Big) + \overline{k}\Big(\frac{\partial}{\partial x}f(|\overline{x}|)y - \frac{\partial}{\partial y}f(|\overline{x}|)x\Big) =$$
$$\overline{i}f'(|\overline{x}|)\Big(\frac{yz}{|\overline{x}|} - \frac{zy}{|\overline{x}|}\Big) + \overline{j}f'(|\overline{x}|)\Big(\frac{zx}{|\overline{x}|} - \frac{xz}{|\overline{x}|}\Big) + \overline{k}f'(|\overline{x}|)\Big(\frac{xy}{|\overline{x}|} - \frac{xy}{|\overline{x}|}\Big) = 0.$$
Таким образом, ротор любого сферического векторного поля равен 0, т. е. сферическое векторное поле является безвихревым. ▲

РЯДЫ ФУРЬЕ

Глава 6

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 6.1 Линейные множества. Линейные нормированные пространства

1. Линейные множества.

Множество E элементов $x, y, z, \ldots$ любой природы называются линейным множеством, если для любых двух элементов $x, y \in E$ определен элемент $x + y \in E$, называемый из суммой, и если для любого действительного числа α и любого элемента $x \in E$ определен элемент $\alpha x \in E$ (произведение αна x) и при этом выполняются следующие свойства:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Из $x + y = x + z \Rightarrow y = z$.
4. $\alpha x + \alpha y = \alpha(x + y)$.
5. $\alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x$.
6. $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$.
7. $1 \cdot x = x$.
8. $\exists$ элемент $\theta \in E$ такой, что $x+\theta = x$ при $\forall x \in E$(θ – нулевой элемент).

Замечание. 1. Очевидно, множества $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_n$ можно рассматривать как примеры линейных множеств.
2. можно обойтись без констатации свойства 8, т. к. существование нулевого элемента следует из свойств 1-7. Действительно, определим $\theta = 0 \cdot x$. Покажем, что θ, определенное таким образом, будет нулевым элементом, т. е. $x+\theta = x$ при $\forall x \in E : x+\theta = x+0\cdot x = 1\cdot x+0\cdot x = (1+0)x = 1\cdot x = x$.
3. Вычитание элементов можно определить так: $x - y = x + (-1)y$. Действительно, вычитание, определенное таким образом, будет операцией, противоположной операции сложения: $(x - y) + y = (x + (-1)y) + y = x + ((-1)y + y) = x + (-1+1)y = x + 0\cdot y = x + \theta = x$.
4. Элемент $(-1)x = -x$ называется элементом, противоположным элементу x, т. е. таким, что $x + (-x) = \theta$. Существование элемента $-x$ следует из свойств 1-7. Действительно, $x + (-x) = x + (-1)x = 1\cdot x + (-1)\cdot x = (1-1)x = 0\cdot x = \theta$.

Линейные нормированные пространства

Пусть E – линейное множество элементов $x, y, z \ldots$.
Определение 1. Нормой элемента $x \in E$ называется число $||x||$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $||x|| \geq 0$ для $\forall x \in E$; если $||x|| = 0$, то $x = \theta$.
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ для $\forall x \in E$ и $\forall \alpha \in \mathbf{R}$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, при $\forall x, y \in E$.

Определение 2. Линейное множество E, в котором для каждого $x \in E$ определена норма $||x||$, называется нормированным линейным пространством.
Замечание. 1. Евклидово пространство $\mathbf{R}_n$ есть линейное нормированное пространство с нормой

$$||x|| = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2}, x = (x_1, \ldots, x_n).$$

2. Свойство 3 из определения нормы называется "неравенством треугольника".

Определение 3. Скалярным произведением двух элементов $x, y \in E$ называется число (x, y), удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $(x, y) = (y, x)$.
2. $\forall x, y \in E$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} : (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.
3. $(x, x) \geq 0$ для $\forall x \in E$; если $(x, x) = 0$, то $x = \theta$.

Определение 4. Если в линейном множестве E определено скалярное произведение (x, y), то E называется линейным пространством со скалярным произведением.

Замечание. Евклидово пространство $\mathbf{R}_n$ есть линейное пространство со скалярным произведением, которое определяется следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, x = (x_1 \ldots x_n), y = (y_1 \ldots y_n) \in R_n.$$

В линейном нормированном пространстве E можно определить понятие предела.

Определение 5. Говорят последовательность $x_n \in E$ сходится к элементу $x \in E$ (пишут $x_n \to x$ или $\lim x_n = x, n \to \infty$), если $||x_n - x|| \to 0 (n \to \infty)$.

Пусть $x_n \to x$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N : ||x_n - x|| < \varepsilon/2$. Тогда для $\forall n, m > N : ||x_n - x_m|| = ||x_n - x + x - x_m|| \leq ||x_n - x|| + ||x_m - x|| < \varepsilon$. Мы доказали, если $x_n \to x$, то последовательность удовлетворяет условию фундаментальности: $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N}, \forall n, m > N : ||x_n - x_m|| < \varepsilon$.

Определение 6. Линейное нормированное пространство E называется полным, если любая последовательность $(x_n) \subset E$, удовлетворяющая условию фундаментальности, сходится к некоторому элементу $x \in E$.

§ 6.2 Примеры линейных нормированных пространств

1.) Пространство $\mathbf{C}$ – непрерывных функций.

Пусть Ω – замкнутое, ограниченное множество пространства $\mathbf{R}_n$. Множество всех непрерывных на Ω действительных функций $f(x)(x \in \Omega)$ обозначают символом $C = C(\Omega)$. Очевидно, $C(\Omega)$ является линейным множеством с нулевым элементом $\theta = \theta(x) \equiv 0$. Норму в $C(\Omega)$ определим следующим образом:

$$||f(x)||_C = ||f||_C = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Действительно, $||f||_C$ удовлетворяет аксиомам нормы:

1. $||f||_C \geq 0, \forall f \in C$; если $||f||_C = 0$, то $f = \theta$.
2. $||\alpha f||_C = \max\limits_{x\in\Omega} |\alpha f(x)| = |\alpha| \max\limits_{x\in\Omega} |f(x)| = |\alpha| \cdot ||f||_C$. (здесь $\alpha \in \mathbf{R}$).
3. $||f + g||_C = \max\limits_{x\in\Omega} |f(x) + g(x)| \leq \max\limits_{x\in\Omega} |f(x)| + \max\limits_{x\in\Omega} |g(x)| = ||f||_C + ||g||_C$.

Таким образом, $C(\Omega)$ является линейным нормированным пространством с нормой $||f||_C$.

Теорема 1. Сходимость последовательности функций в пространстве $C(\Omega)$ равносильна равномерной её сходимости на Ω.

Доказательство. Пусть $f_n \in C(\Omega), n \geq 1; f_n(x) \to f(x)$ в пространстве $C(\Omega)$, т. е. $||f_n(x) - f(x)||_C = \max\limits_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Последнее означает, что $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на Ω. ■

● Теорема 2. Линейное нормированное пространство $C(\Omega)$ является полным.

Доказательство. Пусть $(f_n(x)) \subset C(\Omega)$ и является фундаментальной, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N}, \forall n, m > N$:

$$||f_n(x) - f_m(x)||_C = \max_{x\in\Omega} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Отсюда следует, что последовательность будет фундаментальной при любом $x \in \Omega$. Следовательно, при любом $x \in \Omega$ последовательность $(f_n(x))$ сходится. Таким образом, существует функция $f(x)$ такая, что $f_n(x) \to f(x)$ при любом $x \in \Omega$. Докажем, что $f(x) \in C(\Omega)$. Из $(*)$ следует:

$\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N}, \forall n, m > N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in \Omega.$
Перейдем к пределу при $m \to \infty$ в данном неравенсте. Получим $\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in \Omega.$

Все это означает, что $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на Ω. Так как $f_n(x)$ непрерывны на Ω, то $f(x)$ также непрерывна на Ω. ● ■

2.) Пространство $L = L(\Omega)$ - функций, интегрируемых по модулю.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}, \Omega = [a, b]$. Обозначим через $L = L([a, b])$ множество действительных функций $f(x)$, которые удовлетворяют условию: интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеет конечное число особых точек и сущестует (сходится) абсолютно, т. е. $\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty$. легко проверяется, что L является линейным множеством. Действительно: если $f, \varphi \in L$, то $(f + \varphi) \in L$, так как $|f + \varphi| \leq |f| + |\varphi|$; если $g \in L, \alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha f \in L$, так как $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f|$.

Нулевым элементом в L будем считать функцию $\theta = \theta(x)$, для которой $\int\limits_a^b |\theta(x)|dx = 0$. Функция $\theta(x) \equiv 0$ есть пример такой функции.

Поставим любой функции $f(x) \in L$ в соответствие число $||f||_L = \int\limits_z^b |f(x)|dx$. Покажем, что $||f||_L$ является нормой. В самом деле:

a.) $||f||_L = \int\limits_a^b |f|dx \geq 0$; если $||f||_L = \int\limits_a^b |f(x)|dx = 0$, то $f(x) = \theta(x) = \theta$.

b.) Если $f \in L, \alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha f \in L$ и выполняется равенство

$$||\alpha f||_L = \int\limits_a^b |\alpha f(x)|dx = |\alpha| \int\limits_a^b |f(x)|dx = |\alpha| \cdot ||f||_L.$$

c.) Если $f, \varphi \in L$, то $(f + \varphi) \in L$ и

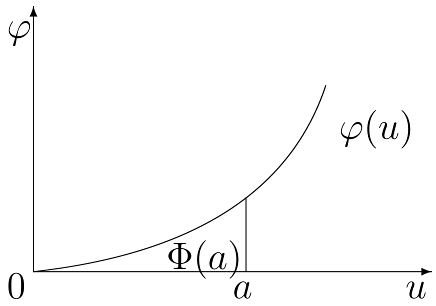
$$||f + \varphi||_L = \int\limits_a^b |f(x) + \varphi(x)|dx \leq \int\limits_a^b |f(x)dx + \int\limits_a^b |\varphi(x)|dx =$$
$$||f||_L + ||\varphi||_L.$$

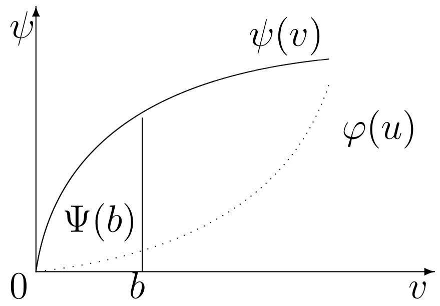
3.) Пространство $L_p = L_p(\Omega)$ - функций, интегрируемых по модулю со степенью.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}, \Omega = [a, b]$. Обозначим через $L_p = L_p([a, b])(p \geq 1)$ множество функций $f(x)$, которые удовлетворяют условию: иинтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеет конечное число особых точек и существует (сходится) интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|^p dx < \infty$.

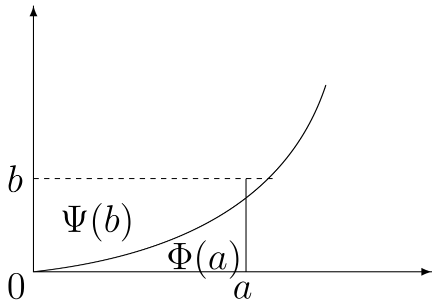
Покажем, что если в L_p ввести норму, полагая $||f||_L = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, то L_p будет линейным нормированным пространством. Для этого нам понадобятся неравенства, которые называются: "неравенство Гёльдера", "неравенство Минковского". Докажем эти неравенства.

● Пусть $\varphi(u), \psi(v)(u, v \geq 0)$ – непрерывные функции, строго возрастающие и взаимообратные, т. е. $\varphi(\psi(v)) \equiv v$. Полагаем также, что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Рассматривая графики этих функций в плоскости (u, v) (см. Рис.), убедимся в справедливости неравенства





Совместим графики



$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)(a, b \geq 0$, где $\Phi(a) = \int\limits_0^a \varphi(udu, \Psi(b) =$

$\int\limits_0^b \psi(v)dv$, которое обращается в равенство, если $\varphi(a) = b$. Положим $\varphi(u) = u^\alpha, \psi(v) = v^{1/\alpha}(\alpha > 0, 1+\alpha = p, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1)$. Получим $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}, (a, b \geq 0)$. Отсюда, если полодить $f(x) \in L_p([a,b]), \varphi(x) \in L_p([a,b])$, получим

$$|f(x)\cdot g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|\varphi(x)|^q}{q}, \text{ при } \forall x \in [a,b].$$

отсюда следует

$$\int\limits_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \leq \frac{1}{p}\int\limits_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q}\int\limits_a^b |\varphi(x)|^q dx. \qquad (1)$$

Применим (1) к функциям $\frac{1}{||f||_{L_p}} f(x), \frac{1}{||\varphi||_{L_p}}\varphi(x), (||f||_{L_p} > 0$, $||\varphi||_{L_p} > 0)$. Получим

$$\frac{1}{||f||_{L_p}\cdot||\varphi||_{L_p}}\int\limits_a^b |f\cdot\varphi|dx \leq 1. \Rightarrow$$

$$\int\limits_a^b |f\cdot\varphi|dx \leq \Big(\int\limits_a^b |f|^p dx\Big)^{1/p}\cdot\Big(\int\limits_a^b |\varphi|^q dx\Big)^{1/q}, \text{ где } \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1. \quad (2)$$

Заметим, что это неравенство верно, если $||f||_{L_p} = ||\varphi||_{L_p} = 0$ или если одна из этих величин равна нулю.

Неравенство (2) называется неравенством Гёльдера (при $p = 2$ оно называется неравенством Буняковского).

Допустим $f(x), \varphi(x) \in L_p([a,b])$. Тогда

Замечание. Из неравенства Гёльдера следует, что если $f \in L_p([a,b])$, то $f \in L_{p_1}([a,b])$, где $1 < p_1 < p$.

Действительно

$\int\limits_a^b |f|^{p_1}dx \leq \Big(\int\limits_a^b |f|^{p_1 p_0}dx\Big)^{1/p_o}\cdot\Big(\int\limits_z^b 1dx\Big)^{1/q_0} = \Big(\int\limits_a^b |f|^p dx\Big)^{1/p_0}\cdot$
$\cdot(b-a)^{1/q_0} < \infty$, где $p_0 = \frac{p}{p_1}, \frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0} = 1$.

Далее, используя неравенство Гёльдера, получим неравенство Минковского:

$\int\limits_a^b |f+\varphi|^p dx \le \int\limits_a^b |f+\varphi|^{p-1}|f|dx + \int\limits_a^b |f+\varphi|^{p-1}|\varphi|dx \le$
$\le \Big(\int\limits_a^b |f+\varphi|^{q(p-1)}dx\Big)^{1/q} \cdot \Big(\int\limits_a^b |f|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_a^b |f+\varphi|^{q(p-1)}dx\Big)^{1/q} \cdot$
$\cdot \Big(\int\limits_a^b |\varphi|^p dx\Big)^{1/p} = \Big[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}\Big] = \Big(\int\limits_a^b |f + \varphi|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\Big(\int\limits_a^b |f|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_a^b |\varphi|^p dx\Big)^{1/p}\Big).$

Отсюда следует неравенство
$\Big(\int\limits_a^b |f + \varphi|^p dx\Big)^{1/p} \le \Big(\int\limits_a^b |f|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_a^b |\varphi|^p dx\Big)^{1/p}$, которое называется неравенством Минковского.●

Покажем теперь, что L_p является линейным множеством. Пусть f и $\varphi \in L_p$. Следовательно, $\int\limits_a^b |f|^p dx < \infty, \int\limits_a^b |\varphi|^p dx < \infty$. $\Rightarrow$ (по неравенству Минковского) $\Rightarrow \int\limits_a^b |f+\varphi|^p dx < \infty \Rightarrow (f+\varphi) \in L_p$.
$\int\limits_a^b |\alpha f|^p dx = |\alpha|^p \int\limits_a^b |f|^p dx < \infty$. $\Rightarrow \alpha f \in L_p$, если $f \in L_p$ (здесь $\alpha \in \mathbf{R}$). Нулевым элементом в L_p будем считать функцию $\theta = \theta(x)$, для которой $\int\limits_a^b |\theta(x)|^p dx = 0$. Таким образом, L_p – линейное множество.

Далее, докажем, что $||f||_{L_p} = \Big(\int |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}$ удовлетворяет аксиомам нормы:

1. $||f||_{L_p} \ge 0, \forall f \in L_p; ||f||_{L_p} = 0 \Rightarrow f = \theta$.
2. Если $f \in L_p$ и $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha f \in L_p$ и $||\alpha f||_{L_p} = \Big(\int\limits_a^b |\alpha f(x)|^p dx\Big)^{1/p} = |\alpha| \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} = |\alpha| \cdot ||f||_{L_p}$.
3. Если $f, \varphi \in L_p$, то $(f + \varphi) \in L_p$ и по неравенству

Минковского имеем

$$||f+\varphi||_{L_p} \le ||f||_{L_p} + ||\varphi||_{L_p}$$

Заметим, что пространство $\underline{L([a,b]) = L_1([a,b])}$.

Обратим особое внимание на пространство $L_2 = L_2([a,b])$.

Пространства $L_2([a,b])$ обладают особыми свойствами – в них можно ввести скалярное произведение. Пусть функции $f, \varphi \in L_2$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$\int\limits_a^b |f \cdot \varphi| dx \le \Big(\int\limits_a^b |f|^2 dx\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int\limits_a^b |\varphi|^2 dx\Big)^{1/2}$$

и, следовательно, $\int\limits_a^b |f \cdot \varphi| dx < \infty$. Таким образом, если $f, \varphi \in L_2$, то $f \cdot \varphi \in L([a,b])$ и, следовательно, для любых $f, \varphi \in L_2$ имеет смысл интеграл (абсолютно сходящийся) $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx$. Обозначим этот интеграл следующим образом:

$$(f(x), \varphi(x)) = (f, \varphi) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

Покажем, что $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx$ удовлетворяет трем аксиомам скалярного произведения:

1. $(f,\varphi) = \int\limits_a^b f \cdot \varphi dx = \int\limits_a^b \varphi \cdot f dx = (\varphi, f)$.
2. $(\alpha f + \beta\varphi, \psi) = \int\limits_a^b (\alpha f + \beta\varphi)\psi dx = \alpha \int\limits_a^b f\psi dx + \beta \int\limits_a^b \varphi\psi dx = \alpha(f,\psi) + \beta(\varphi,\psi)$.
3. $(f,f) = \int\limits_a^b f^2(x)dx \ge 0; (f,f) = \int\limits_a^b f^2(x)dx = 0. \Rightarrow f(x) = \theta(x)$.

Замечание. В любом линейном пространстве со скалярным произведением можно ввести норму, используя скалярное произведение: $||f|| = (f,f)^{1/2}$.

Глава 7
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 7.1 Ортогональная система в пространстве со скалярным произведением. Ряды Фурье

Пусть H – линейное пространство элементов $\varphi, \psi, f, \ldots$, в котором введено скалярное произведение $(\varphi, \psi), \varphi, \psi \in H$, подчиняющееся аксиомам скалярного произведения.

Замечание. Примером пространства H может быть пространство $L_2(\Omega)$.

Определение 1.

1. Два элемента $\varphi, \psi \in H$ называются ортогональными (друг другу), если $(\varphi, \psi) = 0$.
2. Элемент $\varphi \in H$ называется нормальным, если $||\varphi|| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = 1$.
3. Система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ (конечная или бесконечная) называется ортогональной, если её элементы (ненулевые, т. е. имеющие положительную норму) попарно ортогональны.
4. Система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ называется ортонормированной, если

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Определение 2.

1. Если $f \in H$, то число $\frac{(f,\varphi_k)}{||\varphi_k||^2}$ называется коэффициентом Фурье f относительно элемента φ_k ортогональной системы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$

2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{||\varphi_k||^2}(f,\varphi_k)\varphi_k$, называется рядом Фурье элемента f по ортогональной системе $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$
Записывается это так

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{||\varphi_k||^2}(f,\varphi_k)\varphi_k.$$

Замечание. Если система $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ ортонормирована, то $||\varphi_k|| = 1, k = 1, 2, 3, \ldots$, и ряд Фурье f записывается проще:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty}(f,\varphi_k)\varphi_k$$

коэффициентом Фурье в этом случае является число (f,φ_k).

Пример ортогональной системы.

Тригонометрические функции $1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ образуют ортогональную систему в пространстве $L_2([0;2\pi])$ – функций, интегрируемых с квадратом модуля на $[0;2\pi]$. Это вытекает из равенств:

$\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos lx dx = 0, (k \neq l, k, l = 0, 1, 2, \ldots),$

$\int\limits_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin lx dx = 0, (k \neq l, k, l = 1, 2, \ldots),$

$\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \cdot \sin lx dx = 0, (k = 0, 1, 2, \ldots, l = 0, 1, 2, \ldots),$

$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi, (k = 1, 2, \ldots),$

$\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$

§ 7.2 Тригонометрические ряды Фурье

Рассмотрим систему тригонометрических функций

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots \tag{1}$$

из пространства $L_2([0;2\pi])$. Эта система является ортогональной. Мы будем изучать ряды Фурье по тригонометрической системе функций (1), которые называются тригонометрическими рядами Фурье.

Введем некоторые вспомогательные определения и утверждения.

● Утверждение 1. Если для периодической с периодом 2ω функции $f(x)$ существует интеграл (собственный или несобственный) $\int\limits_0^{2\omega} f(x)dx$, то при любом $a \in \mathbf{R}$:

$$\int\limits_0^{a+2\omega} f(x)dx = \int\limits_0^{2\omega} f(x)dx.$$

Доказательство. Существует единственное натуральное число k такое, что $2k\omega \leq a \leq 2(k+1)\omega$ и, очевидно,

$$\int\limits_a^{2(k+1)\omega} f(x)dx = \int\limits_a^{2(k+1)\omega} f(x-2k\omega)dx = \int\limits_{a-2k\omega}^{2\omega} f(z)dz \tag{2}$$

(первое равенство справедливо, так как $f(x)$ – периодическая с периодом 2ω функция; второе равенство доказывается заменой переменной $x - 2k\omega = z$).

$$\int\limits_{2(k+1)\omega}^{a+2\omega} f(x)dx = \int\limits_{2(k+1)\omega}^{a+2\omega} f(x-2(k+1)\omega)dx = \int\limits_0^{a-2k\omega} f(z)dz \tag{3}$$

Складывая равенства (2) и (3), получим результат утверждения 1. ■

Утверждение 2. Если $f(x)$ – периодическая с периодом 2ω функция, то справедливо равенство

$$\int\limits_0^{2\omega} f(t-x)dt = \int\limits_0^{2\omega} f(t)dt, \text{ где } x \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. По утверждению 1 имеем

$$\int\limits_0^{2\omega} f(t-x)dt = \int\limits_{-x}^{2\omega-x} f(z)dz = \int\limits_0^{2\omega} f(z)dz = \int\limits_0^{2\omega} f(t)dt.$$

(первое равенство следует из замены $t - x = z$). ● $\blacksquare$

Введем дополнительные обозначения:

C^* – пространство (класс) функций f, непрерывных на $\mathbf{R}$ и имеющих период 2π, с нормой

$$||f||_{C^*} = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = \max_{a\le x\le a+2\pi} |f(x)|, \text{ где } a \in \mathbf{R}.$$

L^* – пространство (класс) функций периода 2π, которые, если их рассматривать на отрезке $[0, 2\pi]$, принадлежат $L([0, 2\pi])$, с нормой

$$||f||_{L^*} = ||f||_{L([0,2\pi])} = \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx.$$

L_2^* – пространство (класс) функций периода 2π, которые, если их рассматривать на отрезке $[0, 2\pi]$, принадлежат $L_2([0, 2\pi])$, с нормой

$$||f||_{L_2^*} = \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Замечания.

1. Очевидно, что пространства C^*, L^*, L_2^* будут линейными, так как сумма двух периодических функций и произведение периодической функции на число является вновь функцией периодической с тем же периодом.

2. В пространствах C^*, L^*, L_2^* мы ограничились рассмотрением функций периодических с периодом 2π. Это вполне оправдано, так как функции $f(x)$ с периодом 2ω можно заменить функцией $F(u) = f(\frac{u\omega}{\pi})$ с периодом 2π с помощью подстановки $x = \frac{u\omega}{\pi}$.

Определение тригонометрического ряда Фурье.

Система тригонометрических функций (1) ортогональна. Каждой функции $f \in L_2^*$ можно привести в соответствие её ряд Фурье по системе тригонометрических функций (1), которой мы будем называть тригонометрическим рядом Фурье.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_k = \frac{1}{||\cos kx||^2}(f, \cos kx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, k = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$b_k = \frac{1}{||\sin kx||^2}(f, \sin kx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx, k = 1, 2, \ldots,$$

(здесь мы использовали определение скалярного произведения в L_2^* как интеграла на $[0, 2\pi]$ от произведения функций и, что $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi$).

Замечание

1. Понятие тригонометрического ряда Фурье мы определили для функций $f \in L_2^*$. Его можно распространить и на более широкий класс функций L^*.

Действительно, так как $f \in L^*$ – абсолютно интегрируема, а функции $\cos kx, \sin kx$ ограничены, то интегралы
$\int\limits_0^{2\pi} |f(x)\cos kx|dx \leq \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty,$

$\int\limits_0^{2\pi} |f(x)\sin kx|dx \le \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty,$
оба сходятся. Поэтому можно определить скалярное произведение функции $f \in L^*$ на $\cos kx$ или $\sin kx$, как $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx = (f, \cos kx)$, $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx = (f, \sin kx)$

Таким образом, мы будем рассматривать разложение в тригонометрический ряд Фурье функций, принадлежащих L^*.

2. Если функцию $f \in L^*$ видоизменить, прибавив к ней нулевую в L^* функцию, т. е. такую, что $\int\limits_0^{2\pi} |\theta(x)|dx = 0$, то это не изменяет коэффициентов Фурье функции $f(x) + \theta(x)$, а следовательно, и сам ряд Фурье.

Доказательство.

$$\int\limits_0^{2\pi} (f(x) + \theta(x))\cos kxdx = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx + \int\limits_0^{2\pi} \cos kx\theta(x)dx,$$

причем $\int\limits_0^{2\pi} \theta(x)\cos kxdx = 0$, так как

$$0 \le \left|\int\limits_0^{2\pi} \theta(x)\cos kxdx\right| \le \int\limits_0^{2\pi} |\theta(x)|dx = 0. \qquad \blacksquare$$

3. В дальнейшем тригонометрический ряд Фурье мы будем называть просто рядом Фурье.

§ 7.3 Сумма Дирихле

Пусть задана функция $f \in L^*$ и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

есть ряд Фурье функции $f(a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt, k = 0,1,2,\ldots; b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin ktdt, k = 1,2,\ldots)$.

Теорема. n - я частичная сумма ряда Фурье (1) может быть записана так

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(u)f(x+u)du, \tag{2}$$

где $D_n(u) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u$.

Замечание. $D_n(u)$ называется суммой (или ядром) Дирихле порядка n, а интеграл (2) – итегралом Дирихле порядка n.

Доказательство теоремы. $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\Big]f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(t-x)f(t)dt$, где
$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\Big(\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku\Big)2\sin\frac{u}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\Big(\sin\frac{u}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} 2\cos ku\cdot\sin\frac{u}{2}\Big) = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\Big(\sin\frac{u}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})u - \sin(k-\frac{1}{2})u)\Big) = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u$.

Таким образом, $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(t-x)f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-x}^{2\pi-x} D_n(u)f(x+u)du = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(u)f(x+u)du$ (здесь $t-x=u$). ∎

Замечание. При любом $n = 0,1,2,\ldots: \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(u)du = 1$.

Доказательство. $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(u)du = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku)du = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}du + \frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_0^{2\pi}\cos kudu = 1$, так как $\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}du = \pi, \int\limits_0^{2\pi}\cos kudu = 0$. ∎

§ 7.4 Приближение финитными функциями. Непрерывность нормы

Определение 1. Носителем функции $\varphi(x), x \in \mathbf{R}$, называется замыкание множества точек, где $\varphi(x) \neq 0$.

Определение 2. Функция $\varphi(x), x \in \mathbf{R}$ называется финитной в $\mathbf{R}$, если она определена на $\mathbf{R}$ и имеет ограниченный носитель $F \subset \mathbf{R}$.

Определение 3. Функция $\varphi(x), x \in \mathbf{R}$ называется кусочно-постоянной, если существует конечная система не пересекающихся интервалов, на каждом из котоорых функция $\varphi(x)$ постоянна, а вне интервалов $\varphi(x) = 0$.

Замечание. Очевидно, что кусочно-постоянная функция финитна.

Теорема (о приближении финитными функциями). Для любой функции $f(x) \in L_p(R)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная в $\mathbf{R}$ кусочно-постоянная или непрерывная функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \varphi(x)|^p dx < \varepsilon, 1 \leq p < \infty.$$

Данную теорему мы примем без доказательства, ограничившись пояснением существа теоремы на графиках в случае $p = 1$.

Пусть функция $f(x) \in L(R)$ и имеет особенности в точках $-\infty, 0, +\infty$

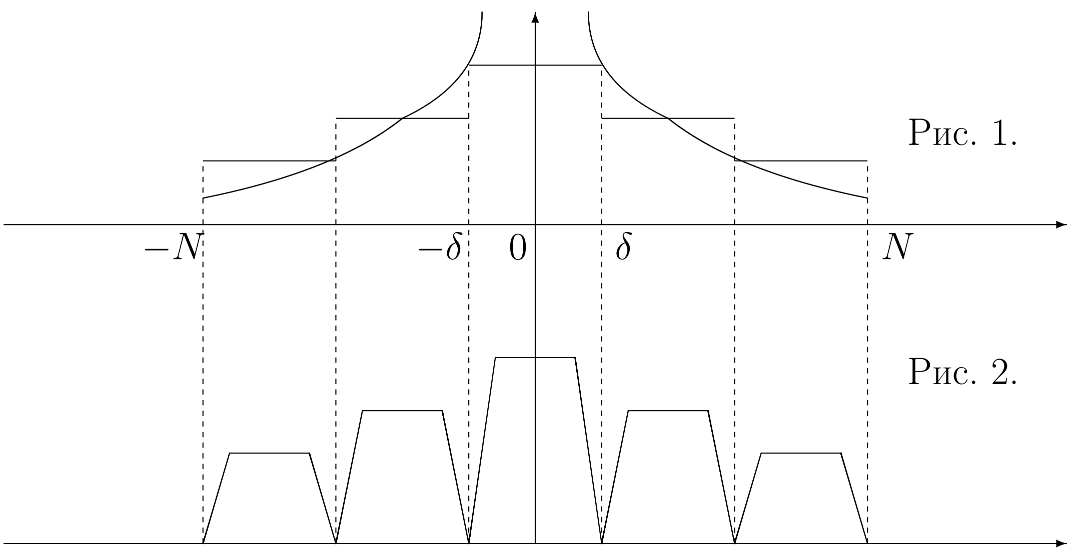


Рис. 1.

Рис. 2.

При достаточно малом $\delta > 0$ и большом N, для функции $\psi(x)$, изображенной на Рис. 1., справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1)$$

На $(-N, -\delta), (\delta, N)$ функция $f(x) = \psi(x)$ изображена непрерывной, но она может быть и разрывной, но интегрируемой. В этом случае для неё можно указать ступенчатую функцию $\chi(x)$ с конечным числом ступенек такую, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(x) - \chi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2)$$

Функцию $\chi(x)$ можно приблизить непрерывной финитной в $\mathbf{R}$ функцией $\varphi(x)$ (см. Рис. 2.) так, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\chi(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

Из (1), (2), (3) следует

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon.$$

■

● Теорема (о непрерывности нормы). Пусть задана функция $f(x) \in L_p(R), 1 \le p < \infty$. Тогда

$$\psi(t) = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx \Big)^{1/p} \to 0, \text{ при } t \to 0.$$

Доказательство. К функции $f(x)$ применима теорема о приближении финитными функциями: $\forall \varepsilon > 0$ существует непрерывная и финитная в $\mathbf{R}$ функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \varphi(x)|^p dx \Big)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

Пусть F носитель функции $\varphi(x)$. F – ограниченное множество. $\Rightarrow$ Существуют отрезки $[a', b'], [a, b]$, имеющие одинаковые центры такие, что $F \subset [a', b'] \subset [a, b]$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$. $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$ такое, что

$$\omega(\delta) = \sup_{|x''-x'|<\delta, x'', x' \in [a,b]} |\varphi(x'') - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b'-a')^{1/p}} \qquad (2)$$

Далее,
$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - \varphi(x+t) + \varphi(x+t) - \varphi(x) + \varphi(x) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - \varphi(x+t)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_{a'}^{b'} |\varphi(x+t) - \varphi(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3} + \omega(|t|)(b'-a')^{1/p} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, если $|t| < \delta$ из (2).

Здесь мы учли также (1) и выбрали $\delta < \rho = \min\{a'-a, b-b'\}$. Последнее условие $|t| < \delta < \rho$ необходимо для того, чтобы $x + t \subset [a, b]$ $\bullet$ $\blacksquare$

§ 7.5 Формулы для остатка ряда Фурье

Остатком ряда Фурье будем называть величину $S_n(x) - f(x)$, где $S_n(x)$ – n-я частичная сумма ряда Фурье.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L^*$. Тогда остаток ряда Фурье выражается следующей формулой: $\forall\eta > 0, 0 < \eta \leq \pi$, справедливо равенство $S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u} \Delta_u f(x) du + \rho_n(x)$, где $\Delta_u f(x) = f(x+u) - f(x), \rho_n(x) = o(1)$, где $f(x)$ конечна ($|f(x)| < \infty$).

Доказательство. $S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} D_n(u)(f(x+u) - f(x))du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\Delta_u f(x) dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}(f(x+u) - f(x))du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin nu \cos\frac{u}{2} + \cos nu \sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \Delta_u f(x) du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin nu}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}} +\right.$

$\frac{1}{2}\cos nu\Big)\Delta_u f(x)du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\Delta_u f(x)du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nu}{2}\Delta_u f(x)du =$
$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\Delta_u f(x)du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta}^{\pi}\frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\Delta_u f(x)du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\eta}\frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\Delta_u f(x)du +$
$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nu}{2}\Delta_u f(x)du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\frac{\sin nu}{u}\Delta_u f(x)du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\Big(\frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} -$
$\frac{\sin nu}{u}\Big)\Delta_u f(x)du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta}^{\pi}\frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\Delta_u f(x)du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\eta}\frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\Delta_u f(x)du +$
$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nu}{2}\Delta_u f(x)du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\frac{\sin nu}{u}\Delta_u f(x)du + \rho_n(x)$, где $\rho_n(x) =$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin nu\cdot g(u)\Delta_u f(x)du + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos nu\cdot\eta(u)\Delta_u f(x)du,$

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}\Big), & (0 < |u| < \eta),\\ \frac{1}{2\pi\operatorname{tg}\frac{u}{2}}, & (\eta \le |u| \le \pi),\\ 0, & \text{вне } [-\pi,\pi], \end{cases}$$

$$\mu(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \le |u| < \pi,\\ 0, & \text{вне } [-\pi,\pi]. \end{cases}$$

Далее докажем утверждение, которое имеет самостоятельное значение.

Лемма. Если $F(x) \in L(R)$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x)\sin\lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

Доказательство.
$\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x)\sin\lambda x dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u+\frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda u+\pi)du =$
(здесь мы произвели подстановку $x = u + \frac{\pi}{\lambda}$)
$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u+\frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda u)du$. Отсюда следует $2\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x)\sin\lambda x dx =$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin\lambda x dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x+\frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda x)dx$ и следовательно

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin\lambda x dx\Big| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x) - F(x+\frac{\pi}{\lambda})|dx. \qquad (1)$$

По теореме (о непрерывности нормы), при $\lambda \to \infty$ имеем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x) - F(x+\frac{\pi}{\lambda})|dx \to 0$, что вместе с неравенством (1) доказывает $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos\lambda x dx = 0$.

Аналогично доказывается второе предельное соотношение.

Продолжим доказательство теоремы 1.

$\mu(u) \leq M - const, \forall u \in \mathbf{R}$;

$|g(u)| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{U}{2}} - \frac{1}{U}\right| \leq C_1, \forall 0 < |u| < \eta$,

$|g(u)| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{U}{2}}\right| \leq C_2, \eta \leq |u| \leq \pi$, где C_1, C_2 – const. Отсюда следует $|g(u)| \leq M, \forall |u| > 0$. Заметим также, что функции $g(u), \mu(u)$ – финитные с носителем $[-\pi, \pi]$.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u)\Delta_u f(x)du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u)f(x+u)du - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u)f(x)du.$

Для доказательства асимптотического равенства $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u)\Delta_u f(x)du = o(1), n \to \infty \forall x$, где $|f(x)| < \infty$, используем лемму. Для этого покажем, что $g(u)\cdot f(x+u) \in L(R), (\forall x \in \mathbf{R})$, $g(u)\cdot f(x) \in L(R), (\forall x$, где $|f(x)| < \infty)$. Действительно,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(u)f(x+u)|du = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(u)f(x+u)|du \leq M\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+u)|du = M\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(u)|du < \infty$, так как $f \in L^*$;

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(u)f(x)|du \leq |f(x)|\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(u)|du \leq |f(x)|M\int\limits_{-\pi}^{\pi} du < \infty$ в любой точке $x \in \mathbf{R}$, где $|f(x)| < \infty$.

Далее, из леммы следует

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin nu\cdot g(u)f(x+u)du=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin nu\cdot g(u)f(x)du=0$, т. е.

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin nu\cdot g(u)\Delta_u f(x)du=0$, в любой точке x, где $|f(x)|<\infty$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos nu\cdot\mu(u)\Delta_u f(x)du=0$, в любой точке x, где $|f(x)|<\infty$. ■

● Теорема 2. Пусть $f\in L^*$. Тогда $\rho_n(x)=o(1), n\to\infty$, равномерно относительно $x\in[a,b]$, на котором $f(x)$ ограничена.

Доказательство теоремы начнем с вспомогательного утверждения.

Лемма. Пусть $f,g\in L(R)$, g – ограничена. Тогда

$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\cdot g(u)f(x+u)du=0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda u\cdot g(u)f(x+u)du=0$

равномерно относительно $x\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть $|g(x)|\le K-const$. По теореме о приближении финитными функциями: для $\forall\varepsilon>0$ существует непрерывная финитная функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(u)-\varphi(u)|du<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1)$$

Далее, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\cdot g(u)f(x+u)du=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(\pi+\lambda z)g(\frac{\pi}{\lambda}+z)f(x+\frac{\pi}{\lambda}+z)dz=$

(здесь мы произвели подстановку $u=\frac{\pi}{\lambda}+z$)

$=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(\lambda z)g(\frac{\pi}{\lambda}+z)f(z+\frac{\pi}{\lambda}+x)dz$. Отсюда, меняя z на u, получим равенство

$2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\cdot g(u)f(x+u)du=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\cdot g(u)f(x+u)du-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\cdot g(u+\frac{\pi}{\lambda})f(u+\frac{\pi}{\lambda}+z)du,$

из которого следует оценка
$\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda u g(u) f(x+u)du\Big| \le \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(u+\frac{\pi}{\lambda})f(u+\frac{\pi}{\lambda}+x) - g(u)f(x+u)|du = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(u+\frac{\pi}{\lambda})f(u+\frac{\pi}{\lambda}+x) - g(u+\frac{\pi}{\lambda})f(x+u) + g(u+\frac{\pi}{\lambda})f(x+u) - g(u+\frac{\pi}{\lambda})\varphi(u+x) + g(u+\frac{\pi}{\lambda})\varphi(u+x) - g(u)\varphi(u+x) + g(u)\varphi(u+x) - g(u)f(u+x)|du \le \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(u+\frac{\pi}{\lambda})|\cdot|f(u+\frac{\pi}{\lambda}+x) - f(x+u)|du + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u+x)|\cdot|g(u+\frac{\pi}{\lambda}) - g(u)|du + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(u+\frac{\pi}{\lambda}) - g(u)|\cdot|\varphi(u+x) - f(x+u)|du \le \frac{K}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(u+\frac{\pi}{\lambda}+x) - f(u+x)|du + \frac{M}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(u+\frac{\pi}{\lambda}) - g(u)|du + \frac{2K}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u+x) - f(u+x)du < \varepsilon$, при достаточно большом $|\lambda| > \lambda_0 > 0$.

Здесь мы использовали теорему о непрерывности нормы ($\frac{\pi}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \to \infty$) и оценку (1).

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2:
$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u}\Delta_u f(x)du + \rho_n(x)$, где

$\rho_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u)\Delta_u f(x)du + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos nu \cdot \mu(u) \cdot \Delta_u f(x)du$,
функции $g(u), \mu(u)$ – финитные и ограниченные и следовательно абсолютно интегрируемые на $\mathbf{R}$, т. е. $g(u), \mu(u) \in L(R)$.

Известно (см. лемму из теоремы 1), что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u)du = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u)f(x)du = 0$ равномерно относительно $x \in [a,b]$, если $|f(x)| \le M$ при $x \in [a,b]$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u)f(x+u)du = 0$ равномерно по x на $\mathbf{R}$. Данный интеграл, как функция от x, есть функция периода 2π, поэтому достаточно доказать его равномерную сходимость на $[0, 2\pi]$. Введем функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, 3\pi] \\ 0, & x \in R \backslash [-\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

По условию $f(x) \in L^*$, поэтому $F(x) \in L(R)$.

Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx = \int\limits_{-\pi}^{3\pi} |f(x)| dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

Функция $g(u)$ имеет носитель на $[-\pi, \pi]$. Следовательно, для любых $x \in [0, 2\pi]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u) f(x+u) du = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nu \cdot g(u) F(x+u) du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u) F(x+u) du \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно относительно x на $\mathbf{R}$ (здесь мы использовали лемму).

Таким образом, мы доказали $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin nu \cdot g(u) \Delta_u f(x) du \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in [a, b]$, где $|f(x)| \leq M$. Аналогично доказывается, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos nu \cdot \mu(u) \Delta_u f(x) du \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in [a, b]$, где $|f(x)| \leq M$. ● ■

§ 7.6 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть $f \in L^*$ и является <u>нечетной</u> функцией. Тогда очевидно

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(x) dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int\limits_{-\pi}^{0} f(x) dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x) dx = \int\limits_{0}^{\pi} f(-y) dy + \int\limits_{0}^{\pi} f(x) dx = -\int\limits_{0}^{\pi} f(x) dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Пусть $f \in L^*$ и является <u>четной</u> функцией. Тогда

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(x) dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int\limits_{0}^{\pi} f(x) dx.$$

Пусть $f(x) \in L^*$ и является четной функцией. Тогда произведение $f(x) \cdot \sin kx$ будет нечетной функцией, и следовательно (по сказанному выше) $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin kx dx = 0, k = 1, 2, 3, \ldots$.

Мы получили, что ряд Фурье четной функции содержит одни лишь косинусы, т. е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{1}$$

где $a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kx dx, k = 1, 2, 3, \ldots$.

Допустим, что $f(x)$ – нечетная функция. Тогда нечетной функцией будет произведение $f(x)\cdot\cos kx$, и следовательно

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Мы получили, что ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{2}$$

где $b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kx dx, k = 1, 2, 3, \ldots$.

Замечание 1. Пусть $f(x) \in L([0,\pi])$. Продолжим ее четным образом на $[-\pi,\pi]$, а затем периодически с периодом 2π на всю $\mathbf{R}$. В результате получим четную функцию из L^*.

К такой функции можно применить формулу (1), т. е. разложить ее по косинусам.

Замечание 2. Пусть $f(x) \in L([0,\pi])$. Продолжим ее нечетным образом на $[-\pi,\pi]$, а затем периодически с периодом 2π на всю $\mathbf{R}$. В результате получим нечетную функцию из L^*.

К такой функции можно применить формулу (2), т. е. разложить ее по синусам.

§ 7.7 Признаки сходимости рядов Фурье

Определение. Говорят функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a,b]$ (интервале (a,b)) условию Липшица степени $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$, если для любых $x, x' \in [a,b]((a,b))$ справедливо неравенство $|f(x') - f(x)| \leq M|x' - x|^{\alpha}$, где M не зависит от x, x'.

Замечание 1. При $\alpha = 1$ просто говорят, что f удовлетворяет условию Липшица.

Примеры:

1. Функция f – непрерывная кусочно - гладкая на $[a,b]$, удовлетворяет условию Липшица на $[a,b]$.

   Действительно, если $x, x' \in [a,b]$, то $|f(x') - f(x)| = |\int\limits_{x}^{x'} f'(t)dt| \leq M \cdot |x' - x|, (|f'(t)| \leq M)$.

2. Функция f – непрерывная на $[a,b]$ и имеющая на (a,b) ограниченную производную $(|f'| \leq M)$, удовлетворяет на $[a,b]$ условию Липшица.

   Действительно, при $x, x' \in [a,b]$, применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получим $|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)(x' - x)| \leq M \cdot |x' - x|$.

Замечание 2. Функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица степени α на $[a,b]$, ограничена на $[a,b]$.

Доказательство. Из условия Липшица следует $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^{\alpha} \leq M(b-a)^{\alpha} \leq C - const$ (здесь $x, x_0 \in [a,b], x_0$ – фиксирована).

Так как $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$, то $|f(x)| < C + |f(x_0)| = B - const$, при $\forall x \in [a,b]$, т. е. $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. ∎

Теорема (о сходимости ряда Фурье). Пусть $f \in L^*$, и кроме того, она удовлетворяет условию Липшица степени α на $[a,b]$. Тогда при любых a', b', удовлетворяющим неравенствам $a < a' < b' < b$, ряд Фурье функции f сходится к f на $[a', b']$ и причем равномерно.

Доказательство. Пусть $\delta = \min\{a' - a, b - b'\}$ и $0 < \eta < \min\{\delta, \pi\}$. Тогда для $x \in [a', b']$ и $0 \leq |u| \leq \eta$ точки $x, x+u \in [a,b]$

и поэтому, благодаря условию Липшица:

$$|f(x+u)-f(x)| \le M|u|^{\alpha}. \tag{1}$$

Из теоремы 2 §7.5 (эту теорему мы можем применить благодаря замечанию 2) следует $S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u}\Delta_u f(x)du + o(1), n \to \infty$, равномерно относительно $x \in [a,b]$.

Тогда при $\forall \varepsilon > 0$, равномерно относительно $x \in [a', b']$, получим в силу (1) оценку

$$|S_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta} \frac{M|u|^{\alpha}}{|u|}du + |o(1)| \le \frac{2M}{\pi\alpha}\eta^{\alpha} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

где η выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $(\frac{2M}{\pi\alpha}\eta^{\alpha}) < \frac{\varepsilon}{2}$, а $N \in \mathbf{N}$ настолько большим, что $|o(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$. ∎

<u>Замечание 3.</u> Если функция $f \in C^*$ и является кусочно-гладкой на $\mathbf{R}$, то ее ряд Фурье сходится к ней на всей $\mathbf{R}$ и притом равномерно.

<u>Доказательство.</u> По условию функция f является непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $[-\varepsilon, 2\pi + \varepsilon]$ при $\forall \varepsilon > 0$. По теореме ряд Фурье функции f сходится равномерно к ней на $[0, 2\pi]$, а следовательно, вследствие периодичности f и членов ряда, и на всей $\mathbf{R}$. ∎

Далее мы приведем без доказательства ещё одну теорему о сходимости ряда Фурье.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется <u>кусочно - - монотонной</u> на $[a,b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$, в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

Если $f(x)$ кусочно-монотонна на $[a,b]$, то в любой внутренней точке с отрезка $[a,b]$ существует $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = f(c-0)$, $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = f(c+0)$.

<u>Теорема (Дирихле).</u> Если функция $f(x)$ задана на $[-\pi, \pi]$ и является на нем кусочно - непрерывной, кусочно - монотонной и ограниченной, то ее ряд Фурье сходится во всех точках $[-\pi, \pi]$.

Если $S(x)$ – сумма ряда Фурье функции $f(x)$, то во всех точках непрерывности этой функции $S(x) = f(x)$, а во всех точках разрыва $S(x) = \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$.

Кроме того, $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi-0)+f(-\pi+0))$.

Замечание. Из теоремы Дтрихле видно, что значения функции $f(x)$ в точках ее разрыва не влияют на ее ряд Фурье. Это значит, что функции, имеющие одни и те же точки разрыва и отличающиеся друг от друга лишь в этих точках, разлагаются в один и тот же ряд Фурье.

Теорема Дирихле очевидным образом применима к периодическим функциям.

Рассмотрим функцию $f(x)$ периодическую с периодом 2π и пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле на отрезке $[-\pi,\pi]$. Пусть $S(x)$ – сумма ряда Фурье данной функции. Очевидно, что $S(x)$ описывает функцию $f(x)$ ("описание" следует понимать в том смысле, как это сформулировано в теореме Дирихле) и более того описывает функцию $f(x)$ вне отрезка $[-\pi,\pi]$, так как $S(x)$ и $f(x)$ являются функциями периодическими с периодом 2π.

Заметим, что если функция $f(x)$ не является периодической с периодом 2π, то вне отрезка $[-\pi,\pi] f(x)$ может не иметь с функцией $S(x)$ ничего общего.

Примеры разложения функций в тригонометрический ряд Фурье

1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = e^{ax}, a - const, a \neq 0$ в промежутке $(-\pi,\pi)$.

▲ Вычислим коэффициенты Фурье функции e^{ax}:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a\pi} = 2\frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi},$$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\frac{a\cos nx + n\sin nx}{a^2+n^2}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n\frac{1}{\pi}\frac{2a}{a^2+n^2}\operatorname{sh} a\pi,$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\frac{a\sin nx - n\cos nx}{a^2+n^2}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \quad = (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\frac{2n}{a^2+n^2}\operatorname{sh} a\pi, n = 1,2,3,\ldots.$

Согласно теореме из §7.7 ряд Фурье функции e^{ax} на интервале $(-\pi,\pi)$ сходится к самой функции e^{ax}: $e^{ax} = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\Big(\frac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\sin nx)\Big)$, для $\forall x\in(-\pi,\pi)$. ▲

2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $\frac{\pi-x}{2}$ в интервале $(0,2\pi)$.

▲ Вычислим коэффиуиенты Фурье функции $\frac{\pi-x}{2}$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}(\pi x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin nxdx=0,$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n}, n=1,2,3,\ldots.$

Таким образом, мы приходим к разложению, содержащему одни лишь синусы:

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad \forall x\in(0,2\pi). \qquad (*)$$

При $x=0$ или $x=2\pi$ сумма ряда равна нулю, и равенство $(*)$ нарушается. Не будет равенства и вне интервала $(0,2\pi)$. График суммы ряда $S(x)$ (см. Рис. 1) состоит их бесконечного множества параллельных отрезков и ряда отдельных точек на осях.

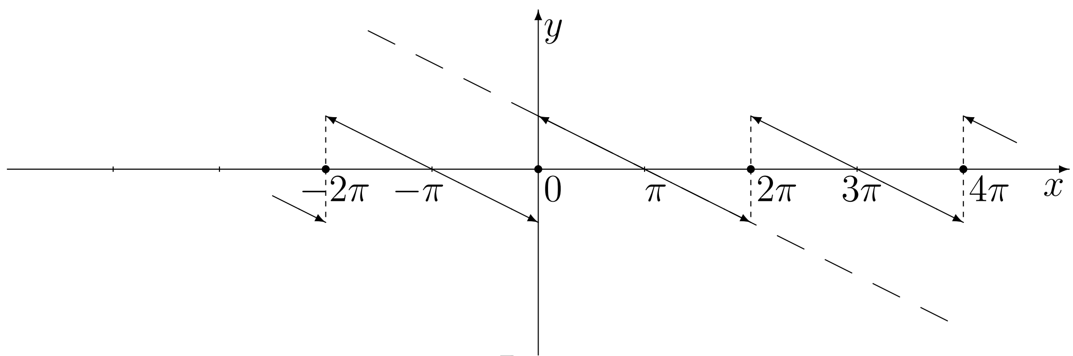


Рис. 1 ▲

3. разложить функцию $f(x)=x^2$ в ряд Фурье по косинусам в отрезке $[-\pi,\pi]$.

▲ Функция $f(x)=x^2$ является четной, поэтому применяем формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении в ряд Фурье четных функций:

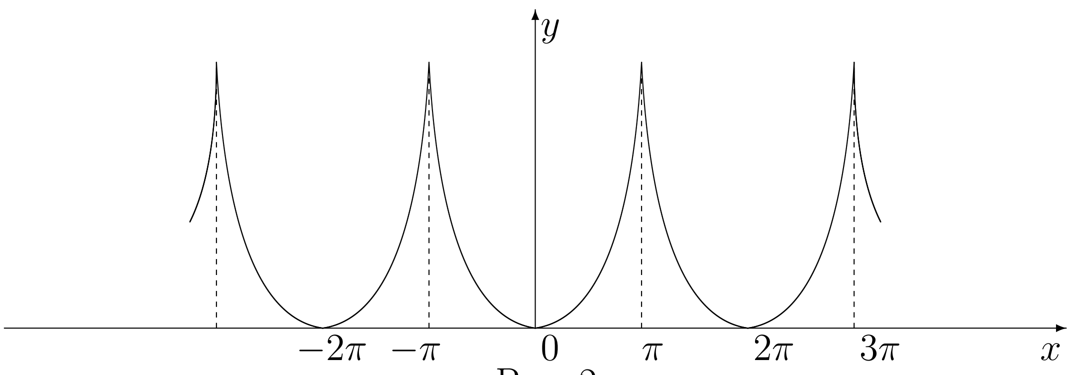
$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{4}{n\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos nx dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$

Таким образом, мы приходим к разложению по косинусам функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \forall x \in [-\pi, \pi].$$

График суммы ряда, состоящий из бесконечного числа примыкающих одна к другой пораболических дуг, изображен на Рис. 2:



▲

Рис. 2

4. а) Функцию $f(x) = x$ разложить в ряд Фурье по косинусам в промежутке $[0, \pi]$.

▲ Продолжим $f(x) = x, x \in [0, \pi]$ на всю числовую прямую четным образом (см. Рис. 3):

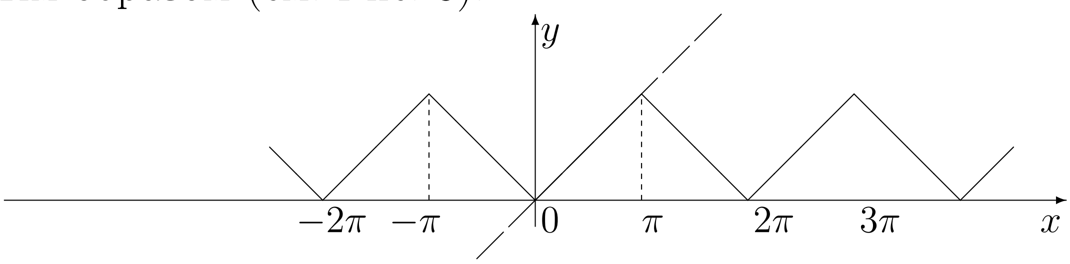


Рис. 3

Далее, вычислим коэффициенты Фурье четной функции $y = |x|, x \in [-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2},$$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin nxdx = 2\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi}, n = 1, 2, 3, \ldots.$

Отсюда следует $a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, k = 1, 2, 3, \ldots.$

Искомое разложение функции $f(x) = x, x \in [0, \pi]$ по косинусам будет иметь вид:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, 0 \le x \le \pi. \blacktriangle$$

б) Функцию $f(x) = x$ разложить в ряд Фурье по синусам в промежутке $(-\pi, \pi)$.

▲ Продолжим $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$ на всю числовую прямую нечетным образом (см. Рис. 4):

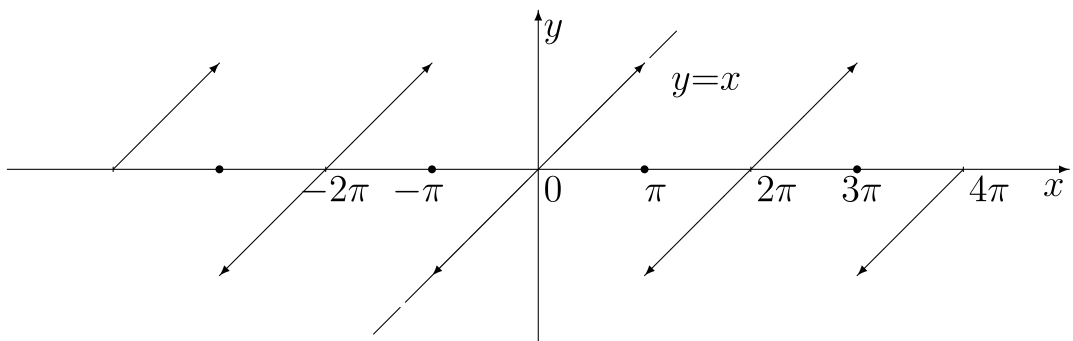


Рис. 4

Далее, вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$ как нечетной функции:

$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nxdx = -\frac{2}{\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos nxdx = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots.$

Искомое разложение функции $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$ по синусам будет иметь вид:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}, x \in (-\pi, \pi). \blacktriangle$$

Замечание. График суммы ряда по косинусам изображен на Рис. 3, а график суммы ряда по синусам изображен на Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1975. Т.II.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. Т.III.
3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.2. – М.: Наука 1982.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1981. Т.II.
5. *Шерстнев А.Н.* Конспект лекций по математическому анализу. Казанское матем. общество – Казань: УНИПРЕСС, 1998.
6. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубаринов В.Н.* Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1999.
7. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.* Математический анализ. Ч.2. – М.: Проспект, МГУ, 2004.
8. *Дубровин В.Т.* Лекции по математическому анализу. Ч.2 – Казань: Казанский государственный университет, 2010.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РЯДЫ ФУРЬЕ

Для заметок

Вячеслав Тимофеевич Дубровин

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
ЧАСТЬ III

Подписано в печать 29.01.2014.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 9,76.
Уч.-изд. л. 5,1. Тираж 400 экз. Заказ 64/1

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28