

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ, ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ**  
*Кафедра экономико-математического моделирования*

И. И. ИСМАГИЛОВ, Р. М. КУНДАКЧЯН,  
Е.И. КАДОЧНИКОВА, А. В. КОСТРОМИН

## **ЭКОНОМЕТРИКА**

Методические рекомендации  
для проведения практических занятий  
со студентами, обучающимися по направлению  
080100.62 «Экономика»

Казань 2014

УДК 330.43

ББК Ув631я73-1

*Приняты на заседании кафедры  
экономико-математического моделирования  
Протокол № 1 от 18 сентября 2014года*

**Рецензент:**

кандидат экономических наук,  
доцент кафедры экономико-математического моделирования

**Е. Л. Фесина**

**Исмагилов И.И., Кундакчян Р.М., Кадочникова Е.И., Костромин А. В.**

**Эконометрика:** методические рекомендации для проведения практических занятий со студентами, обучающимися по направлению 080100.62 «Экономика» / И. И. Исмагилов, Р. М. Кундакчян, Е.И.Кадочникова, А. В. Костромин. – Казань: Казан. ун-т, 2014. – 137 с.

Данные методические рекомендации предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Эконометрика» при подготовке студентов по направлению 080100.62 «Экономика». Цель рекомендаций – развить методические и практические умения и навыки применения метода наименьших квадратов, тестирования гипотез при проверке качества эконометрических моделей.

## Содержание

Тема 1. Эконометрика как научная дисциплина .....	5
Тема. 2. Основные понятия теории вероятностей и статистики, применяемые в эконометрике.....	10
Тема 3. Линейная модель парной регрессии и методы ее оценивания.....	20
Тема 4. Экономическая и статистическая интерпретация модели парной регрессии.....	25
Тема 5. Линейная модель множественной регрессии и оценка ее параметров.....	32
Тема 6. Оценка качества модели множественной регрессии.....	37
Тема 7. Мультиколлинеарность.....	43
Тема 8. Гетероскедастичность.....	48
Тема 9. Автокорреляция.....	54
Тема 10. Фиктивные переменные.....	60
Тема 11. Нелинейные регрессии и их линейаризация.....	66
Тема 12. Модели с дискретной зависимой переменной.....	72
Тема 13. Модели панельных данных.....	76
Тема 14. Ошибки спецификации.....	81
Тема 15. Модели одномерных временных рядов.....	85
Тема 16. Адаптивные модели временных рядов.....	93
Тема 17. Модели стационарных и нестационарных временных рядов.....	96
Тема 18. Модели с лаговыми переменными.....	105
Тема19. Понятие о системах эконометрических уравнений.....	111
Тема 20. Методы оценки систем одновременных уравнений.....	116
Приложение 1.....	131
Приложение 2.....	132
Приложение 3.....	133
Приложение 4.....	134
Приложение 5.....	135

## **Введение**

Методическая разработка подготовлена в соответствии с программой дисциплины «Эконометрика», требованиями действующего Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для экономических специальностей и предназначена для студентов очной формы обучения.

Цель методической разработки – помочь студентам в освоении эконометрических методов и их применении в анализе социально-экономических процессов, в овладении навыков построения эконометрических моделей на основе реальных данных, приобретении навыков прогнозирования результатов эконометрических исследований, разработке и принятии на их основе аргументированных решений.

Одна из целей проведения практических занятий – научить студентов использовать возможности программных продуктов в эконометрическом анализе. Задачи, предназначенные для решения с использованием компьютера, отмечены в методической разработке символом (\*). При решении таких задач рекомендуется использовать MS Excel, STATISTICA, Gretl. При проведении практических занятий в интерактивной форме основное внимание направлено на развитие навыков взаимодействия, совместной работы в коллективе, коммуникабельности. В методической разработке содержатся решения типовых задач по темам, предназначенным для самостоятельного изучения. Также в методическую разработку включены образцы заданий для контрольных работ.

В приложениях содержатся статистико-математические таблицы, необходимые при решении задач.

## **Раздел 1. Введение в эконометрику**

### **Тема 1. Эконометрика как научная дисциплина (1 занятие)**

#### **Вопросы для обсуждения**

1. Определение эконометрики. Цели, предмет, задачи эконометрики. Место эконометрики в экономических дисциплинах.
2. Типы моделей и данных.
3. Стадии эконометрического моделирования.

#### **Контрольные вопросы**

1. Что измеряет эконометрика?
2. Каковы основные цели эконометрики?
3. В чем состоят предмет и задачи эконометрики?
4. Каковы типы моделей и переменных, применяемых в эконометрике?
5. В чем особенности перекрестных и панельных данных?
6. В чем особенности временных рядов?
7. Что понимается под спецификацией модели?
8. Что такое параметризация?
9. Что понимается под верификацией модели?
10. В чем основное отличие эконометрической модели от математической?
11. Каковы основные свойства математического ожидания?
12. Каковы основные свойства дисперсии?
13. Как определяется коррелированность и некоррелированность случайных величин?
14. Что такое генеральная совокупность и выборка?
15. Как вычисляются основные числовые характеристики по результатам выборки: выборочное среднее, дисперсия, среднее квадратическое отклонение?

16. Что такое функция распределения случайной величины? Каковы ее свойства?

17. Что такое плотность вероятности случайной величины? Каковы ее свойства?

### Практические задания

**Задача 1.** Совет директоров компании состоит из 12 человек; 3 из них лоббируют проект А, 5 - проект В. Остальные склонны инвестировать деньги в проект С. Решение об инвестировании будет принимать большинством голосов комиссия, состоящая из 5 выбранных жребием директоров.

Задание: определить вероятность принятия решения в пользу проекта В.

**Задача 2.** Предположим, что число магазинов неограниченно велико. В одной трети из них товар продается по цене 1\$, в  $1/3$  - по цене 1,5\$, в  $1/3$  – по цене 2\$. Покупатель посещает наугад три магазина и приобретает товар в том из них, где цена наименьшая.

Задание: определить ожидаемую цену покупки.

**Задача 3.** В лотерее разыгрывается: автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден. ед., 5 видеомэгагнитофонов стоимостью 200 ден. ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден. ед.

Задание:

1) составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи;

2) вычислить математическое ожидание для случайной величины – чистого выигрыша;

3) вычислить дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

**Задача 4.** Дан ряд распределения случайной величины  $X$  (табл.1.1):

Таблица 1.1

$X$	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

$P$	0,06	0,29	0,44	0,21
-----	------	------	------	------

Задание:

1) вычислить математическое ожидание  $M(X)$ , дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$ ;

2) определить функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график.

**Задача 5.** Следующая таблица представляет распределение годовой прибыли ( $X$ ) фирмы (табл.1.2):

Таблица 1.2

$X$	-10	-5	0	10	20	25
$P$	0,05	0,15	0,25	0,30	0,20	0,05

Задание: определить ожидаемую прибыль, среднее квадратическое отклонение. Определить вероятность положительной прибыли.

**Задача 6.** Проведен маркетинговый анализ количества автомобилей в домохозяйствах района для определения целесообразности строительства станций техобслуживания. Обследовано 5000 домохозяйств. Из них в 250 автомобили отсутствовали, в 1500 было по 1 автомобилю, в 2500 – по 2, в 600 – по 3 и а 150 по 4. Станция будет рентабельна, если ее ежедневная загрузка составит 5 автомобилей.

Задание: определить целесообразность ли строительства станций в данном районе?

**Задача 7.** В результате длительных наблюдений установлено, что размеры  $X$  и  $Y$  дивидендов по акциям фирм А и В соответственно являются независимыми нормально распределенными СВ:  $X \sim N(m_x=5, \sigma_x= 5)$ ,  $Y \sim N(m_y=15, \sigma_y=15)$ . Стоимость каждой акции составляет 100\$. Инвестор хочет приобрести акции на 1000\$.

Задание: ответить на вопросы:

1) какие законы распределения имеют доходы  $X$  и  $Y$  от вложений всей суммы в акции только одной из фирм А или В?

2) какой закон распределения имеет доход  $Z$  от покупки акций в пропорции 2:3?

3) какова вероятность, что получаемый доход  $Z$  от вложения будет лежать в пределах от 110 до 150\$?

**Задача 8.** Пусть  $X$ ,  $Y$  – годовые дивиденды от вложений в отрасли А и В соответственно. Риск от вложений характеризуется дисперсиями:  $D(X) = 16$ ,  $D(Y) = 9$ . Коэффициент корреляции  $\rho(X, Y) = -0,6$ .

Задание: определить, что менее рискованно: вкладывать деньги в обе отрасли в соотношении 30% на 70% или только в отрасль В.

**Задача 9.** Пусть  $X$ ,  $Y$  - годовые дивиденды от вложений денежных средств в акции компаний А и В соответственно. Риск от вложений характеризуется дисперсиями  $D(X) = 25$ ,  $D(Y) = 16$ . Коэффициент корреляции  $\rho_{xy} = 0,8$ .

Задание: определить, что менее рискованно, вкладывать деньги в обе компании в соотношении 25% и 75% или только в компанию В.

**Задача 10.** Доход  $X$  населения имеет нормальный закон распределения со средним значением 1000\$ и средним квадратическим отклонением 400\$. Обследуется 1000 человек.

Задание: определить наиболее вероятное количество человек с доходом более 1500\$.

#### **Задания для самостоятельной работы**

**Задача 1.** Доход  $X$  населения имеет нормальный закон распределения со средним значением 5000 руб. и стандартным отклонением 1000 руб. Обследуется 1000 человек.

Задание: определить наиболее вероятное количество человек, имеющих доход более 6000 руб.

**Задача 2.** Прибыль в отрасли имеет нормальный закон распределения со средним значением 1млн\$ и средним квадратическим отклонением 0,25 млн. \$.



Задание: определить, что вероятнее: получить прибыль не более чем 0,8 млн. \$ или в пределах от 1,2 млн. \$ до 1,5 млн. \$.

**Задача 3.** Пусть СВ  $X$  – ежемесячный доход (млн. руб.) определенной группы населения. При этом  $X \sim N$  ( $m = 25$ ;  $\sigma^2 = 36$ ). Производится случайная выборка из 25 представителей данной группы.

Задание: определить вероятность того, что их средний доход лежит в интервале от 15 до 30 млн. руб.

**Задача 4.** Анализируется размер дивидендов по акциям некоторой компании. Для этого отобраны данные за последние 20 лет: 5, 10, 7, -5, 3, 10, 15, 10, 5, -3, -5, 3, 7, 15, 10, 10, 0, -2, 5, 10.

Задание: определить ожидаемый размер дивидендов и оценить риск от вложений в данную компанию?

**Задача 5.** Цена некоторого товара в 20 магазинах была следующей: 50; 48; 47; 55; 50; 45; 50; 52; 48; 50; 52; 48; 50; 47; 50; 48; 52; 50; 50; 48.

Задание: определить выборочные числовые характеристики, несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения цены товара.

**Задача 6.** Приведена статистика по годовым темпам инфляции в стране (%) за последние 10 лет: 2,8; 3,2; 5,1; 1,8; -0,6; 0,7; 2,1; 2,7; 4,1; 3,5.

Задание: определить несмещенные оценки среднего темпа инфляции, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

**Задача 7.** За последние 12 лет статистические данные по годовым темпам инфляции в стране составили (%): 1,7; 1,2; 2,8; 3,3; 5,1; 1,9; -0,8; 0,3; 2,3; 2,8; 4,0; 3,6.

Задание: определить несмещенные оценки среднего темпа инфляции, ее дисперсии и среднего квадратического отклонения.

**Задача 8.** Оценивается годовой доход ( $X$ , тыс.\$) на душу населения в некотором городе. Случайная выборка из 16 обследованных человек дала следующие результаты: 8,5; 10,5; 12,25; 7,0; 17,0; 8,75; 10,0; 9,3; 8,0; 11,5;

10,0; 12,0; 9,0; 6,5; 13,0; 10,2. Оцените среднедушевой доход в городе и разброс в доходах.

Задание: проверить, будут ли такими же значения для всего города.

### **Рекомендуемая литература**

1. Бородич С. А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006.- Гл. 1,2,3.

2. Уткин, В. Б. Эконометрика [Электронный ресурс]: учебник / В. Б. Уткин; под ред. проф. В. Б. Уткина. - 2-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. - 564 с.: Гл.1,2 (<http://znanium.com>)

2. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 1. (<http://znanium.com>)

3. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисейевой. 2-е изд. - М.: Финансы и статистика, 2008.- Гл. 1.

## **Тема 2. Основные понятия теории вероятностей и статистики, применяемые в эконометрике (1 занятие)**

Практическое занятие проводится в интерактивной форме в виде решения задач малыми группами студентов, с использованием интерактивного планшета Symposium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: формирование знаний и навыков применения основных понятий теории вероятностей и статистики для эконометрического исследования.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей

каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. Как определяется число степеней свободы случайной величины?
2. Как связаны между собой случайные величины, имеющие стандартизованное нормальное распределение, распределение Стьюдента,  $\chi^2$  и Фишера?
3. Справедливо или ложно утверждение, что при увеличении числа степеней свободы распределения Стьюдента,  $\chi^2$  и Фишера стремятся к стандартизованному нормальному распределению?
4. В чем заключаются несмещенность, эффективность и состоятельность статистических оценок?
5. Какие оценки называются наилучшими линейными несмещенными?
6. Что такое точечная и интервальная оценка?
7. Что такое нулевая и альтернативная гипотезы?
8. Что такое статистический критерий, уровень значимости?
9. Какова цель проверки гипотез?
10. Какие этапы включает общая схема проверки гипотез?
11. Чем отличаются проверка гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины при известной и неизвестной дисперсиях?
12. Какая случайная величина применяется в качестве критерия проверки гипотезы о величине дисперсии нормальной случайной величины?
13. Какая случайная величина применяется в качестве критерия проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин?
14. К проверке каких гипотез сводятся исследования среднего дохода населения и анализ разброса в уровне дохода?

На втором этапе занятия преподаватель объявляет группы из трех студентов для выполнения практических заданий и номера заданий для каждой группы студентов (не менее пяти заданий для решения в течение 45 минут). Каждая группа студентов совместно выполняет пять практических

заданий из №№ 1-15. Роль преподавателя на данном этапе заключается в постоянном поддержании активного внутригруппового взаимодействия, снятии напряженности во взаимоотношениях между участниками, оперативном вмешательстве в случае возникновения непредвиденных трудностей, а также в целях пояснения новых положений учебной программы.

**Задача 1.** Предполагается, что месячный доход граждан страны имеет нормальное распределение с мат. ожиданием  $m = 1000\$$  и дисперсией  $\sigma^2 = 40000$ . По выборке из 500 человек определили выборочный средний доход  $\bar{x} = 900\$$ .

Задание: построить 90 и 95% доверительные интервалы для среднего душевого дохода в стране; проверить: следует ли на основании построенных доверительных интервалов отклонить предположение о ежемесячном доходе в 1000\$.

**Задача 2.** На основе продолжительных наблюдений за весом  $X$  пакетов орешков, заполняемых автоматом, установлено, что стандартное отклонение веса пакетов  $\sigma = 10$  г. Взвешено 25 пакетов и найден их средний вес  $\bar{x} = 244$  г.

Задание: определить, в каком интервале с надежностью 95% находится истинное значение среднего веса пакетов.

**Задача 3.** Станок-автомат заполняет пакеты чипсами по 250 г. Считается, что станок требует подналадки, если стандартное отклонение от номинального веса превышает 5 г. Контрольное взвешивание 10 пакетов дало следующие результаты: 245, 248, 250, 250, 252, 256, 243, 251, 244, 253.

Задание: построить 95 и 99% доверительные интервалы для стандартного отклонения от номинального веса.

**Задача 4.** На основании наблюдений за работой 25 кандидатов на должность секретаря-референта установлено, что в среднем они тратили 7

минут на набор одной страницы сложного текста на компьютере при выборочном стандартном отклонении  $S = 2$  мин.

Задание: определить 90 и 99% доверительные интервалы для математического ожидания  $m$  и среднего квадратического отклонения  $\sigma$ ; оценить количество претендентов на работу, которые набрали текст быстрее, чем за 5 минут; проверить, не противоречат ли полученные данные предположению о том, что среднее время набора страницы должно составить 5 минут.

**Задача 5.** Обследование 25 человек показало, что их средний доход составил 1200 \$ при среднем квадратическом отклонении  $S=120$  \$, доход имеет нормальный закон распределения.

Задание: определить 95% интервальные оценки для математического ожидания  $m$  и среднего квадратического отклонения  $\sigma$ ; вероятность того, что абсолютное значение ошибки оценивания  $m$  не превысит 50 \$; количество обследованных, чтобы абсолютное значение ошибки оценивания  $m$  не превысило 50 \$ с вероятностью 0,9.

**Задача 6.** Взвешено 25 пакетов с чипсами, заполняемых автоматом, и найдено исправленное среднее квадратическое отклонение  $S=1$ .

Задание: определить доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  с надежностью  $\gamma=0,95$ , если считать вес пакета  $X$  нормально распределенной случайной величиной.

**Задача 7.** На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены несмещенные оценки математического ожидания  $\bar{x}=3000$  часов и среднего квадратического отклонения  $S=20$  час их срока службы. Производитель ламп дает гарантию срока службы в 3100 часов. Срок службы каждой лампы является нормальной величиной.

Задание: определить доверительный интервал для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной ве-

роятности  $\gamma = 0,95$ ; проверить, можно ли по полученным данным доверять рекламе производителя?

**Задача 8.** При изучении производительности труда  $X$  (тыс. руб.) на одного работника торговли было обследовано  $n = 68$  однотипных магазинов. При этом выборочное среднее признака  $X$  составило  $\bar{x} = 5,28$  тыс. руб., а выборочное стандартное отклонение  $S = 0,63$  тыс. руб. Изменчивость признака  $X$  описывается законом нормального распределения.

Задание: определить доверительный интервал для ожидаемого среднего значения  $m$  производительности труда с заданной надежностью  $\gamma = 0,95$ ; определить вероятность того, что величина производительности труда  $X$  в выбранном наугад магазине окажется в пределах от  $\alpha = 5,0$  тыс. руб. до  $\beta = 6,0$  тыс. руб.

**Задача 9.** При изучении предела прочности ткани  $X$  (Н/см) было испытано 15 образцов, при этом выборочный средний предел прочности составил  $\bar{x} = 27,3$  Н/см, а исправленное стандартное отклонение  $S = 2,2$  Н/см.

Задание: определить доверительный интервал для ожидаемого среднего предела прочности  $m$  ткани данного артикула с заданной надежностью  $\gamma = 0,95$ , предполагая, что изменчивость показателя  $X$  описывается законом нормального распределения.

**Задача 10.** При оценке свойств картофеля было обследовано 20 проб и получены следующие значения содержания крахмала  $X$  (%) (табл.2.1):

Таблица 2.1

$x_i$	113,0	113,5	114,0	114,5	115,0	115,5	116,0
Частота, $n_i$	3	3	15	6	2	2	1

Задание: оценить с надежностью  $\gamma = 0,95$  математическое ожидание  $m$  нормально распределенной случайной величины  $X$  генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

**Задача 11.** При изучении объема товарооборота  $X$  (млн. руб) 10 магазинов города, торгующих одинаковым ассортиментом товаров, найдено

среднее арифметическое  $\bar{x}=30,1$  и исправленное среднее квадратическое  $s=6$  статистических данных.

Задание: оценить истинное значение изучаемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью  $\gamma=0,99$ .

**Задача 12.** Предполагается, что месячная зарплата сотрудников фирмы составляет 1000\$ при стандартном отклонении  $\sigma=100$ \$. Выборка из 36 человек дала следующие результаты:  $\bar{x}=900$ \$ и  $S=150$ \$.

Задание: проверить, можно ли по результатам проведенных наблюдений утверждать, что средняя заработная плата сотрудников фирмы меньше рекламируемой, а разброс в зарплатах больше.

**Задача 13.** Для сравнения точности двух станков-автоматов взяты две пробы (выборки), объемы которых  $n=10$ ,  $l=8$ . В результате измерения контролируемого размера отобранных изделий получены следующие результаты (табл. 2.2):

Таблица 2.2

$x_i$ : 1,08; 1,10; 1,12; 1,14; 1,15; 1,25; 1,36; 1,38; 1,40; 1,42;
$y_i$ : 1,11; 1,12; 1,18; 1,22; 1,33; 1,35; 1,36; 1,38.

Задание: проверить, можно ли считать, что станки обладают одинаковой точностью на уровне значимости  $\alpha=0,1$ .

**Задача 14.** Расход (X) бензина автомобилями некоторой фирмы имеет нормальный закон распределения с  $m_x=7,5$ л и  $\sigma_x=0,5$  л. Выпустив новую модификацию автомобиля, фирма утверждает, что у него средний расход  $m_y$  топлива снижен до 7 л при том же значении  $\sigma$ . Выборки из 15 автомобилей каждой модели дали следующие средние расходы:  $\bar{x}=7,45$ ;  $\bar{y}=7,15$ .

Задание: проверить, можно ли по этим данным доверять рекламе фирмы.

**Задача 15.** Сменная добыча угля на одного рабочего  $Y$  (т) и мощность угольного пласта  $X$  (м), характеризующие процесс добычи угля на 10 шахтах, представлены в таблице (табл.2.3):

Таблица 2.3

$x_i$	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
$y_i$	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Задание: вычислить коэффициент корреляции между переменными  $X$  и  $Y$  и оценить при  $\alpha = 0,01$  его значимость.

На третьем этапе (продолжительность 25 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом перекрестной сверки результатов выполнения заданий. Лидер, применяя уникальное сочетание компьютерных и традиционных методов организации учебной деятельности, на интерактивном планшете Symposium (ОС Windows) демонстрирует основные формулы, используемые в решении заданий. Совместно с преподавателем лидер руководит групповым обсуждением области применения формул и основных понятий теории вероятностей и статистики, применяемых в эконометрике и интерпретацией результатов, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Основные понятия теории вероятностей. Нормальное распределение и связанные с ним  $\chi^2$  - распределение, распределение Стьюдента и Фишера.
2. Генеральная совокупность и выборка. Статистическое оценивание. Свойства точечных оценок. Интервальные оценки.
3. Статистические выводы и проверка гипотез. Ошибки 1 и 2 рода. Двух – и односторонние критерии проверки.

В конце занятия преподаватель подводит итоги и оценивает каждого студента в зависимости от его участия в выполнении заданий и обсуждении вопросов.



### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** В университете проведен анализ успеваемости среди студентов и студенток за последние 25 лет. Случайные величины  $X, Y$ , представляющие их суммарный балл за время учебы соответственно, имеют нормальный закон распределения. Получены следующие данные:  $\bar{x} = 400$ ,  $\bar{y} = 420$ ,  $S_x^2 = 300$ ,  $S_y^2 = 150$ .

Задание: проверить, можно ли на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  утверждать, что девушки в среднем учатся лучше ребят.

**Задача 2.** Два университета (А и В) готовят специалистов аналогичных специальностей. Министерство образования решило проверить качество подготовки в обоих университетах, организовав для этого объемный тестовый экзамен для студентов пятого курса. Отобранные случайным образом студенты показали следующие суммы баллов:

А: 41, 50, 35, 45, 53, 30, 57, 20, 50, 44, 36, 48, 55, 28, 40, 50.

В: 40, 57, 52, 38, 25, 47, 52, 48, 55, 48, 53, 39, 46, 51, 45, 55, 43, 51, 55, 40.

Задание: определить, каковы точечные оценки средних баллов и дисперсий результатов для обоих университетов; проверить, можно ли утверждать при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , что один из университетов обеспечивает лучшую подготовку; сравнить разброс в знаниях студентов этих университетов; проверить, были бы выводы такими же при уровне значимости  $\alpha = 0,01$ .

**Задача 3.** Точность работы станка-автомата, заполняющего пакеты со стиральным порошком, определяется совпадением веса пакетов. Дисперсия веса не должна превышать 25. По выборке из 20 пакетов определена исправленная дисперсия  $S^2 = 30$ .

Задание: определить на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  требуется ли переналадка станка.

**Задача 4.** Партия изделий принимается, если дисперсия контролируемого веса изделия значимо не превышает 0,2. Исправленная выборочная дисперсия, найденная по выборке объема  $n=31$ , оказалась равной  $s^2 = 0,3$ .

Задание: проверить, можно ли принять партию изделий при уровне значимости  $\alpha = 0,01$ .

**Задача 5.** По двум независимым выборкам, объемы которых  $n_1 = 9$  и  $n_2 = 6$ , найдены выборочные дисперсии  $S_x^2 = 14,4$  и  $S_y^2 = 20,5$  годовых дивидендов от вложений в отрасли А и В соответственно.

Задание: проверить при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  гипотезу о равенстве рисков при вложении денег в обе отрасли.

**Задача 6.** Анализируется зависимость между доходами  $X$  горожан, имеющих индивидуальные домовладения, и рыночной стоимостью  $Y$  их домов. По случайной выборке из 120 горожан данной категории получены следующие результаты:

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 25200; \quad \sum y_i = 110500; \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 72300; \\ \sum (y_i - \bar{y})^2 &= 1500200; \quad \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 201350.\end{aligned}$$

Задание: проверить при уровне значимости  $\alpha = 0,01$  предположение о равенстве дисперсий рассматриваемых случайных величин и гипотезу о наличии сильной линейной зависимости между исследуемыми показателями.

**Задача 7.** При анализе зависимости между двумя показателями  $X$  и  $Y$  по 25 наблюдениям получены следующие данные:  $\bar{x} = 100$ ;  $\bar{y} = 75$ ;  $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 625$ ;  $\sum x_i y_i = 187$ ;  $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 484$ . Оцените наличие линейной зависимости между  $X$  и  $Y$ .

Задание: проверить, будет ли коэффициент корреляции  $r_{xy}$  статистически значимым.

**Задача 8.** Объем продаж  $Y$  (тыс. руб) и расходы на рекламу  $X$  (тыс. руб) по 62 предприятиям концерна характеризуется выборочным коэффициентом корреляции  $r_{xy} = 0,3$ .

Задание: при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить значимость коэффициента корреляции.

### **Рекомендуемая литература**

1. Бородич С. А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006.- Гл. 1,2,3.
2. Уткин, В. Б. Эконометрика [Электронный ресурс]: учебник / В. Б. Уткин; Под ред. проф. В. Б. Уткина. - 2-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. - 564 с.: Гл.4,5,6 (<http://znanium.com>)
3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 1. (<http://znanium.com>)
4. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. - М.: Финансы и статистика, 2008.- Гл. 1.

## **Раздел 2. Парная регрессия**

### **Тема 3. Линейная модель парной регрессии и методы ее оценивания (1 занятие)**

Практическое занятие проводится в интерактивной форме путем анализа конкретных ситуаций (кресельный кейс-метод), с использованием интерактивного планшета Symposium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: формирование знаний и умения представлять экономическую задачу в конкретной параметрической форме и применять МНК для получения оценок параметров эконометрических моделей.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный

тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. Что такое функция регрессии?
2. Чем регрессионная модель отличается от функции регрессии?
3. Каковы основные причины наличия в регрессионной модели случайного отклонения?
4. Как осуществляется спецификация модели?
5. В чем состоит различие между теоретическим и эмпирическим уравнениями регрессии?
6. В чем суть метода наименьших квадратов?
7. Каковы формулы расчета коэффициентов эмпирического парного линейного уравнения регрессии по МНК?
8. Что такое функция правдоподобия? Каковы основные принципы ее построения?
9. При каких условиях оценки метода наименьших квадратов и наибольшего правдоподобия совпадают?
10. Что такое тобит-модель, какова область ее использования?
11. Каковы предпосылки МНК? Каковы последствия их выполнения или невыполнимости?
12. Действительно ли оценки коэффициентов регрессии будут иметь нормальное распределение, если случайные отклонения распределены нормально?
13. Действительно ли в любой линейной регрессионной модели, построенной по МНК, сумма случайных отклонений равна нулю?

13. В чем заключается суть коэффициента детерминации? В каких пределах изменяется коэффициент детерминации?

14. Действительно ли для парной линейной регрессии коэффициент корреляции превосходит коэффициент детерминации?

На втором этапе занятия преподаватель выполняет постановку основных вопросов применения МНК и метода максимального правдоподобия для получения оценок параметров эконометрических моделей, распределяет студентов в три группы, выбирает лидера каждой группы (продолжительность решения заданий 40 минут). Каждая группа совместными парами студентов выполняет одно из практических заданий №№1-3 ручным способом и с помощью пакета «Анализ данных» MS Excel. Роль преподавателя на данном этапе заключается в развитии аналитического мышления студентов, обеспечении системного подхода к решению проблемы.

**Задача 1\*.** Имеются данные за 10 лет по прибылям  $x$  и  $y$  (%) двух компаний (табл.3.1):

Таблица 3.1

$x_i$	19,2	15,8	12,5	10,3	5,7	-5,8	-3,5	5,2	7,3	6,7
$y_i$	20,1	18,0	10,3	12,5	6,0	-6,8	-2,8	3,0	8,5	8,0

Задание:

- 1) построить линейную регрессию  $y$  на  $x$  при наличии свободного члена;
- 2) определить коэффициент детерминации данного уравнения;
- 3) построить линейную регрессию  $y$  на  $x$  при отсутствии свободного члена;
- 4) вычислить коэффициент детерминации для второго уравнения регрессии;
- 5) проверить, значимо или нет различаются коэффициенты регрессии; определить, какую модель следует предпочесть.

**Задача 2\*.** Имеются данные за 10 лет по прибылям X и Y (%) двух компаний (табл.3.2):

Таблица 3.2

$x_i$	19,2	15,8	12,5	10,3	5,7	-5,8	-3,5	5,2	7,3	6,7
$y_i$	20,1	18,0	10,3	12,5	6,0	-6,8	-2,8	3,0	8,5	8,0

Задание:

- 1) построить линейную регрессию Y на X при наличии свободного члена.
- 2) определить коэффициент детерминации данного уравнения.
- 3) построить линейную регрессию  $y$  на  $x$  при отсутствии свободного члена;
- 4) вычислить коэффициент детерминации для второго уравнения регрессии;
- 5) проверить, значимо или нет различаются коэффициенты регрессии; определить, какую модель следует предпочесть.

**Задача 3\*.** Имеются следующие данные о зависимости расходов граждан на интернет (руб.) от их среднедушевого денежного дохода (руб.) (табл.3.3):

Таблица 3.3

y	140	0	150	200	750	400	500	450
x	15020	15500	15400	16700	18100	17100	18300	16520
y	390	320	0	0	630	0	0	0
x	15400	15900	15100	16200	17460	15410	14800	14550

Задание:

- 1) обосновать метод нахождения параметров уравнения регрессии расходов граждан на интернет от их среднедушевого денежного дохода;
- 2) охарактеризовать силу связи между расходами на сотовую связь и среднедушевым денежным доходом при его среднем значении, используя

параметры уравнения линейной регрессии, полученные с помощью метода максимального правдоподобия (ММП) к приведенным выше данным:

$$\hat{y} = -1178,64 + 0,22x$$

$$R^2 = 0,6774, \sigma_e = 193,95$$

На третьем этапе (продолжительность 30 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом обсуждения результатов выполнения заданий. Студенты под руководством лидера в ходе обсуждения выделяют варианты спецификации модели, выбирают метод нахождения оптимальных параметров, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Спецификация линейной модели парной регрессии.
2. Оценки параметров линейной регрессии. Метод наименьших квадратов (МНК). Метод максимального правдоподобия.
3. Предпосылки МНК и свойства МНК-оценок.
4. Коэффициенты корреляции и детерминации в линейной модели парной регрессии.

Лидер на интерактивном планшете Sympodium (OS Windows) демонстрирует полученные модели регрессии. В конце занятия преподаватель подводит итоги и оценивает каждого студента в зависимости от его участия в выполнении заданий и обсуждении вопросов.

### **Задания для самостоятельной работы**

**Задача 1.** Имеются следующие условные данные (табл.3.4):

Таблица 3.4

$y_i$	74	62	51	35	28	20	15	8	10
$x_i$	2,2	2,2	2,3	2,4	2,6	2,9	3,2	3,6	4,0

Задание: предложить аналитическую форму модели  $\tilde{y} = f(x)$

**Задача 2.** При исследовании корреляционной зависимости между ценой на нефть  $X$  и индексом нефтяных компаний  $Y$  получены следующие данные:  $\bar{x} = 16,2$ ;  $\bar{y} = 4000$ ;  $\sigma_x^2 = 4$ ;  $\text{cov}(x, y) = 40$ .

Задание: построить линейное уравнение регрессии  $Y$  на  $X$ .

**Задача 3.** По выборке объема  $n = 10$  получены следующие данные:

$$\sum x_i = 100; \sum y_i = 200; \sum x_i y_i = 21000; \sum x_i^2 = 12000; \sum y_i^2 = 45000.$$

Задание: оценить с помощью МНК параметры линейного уравнения регрессии, найти выборочный коэффициент корреляции  $r_{xy}$ .

**Задача 4.** Имеется линейная классическая нормальная модель множественной регрессии

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \dots + \alpha_n x_{ni} + \varepsilon_i$$

Задание: показать, что вектор оценок параметров регрессии, полученный обычным МНК, является оценкой максимального правдоподобия для  $\alpha$ .

#### Рекомендуемая литература

1. Бородич С. А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006.- Гл. 4, 5.
2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 2, 3. (<http://znanium.com>)
3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 2. (<http://znanium.com>)
4. Практикум по эконометрике: учебное пособие./ под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. – Раздел 1.
5. Уткин, В. Б. Эконометрика [Электронный ресурс]: учебник / В. Б. Уткин; Под ред. проф. В. Б. Уткина. - 2-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. - 564 с.: Гл. 9 (<http://znanium.com>)
6. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд.-М.: Финансы и статистика, 2008.- Гл. 2.



#### **Тема 4. Экономическая и статистическая интерпретация модели парной регрессии (1 занятие)**

Практическое занятие проводится в интерактивной форме путем анализа конкретных ситуаций (кресельный кейс-метод), с использованием интерактивного планшета Symposium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: формирование умения экономически интерпретировать полученную эконометрическую модель, получать оценки параметров эконометрической модели и проверять их качество; проводить отбор факторов с целью улучшения спецификации модели; проводить отбор адекватной модели из возможных вариантов.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. Каков экономический смысл коэффициента регрессии?
2. Какой смысл может иметь свободный коэффициент уравнения регрессии?
3. Чему равен свободный член, если все переменные в линейной модели взяты в отклонениях от средних значений?
4. Какова связь между линейным коэффициентом корреляции и коэффициентом регрессии в линейной модели парной регрессии?
5. Каков статистический смысл коэффициента детерминации?
6. Как записывается баланс для сумм квадратов отклонений резульативного признака?

7. Что происходит, когда общая СКО равна остаточной? В каком случае общая СКО равна факторной?
8. Что такое число степеней свободы? Чему равны числа степеней свободы для различных СКО в парной регрессии?
9. Как используется F-статистика в регрессионном анализе?
10. Как записываются основная и альтернативная гипотезы при проверке адекватности уравнения регрессии в целом?
11. Как F-статистика связана с коэффициентом детерминации в парной регрессии?
12. Как рассчитать критерий Стьюдента для коэффициента регрессии в линейной модели парной регрессии?
13. В чем состоит "грубое" правило анализа статистической значимости коэффициентов регрессии?
14. Какая связь между  $t_b$ - и F- статистиками в парной линейной регрессии?
15. Какие этапы включает схема определения интервальных оценок коэффициентов регрессии?
16. Как строится и что позволяет определить доверительный интервал для условного математического ожидания зависимой переменной?
17. В чем суть предсказания индивидуальных значений зависимой переменной?
18. В каком месте доверительный интервал прогноза по парной модели является наименьшим?

На втором этапе занятия преподаватель выполняет постановку основных вопросов экономической интерпретации эконометрической модели, проверки ее качества. Преподаватель распределяет студентов в три группы, выбирает лидера каждой группы (продолжительность решения заданий 45 минут). Каждая группа совместными парами студентов выполняет одно из практических заданий №№1-3 ручным способом и с помощью

пакета «Анализ данных» MS Excel. Роль преподавателя на данном этапе заключается в развитии аналитического мышления студентов, обеспечении системного подхода к решению проблемы.

**Задача 1\*.** Имеются следующие данные об уровне механизации работ  $x$  (%) и производительности труда  $y$  (т/ч) для 14-и однотипных предприятий (табл.4.1):

Таблица 4.1

$x_i$	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
$y_i$	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Задание:

- 1) построить уравнение линейной регрессии для характеристики зависимости  $y$  от  $x$  и выполнить экономическую интерпретацию его параметров;
- 2) оценить значимость модели через  $F$  – критерий Фишера.
- 3) оценить значимость МНК-оценок регрессии через критерий Стьюдента.

**Задача 2\*.** Для 13 клиентов спортивного отдела магазина зафиксирована сумма покупки  $X$  (в у.е.) и время разговора с продавцом  $Y$  (мин) (табл.4.2):

Таблица 4.2

$X_i$	40	50	60	80	100	110	120	130	150	160	180	200	310
$Y_i$	14	14	17	19	17	20	24	22	25	24	18	20	26

Задание:

- 1) оценить с помощью МНК параметры линейного уравнения регрессии, предположив, что  $Y$  объясняется переменной  $X$ ; оценить статистическую значимость линейной модели и ее параметров на уровне  $\alpha = 0,05$ ;
- 2) оценить с помощью МНК параметры линейного уравнения регрессии, предположив, что  $X$  объясняется переменной  $Y$ ; проверить статистику

стическую значимость уравнения регрессии по  $F$  – критерию Фишера, а также параметров модели по  $t$  – статистикам на уровне  $\alpha = 0,05$ ;

3) выполнить экономическую интерпретацию МНК-оценок.

**Задача 3\*.** Проводится анализ взаимосвязи количества населения и количества практикующих врачей (табл.4.8):

Таблица 4.3

Население, млн. чел.	10,0	10,3	10,4	10,55	10,6	10,7	10,75	10,9	10,9	11,0
Врачи, тыс. чел.	12,1	12,6	13,0	13,8	14,9	16,0	18,0	20,0	21,0	22,0

Задание:

1) оценить коэффициенты уравнения линейной регрессии со свободным коэффициентом для характеристики зависимости количества практикующих врачей от количества населения;

2) рассчитать 95% -е доверительные интервалы для теоретических коэффициентов регрессии;

3) рассчитать ожидаемое количество врачей, если прогнозное количество населения составит 11,5 млн. человек; рассчитать 99%-й доверительный интервал для данного предсказания;

4) определить, на сколько тыс. человек изменится количество врачей, если население вырастет на 0,8 млн. чел.

На третьем этапе (продолжительность 30 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом обсуждения результатов выполнения заданий. Студенты под руководством лидера в ходе обсуждения сравнивают модели по показателям качества и формулируют выводы, интерпретируют модели, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Экономическая интерпретация параметров модели.

2. Проверка статистической значимости модели в целом. Таблица дисперсионного анализа.

3. Проверка статистической значимости МНК-оценок регрессии.

4. Расчет доверительных интервалов параметров регрессии и прогнозного значения зависимой переменной. Точечные и интервальные прогнозы на основе линейного уравнения парной регрессии.

Лидер, применяя уникальное сочетание компьютерных и традиционных методов организации учебной деятельности, на интерактивном планшете Symposium (ОС Windows) сравнивает показатели качества моделей регрессии. В конце занятия преподаватель подводит итоги и оценивает каждого студента в зависимости от его участия в выполнении заданий и обсуждении вопросов.

### **Задания для самостоятельной работы**

**Задача 1.** Пусть имеется следующая модель парной регрессии, построенная по 20 наблюдениям:  $\tilde{y} = 8 - 7x$ . При этом  $r_{xy} = -0,5$ .

Задание: построить доверительный интервал для коэффициента регрессии в этой модели с вероятностями 0,9 и 0,95.

**Задача 2.** Анализируется зависимость между доходами горожан (X), имеющими индивидуальные домовладения, и рыночной стоимостью их домов (Y). По случайной выборке из 120 горожан данной категории получены результаты:

$$\sum x_i = 27343; \sum y_i = 115870; \sum (x_i - \bar{x})^2 = 75200;$$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 1620340; \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 250431.$$

Задание: найти оценку коэффициента регрессии  $b_1$  и построить 95% доверительный интервал для коэффициента регрессии.

**Задача 3.** По данным наблюдений за 15 лет построена следующая регрессионная модель:

$$Y_t = -787,4723 + 8,0863x_t + e_t$$

$$s_e = (\dots) \quad (0,2197)$$

$$t = (-10,0) \quad (\dots) \quad R^2 = 0,9912.$$

$Y_t$  – валовой национальный продукт, млрд. долл.,  $X_t$  – денежная масса.

Задание:

- 1) определить неизвестные значения и оценить статистическую значимость коэффициентов регрессии;
  - 2) оценить общее качество уравнения регрессии;
  - 3) проверить утверждение монетаристов: денежная масса имеет существенное положительное влияние на ВВП;
  - 4) охарактеризовать смысл отрицательного свободного коэффициента;
  - 5) определить прогнозное значение ВВП на следующий год, если предложение денег в следующем году планируется на уровне 550 млрд. долл.
- б) определить, в каком интервале будет лежать прогнозируемое значение ВВП с вероятностью 95%.

**Задача 4\*.** По 12 регионам России приводятся данные о среднедушевом прожиточном минимуме в день одного трудоспособного  $X$  (руб.) и среднедневной заработной плате  $Y$  (руб.) (табл.4.4):

Таблица 4.4

Номер региона	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$X$ , руб.	78	82	87	79	89	106	67	88	73	87	76	115
$Y$ , руб	133	148	134	154	162	195	139	158	152	162	159	173

Задание:

- 1) оценить статистическую значимость линейной модели в целом, а также параметров линейной регрессии и построить интервальную оценку коэффициентов линейной регрессии с надежностью 0,95;
- 2) выполнить прогноз заработной платы  $y$  при прогнозном значении среднего прожиточного уровня  $x$ , составляющего 107% от среднего уровня и оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его 95% доверительный интервал.

**Задача 5\*.** Имеется информация за семь лет относительно среднего дохода и среднего потребления, млн. руб. (табл.4.5):

Таблица 4.5

Доход	14,56	15,70	16,30	18,50	20,34	21,70	23,50
Потребление	12,00	12,70	13,00	15,50	16,70	17,30	20,00

Задание:

1) оценить коэффициенты уравнения линейной регрессии со свободным коэффициентом для характеристики зависимости потребления от дохода;

2) рассчитать 95% -е доверительные интервалы для теоретических коэффициентов регрессии;

3) спрогнозировать потребление при доходе, равном 25,00 млн. руб., построить доверительный интервал для данного прогноза;

4) определить, на сколько млн. руб. изменится потребление, если доход вырастет на 3,0 млн. руб.

**Задача 6.** Для анализа зависимости переменной  $Y$  от объясняющей переменной  $X$  получена выборка объема  $n = 50$  и определены следующие показатели:

$$\bar{x} = 50,68; \bar{y} = 100,44; \sum x_i y_i = 290463; \sum y_i^2 = 539477.$$

В основу исследования положена классическая однофакторная модель нормальной регрессии  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,50}$ .

Задание: проверить следующие гипотезы при уровне  $\alpha = 0,05$ :

1.  $H_0: \beta_1 \geq 1$ .

2.  $H_0: \beta_0 \leq 50$ .

**Задача 7.** Наблюдения 16 пар  $(x, y)$  дали следующие результаты:

$$\sum x_i = 96; \sum y_i = 64; \sum x_i^2 = 657; \sum y_i^2 = 526; \sum x_i y_i = 492.$$

Задание: оценить регрессию  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  и проверить гипотезу, что  $\beta_1 = 1$ .

### **Рекомендуемая литература**

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 4, 5.
2. Валентинов В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 2, 3. (<http://znanium.com>)
3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 2,3 (<http://znanium.com>)
4. Практикум по эконометрике: учебное пособие / под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. – Раздел 1.
5. Уткин В. Б. Эконометрика [Электронный ресурс]: учебник / В. Б. Уткин; под ред. проф. В. Б. Уткина. - 2-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. - 564 с.: Гл. 9 (<http://znanium.com>)
6. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2008. Гл. 2.

## **Раздел 3. Множественная регрессия**

**Тема 5. Линейная модель множественной регрессии и оценка ее параметров (1 занятие)**

**1 часть (40 минут)**

**Вопросы для обсуждения**

1. Линейная модель множественной регрессии. Эмпирическая форма записи.
2. Оценка параметров модели с помощью МНК.
3. Применение моделей множественной регрессии в экономических исследованиях.



## Контрольные вопросы

1. Как записывается эмпирическое уравнение линейной модели множественной регрессии?
2. Что измеряют коэффициенты регрессии линейной модели множественной регрессии?
3. Какие этапы включает алгоритм определения коэффициентов множественной линейной регрессии по МНК в матричной форме?
4. Какие требования предъявляются к факторам для их включения их в модель множественной регрессии?
5. Как интерпретируются коэффициенты регрессии линейной модели потребления?
6. Какой смысл приобретает сумма коэффициентов регрессии в производственных функциях?
7. Как в линейной модели множественной регрессии, записанной в стандартизованном виде, сравнить факторы по силе их воздействия на результат?
8. Как связаны стандартизованные коэффициенты регрессии с натуральными?

## Практические задания

**Задача 1.** Коэффициенты корреляции между попарно объединенными переменными  $Y$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  равны:

$$r_{yx_1} = 0,8; r_{yx_2} = 0,7; r_{x_1x_2} = 0,9.$$

Задание: определить коэффициент множественной корреляции между переменной  $Y$  и переменными  $x_1$ ,  $x_2$ ?

**Задача 2.** По 30 заводам, выпускающим продукцию А, изучается зависимость потребления электроэнергии  $y$  (тыс. кВт\*ч) от производства продукции –  $x_1$ (тыс. ед.) и уровня механизации труда –  $x_2$ (%). Данные приведены в таблице (табл.5.1):

Таблица 5.1

Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение	Парный коэффициент корреляции
y	1000	27	$r_{yx1}=0,77$
x1	420	45	$r_{yx2}=0,43$
x2	41,5	18	$r_{x1x2}=0,38$

Задание:

- 1) построить уравнение множественной регрессии в стандартизованной и натуральной форме;
- 2) определить показатели частной и множественной корреляции;
- 3) найти частные коэффициенты эластичности и сравните их с  $\beta$ -коэффициентами.

**Задача 3\*.** Изучается влияние стоимости основных и оборотных средств на величину валового дохода торговых предприятий (в млн. руб.). Для этого по 12 торговым предприятиям были получены следующие данные (табл.5.2):

Таблица 5.2

Номер предприятия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Валовой доход за год	203	63	45	113	121	88	110	56	80	237	160	75
Стоимость основных средств	118	28	17	50	56	102	116	124	114	154	115	98
Стоимость оборотных средств	105	56	54	63	28	50	54	42	36	106	88	46

Задание:

- 1) построить линейное уравнение множественной регрессии и пояснить экономический смысл его параметров;
- 2) рассчитать частные коэффициенты эластичности;
- 3) определить стандартизованные коэффициенты регрессии;
- 4) определить парные и частные коэффициенты корреляции, множественный коэффициент корреляции и коэффициент детерминации.

**2 часть (40 минут) – выполнение контрольной работы**

**Пример задания для контрольной работы**

1. Расход сырья на единицу продукции составил:

по старой технологии

$x_i$	303	307	308	Всего
$n_i$	1	4	4	9

по новой технологии

$y_j$	303	304	306	308	Всего
$n_j$	2	6	4	1	13

Задание: выяснить, дает ли новая технология экономию в среднем расходе сырья, полагая, что расходы сырья по каждой технологии имеют нормальные распределения, на уровне значимости 0,05

2. Для определения среднего размера деталей взято на выборку 60 деталей, средний размер которых оказался 7,4 мм, а среднее квадратическое отклонение 1,5 мм.

Задание: определить с надежностью 0,95 доверительный интервал, в котором будет заключен средний размер всех изготовленных деталей.

3. Регрессионная зависимость объема продаж  $y$  от расходов на рекламу  $x$  по 18 предприятиям объединения записывается в виде:

$$\hat{y} = 18 + 0,27x, \quad \sigma_x = 4,8, \quad \sigma_y = 2,7.$$

Задание: определить коэффициент детерминации, построить таблицу дисперсионного анализа и определить значимость уравнения регрессии на уровне 0,05.

4. По 19 фермам области средняя урожайность пшеницы составила 26 ц/га при вариации 23%, а количество удобрений в среднем на гектар посева было внесено 18 кг при вариации этого показателя 45%. Регрессионная зависимость урожайности от количества удобрений имеет вид  $\hat{y} = 17,072 + 0,496x$ .

Задание: построить на уровне 0,1 доверительный интервал прогноза урожайности пшеницы, если количество внесенных удобрений превышает средний показатель на 30%.

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** Получены следующие величины:

$$\bar{y} = 15,0; \quad \bar{x}_1 = 6,5; \quad \bar{x}_2 = 12,0; \quad \sigma_y = 4,0; \quad \sigma_{x_1} = 2,5; \quad \sigma_{x_2} = 3,5; \quad r_{yx_1} = 0,63; \\ r_{yx_2} = 0,78; \quad r_{x_1x_2} = 0,52.$$

Задание: записать регрессию  $Y$  на  $x_1$  и  $x_2$  в стандартизованной и естественной формах.

**Задача 2.** Уравнение регрессии, построенное по 15 наблюдениям, имеет вид:

$$\tilde{y} = 12,4 - 9,6x_1 + ?x_2 - 6,3x_3 \\ m_b \quad (?) \quad (3,2) \quad (0,12) \quad (?) \\ t_b \quad (1,55) \quad (?) \quad (4,0) \quad (-3,15).$$

Задание: определить пропущенные значения и построить доверительный интервал для  $\beta_3$  с вероятностью 0,99.

**Задача 3.** Уравнение регрессии в стандартизованной форме имеет вид

$$t_y = 0,37t_{x_1} - 0,52t_{x_2} + 0,43t_{x_3}.$$

При этом коэффициенты вариации равны:

$$V_y = 18\%, \quad V_{x_1} = 25\%, \quad V_{x_2} = 38\%, \quad V_{x_3} = 30\%.$$

Задание: определить частные коэффициенты эластичности.

### Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 6.

2. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 4. (<http://znanium.com>)

3. Практикум по эконометрике : учебное пособие / под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. - Раздел 2.

3. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2008. –Гл. 3.

## **Тема 6. Оценка качества модели множественной регрессии (1 занятие)**

### **Вопросы для обсуждения**

1. Показатели качества множественной регрессии: индекс множественной корреляции и коэффициент детерминации. Скорректированный коэффициент детерминации.
2. Оценка значимости уравнения в целом и каждого параметра в отдельности.
3. Сравнение двух регрессий при включении и при исключении отдельных наборов переменных.
4. Частные F - критерии.

### **Контрольные вопросы**

1. Какие основные подходы реализуются при проверке адекватности построенного уравнения линейной модели множественной регрессии?
2. Как определяется статистическая значимость коэффициентов регрессии в линейной модели множественной регрессии?
3. Как строятся доверительные интервалы для параметров линейной модели множественной регрессии?
4. В чем недостаток использования коэффициента детерминации при оценке общего качества линейной модели множественной регрессии?
5. Как корректируется коэффициент детерминации?
6. Каково назначение частной корреляции при построении модели множественной регрессии?
7. Как проверяется адекватность линейной модели множественной регрессии в целом?
8. Как определяется индекс множественной корреляции и какой он имеет смысл?
9. Каковы способы отбора факторов для включения в линейную

модель множественной регрессии?

10. Как проверить обоснованность исключения части переменных из уравнения регрессии?

11. Как проверить обоснованность включения группы новых переменных в уравнение регрессии?

12. Что такое частный F-критерий и чем он отличается от последовательного F-критерия?

13. Как связаны между собой t-критерий Стьюдента для оценки значимости  $b_i$  и частные F-критерии?

### Практические задания

**Задача 1\***. Предполагается, что объем  $Q$  предложения некоторого блага для функционирующей в условиях конкуренции фирмы зависит линейно от цены  $P$  данного блага и заработной платы  $W$  сотрудников фирмы, производящих данное благо:

$$Q = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + \varepsilon.$$

Статистические данные, собранные за 16 месяцев, занесены в следующую таблицу 6.1:

Таблица 6.1

Q	20	35	30	45	60	69	75	90	105	110	120	130	130	130	135	140
P	10	15	20	25	40	37	43	35	38	55	50	35	40	55	45	65
W	12	10	9	9	8	8	6	4	4	5	3	1	2	3	1	2

Задание:

1) оценить МНК-коэффициенты линейного уравнения множественной регрессии;

2) проверить гипотезы о том, что при прочих равных условиях рост цены товара увеличивает предложение, рост заработной платы снижает предложение;

3) определить с вероятностью 90% интервальные оценки коэффициентов регрессии. Как с их помощью можно проверить гипотезу о статистической значимости коэффициентов регрессии?

4) оценить общее качество уравнения регрессии;

5) проверить, является ли статистически значимым коэффициент детерминации.

**Задача 2\*.** По 20 предприятиям региона изучается зависимость продукции на одного работника  $y$  (тыс. руб) от ввода в действие новых основных фондов  $x_1$  (% от стоимости фондов на конец года) и удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих  $x_2$  (%) (табл.6.2):

Таблица 6.2

Номер предприятия	$y$	$x_1$	$x_2$	Номер предприятия	$y$	$x_1$	$x_2$
1	7	3,9	10	11	9	6,0	21
2	7	3,9	14	12	11	6,4	22
3	7	3,7	15	13	9	6,8	22
4	7	4,0	16	14	11	7,2	25
5	7	3,8	17	15	12	8,0	28
6	7	4,8	19	16	12	8,2	29
7	8	5,4	19	17	12	8,1	30
8	8	4,4	20	18	12	8,5	31
9	8	5,3	20	19	14	9,6	32
10	10	6,8	20	20	14	9,0	36

Задание:

1) построить уравнение линейной множественной регрессии, оценить значимость его параметров. Пояснить их экономический смысл;

2) оценить статистическую надежность уравнения регрессии с помощью  $F$  – критерия Фишера. Сравнить значения коэффициента множественной детерминации и его скорректированное значение;

3) оценить целесообразность включения в уравнение фактора  $x_1$  после  $x_2$  и фактора  $x_2$  после  $x_1$  с помощью частных  $F$  – критериев;

4) рассчитать частные коэффициенты эластичности и дать сравнительную оценку силы влияния факторов на результат.

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** На основе статистических данных за 10 лет оценены параметры и их стандартные ошибки для линейной модели, описывающей зависимость объемов производства  $y$  от количества работающих  $x_1$  и установочной мощности оборудования  $x_2$ :

$$\tilde{y} = 54 + 23,41x_1 + 6,44x_2$$

$$(6,5) \quad (5,1) \quad (0,83)$$

Задание: установить для уровня значимости  $\alpha = 0,05$ , оказывают ли объясняющие переменные  $x_1$ ,  $x_2$  существенное влияние на объясняемую переменную  $y$ .

**Задача 2.** Имеются данные регрессионного анализа чистого дохода в зависимости от стоимости капитала и численности служащих по 20 предприятиям (табл.6.3):

Таблица 6.3

Множественный R	?			
R-квадрат	?			
Нормированный R-квадрат	?			
Стандартная ошибка	1,249			
Наблюдения	20			
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
Регрессия	?	30,821	?	?
Остаток	?	26,537	?	
Итого	?	57,358		
	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>
Y-пересечение	1,706	0,463	?	0,002
X1	0,072	0,016	?	0,0003
X2	-0,002	0,002	?	0,202

Задание:



- 1) записать линейное уравнение множественной регрессии и пояснить экономический смысл его параметров;
- 2) оценить качество уравнения и проверить значимость коэффициентов регрессии и  $R^2$  при  $\alpha=0,05$ .

**Задача 3.** Имеются данные регрессионного анализа цен на туристические палатки. Уравнение регрессии имеет следующий вид: Цена=120+73,2\*(вес)-7,52\*(площадь) (табл.6.4):

Таблица 6.4

Независимая переменная	Коэффициент	Стандартная ошибка	t-статистика	p
Константа	120,3	54,82	2,19	0,037
Вес	73,17	15,37	4,76	0,000
Площадь	-7,517	2,546	-2,95	0,006

$$R^2=0,567, R^2_{\text{скамп.}}=0,535, n=30.$$

Задание: ответить на ряд вопросов:

- 1) стоят ли более тяжелые палатки в среднем дороже или дешевле, чем легкие, если речь идет о палатках заданного размера?
- 2) стоят ли большие палатки в среднем дороже или дешевле, чем меньшие палатки, если речь идет о палатках заданного веса?
- 3) какой процент вариации цен объясняется информацией, доступной руководству компании?
- 4) найдите цену палатки, вес которой составит 5 кг, а площадь 4 квадратных метра;
- 5) является ли значимым F-критерий?

**Задача 4.** По 30 территориям России имеются следующие данные (табл.6.5):

Таблица 6.5

Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корреляции
Среднедневной душевой доход $y$	86,8	11,44	$r_{yx_1} = 0,8405$
Среднедневная зарплата $x_1$	54,9	5,86	$r_{yx_2} = -0,2101$

Средний возраст безработного $x_2$	33,5	0,58	$r_{x_1x_2} = -0,1160$
---------------------------------------	------	------	------------------------

Задание:

1) построить уравнение множественной регрессии в стандартизованной и естественной форме, рассчитать частные коэффициенты эластичности и сравнить их со стандартизованными коэффициентами регрессии.

2) рассчитать линейные коэффициенты частной корреляции и коэффициент множественной корреляции и сравнить их с коэффициентами парной корреляции.

3) рассчитать общий и частные  $F$  – критерии Фишера.

**Задача 5.** По ряду регионов множественная регрессия величины импорта  $Y$  на определенный товар относительно отечественного его производства  $x_1$ , изменения запасов  $x_2$  и потребления на внутреннем рынке  $x_3$  оказалась следующей

$$\tilde{y} = b_0 + 0,135x_1 + 0,476x_2 + 0,343x_3.$$

$$\text{При этом } \bar{y} = 31,5; \bar{x}_1 = 245,7; \bar{x}_2 = 3,7; \bar{x}_3 = 182,5.$$

Задание: определить параметр  $b_0$ , частные уравнения регрессии и частные коэффициенты эластичности для региона с показателями  $x_1 = 160,2$ ;  $x_2 = 4,0$ ;  $x_3 = 190,5$ .

### Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 6.

2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 5. (<http://znanium.com>)

3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 4. (<http://znanium.com>)

4. Практикум по эконометрике: учебное пособие / Под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. - Раздел 2.

5. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2006. –Гл. 3.

### **Тема 7. Мультиколлинеарность (1 занятие)**

Практическое занятие проводится в интерактивной форме путем анализа конкретных ситуаций (кресельный кейс-метод), с использованием интерактивного планшета Symposium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: формирование умения проводить отбор факторов с целью улучшения спецификации модели; проводить отбор адекватной модели из возможных вариантов.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. В чем различие терминов "коллинеарность" и "мультиколлинеарность"?
2. Что такое полная и частичная мультиколлинеарность?
3. Каковы причины и последствия мультиколлинеарности?
4. Как можно обнаружить мультиколлинеарность?
5. Каковы основные методы устранения мультиколлинеарности?
6. Какие значения парных коэффициентов корреляции свидетельствуют о наличии тесной связи независимых переменных?
7. Какой смысл имеет частный коэффициент корреляции?

8. Каковы основные типы процедур пошагового отбора переменных в регрессионную модель?

9. Действительно ли, что при наличии высокой мультиколлинеарности невозможно оценить статистическую значимость коэффициентов регрессии при коррелированных переменных?

10. Действительно ли, что при наличии мультиколлинеарности оценки коэффициентов остаются несмещенными, но их t-статистики будут слишком низкими?

На втором этапе занятия преподаватель выполняет постановку основных вопросов отбора факторов с целью улучшения спецификации модели. Преподаватель распределяет студентов в пять групп, выбирает лидера каждой группы (продолжительность решения заданий 40 минут). Каждая группа студентов совместно выполняет практическое задание №1, используя пакет «Анализ данных» MS Excel. Роль преподавателя на данном этапе заключается в развитии аналитического мышления студентов, обеспечении системного подхода к решению проблемы.

**Задача 1\*.** Имеются данные о деятельности 25 предприятий отрасли (табл.7.1):

Таблица 7.1

№ п/п	Чистый доход, ден. ед., Y	Оборот капитала, ден. ед., X1	Использованный капитал, ден. ед., X2	Численность служащих, тыс. чел., X3	Рыночная капитализация компании, ден. ед., X4
1	0,9	31,3	18,9	43,0	40,9
2	1,7	13,4	13,7	64,7	40,5
3	0,7	4,5	18,5	24,0	38,9
4	1,7	10,0	4,8	50,2	38,5
5	2,6	20,0	21,8	106,0	37,3
6	1,3	15,0	5,8	96,6	26,5
7	4,1	137,1	99,0	347,0	37,0
8	1,6	17,9	20,1	85,6	36,8
9	6,9	165,4	60,6	745,0	36,3
10	0,4	2,0	1,4	4,1	35,3
11	1,3	6,8	8,0	26,8	35,3
12	1,9	27,1	18,9	42,7	35,0

13	1,9	13,4	13,2	61,8	26,2
14	1,4	9,8	12,6	212,0	33,1
15	0,4	19,5	12,2	105,0	32,7
16	0,8	6,8	3,2	33,5	32,1
17	1,8	27,0	13,0	142,0	30,5
18	0,9	12,4	6,9	96,0	29,8
19	1,1	17,7	15,0	140,0	25,4
20	1,9	12,7	11,9	59,3	29,3
21	-0,9	21,4	1,6	131,0	29,2
22	1,3	13,5	8,6	70,7	29,2
23	2,0	13,4	11,5	65,4	29,1
24	0,6	4,2	1,9	23,1	27,9
25	0,7	15,5	5,8	80,8	27,2

Задание:

- 1) рассчитать параметры линейного уровня множественной регрессии с полным перечнем факторов;
- 2) выполнить сравнительную оценку силы связи факторов с результатом с помощью средних (общих) коэффициентов эластичности;
- 3) оценить статистическую значимость параметров регрессионной модели с помощью t-критерия; нулевую гипотезу о значимости уравнения и показателей тесноты связи проверьте с помощью F-критерия;
- 4) оценить качество уравнения через среднюю ошибку аппроксимации;
- 5) составить матрицы парных и частных коэффициентов корреляции и на их основе и по t-критерию для коэффициентов регрессии отберите информативные факторы в модель. Построить модель только с информативными факторами и оцените ее параметры;
- 6) определить прогнозное значение результата, если прогнозные значения факторов составляют 80% от их максимальных значений;
- 7) определить ошибки и доверительный интервал прогноза для уровня значимости 5 или 10% ( $\alpha=0,05$ ;  $\alpha=0,10$ );
- 8) оценить полученные результаты, сделать выводы.

На третьем этапе (продолжительность 30 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом обсуждения результатов выпол-

нения заданий. Студенты под руководством лидера в ходе обсуждения результатов отбора факторов, дают сравнительную оценку силы связи факторов с результатом, проверяют качество модели, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Понятие мультиколлинеарности и ее последствия.
2. Обнаружение мультиколлинеарности и способы ее устранения или снижения.

Лидер на интерактивном планшете Sympodium (ОС Windows) предлагает существенные факторы для улучшения качества модели. В конце занятия преподаватель подводит итоги и оценивает каждого студента в зависимости от его участия в выполнении заданий и обсуждении вопросов.

### **Задания для самостоятельной работы**

**Задача 1.** По выборке  $n=50$  для  $X_1, X_2, X_3$  построена следующая корреляционная матрица

$$R = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,45 & -0,35 \\ 0,45 & 1,0 & 0,52 \\ -0,35 & 0,52 & 1,0 \end{bmatrix}$$

Задание:

1) оценить статистическую значимость следующих частных коэффициентов корреляции  $r_{12*3}, r_{23*1}, r_{13*2}$ .

2) ответить на вопрос: при рассмотрении какой регрессии будет иметь место мультиколлинеарность?

**Задача 2.** Имеется выборка из 10 наблюдений за переменными  $X_1, X_2, Y$  (табл. 7.2):

Таблица 7.2

X1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X2	1	1,6	2,2	2,8	3,4	4	4,6	5,2	5,6	6,2
Y	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27

Задание:

1) ответить на вопрос: можно ли по этим данным по МНК оценить коэффициенты регрессии с двумя объясняющими переменными?

2) предложить преобразования, которые позволят оценить коэффициенты регрессии в случае отрицательного ответа на вопрос.

**Задача 3.** Построена матрица коэффициентов корреляции между попарно объединенными переменными  $Y$  (заработная плата),  $x_1$  (возраст),  $x_2$  (выработка за смену):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,853056 & 0,849877 & 0,778766 \\ 0,853056 & 1 & 0,935263 & 0,615448 \\ 0,849877 & 0,935263 & 1 & 0,696661 \\ 0,778766 & 0,615448 & 0,696661 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание: установить путём анализа матрицы парных коэффициентов корреляции, имеется ли мультиколлинеарность факторов.

#### **Рекомендуемая литература**

1. Бородич С. А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. - Гл.10.

2. Валентинов В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 5. (<http://znanium.com>)

3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 4. (<http://znanium.com>)

4. Практикум по эконометрике: учебное пособие / под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. - Раздел 2.

5. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2005. – Гл. 3.

## Тема 8. Гетероскедастичность (1 занятие)

Практическое занятие проводится в интерактивной форме путем анализа конкретных ситуаций (кресельный кейс-метод), с использованием интерактивного планшета Symposium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: формирование навыков проверки соблюдения предпосылок МНК и умения улучшения спецификации модели и отбор адекватной спецификации модели из возможных вариантов, использования приемов преобразования данных в случае нарушения предпосылок метода наименьших квадратов.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. В чем суть гомоскедастичности и гетероскедастичности? Каковы последствия гетероскедастичности?
2. Действительно ли, вследствие гетероскедастичности оценки перестают быть эффективными и состоятельными?
3. Какие критерии могут быть использованы для проверки гипотезы о гомоскедастичности регрессионных остатков?
4. В чем заключается тест Спирмена?
5. Какова схема теста Голдфелда-Квандта?
6. Каково предположение теста Парка?
7. В чем суть метода взвешенных наименьших квадратов?
8. Какие типы преобразований применяются для устранения гетероскедастичности?



На втором этапе занятия преподаватель выполняет постановку основных вопросов проверки соблюдения предпосылок МНК и улучшения спецификации модели. Преподаватель распределяет студентов в пять групп, выбирает лидера каждой группы (продолжительность решения заданий 30 минут). Каждая группа студентов совместными парами выполняет одно из практических заданий №1-5, используя пакет «Анализ данных» MS Excel. Роль преподавателя на данном этапе заключается в развитии аналитического мышления студентов, обеспечении системного подхода к решению проблемы.

**Задача 1\*.** Имеется информация о поступлении доходов в консолидированный бюджет Санкт-Петербурга  $y$  (млрд. руб.) в зависимости от численности работающих на крупных и средних предприятиях  $x$  (тыс. чел.) по 20 районам (табл. 8.1):

Таблица 8.1

№ района	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$	3	6	8	18	20	23	39	49	60	74
$y$	4,4	8,1	12,9	20,8	15,5	28,8	37,5	48,7	68,6	74,0

№ района	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x$	79	95	106	112	115	125	132	149	157	282
$y$	90,5	88,3	132,4	122,0	99,1	114,2	150,6	156,1	201,5	342,9

Задание:

- 1) построить оценку парной регрессии по всей выборке;
- 2) построить график  $e_i^2 = f(\tilde{y}_i)$  и визуально проверить наличие гетероскедастичности;
- 3) применить к полученным результатам тест ранговой корреляции Спирмена (уровень значимости  $\alpha = 0,05$ );
- 4) проверить наличие гетероскедастичности, используя тест Голдфелда-Квандта (уровень значимости  $\alpha = 0,05$ );

5) если предположить, что имеется гетероскедастичность и дисперсии отклонений пропорциональны значениям  $x$ , построить новое уравнение регрессии с помощью взвешенного метода наименьших квадратов;

б) сравнить результаты, полученные в п.1 и п.5.

**Задача 2\*.** Известны данные (в у.е.) по доходам  $X$  и расходам  $Y$  на продовольственные товары для 30 домохозяйств (табл. 8.2):

Таблица 8.2

$x$	26,2	33,1	42,5	47,0	48,5	49,0	49,1	50,9	52,4	53,2
$y$	10,0	11,2	15,0	20,5	21,2	19,5	23,0	19,0	19,5	18,0

$x$	54,0	54,8	59,0	61,3	62,5	63,1	64,0	66,2	70,0	71,5
$y$	24,5	21,5	35,4	25,0	17,3	21,6	15,3	32,6	34,0	23,8

$x$	73,2	75,4	76,0	80,6	81,2	83,3	92,0	95,5	103,2	110,4
$y$	22,5	27,4	40,0	23,6	20,0	40,1	15,5	39,0	47,4	21,3

Задание:

- 1) определить по МНК оценки парного уравнения регрессии  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$  и оценить качество полученного уравнения;
- 2) выполнить графический анализ остатков;
- 3) применить тест ранговой корреляции Спирмена для проверки наличия гетероскедастичности на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ;
- 4) применить для указанных статистических данных взвешенный метод наименьших квадратов, предполагая, что выполняется  $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^2$ ;
- 5) определить, существенно ли повлияла гетероскедастичность на качество МНК- оценок.

**Задача 3\*.** По 30 странам оценивалась регрессия расходов на образование  $Y$  от валового национального продукта  $X$  по следующим данным (табл.8.3):

Таблица 8.3

$x$	5,67	10,13	11,34	18,88	20,94	22,16	23,83	24,67	27,56	27,57
$y$	0,34	0,22	0,32	1,23	1,81	1,02	1,27	1,07	0,67	1,25
$x$	40,15	51,62	57,71	63,03	66,32	66,97	76,88	101,85	115,97	119,49
$y$	0,75	2,8	4,9	3,5	4,45	1,6	4,26	5,31	6,4	7,15

x	124,15	140,98	153,85	169,38	186,33	211,78	249,72	261,41	395,52	534,97
y	11,22	8,66	5,56	13,11	5,46	4,79	8,92	18,9	15,95	29,9

Задание:

- 1) построить выборочное уравнение линейной регрессии;
- 2) проверить наличие гетероскедастичности по критерию Голдфелда-Квандта (уровень значимости  $\alpha = 0,05$ );
- 3) в предположении, что дисперсия отклонений пропорциональна величине валового национального продукта, построить по этим же данным уравнение регрессии по ВМНК;
- 4) сравнить модели, полученные в п.1 и п.3 и оценить их.

**Задача 4\*.** Для предприятий некоторой отрасли анализируют заработную плату (Y) сотрудников в зависимости от масштаба (количества сотрудников) предприятия (X). Наблюдения по 30 случайно отобраным предприятиям представлены следующей таблицей (табл.8.4):

Таблица 8.4

Y						X
75,5	75,5	77,5	78,5	80,0	81,0	100
80,5	82,0	84,5	85,0	85,5	86,5	200
85,5	88,5	90,0	91,0	95,0	96,0	300
93,0	93,5	97,5	99,0	102,5	105,0	400
102,0	105,5	107,0	110,5	115,0	118,5	500

Задание:

- 1) построить уравнение регрессии Y на X и оценить его качество;
- 2) графически проверить, можно ли ожидать наличие гетероскедастичности в данном случае;
- 3) проверить наличие гетероскедастичности, используя тест Голфреда-Квандта. Рекомендуется использовать разбиение, при котором  $k=12$ ;
- 4) выполнить преобразование из условия, что дисперсии отклонений пропорциональны значениям X;
- 5) построить новое уравнение регрессии на основе преобразования, осуществленного в предыдущем пункте, и оценить его качество.
- 6) сравнить результаты, полученные в пунктах 1) и 5).

**Задача 5\*.** Исследуется зависимость между доходом (X) домохозяйства и его расходом (Y) на продукты питания. Выборочные данные по 40 домохозяйствам представлены ниже (табл.8.5):

Таблица 8.5

X	25,5	26,5	27,2	29,6	35,7	38,6	39,0	39,3	40,0	41,9
Y	14,5	11,3	14,7	10,2	13,5	9,9	12,4	8,6	10,3	13,9
X	42,5	44,2	44,8	45,5	45,5	48,3	49,5	52,3	55,7	59,0
Y	14,9	11,6	21,5	10,8	13,8	16,0	18,2	19,1	16,3	17,5
X	61,0	61,7	62,5	64,7	69,7	71,2	73,8	74,7	75,8	76,9
Y	10,9	16,1	10,5	10,6	29,0	8,2	14,3	21,8	26,1	20,0
X	79,2	81,5	82,4	82,8	83,0	85,9	86,4	86,9	88,3	89,0
Y	19,8	21,2	29,0	17,3	23,5	22,0	18,8	13,7	14,5	27,3

Задание:

- 1) построить эмпирическое уравнение регрессии Y на X;
- 2) вычислить отклонения  $e$ ;
- 3) выполнить анализ модели на гетероскедастичность по тесту ранговой корреляции Спирмена;
- 4) провести графический анализ отклонений  $e$  и выдвинуть предположение о зависимости дисперсии отклонений от значений X;
- 5) построить новое уравнение регрессии, используя для этого МВНК.

На третьем этапе (продолжительность 40 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом обсуждения результатов выполнения заданий. Студенты под руководством лидера в ходе обсуждения выполняют тесты на гетероскедастичность разными способами, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Гетероскедастичность, ее причины и последствия.
2. Методы обнаружения гетероскедастичности: тест ранговой корреляции Спирмена, тест Глейзера, тест Голдфелда – Квандта.
3. Коррекция на гетероскедастичность: обобщенный МНК и его различные варианты.

Лидер на интерактивном планшете Sympodium (ОС Windows) анализирует результаты всех тестов и делает выводы о наличии гетероскедастичности. В конце занятия преподаватель подводит итоги и оценивает каждого студента в зависимости от его участия в выполнении заданий и обсуждении вопросов.

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** Заданы следующие значения остатков линейной модели (табл.8.6):

Таблица 8.6

Ранг $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$e_i$	-1	2	-3	2	0	-3	3	1	-2	-4	5	-11	8	-20	12	-21	18	14

Задание: установить, имеется ли гетероскедастичность по тесту ранговой корреляции Спирмена на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

**Задача 2.** Для линейной модели переменной  $y$  относительно переменной  $X$  получены следующие остатки, соотнесенные последовательным наблюдениям переменной  $x_i$  (табл.8.7):

Таблица 8.7

$x_i$	1,3	0,9	0,8	0,7	1,1	1,0	1,5	1,0	0,8	1,4	1,2	1,1
$e_i$	-5	1	2	-6	4	-4	1	4	5	-6	-1	6
$x_i$	1,5	1,8	1,2	0,8	1,3	1,1	1,2	1,0	0,9	1,3	1,2	1,0
$e_i$	-4	9	-5	-2	8	-5	6	-4	5	7	-8	5

Задание: на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  с помощью  $F$ -теста проверить гипотезу о равенстве дисперсий случайных ошибок.

### Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. –Гл. 8.

2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 7. (<http://znanium.com>)

3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 5. (<http://znanium.com>)

4. Практикум по эконометрике. учебное пособие / под ред. И. И. Елисейевой.- М.: Финансы и статистика, 2007.- Разделы 2, 3.

5. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисейевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2005. - Гл. 3.

### **Тема 9. Автокорреляция (1 занятие)**

Практическое занятие проводится в интерактивной форме путем анализа конкретных ситуаций (кресельный кейс-метод), с использованием интерактивного планшета Symposium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: формирование навыков проверки соблюдения предпосылок МНК и умения улучшения спецификации модели и отбор адекватной спецификации модели из возможных вариантов, использования приемов преобразования данных в случае нарушения предпосылок метода наименьших квадратов.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. Что такое автокорреляция случайных отклонений?
2. Каковы основные причины и последствия автокорреляции?
3. Каковы основные методы обнаружения автокорреляции?
4. Что такое автокорреляционная функция?
5. В чем отличие положительной и отрицательной автокорреляции?
6. Какова основная идея метода рядов при обнаружении автокорреляции?

7. Как проводится тест Дарбина-Уотсона?

8. Как можно найти оценки регрессионных коэффициентов в случае линейной модели с коррелированными остатками?

9. В чем состоит авторегрессионная схема 1-го порядка?

10. В чем смысл поправки Прайса-Уинстена?

На втором этапе занятия преподаватель выполняет постановку основных вопросов проверки соблюдения предпосылок МНК и улучшения спецификации модели. Преподаватель распределяет студентов в пять групп, выбирает лидера каждой группы (продолжительность решения заданий 40 минут). Каждая группа студентов совместными парами выполняет одно из практических заданий №№1-5, используя пакет «Анализ данных» MS Excel. Роль преподавателя на данном этапе заключается в развитии аналитического мышления студентов, обеспечении системного подхода к решению проблемы.

**Задача 1\*.** Имеются данные об урожайности пшеницы  $Y$  (ц с 1 га) и использовании минеральных удобрений  $X$  (кг на 1 га) за 20 лет (табл.9.1):

Таблица 9.1

$x$	36,5	39,1	44,1	45,5	49,0	56,4	66,4	80,9	93,4	109,5
$y$	18,9	19,9	19,4	19,9	18,5	20,1	21,2	21,9	24,2	24,0
$x$	123,6	131,6	149,1	157,6	173,6	181,9	193,3	189,0	190,3	188,9
$y$	23,2	26,5	25,1	29,6	31,7	28,3	31,3	26,9	32,5	29,3

Задание:

- 1) построить регрессию  $Y$  на  $X$  и проверить ее качество;
- 2) установить наличие или отсутствие автокорреляции на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  с помощью теста Дарбина-Уотсона;
- 3) определить параметры парной регрессии, используя авторегрессию первого порядка для ошибок регрессии, при наличии автокорреляции;
- 4) сравнить качество построенных моделей.

**Задача 2\*.** Приведены статистические данные за 25 лет по темпам прироста заработной платы  $y$  (%), производительности труда  $x_1$  (%), а также уровню инфляции  $x_2$  (%) (табл.9.2):

Таблица 9.2

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x_1$	3,5	2,8	6,3	4,5	3,1	1,5	7,6	6,7	4,2	2,7	4,5	3,5	5,0
$x_2$	4,5	3,0	3,1	3,8	3,8	1,1	2,3	3,6	7,5	8,0	3,9	4,7	6,1
$y$	9,0	6,0	8,9	9,0	7,1	3,2	6,5	9,1	14,6	11,9	9,2	8,8	12,0

продолжение таблицы 9.2

Год	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$x_1$	2,3	2,8	1,5	6,0	2,9	2,8	2,6	1,5	0,9	0,6	0,7	3,1
$x_2$	6,9	3,5	7,1	3,1	3,7	3,9	4,0	4,8	4,8	4,2	4,9	3,2
$y$	12,5	6,7	8,5	5,9	6,8	5,6	4,8	4,5	6,7	5,5	4,0	3,3

Задание:

- 1) оценить по МНК уравнение регрессии  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$  и проверить его качество;
- 2) выполнить проверку наличия автокорреляции на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ;
- 3) определить параметры парной регрессии, используя авторегрессию первого порядка для ошибок регрессии, при наличии автокорреляции;
- 4) сравнить качество построенных моделей.

**Задача 3\*.** Имеются данные об объеме импорта  $y$  (млрд. долл.) и ВВП  $x$  (млрд долл.) за 20 лет (табл.9.3):

Таблица 9.3

$x_i$	506,0	23,3	563,8	594,7	635,7	688,1	753,0	796,3	868,5	935,9
$y_i$	23,2	23,1	25,2	26,4	28,4	32,0	37,7	40,6	47,7	52,9

$x_i$	982,4	1063,4	1171,1	1306,6	1424,9	1528,1	1702,2	1899,5	2127,6	2368,5
$y_i$	58,5	64,0	75,9	94,4	131,9	126,9	155,4	185,5	217,5	260,9



Задание:

- 1) построить регрессию  $Y$  на  $X$  ;
- 2) выполнить проверку наличия автокорреляции на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ;
- 3) определить параметры парной регрессии, используя авторегрессию первого порядка для ошибок регрессии, при наличии автокорреляции;
- 4) сравнить качество построенных моделей.

**Задача 4\*.** По квартальным данным за 9 лет анализируют зависимость между экспортом ( $EX$ ) и импортом ( $IM$ ). Имеются следующие статистические данные (табл.9.4):

Таблица 9.4

$EX$	12,47	12,65	12,89	12,97	13	13,31	13,25	12,65	14,49	14,47
$IM$	11,07	11,5	12,01	12,28	13,16	13,43	13,28	13,5	15,32	15,62
$EX$	14,74	14,62	17,6	17,7	16,6	15,26	19,49	19,08	18,69	18,65
$IM$	17,44	16,14	16,14	16,08	16,55	15	18,72	17,8	16,64	17,39
$EX$	19,33	19,11	18,62	18,4	16,15	16,58	17,6	18,48	15,36	15,25
$IM$	18,7	18,02	17,46	16,96	15,06	16,01	16,63	17,86	14,56	15,64
$EX$	15,61	15,93	14,38	14,3	14,75	15,58				
$IM$	16,45	17,42	14,3	14,59	14,66	14,95				

Задание:

- 1) построить уравнение регрессии текущего импорта на текущий экспорт и проверить качество построенной модели на основе  $t$ -статистики и коэффициента детерминации  $R^2$ ;
- 2) вычислить значение статистики  $DW$  Дарбина – Уотсона и на её основе проанализируйте наличие автокорреляции; на основе полученных результатов будет ли отклоняться гипотеза о положительной зависимости между объёмами экспорта и импорта?
- 3) постройте регрессию приращения импорта ( $\Delta IM = IM_t - IM_{t-1}$ ) на приращение экспорта ( $\Delta EX = EX_t - EX_{t-1}$ );

4) Каково значение статистики  $DW$  для построенного уравнения и какой вывод из этого следует?

**Задача 5\*.** Используются статистические данные за 25 лет (табл.9.5):

Таблица 9.5

$INF$	3,07	0,7	4,08	2,2	2,38	0,9	1,1	5,12	0,93	2,54	1,55	3,45	1,09
$U$	3,69	9,1	3,92	6,5	4,63	8,5	9,55	3,71	5,8	3,6	6,53	4,32	9,2
$INF$	2,15	5,14	1,72	0,74	4,16	0,93	1,79	1,24	1,12	1,28	7,36	5,3	
$U$	5,75	3,65	7,3	9,65	3,65	9,8	6,28	7,8	8,75	7,22	3,6	3,65	

В качестве модели рекомендуется воспользоваться следующим уравнением:  $\ln INF_t = \beta_0 + \beta_1 \ln U_t + \varepsilon_t$ .

Задание:

- 1) оценить по МНК коэффициенты  $\beta_0$  и  $\beta_1$ ; построить 95%-й доверительный интервал для коэффициента  $\beta_1$ ; оценить качество построенного уравнения;
- 2) вычислить статистику  $DW$  Дарбина – Уотсона и на её основе определить наличие автокорреляции;
- 3) проверить наличие автокорреляции с помощью метода рядов и сделать вывод о качестве интервальной оценки для коэффициента  $\beta_1$ ;
- 4) переоценить модель, используя для этого авторегрессионную схему первого порядка; построить новый 95%-й доверительный интервал для  $\beta_1$ . Сравнить его с предыдущим интервалом.

На третьем этапе (продолжительность 30 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом обсуждения результатов выполнения заданий. Студенты под руководством лидера в ходе обсуждения сравнивают разные тесты на автокорреляцию, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Автокорреляция и ее последствия.
2. Обнаружение автокорреляции: тест Дарбина – Уотсона, метод рядов.
3. Авторегрессионная схема 1 – ого порядка.

Лидер, применяя уникальное сочетание компьютерных и традиционных методов организации учебной деятельности, на интерактивном планшете Symposium (ОС Windows) по результатам всех тестов делает выводы о наличии автокорреляции и предлагает методы ее устранения. В конце занятия преподаватель подводит итоги и оценивает каждого студента в зависимости от его участия в выполнении заданий и обсуждении вопросов.

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** Для модели  $\tilde{y} = 32 + 0,35x_1 - 0,46x_2$ , параметры которой оценены по МНК, получена следующая последовательность остатков (табл.9.6):

Таблица 9.6

Номер $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$e_i$	-2	3	-1	2	-4	2	0	1	-1	0	-4	3	-2	3	0

Задание: рассчитать коэффициент автокорреляции первого порядка. При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  исследовать с помощью теста Дарбина-Уотсона наличие автокорреляции между ошибками  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_{i-1}$ .

**Задача 2.** По статистическим данным за 20 лет построено уравнение регрессии между ценой бензина и объемом продаж бензина,  $d = DW = 0,71$ .

Задание: ответить на вопросы: будет ли иметь место автокорреляция остатков? Что могло послужить причиной автокорреляции?

### Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 9.

2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 10. (<http://znanium.com>)

3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 5. (<http://znanium.com>)

4. Практикум по эконометрике: учебное пособие / под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007.- Разделы 2,3.

5. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2008. – Гл. 3.

### **Тема 10. Фиктивные переменные (1 занятие)**

Практическое занятие проводится в интерактивной форме путем анализа конкретных ситуаций (кресельный кейс-метод), с использованием интерактивного планшета Symposium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: формирование умения получать оценки параметров эконометрической модели с качественными переменными и проверять их качество; проводить отбор факторов с целью улучшения спецификации модели; проводить отбор адекватной модели из возможных вариантов.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. Какие статистические данные называют неоднородными?
2. Когда применяются фиктивные переменные?
3. В чем преимущества фиктивных переменных?
4. Как фиктивные переменные включаются в модель регрессии?
5. В чем суть ANOVA-моделей?
6. В чем суть ANCOVA-моделей?
7. В чем состоит правило применения фиктивных переменных?
8. Какой смысл имеет дифференциальный свободный член?

9. Какой смысл имеет дифференциальный угловой коэффициент?
10. В чем особенность моделей с переменной структурой?
11. Какова идея теста Чоу?
12. Как сезонные переменные применяются для устранения сезонного фактора?

На втором этапе занятия преподаватель выполняет постановку основных вопросов получения оценок параметров эконометрической модели с качественными переменными и проверки их качества. Преподаватель распределяет студентов в три группы, выбирает лидера каждой группы (продолжительность решения задания 30 минут). Каждая группа студентов совместными парами выполняет одно из практических заданий №№ 1-3, используя пакет «Анализ данных» MS Excel. Роль преподавателя на данном этапе заключается в развитии аналитического мышления студентов, обеспечении системного подхода к решению проблемы.

**Задача 1\*.** На предприятии используются станки трех фирм (А, В, С). Исследуется надежность этих станков. При этом учитывается возраст станка ( $x$ , в месяцах) и время безаварийной работы до последней поломки ( $y$ , в часах). Выборка из 40 станков дала следующие результаты (табл.10.1):

Таблица 10.1

Фирма	А	В	С	А	С	А	В	С	В	А
$x$	23	30	65	69	75	63	25	75	75	52
$y$	280	230	112	176	90	176	216	110	45	200
Фирма	В	С	С	В	А	А	С	В	А	А
$x$	20	70	62	40	66	20	39	25	48	59
$y$	265	148	150	176	123	245	176	260	236	205

продолжение таблицы 10.1

Фирма	А	В	А	С	В	А	С	В	А	В
$x$	25	69	71	26	45	40	30	69	30	22
$y$	240	65	115	200	126	225	210	45	260	220
Фирма	В	С	А	В	А	С	В	А	В	А
$x$	33	48	75	21	56	58	50	37	56	67
$y$	194	156	100	240	170	116	120	240	88	120

Задание:

- 1) оценить уравнение регрессии  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  без учета различия станков разных фирм;
- 2) оценить уравнение регрессии, учитывающее различие качества станков разных фирм;
- 3) сделать вывод о необходимости использования фиктивных переменных в этом случае.

**Задача 2\*.** По данным о 20 рабочих цеха оценивается регрессия заработной платы рабочего за месяц  $y$  (\$) от возраста рабочего  $x$  (лет) и качественного фактора - пола рабочего (табл.10.2):

Таблица 10.2

Наблюдение	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$	29	40	36	32	23	45	38	40	50	47
$y$	300	400	300	320	200	350	350	400	380	400
пол	ж	м	ж	ж	м	м	ж	м	м	м
Наблюдение	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x$	28	30	25	48	30	40	40	38	29	25
$y$	250	350	200	400	220	320	390	360	260	250
пол	ж	м	м	м	ж	м	м	м	ж	м

Задание:

- 1) построить уравнение однофакторной регрессии без учета пола рабочего и оценить его качество, используя  $F$  – и  $t$  – статистики;
- 2) получить двухфакторное уравнение регрессии с фиктивной переменной, и также оценить его качество;
- 3) записать частные уравнения регрессии (отдельно для рабочих разных полов) и сделать выводы.

**Задача 3\*.** Производитель исследует эффективность лекарств ( $EF$ ) в зависимости от возраста пациентов ( $AG$ ), при этом он сравнивает эффективность трех видов лекарств (А,В,С). Имеются данные по 36 пациентам (табл. 10.3):

Таблица 10.3

Вид лекарств	С	А	В	А	В	В	А	С	С	А	С	А
AG	29	53	29	58	66	67	63	59	51	67	63	33
EF	36	69	47	73	64	60	62	71	62	70	71	52

Вид лекарств	А	В	С	В	С	А	С	В	В	А	С	С
AG	33	42	67	33	23	28	19	30	23	21	56	45
EF	63	48	71	46	25	55	28	40	41	56	62	50
Вид лекарств	В	А	С	В	С	А	В	В	С	А	А	В
AG	43	38	37	43	27	43	45	48	47	48	53	58
EF	45	58	46	58	34	65	55	57	59	64	61	62

Задание:

1) построить корреляционное поле для переменных AG и EF, изображая точки, соответствующие различным видам лекарств, разными символами;

2) оценить уравнение регрессии  $EF = \beta_0 + \beta_1 AG + \varepsilon$  и проверить его качество;

3) оценить уравнение регрессии  $EF = \beta_0 + \beta_1 AG + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \varepsilon$ , где  $D_1$  и  $D_2$  - фиктивные переменные, отражающие наличие лекарств трех видов. Проанализировать статистическую значимость его параметров. Построить уравнение регрессии только со значимыми факторами. Какой вывод Вы сделаете по эффективности различных видов лекарств?

4) построить и интерпретировать уравнение регрессии  $EF = \beta_0 + \beta_1 AG + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \lambda_1 AG \cdot D_1 + \lambda_2 AG \cdot D_2 + \varepsilon$ . Что выражается через произведения переменных?

5) обосновать, какая из моделей предпочтительнее для выражения исследуемой зависимости и почему?

На третьем этапе (продолжительность 40 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом обсуждения. Студенты сравнивают модели регрессии без качественных переменных с ANCOVA-моделями, обсуждают результаты выполнения теста Чоу, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Фиктивные переменные в регрессионных моделях. Правила использования фиктивных переменных.
2. ANOVA – модели и ANCOVA – модели.
3. Тест Чоу на наличие структурной перестройки.

Лидер, применяя уникальное сочетание компьютерных и традиционных методов организации учебной деятельности, на интерактивном планшете Symposium (ОС Windows) записывает полученные модели с характеристиками их качества и совместно со студентами формулирует выводы о целесообразности использования фиктивных переменных. В конце занятия преподаватель подводит итоги и оценивает каждого студента в зависимости от его участия в выполнении заданий и обсуждении вопросов.

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 4\*.** Рассматривая зависимость между доходом (X) и сбережениями (Y) за 20 лет, исследователь заметил, что на 12-м году наблюдений экономическая ситуация изменилась, что стимулировало население к большим сбережениям по сравнению с первым этапом рассматриваемого интервала. Использовались следующие статистические данные (табл. 10.4):

Таблица 10.4

Год	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
X	100	105	108	111	115	122	128	135	143	142
Y	4,7	6,1	6,5	6,8	5,2	6,5	7,5	8	9	9,1
Год	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
X	147	155	167	177	188	195	210	226	238	255
Y	8,7	12	16,2	18,5	18	17,6	20	23	22,5	24,3

Задание:

1) построить общее уравнение регрессии для всего интервала наблюдений, а также уравнение регрессии, учитывающее изменение ситуации в 1986 году. В последнем случае уравнение регрессии имеет вид:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \gamma_1 D_t + \gamma_2 D_t X_t + \varepsilon_t$$

Здесь фиктивная переменная  $D_t$  принимает значения 0 и 1 соответственно до и после изменения экономических условий. Коэффициенты при факторах, содержащих фиктивную переменную, называются соответственно дифференциальным свободным членом и дифференциальным угловым коэффициентом соответственно. Рассматриваемая зависимость фак-



тически разбивается на две части, связанные с периодами изменения рассматриваемого в модели качественного фактора;

2) проверить с помощью теса Чоу необходимость разбиения интервала наблюдений на два подинтервала и построения для каждого из них отдельного уравнения (принять уровень значимости 0,05).

**Задача 5.** Исследуется зависимость заработной платы  $Y$  от возраста рабочего  $X$  для мужчин и женщин. Оценивание объединенной регрессии ( $n = 20$ ) и отдельных регрессий для рабочих-мужчин ( $n_1 = 13$ ) и рабочих-женщин ( $n_2 = 7$ ) дали следующие результаты (табл. 10.5):

Таблица 10.5

Выборка	Оцененное уравнение	$R^2$	Сумма квадратов остатков
Объединенная	$\tilde{y} = 62,27 + 7,23x$	0,728	24888
Мужчины	$\tilde{y} = 55 + 7,39x$	0,735	18619
Женщины	$\tilde{y} = 59,43 + 7,3x$	0,712	5658

Задание: проверить на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  с использованием критерия Чоу, улучшилось ли качество регрессии после деления выборки на части.

**Задача 6.** При построении линейной зависимости расходов на одежду ( $Y$ ) от располагаемого дохода ( $X$ ) по выборке для 10 женщин получены следующие суммы квадратов:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 110, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1540, \sum_{i=1}^{10} y_i = 60, \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 448, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 828.$$

Аналогичные вычисления сумм по выборке из 5 мужчин дали:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 35, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 325, \sum_{i=1}^5 y_i = 15, \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 61, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 140.$$

По общей (объединенной) выборке оценена регрессия с использованием фиктивной переменной  $Z$  ( $Z = 1$  для мужчин и  $Z = 0$  для женщин), которая имеет вид:

$$\tilde{y} = -0,06 + 0,438x + 0,46Z.$$

Задание: проверить на уровне  $\alpha = 0,05$  с использованием теста Чоу гипотезу о том, что функция потребления одна и та же для мужчин и женщин.

### **Рекомендуемая литература**

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. –Гл. 11.
2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 8. (<http://znanium.com>)
3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 5. (<http://znanium.com>)
4. Практикум по эконометрике: учебное пособие / под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. - Разделы 2,3.
5. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2005. - Гл. 3.

## **Тема 11. Нелинейные регрессии и их линеаризация (1 занятие)**

### **Вопросы для обсуждения**

1. Классы и виды нелинейных регрессий. Индекс корреляции. Линеаризация нелинейных моделей.
2. Выбор формы модели. Подбор линеаризующего преобразования (подход Бокса-Кокса).
3. Применение моделей множественной регрессии в экономических исследованиях: потребительская функция, производственная функция Кобба–Дугласа, модель прибыли.

### **Контрольные вопросы**

1. В чем особенности классов и видов нелинейных регрессий?

2. Какие модели являются нелинейными относительно:  
а) включаемых переменных; б) оцениваемых параметров?

3. Какие преобразования используются для линеаризации нелинейных моделей?

4. Какой нелинейной функцией может быть заменена парабола второй степени, если не наблюдается смена направленности связи признаков?

5. Чем отличается применение МНК к моделям, нелинейным относительно включаемых переменных, от применения к моделям, нелинейным по оцениваемым параметрам?

6. Как определяются коэффициенты эластичности по разным видам регрессионных моделей?

7. Какие показатели корреляции используются при нелинейных соотношениях рассматриваемых признаков?

8. В чем смысл средней ошибки аппроксимации и как она определяется?

9. Каков смысл коэффициентов регрессии в логарифмических регрессионных моделях?

10. В каких случаях используют обратные и степенные модели?

11. Как интерпретируются коэффициенты регрессии в модели потребления?

12. Какой смысл приобретает сумма коэффициентов регрессии в производственных функциях и что означает, когда такая сумма коэффициентов регрессии больше единицы?

### **Практические задания**

**Задача 1.** Изучалась зависимость вида  $y = b_0 x^{b_1}$ . Для преобразованных в логарифмах переменных получены следующие данные:

$$\sum x'_i = 8,2370; \sum y'_i = 3,9310; \sum x'_i y'_i = 4,2087; \sum x'^2_i = 9,2334; n = 10.$$

Задание: определить параметры  $b_0, b_1$ .

**Задача 2.** Анализируется прибыль предприятия  $Y$  (млн. долл.) в зависимости от расходов на рекламу  $X$  (млн. долл.). По наблюдениям за 9 лет получены следующие данные (табл. 11.1):

Таблица 11.1

$Y$	5	7	13	15	20	25	22	20	17
$X$	0,8	1,0	1,8	2,5	4,0	5,7	7,5	8,3	8,8

Задание:

- 1) построить корреляционное поле и выдвинуть предположение о форме зависимости между рассматриваемыми показателями;
- 2) оценить по МНК коэффициенты линейной регрессии;
- 3) оценить качество построенной модели;
- 4) оценить по МНК коэффициенты квадратичной регрессии;
- 5) оценить качество построенной модели. Какую из моделей следует предпочесть?

**Задача 3.** Имеются следующие данные об уровне механизации работ  $x$  (%) и производительности труда  $y$  (тонн/чел.) для 14 однотипных предприятий (табл. 11.2):

Таблица 11.2

$x_i$	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
$y_i$	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Задание:

- 1) построить уравнение регрессии для характеристики зависимости  $y$  от  $x$  :
  - а) линейной;
  - б) степенной;
  - в) показательной;
  - г) равносторонней гиперболы;
  - д) экспоненциальное.

2) оценить каждую модель через среднюю относительную ошибку аппроксимации.

**Задача 4.** На основе данных (табл. 11.3) оценены параметры двух моделей:  $\tilde{y} = 15,65 \cdot (1,041)^x$ ;  $\tilde{y} = 10,93 \cdot x^{0,3436}$ .

Таблица 11.3

$y_i$	20	21	23	26	29
$x_i$	5	8	11	12	14

Задание: оценить при помощи средней относительной ошибки аппроксимации, какая модель лучше соответствует эмпирическим данным?

**Задача 5.** Для трех видов продукции А, В, С модель зависимости удельных постоянных расходов от объема выпускаемой продукции выглядит следующим образом:

$$y_A = 600;$$

$$y_B = 80 + 0,7x;$$

$$y_C = 40x^{0,5}.$$

Задание:

- 1) определить коэффициенты эластичности по каждому виду продукции;
- 2) сравнить при  $x = 1000$  эластичность затрат для продукции В и С;
- 3) определить, каким должен быть объем выпускаемой продукции, чтобы коэффициенты эластичности для продукции В и С были равны.

**Задача 6.** При исследовании спроса на телевизоры марки Т, аналитический отдел компании АВС по данным, собранным по 19 торговым точкам компании, выявил следующую зависимость:

$$\ln y = 10,5 - 0,8 \ln x + \varepsilon$$

$$(2,5) \quad (-4,0)$$

где:  $Y$  - объем продаж телевизоров в отдельной торговой точке,  $X$  - средняя цена телевизора в данной торговой точке. В скобках приведены фактические значения  $t$ -критерия. До проведения этого исследования администрация компании предполагала, что эластичность спроса по цене для телевизоров марки Т составляет  $\bar{\varepsilon} = -0,9$ .

Задание: проверить, подтвердилось ли предположение администрации результатами исследования?

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** По группе предприятий, производящих однородную продукцию известно, как зависит себестоимость единицы продукции ( $Y$ ) от факторов, приведенных в таблице (табл.11.4):

Таблица 11.4

Признак-фактор	Уравнение парной регрессии	Среднее значение фактора
Объем производства, $x_1$ , млн. руб.	$\tilde{y}_{x_1} = 0,62 + \frac{58,74}{x_1}$	$\bar{x}_1 = 2,64$
Трудоемкость единицы продукции, $x_2$ , чел/час	$\tilde{y}_{x_2} = 9,30 + 9,83x_2$	$\bar{x}_2 = 1,38$
Оптовая цена за 1т энергоносителя, $x_3$ , млн. руб.	$\tilde{y}_{x_3} = 11,45 + x_3^{1,6281}$	$\bar{x}_3 = 1,503$
Доля прибыли, изымаемая государством, $x_4$ , %	$\tilde{y}_{x_4} = 14,87 \cdot 1,016^{x_4}$	$\bar{x}_4 = 26,3$

Задание:

- 1) определить с помощью коэффициентов эластичности силу влияния каждого фактора на результат;
- 2) ранжировать факторы по силе влияния на результат.

**Задача 2.** По группе из 10 заводов, производящих однородную продукцию, получено уравнение регрессии себестоимости единицы продукции  $y$  (тыс. руб) от уровня технической оснащенности  $x$  (тыс. руб.)

$$\tilde{y} = 20 + \frac{700}{x}.$$

Доля остаточной дисперсии в общей составила 0,19.

Задание:

- 1) определить коэффициент эластичности, предполагая, что стоимость активных производственных фондов составляет 200 тыс. руб.;
- 2) вычислить индекс корреляции;
- 3) оценить значимость уравнения регрессии с помощью  $F$ -критерия.

**Задача 3.** Зависимость спроса  $Y$  на некоторый товар  $K$  от его цены  $x$  характеризуется по 20 наблюдениям уравнением  $\lg y = 1,75 - 0,31 \lg x$ . Доля остаточной дисперсии в общей составила 18%.

Задание:

- 1) записать уравнение в виде степенной функции;
- 2) оценить эластичность спроса на товар в зависимости от ее цены;
- 3) определить индекс корреляции;
- 4) оценить значимость уравнения регрессии.

**Задача 4.** Зависимость объема производства  $Y$  (тыс. ед.) от численности занятых  $X$  (чел.) по 15 заводам концерна характеризуется уравнением регрессии  $\tilde{y} = 30 - 0,4x + 0,04x^2$ . Доля остаточной дисперсии в общей составляет 20%.

Задание:

- 1) вычислить индекс корреляции.
- 2) оценить значимость уравнения регрессии.
- 3) определить коэффициент эластичности, предполагая, что численность занятых составляет 30 человек.

#### **Рекомендуемая литература**

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. –Гл. 7.

2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 4. (<http://znanium.com>)

3. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2008. - Гл. 2.

4. Эконометрика: учеб. / под ред. В. С. Мхитаряна.- М.: Проспект, 2008. - Гл. 7.

## **Тема 12. Модели с дискретной зависимой переменной (1 занятие)**

### **1 часть (40 минут)**

#### **Вопросы для обсуждения**

1. Модели бинарного выбора. Оценивание параметров моделей бинарного выбора.

2. Модели множественного выбора с неупорядоченными альтернативами.

3. Модели множественного выбора с упорядоченными альтернативами.

#### **Контрольные вопросы**

1. В каких ситуациях фиктивная переменная используется в качестве зависимой переменной?

2. Какие законы распределения чаще всего используются в моделях бинарного выбора?

2. В чем суть логит-модели?

3. В чем суть пробит –модели?

4. Какова интерпретация коэффициентов моделей бинарного выбора?

5. Как осуществляется проверка значимости коэффициентов в модели бинарного выбора?

6. Как получить прогноз вероятности по логит-модели?



7. Как получить прогноз вероятности по пробит-модели?
8. Можно ли рассчитать по логит-модели коэффициент детерминации?
9. Какие существуют варианты постановки моделей множественного выбора?
10. В чем отличие моделей упорядоченного и неупорядоченного выбора?

### Практические задания

**Задача 1.** Имеется набор данных, состоящий из 8 наблюдений (табл. 12.1):

Таблица 12.1

Y	0	0	1	0	1	1	1	0
X	2	1	5	0	4	2	3	3

Задание:

- 1) построить диаграмму рассеивания;
- 2) оценить линейную модель вероятности с помощью МНК и определить прогнозные значения;
- 3) использовать оцененную модель для разделения наблюдений на две группы. Сопоставить долю правильной классификации.
- 4) повторить пункты 2-4 для логит-модели;
- 5) оценить коэффициенты регрессии для пробит-модели и повторить для нее пункты 2-3.

**Задача 2.** Банк исследует вероятность невозвращения потребительского кредита ( $y=1$  – заемщик кредит возвращает,  $y=0$  – не возвращает), используя два фактора:  $x_1$  – сумма займа,  $x_2$  – среднемесячный доход заемщика. По логит-модели:

$$P_i = \frac{1}{1 + e^{-(5 - 0,6(x_1 / x_2))}}$$

оцените вероятность невозвращения кредита при покупке на сумму 40 тыс. руб. и доходе 10 тыс. руб.

Задание: повторить расчет при стоимости покупки в 50 тыс. руб. и доходе 5 тыс. руб. Дать рекомендацию банку о пороговом соотношении суммы займа и среднемесячного дохода, чтобы предсказанная по модели доля просроченных кредитов не превышала 5%.

**Задача 3\*.** Исследуется вопрос о наличии собственного дома ( $Y = 1$ , если дом имеется;  $Y = 0$ , если дома нет) в зависимости от совокупного дохода семьи ( $X$ ). Выборка из 40 семей дала следующие результаты (табл. 12.2):

Таблица 12.2

Семья	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X$	10	20	22	18	9	15	25	30	40	16
$Y$	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0

Семья	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$X$	12	8	20	19	30	50	37	28	45	38
$Y$	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1

Семья	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$X$	30	12	16	27	19	15	32	18	43	13
$Y$	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0

Семья	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$X$	22	14	10	17	36	45	14	22	41	34
$Y$	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1

Задание:

- 1) построить линейную вероятностную модель;
- 2) оценить качество построенной модели;
- 3) оценить вероятность того, что при доходе, равном 18, семья

имеет дом.

**2 часть (40 минут) – выполнение контрольной работы**

**Пример задания для контрольной работы**

1. Уравнение множественной регрессии в стандартизованном масштабе имеет вид  $\hat{t}_y = 0,431t_{x_1} + 0,653t_{x_2}$ . При этом значение  $r_{yx_2} = 0,812$ .

Задание: найти коэффициент детерминации в этой модели.

2. При значениях фактора, равных (7,2; 4,9; 4,6; 3,2; 5,2; 2,1), оцененное уравнение парной регрессии имеет соответственные остатки (0,15; -0,23; -0,22; 0,24; -0,19; 0,25).

Задание: проверить остатки регрессии на гетероскедастичность по тесту Спирмена на уровне 0,01?

3. По 22 наблюдениям получены следующие данные:

$$\hat{y} = a + 3,15x_1 - 0,73x_2 - 1,82x_3; \quad R^2 = 0,68; \quad \bar{y} = 40; \quad \bar{x}_1 = 60; \quad \bar{x}_2 = 60; \quad \bar{x}_3 = 90.$$

Задание: определить значения скорректированного коэффициента детерминации, частных коэффициентов эластичности и параметра  $a$ .

4. При построении регрессионной зависимости некоторого результативного признака на 7 факторов по 42 измерениям коэффициент детерминации составил 0,443. После добавления 3 факторов коэффициент детерминации увеличился до 0,536.

Задание: проверить, обоснованно ли было принятое решение на уровне значимости 0,05?

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1\*.** При найме на работу претендентам предлагается выполнить тестовое задание,  $X$ - стаж работы, мес.,  $Y$  – результаты теста (табл. 12.3).

Таблица 12.3

X	7	15	16	15	8	4	18	2	22	6	30	1
Y	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
X	30	5	20	13	9	32	4	13	9	4	28	22
Y	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1

Задание: проверить, зависит ли успешное выполнение теста от стажа работы, построить логит- и пробит-модели, оценить значимость уравнений на уровне значимости  $\alpha=0,05$  и ответить на вопросы:

1) чему равна вероятность успешного выполнения задания при стаже в 1 месяц, 5 месяцев, 15 месяцев?

2) на какую величину повышает вероятность выполнения задания каждый следующий месяц при стаже 1, 5, 15 месяцев?

**Задача 2.** В следующей таблице представлены данные о количестве семей ( $N$ ), имеющих определенный уровень дохода ( $X$ ), и количестве семей ( $n$ ), имеющих частные дома (табл. 12.4):

Таблица 12.4

$X$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$N$	35	45	60	80	100	130	90	65	50	30	15
$n$	5	10	18	30	45	60	55	45	38	24	13

Задание: Оценить logit-модель по МНК.

#### **Рекомендуемая литература**

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. –Гл. 11.
2. Эконометрика: учеб. / под ред. В. С. Мхитаряна.- М.: Проспект, 2008. - Гл. 8.

### **Тема 13. Модели панельных данных (1 занятие)**

#### **Вопросы для обсуждения**

1. Основные понятия и характеристики панельных данных.
2. Модель сквозной регрессии и модель регрессии со случайным индивидуальным эффектом.
3. Оценивание модели со случайным индивидуальным эффектом.

#### **Контрольные вопросы**

1. Какие данные называют панельными?
2. Что такое «ротационная» панель?
3. Назовите преимущества использования панельных данных.

4. Могут ли называться панельными данные, собранные в ходе двух независимых опросов?

5. Опишите оценивание параметров модели с фиксированными эффектами.

6. В чем отличия моделей с фиксированными и случайными эффектами для панельных данных?

7. Можно ли модель с фиксированными эффектами для панельных данных рассматривать как частный случай использования фиктивных переменных?

8. Охарактеризуйте роль инструментальных переменных в оценивании моделей по панельным данным.

9. Для проверки какой гипотезы применяется тест Хаусмана?

10. Как проверить значимость фиксированных эффектов и случайных эффектов?

11. Каковы достоинства и недостатки моделей фиксированных и случайных эффектов?

### Практические задания

**Задача 1\*.** Имеются данные о среднем времени в течение недели, потраченном на изучение университетского курса, и результатах экзаменационного тестирования (табл. 13.1)

Таблица 13.1

Сведения по студентам (панельные данные за два периода)

Студент	Семестр 1		Семестр 2	
	время	баллы	время	баллы
1	60	81	60	84
2	100	75	120	87
3	30	60	60	79
4	45	82	30	78

5	120	78	150	87
6	180	95	150	92
7	100	79	100	84
8	60	92	80	97
9	90	78	90	75
10	90	67	60	66

Задание:

1) построить регрессии:

- отдельно по первому семестру;
- отдельно по второму семестру;
- по объединению первого и второго семестров;
- по разности между первым и вторым семестрами с константой;
- по разности между первым и вторым семестрами без константы;

2) проанализировать различия в результатах первых трех и последних двух регрессий.

**Задача 2\*.** Задание: По данным таблицы 13.1 задачи 1:

1) оценить модели с фиксированными и случайными эффектами для индивидов;

2) провести тесты на наличие эффектов и на выполнение необходимого условия для оценки случайных эффектов;

3) проинтерпретировать полученные результаты.

**Задача 3\*.** Имеются данные о рыночной стоимости, обороте и прибыли по 5 фирмам за 4 года (табл. 13.2):

Таблица 13.2

Сведения по фирмам, млн. руб.

(пример панельных данных в составной форме)

Фирма	Год	Рыночная стоимость	Оборот	Прибыль

1	2009	496	2833	41
1	2010	625	2925	63
1	2011	958	4242	98
1	2012	1147	3594	143
2	2009	186	809	20
2	2010	275	727	29
2	2011	296	1002	35
2	2012	320	703	42
3	2009	387	724	67
3	2010	435	864	73
3	2011	580	1194	80
3	2012	593	1189	89
4	2009	215	1819	13
4	2010	240	2080	15
4	2011	300	2372	18
4	2012	243	2160	21
5	2009	404	2290	34
5	2010	429	2159	44
5	2011	513	2031	62
5	2012	557	2116	67

Задание:

- 1) построить регрессию прибыли по объединенной выборке;
- 2) оценить модели с фиксированными и случайными эффектами;
- 3) провести тесты на наличие эффектов и на выполнение необходимого условия для оценки случайных эффектов;
- 4) проинтерпретировать полученные результаты.

**Задача 4\*.** Задание: По данным таблицы 13.2 задачи 3:

1) применить выполнимый обобщенный метод наименьших квадратов и получить оценку случайных эффектов и оценки с учетом вариации в рамках объекта наблюдения и между объектами наблюдения;

2) сравнить полученные результаты, в чем причины различий?

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 5\*.** Отделу труда и заработной платы завода ОАО «Тяжмашстрой» было поручено провести исследование факторов, существенно влияющих на среднемесячный размер оплаты труда, выплачиваемой рабочим этого предприятия (Y, руб.). В результате исследования удалось выяснить, что такими факторами являются: процент перевыполнения месячного плана (X1,%), разряд рабочего (X2). На основании этого результата по данным четырех цехов была сформирована таблица 13.3.

Таблица 13.3

#### Сведения по заработной плате рабочих

№пп.	Y	X1	X2	№ пп.	Y	X1	X2
Первый цех				Третий цех			
1	22170	26,4	6	21	22520	13,4	10
2	21000	17,3	3	22	24190	29,7	10
3	23350	23,8	8	23	23130	21,6	6
4	22200	17,6	5	24	22780	25,1	7
5	21760	26,2	5	25	21320	14,1	2
6	21610	21,1	1	26	22790	24,1	6
7	21900	17,5	3	27	23330	10,5	9
8	21810	22,9	5	28	22050	22,1	2
9	21490	22,9	4	29	21670	17,0	2
10	22320	14,9	7	30	22070	20,5	2
Второй цех				Четвертый цех			
11	22180	19,6	3	31	21530	14,2	4



12	22100	22,8	2	32	22590	18,0	10
13	23380	27,8	6	33	22190	29,9	2
14	21800	14,0	4	34	21550	14,1	5
15	21220	11,4	2	35	21670	18,4	6
16	23000	16,0	9	36	22610	20,1	8
17	22170	28,8	1	37	23480	27,6	9
18	22490	16,8	5	38	22260	27,4	5
19	22190	11,8	6	39	22900	28,5	8
20	22360	18,6	5	40	23710	28,6	9

Задание:

- 1) построить модель с фиксированными эффектами с помощью фиктивных переменных;
- 2) построить модель со случайными эффектами;
- 3) выбрать из построенных моделей наиболее подходящую для аналитических целей.

#### **Рекомендуемая литература**

1. Практикум по эконометрике. учебное пособие / Под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007.- Раздел 7.
2. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2008. - Гл. 16.
3. Эконометрика: учеб. / под ред. В. С. Мхитаряна.- М.: Проспект, 2008. - Гл. 6.

#### **Тема 14. Ошибки спецификации (1 занятие)**

##### **Вопросы для обсуждения**

1. Спецификация модели.
2. Исключение существенных переменных и включение несущественных переменных.
3. Замещающие переменные.

## Контрольные вопросы

1. Что понимается под спецификацией модели?
2. Каковы основные виды ошибок спецификации?
3. Каковы признаки «хорошей» модели?
4. Какие методы применяются для подбора вида уравнения регрессии.
5. Во сколько раз число наблюдений должно превышать число рассчитываемых параметров при переменной  $x$ ?
6. Как можно обнаружить ошибки спецификации?
7. Можно ли обнаружить ошибки спецификации с помощью исследования остатков?
8. Каковы последствия исключения существенных переменных?
9. Каковы последствия включения несущественных переменных?
10. В чем состоит смысл замещающих переменных?
11. В чем суть теста Рамсея?
12. Как можно исправить ошибку спецификации?

## Практические задания

**Задача 1.** Известен вектор  $R_0$  коэффициентов парной корреляции объясняемой переменной  $Y$  с потенциальными объясняющими переменными  $x_1, x_2, \dots, x_7$ , а также матрица  $R_M$  межфакторной корреляции между потенциальными объясняющими переменными, рассчитанные на основе статистических данных по 25 предприятиям:

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,53 \\ -0,28 \\ 0,54 \\ -0,58 \\ 0,04 \\ 0,59 \end{pmatrix}, \quad R_M = \begin{pmatrix} 1 & 0,40 & 0,25 & 0,26 & -0,49 & 0,28 & 0,08 \\ 0,40 & 1 & 0,74 & 0,62 & -0,84 & 0,31 & 0,62 \\ 0,25 & 0,74 & 1 & 0,53 & -0,64 & 0,14 & 0,41 \\ 0,26 & 0,62 & 0,53 & 1 & -0,69 & 0,16 & 0,43 \\ -0,49 & -0,84 & -0,64 & -0,69 & 1 & -0,13 & -0,55 \\ 0,28 & 0,31 & 0,14 & 0,16 & -0,13 & 1 & -0,03 \\ 0,08 & 0,62 & 0,41 & 0,43 & -0,55 & -0,03 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание: определить при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , какие из предварительно отобранных переменных должны играть роль объясняющих переменных в линейной модели переменной  $Y$ .

**Задача 2.** Множество потенциальных объясняющих переменных для описания объясняемой переменной  $Y$  состоит из четырех факторов:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ . Матрица парных коэффициентов корреляции имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,4 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,4 & 0,2 & 1 & 0,8 \\ 0,6 & 0,6 & 0,3 & 0,8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание: выбрать оптимальную двухфакторную комбинацию потенциальных объясняющих переменных, руководствуясь уровнем коэффициента множественной корреляции.

**Задача 3.** Изменение спроса на некоторое благо ( $y$ ) домашних хозяйств определенной структуры можно объяснить с помощью цены этого блага ( $x_1$ ) и дохода домохозяйств ( $x_2$ ) (табл.14.1):

Таблица 14.1

$y$	31,4	30,4	32,1	31,0	30,5	29,8	31,1	31,7	30,7	29,7
$x_1$	4,1	4,2	4,0	4,6	4,0	5,0	3,9	4,4	4,5	4,8
$x_2$	1050	1010	1070	1060	1000	1040	1030	1080	1050	1020

Задание:

- 1) с помощью МНК оценить параметры линейного двухфакторного уравнения и интерпретировать оценки;
- 2) оценить дисперсию ошибки  $\sigma_\varepsilon^2$ ;
- 3) рассчитать оценку прогноза  $\tilde{y}$  при  $x_1 = 5,5$  и  $x_2 = 980$ ;

4) определить 95% доверительный интервал для полученной оценки прогноза.

### **Задания для самостоятельной работы**

**Задача 1.** При построении регрессионной зависимости некоторого результативного признака на 8 факторов по 25 измерениям коэффициент множественной детерминации составил 0,736. После исключения 3 факторов коэффициент детерминации уменьшился до 0,584.

Задание: проверить, обосновано ли было принятое решение на уровнях значимости 0,1; 0,05; 0,01?

**Задача 2.** При построении регрессионной зависимости некоторого результативного признака на 10 факторов по 45 наблюдениям коэффициент множественной детерминации составил 0,347. После добавления 3 факторов коэффициент детерминации увеличился до 0,536.

Задание: проверить, обосновано ли было принятое решение на уровнях значимости 0,1; 0,05; 0,01?

**Задача 3.** По 25 территориям страны изучается влияние климатических условий на урожайность зерновых  $y$  (ц/га). Для этого были отобраны две объясняющие переменные:

$x_1$  – количество осадков в период вегетации (мм);

$x_2$  – средняя температура воздуха (°C).

Матрица парных коэффициентов корреляции этих показателей имеет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & -0,5 \\ 0,6 & 1 & -0,9 \\ -0,5 & -0,9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание:

1) определить частные коэффициенты корреляции результата с каждым из факторов и сделать выводы;

2) какое уравнение лучше строить:

- парную линейную регрессию  $Y$  на  $x_1$ ;

- парную линейную регрессию  $Y$  на  $x_2$ ;

- множественную линейную регрессию?

3) построить уравнение регрессии в стандартизованном виде и сделать вывод.

### **Рекомендуемая литература**

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 6.

2. Практикум по эконометрике : учебное пособие / Под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. - Раздел 2.

3. Эконометрика: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2008. –Гл. 3.

## **Раздел 4. Временные ряды**

### **Тема 15. Модели одномерных временных рядов (1 занятие)**

Практическое занятие проводится в интерактивной форме путем анализа конкретных ситуаций (кресельный кейс-метод), с использованием интерактивного планшета Symposium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: обучение навыкам решения экономических задач с использованием эконометрических моделей временных рядов, применения программных продуктов для построения эконометрических моделей. Формирование умения получать оценки параметров эконометрической модели и проверять их качество; проводить отбор адекватной модели из возможных вариантов.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки

степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. В чем особенность временного ряда?
2. Каковы основные компоненты уровней временного ряда?
3. В чем состоит основная задача эконометрического исследования временного ряда?
4. Как определяется автокорреляция остатков во временных рядах?
5. Какие свойства имеет коэффициент автокорреляции?
6. Как определяется автокорреляционная функция?
7. Что такое коррелограмма? Что выявляют при помощи анализа коррелограммы?
8. Как сформулировать вывод о структуре временного ряда?
9. Какие методы применяются для выявления основной тенденции ряда?
10. В чем суть сглаживания временных рядов?
11. Что такое аналитическое выравнивание временного ряда?
12. Какие функции могут использоваться для построения тренда?
13. Какие этапы содержит процедура построения тренд-сезонных моделей временных рядов?
14. В чем отличие аддитивной и мультипликативной моделей временных рядов?
15. Чему равна сумма сезонных компонент в аддитивной модели временного ряда?
16. Как осуществляется прогнозирование на основе трендовой и тренд-сезонной моделей временных рядов?

На втором этапе занятия преподаватель объявляет группы из трех студентов для выполнения практических заданий и номера заданий для каждой группы студентов (не менее пяти заданий для решения в течение 45 минут). Каждая группа студентов совместно выполняет пять практических заданий из №№ 1-10. Роль преподавателя на данном этапе заключается в постоянном поддержании активного внутригруппового взаимодействия, снятии напряженности во взаимоотношениях между участниками, оперативном вмешательстве в случае возникновения непредвиденных трудностей, а также в целях пояснения новых положений учебной программы.

**Задача 1.** Администрация банка изучает динамику депозитов физических лиц за ряд лет (млн. долл.), которые представлены в следующей таблице (табл.15.1):

Таблица 15.1

$t$	1	2	3	4	5	6	7
$y_t$	2	6	7	3	10	12	13

Известно также, что  $\sum y_t^2 = 511$ .

Задание:

- 1) построить уравнение линейного тренда и дать интерпретацию его параметров.
- 2) определить коэффициент детерминации для линейного тренда.
- 3) администрация банка предполагает, что среднегодовой абсолютный прирост депозитов физических лиц составляет не менее 2,5 млн. долл. Подтверждается ли на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  это предположение результатами, которые приводятся?

**Задача 2.** Переменная  $y$  в семи последовательных годах принимала значения (табл.15.2):

Таблица 15.2

Год, $t$	1	2	3	4	5	6	7
----------	---	---	---	---	---	---	---

$y_t$	8	13	14	17	18	19	20
-------	---	----	----	----	----	----	----

Задание:

- 1) оценить модель тенденции в форме линейного тренда;
- 2) определить точечный прогноз переменной  $Y$  на период  $t = 10$ ;
- 3) построить интервальный прогноз при достоверности прогноза 0,9 и при условии, что случайные отклонения модели имеют нормальное распределение.

**Задача 3.** Изучается динамика потребления мяса в регионе. Для этого были собраны данные об объемах среднедушевого потребления мяса  $Y_t$  (кг) за 7 месяцев. Предварительная обработка данных путем логарифмирования привела к получению следующих результатов (табл.15.3):

Таблица 15.3

Месяц	1	2	3	4	5	6	7
$\ln y_t$	2,10	2,11	2,13	2,17	2,22	2,28	2,31

Задание: построить уравнение экспоненциального тренда и дать интерпретацию его параметров.

**Задача 4.** Переменная  $Y$  в семи последовательных периодах времени принимала следующие значения (табл.15.4):

Таблица 15.4

Год, $t$	1	2	3	4	5	6	7
$y_t$	10	15	20	28	42	60	80

По этим данным построен показательный тренд:  $\tilde{y} = 6,99 \cdot (1,43)^t$ .

Задание: построить точечный и интервальный прогнозы для переменной  $Y$  на период  $t = 8$  при достоверности прогноза  $\gamma = 0,95$ . Принять, что случайные отклонения от тренда имеют нормальное распределение.

**Задача 5.** Имеются данные об урожайности зерновых  $Y_t$  (ц/га) в хозяйствах области (табл.15.5):

Таблица 15.5



Год, $t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_t$	10,2	10,7	11,7	13,1	14,9	17,2	20,0	23,2

Задание:

- 1) обосновать выбор типа уравнения тренда;
- 2) рассчитать параметры уравнения тренда;
- 3) дать прогноз урожайности зерновых на следующий год.

**Задача 6.** Имеются поквартальные данные о выплате доходов компании акционерам в форме дивидендов за последние 4 года (усл. ед.) (табл. 15.6):

Таблица 15.6

Квартал	Год			
	1	2	3	4
I	40	60	50	30
II	50	80	70	50
III	60	100	80	60
IV	70	110	130	70

Задание:

- 1) построить график и по нему установить характер тренда, наличие сезонных колебаний;
- 2) построить модель регрессии с учетом сезонности, включающую наряду с фактором времени фиктивные переменные.

**Задача 7.** На основе квартальных данных получено уравнение множественной регрессии и  $RSS = 110,32$ ;  $ESS = 21,43$  ( $RSS$  - объясненная сумма квадратов,  $ESS$  - остаточная сумма квадратов). Для этой же модели были отдельно проведены регрессии на основе данных:

- 1-й квартал 2007 г. – 1-й квартал 2011 г.;
- 2-й квартал 2011 г. – 4-й квартал 2012 г.

Соответственно получены следующие значения сумм квадратов остатков  $ESS_1 = 12,25$  и  $ESS_2 = 2,32$ .

Задание: проверить, используя тест Чоу, гипотезу о том, что произошли структурные изменения на уровне  $\alpha = 0,05$ .

**Задача 8.** На основе поквартальных данных с 2007 по 2012 г. с помощью МНК получено следующее уравнение:

$$y_t = 1,12 - 0,0098x_{t1} - 5,62x_{t2} + 0,044x_{t3}$$

(2,14)    (0,0034)    (3,42)    (0,009)

, в скобках указаны стандартные ошибки,  $RSS = 110,32$ ,  $ESS = 21,43$ .

Задание:

- 1) проверить значимость каждого из параметров модели;
- 2) определить коэффициент детерминации;
- 3) протестировать значимость уравнения регрессии в целом;
- 4) когда в уравнение были добавлены три фиктивные переменные, соответствующие трем первым кварталам года, величина  $RSS$  выросла до 118,20. Проверить гипотезу о наличии сезонности на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ;

5) для той же исходной модели были отдельно проведены две регрессии на основе данных: 1-й квартал 2007 г. – 1-й квартал 2011 г. и 2-й квартал 2011 г. – 4-й квартал 2012 г. Соответственно получены следующие значения сумм квадратов остатков:  $ESS_1 = 12,25$ ,  $ESS_2 = 2,32$ . Проверить гипотезу о том, что между 1-м и 2-м кварталами 2011 г. произошли структурные изменения ( $\alpha = 0,05$ ).

**Задача 9.** Имеются данные об урожайности пшеницы  $y_t$  (ц/га) за 10 лет (табл. 15.7):

Таблица 15.7

Год, $t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_t$	16,3	20,2	17,1	7,7	15,3	16,3	19,9	14,4	18,7	20,7

Задание: выполнить аналитическое выравнивание ряда в виде линейного тренда.

**Задача 10.** Известны статистические данные расхода условного топлива на производство электроэнергии на электростанциях региона  $Y$  (г на 1 кВт.ч) (табл.15.8):

Таблица 15.8

Год	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
$y_t$	468	401	367	340	328	326	325

Задание: оценить параметры гиперболического уравнения тренда

$$y_t = \beta_0 + \frac{\beta_1}{t} + \varepsilon_t.$$

На третьем этапе (продолжительность 30 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом перекрестной сверки результатов выполнения заданий. Лидер, применяя уникальное сочетание компьютерных и традиционных методов организации учебной деятельности, на интерактивном планшете Sympodium (ОС Windows) демонстрирует аддитивную и мультипликативную модели временных рядов, используемых в решении заданий, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Понятие временного ряда и его основные компоненты. Сглаживание временных рядов.
2. Построение трендовых и тренд-сезонных моделей временных рядов.
3. Прогнозирование на основе трендовой и тренд-сезонной моделей временных рядов.

Совместно с преподавателем лидер руководит групповым обсуждением области применения формул и моделей одномерных временных рядов и интерпретацией результатов.

### **Задания для самостоятельной работы**

**Задача 1.** Имеются следующие данные об урожайности пшеницы  $Y$  за 12 лет (табл.15.7):

Таблица 15.7

$y_t$	16,3	20,2	17,1	9,7	15,3	16,3	19,9	14,4	18,7	20,7	19,5	21,1
$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Задание:

1) определить среднее значение, среднее квадратическое отклонение и коэффициенты автокорреляции (для лагов  $\tau = 1, 2$ ) временного ряда;

2) провести сглаживание исходного временного ряда методом скользящих средних, используя среднюю арифметическую с интервалом сглаживания:

а)  $m = 3$ ;

б)  $m = 4$ ;

3) записать уравнение тренда ряда, полагая, что он линейный, и проверить его значимость на уровне  $\alpha = 0,05$ .

**Задача 3.** Данные, отражающие динамику роста доходов  $Y_t$  на душу населения за восемь лет, приведены в таблице (табл.15.8):

Таблица 15.8

Год, $t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_t$	1130	1220	1350	1390	1340	1380	1490	1680

Задание: определить точечный прогноз дохода населения по линейному тренду на 9 год.

**Задача 5.** Имеются данные о розничном товарообороте региона (усл. ед.) за 10 лет (табл.15.9):

Таблица 15.9

Год, $t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Товарооборот	11	13	22	18	20	19	25	23	24	35

Задание: построить линейную, степенную, логарифмическую и экспоненциальную модель тренда временного ряда.

### Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006. – Гл. 12.
2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 9. (<http://znanium.com>)
3. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 5. (<http://znanium.com>)
4. Практикум по эконометрике: учебное пособие / Под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007.- Разделы 5,6.
5. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. -М.: Финансы и статистика, 2008. – Гл. 6.

## **Тема 16. Адаптивные модели временных рядов (1 занятие)**

### **Вопросы для обсуждения**

1. Адаптация в моделях временных рядов. Построение адаптивных моделей линейного роста.
2. Адаптивные модели с учетом аддитивных и мультипликативных сезонных составляющих.
3. Процедуры подбора параметров адаптивных моделей временных рядов.

### **Контрольные вопросы**

1. В чем заключаются сущность, механизмы и формы адаптации в социально-экономических системах?
2. Как рассчитывается коэффициент адаптированности социально-экономического объекта?
3. В чем заключается специфика экспоненциального сглаживания?
4. Как идея экспоненциального сглаживания реализуется при по-

строении функции потребления Кейнса?

5. В чем состоит особенность модели с мультипликативным коэффициентом сезонности?

6. Какова особенность модели с аддитивным коэффициентом сезонности?

7. Как оценивается коэффициент сезонности для модели, учитывающей тенденцию линейного роста?

8. Какие модели включает группа адаптивных моделей с сезонными составляющими?

9. Какие особенности включает процедур подбора сглаживающего параметра методом проб?

10. В чем заключаются особенности процедуры подбора сглаживающего параметра методом градиентной оптимизации?

### Практические задания

**Задача 1.** Имеются данные о ежемесячном спросе на бензин за 54 месяца ( табл. 16.1):

Таблица 16.1

Ежемесячный спрос на бензин (тыс. баррелей/день)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Yt	82,3	83,6	85,5	91,0	92,1	95,8	98,3	102,2	101,5	98,5	101,1	102,5
t	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Yt	102,7	102,2	104,7	108,9	112,2	109,7	113,5	120,4	124,6	116,7	120,6	124,9
t	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Yt	122,2	121,4	125,6	129,7	133,6	137,5	143,0	149,0	149,9	139,5	147,7	154,7
t	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
Yt	145,8	144,4	154,2	148,6	153,7	157,9	169,7	184,2	163,2	155,4	168,9	178,3
t	49	50	51	52	53	54						
Yt	170,0	176,3	174,2	176,1	185,3	182,7						

Задание: определить текущие значения предиктора Хольта для расчета прогнозных оценок спроса на бензин в ближайшие три месяца.

**Задача 2.** Задание: используя данные таблицы 16.1 из задачи 1, определить оптимальные значения параметров сглаживания и прогнозные расчеты спроса на бензин на три периода.

**Задача 3.** Задание: используя данные таблицы 16.1 из задачи 1, определить экспоненциальные средние первого и второго порядка и коэффициенты адаптивного полинома Брауна.

**Задача 4.** Задание: используя результаты расчетов в задании 3 определить экспоненциальные средние первого и второго порядка и коэффициенты адаптивного полинома Брауна при оптимальном значении «альфа».

**Задача 5.** Задание: используя данные таблицы 16.1 из задачи 1, постройте обобщенную модель Брауна на основе полиномов Лагерра.

**Задания для самостоятельной работы**

**Задача 1.** Имеются данные о потреблении мороженого (табл. 16.2).

Таблица 16.2

Потребление мороженого (тыс. руб.)

Сезон	Год				
	2008	2009	2010	2011	2012
Зима	253,1	265,5	277,9	290,3	301,3
Весна	331,2	343,6	356,0	368,4	375,4
Лето	364,3	376,7	389,1	401,5	412,4
Осень	292,4	304,8	317,2	343,2	337,5

Задание: пользуясь данными таблицы 16.2, постройте адаптивную модель с линейным трендом и аддитивной сезонной компонентой для прогнозирования потребления мороженого.

**Задача 2.** Имеются данные о пассажиропотоке Юго-Восточной железной дороги (табл. 16.3).

Таблица 16.3

Пассажиропоток Юго-Восточной железной дороги (чел.)

Сезон	Год
-------	-----

	2008	2009	2010	2011	2012
Январь-февраль	118035	122116	126903	128345	129904
Март-апрель	115420	117263	121718	123658	125567
Май-июнь	121322	124065	129541	131421	132892
Июль-август	303243	308813	312976	314306	325687
Сентябрь-октябрь	139395	142063	146235	148035	152004
Ноябрь-декабрь	82117	83926	85082	88123	89223

Задание: пользуясь данными таблицы 16.3, постройте адаптивную модель с линейным трендом и мультипликативной сезонной компонентой для прогнозирования пассажиропотока.

### **Рекомендуемая литература**

1. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: Практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 14. (<http://znanium.com>)

## **Тема 17. Модели стационарных и нестационарных временных рядов (самостоятельное изучение)**

### **Вопросы для изучения**

1. Модели стационарных и нестационарных временных рядов, их идентификация.
2. Модель авторегрессии–скользящего среднего (модель ARMA).
3. Авторегрессионная модель проинтегрированного скользящего среднего (модель ARIMA).

### **Контрольные вопросы**

1. Какая модель временного ряда называется статической?
2. Когда модель временного ряда называется динамической?
3. Какие типы динамических моделей различают?
4. Как определяются модели с распределенными лагами?



5. Как интерпретируют параметры модели с распределенным лагом?
6. Как определяются авторегрессионные модели?
7. Как определяется модель ARMA?
8. Как интерпретируют параметры моделей авторегрессии?
9. Что означает стационарность временного ряда?
10. Какой стационарный процесс называется «белым шумом»?
11. Какие типы включают модели стационарных временных рядов?
12. Какие типы включают модели нестационарных временных рядов?
13. Как определяется ARIMA-модель?

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** Имеются еженедельные данные о цене фьючерсов по акциям ОАО «Сбербанк» с 07.01.2013 г. по 23.09.2013 г. ( $Y$  – цена акции,  $X$  – номер дня), представленные в таблице:

X	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
Y	30,604	30,539	30,270	30,082	30,339	30,259	30,521	30,772	30,732	31,142	31,290
X	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147
Y	31,500	31,908	31,433	31,951	31,526	31,319	31,562	31,589	31,444	32,044	32,218
X	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224
Y	32,255	33,274	33,292	33,721	32,989	32,644	33,057	33,077	33,073	33,076	33,145
X	231	238	245	252	259						
Y	33,388	33,316	32,992	32,303	32,319						

Задание: построить ARMA и ARIMA модели регрессии с целью определения примерной цены фьючерса в три предстоящие недели.

**Задача 2.** Имеются еженедельные данные об индексе РТС с 07.01.2013 г. по 23.09.2013 г. ( $Y$  – величина индекса,  $X$  – номер дня), представленные в таблице:

X	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
Y	157,02	160,18	162,02	163,53	158,65	156,55	154,95	151,52	153,32	149,14	142,33
X	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147
Y	141,2	138,3	137,54	130,50	134,89	140,72	141,27	140,49	139,22	130,43	130,08
X	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224
Y	126,87	125,02	125,83	126,20	133,79	137,76	135,01	133,5	132,22	131,4	133,45
X	231	238	245	252	259						
Y	128,45	135,32	140,03	145,70	144,58						

Задание: построить ARMA и ARIMA модели регрессии с целью определения примерной величины индекса в три предстоящие недели.

### Решение типовой задачи на компьютере

**Задача 1.** Имеются еженедельные данные о добыче нефти (Y – добыча нефти, X – номер дня), представленные в таблице:

X	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
Y	77,8	77,1	78,9	79,1	82,7	84,1	84,3	88,0	86,7	86,4	84,6
X	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147
Y	84,6	84,8	83,7	83,6	83,5	83,2	82,8	82,7	83,4	82,7	83,2
X	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224
Y	85,4	85,6	86,2	87,4	87,9	88,3	89,2	89,2	88,9	88,7	89,0
X	231	238	245	252	259	266	273	280	287	294	301
Y	89,6	88,3	88,8	89,1	90,0	92,6	94,3	95,3	98,3	100,1	105,2
X	308	315	322	329	336	343	350	357	364	371	378
Y	107,3	112,8	113,1	113,9	117,1	121,6	120,3	119,8	120,7	124,5	124,6

Задание: получить прогнозную оценку добычи нефти на три предстоящих периода на основе ARMA и ARIMA моделей регрессии.

Решение: Для построения ARMA и ARIMA моделей регрессии используем пакет программ Gretl. Ссылка для скачивания: <http://freesoft.ru/?id=705414>. Решение задачи осуществим в ряд этапов.

## Построение ARIMA-модели.

1. Импорт данных из таблицы Excel: Файл/Открыть/Импорт/Excel/Занятие11.xls/oil (распознать данные как еженедельный временной ряд). Начало: 26.12.2003. Выполняем визуальный анализ графика временного ряда и коррелограммы.

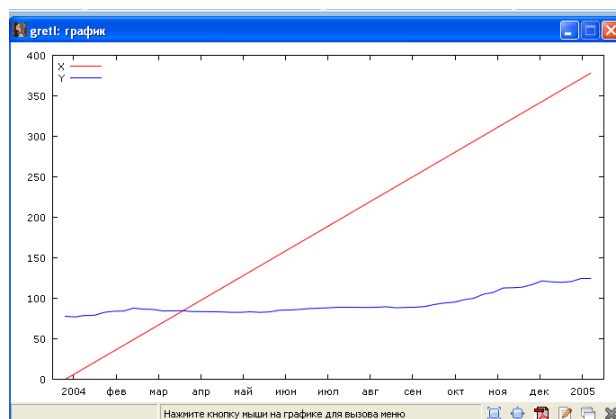


Рис. 17.1. Динамика добычи нефти

Отчетливо виден тренд, на который накладываются случайные колебания.

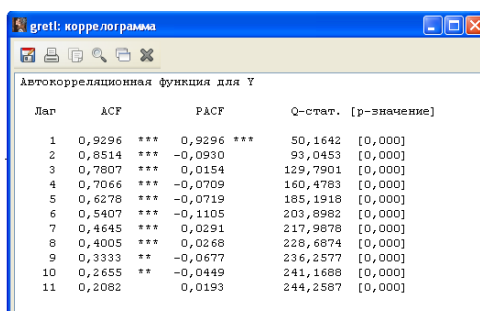


Рис.17. 2. Результат автокорреляционной функции для зависимой переменной

Имеется ACF с 10 значимыми коэффициентами. Медленное спадание ACF связано с наличием тренда. PACF имеет один значимый коэффициент. Приемлемы: ARIMA (1,1,0), ARIMA (0,1,1). Построим модель: Модель/Временной ряд/ ARIMA/

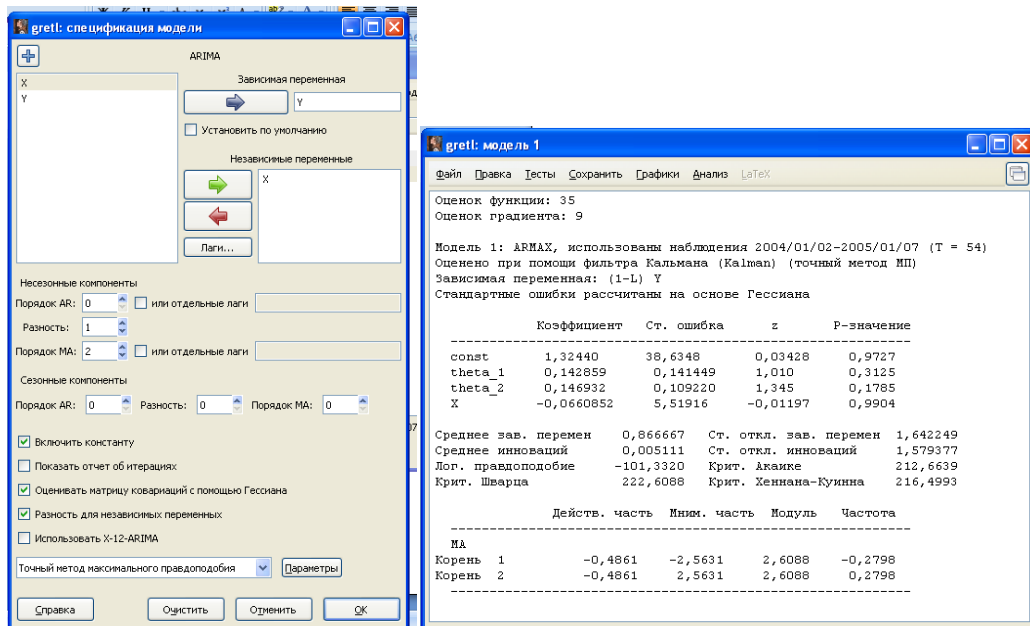


Рис. 17. 3. Диалоговое окно и результат спецификации модели ARIMA. Часто выбирают  $d, p, q = 0, 1, 2$ .

Строим прогноз на 4 недели вперед.

Предварительно: Выделить переменную X. Изменить значения /Добавить наблюдения.

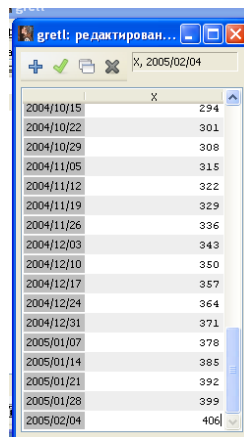
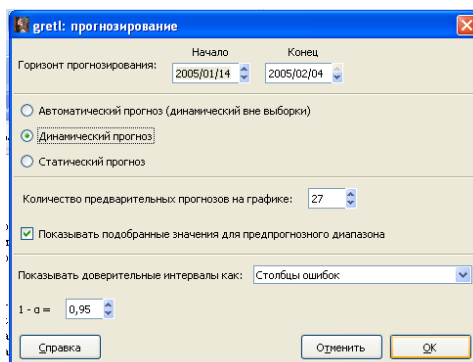


Рис. 17.4. Окно редактирования независимой переменной

В окне модели: Анализ/ Прогнозы/



2004/09/17	92,6	90,8		
2004/09/24	94,3	93,7		
2004/10/01	95,3	95,5		
2004/10/08	98,3	96,2		
2004/10/15	100,1	99,4		
2004/10/22	105,2	101,4		
2004/10/29	107,3	106,7		
2004/11/05	112,8	108,8		
2004/11/12	113,1	114,3		
2004/11/19	113,9	114,4		
2004/11/26	117,1	114,5		
2004/12/03	121,6	118,3		
2004/12/10	120,3	123,3		
2004/12/17	119,8	121,2		
2004/12/24	120,7	120,0		
2004/12/31	124,5	121,5		
2005/01/07	124,6	125,9		
2005/01/14	100,7	1,58	97,6 -	103,8
2005/01/21	76,0	2,40	71,3 -	80,7
2005/01/28	50,9	3,15	44,8 -	57,1
2005/02/04	25,4	3,75	16,1 -	32,8

Рис. 17.5. Диалоговое окно и результат прогнозирования зависимой переменной

### Построение ARMA-модели

1. Импорт данных из таблицы Excel: Файл/Открыть/Импорт/Excel/Занятие11.xls/oil (распознать данные как месячный временной ряд). Выполняем визуальный анализ графика временного ряда и коррелограммы.

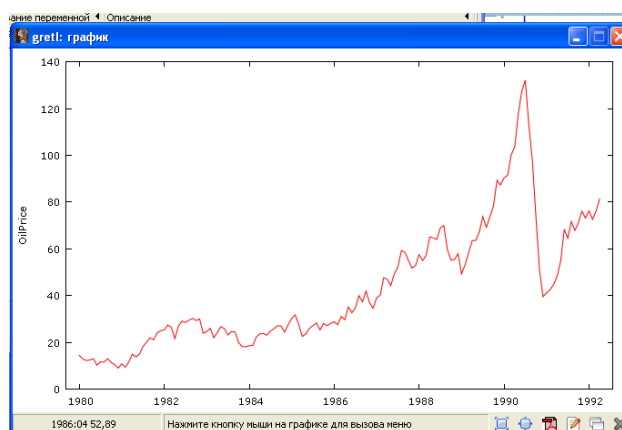


Рис. 17.6. Динамика добычи нефти

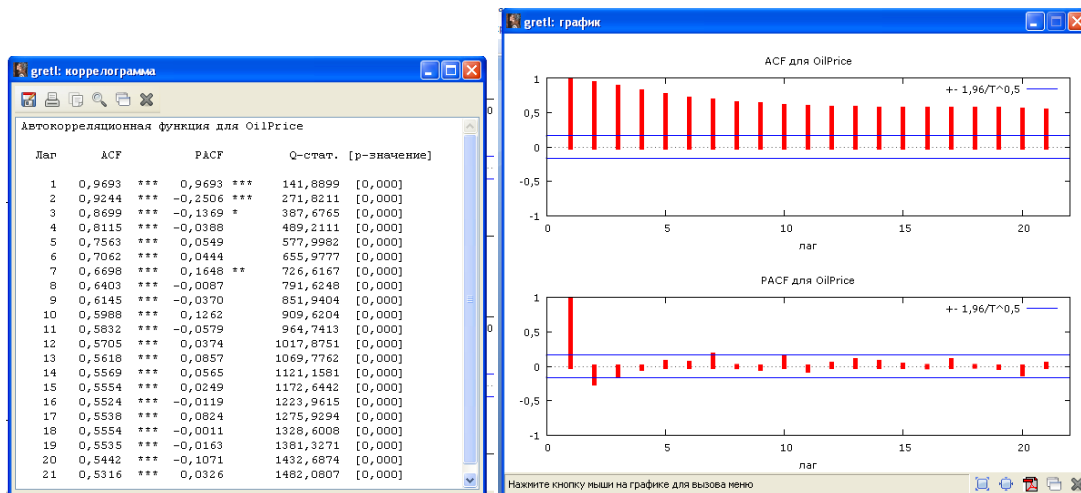


Рис. 17.7. Окно с результатом автокорреляционной функции и коррелограмма

Исходя из описания в табл 6. 1 [Куфель Т., С. 103] по ACF и PACF наблюдается авторегрессионный процесс 1 порядка. ACF монотонно убывает, PACF – конечная, с обрывом после 1 периода.

2. Построение ARMA модели: Модель/ Временной ряд/ ARIMA/ Разность=0 / устанавливаем требуемый порядок. Порядок AR, Порядок MA путем перебора по обоим от 0 до 2.

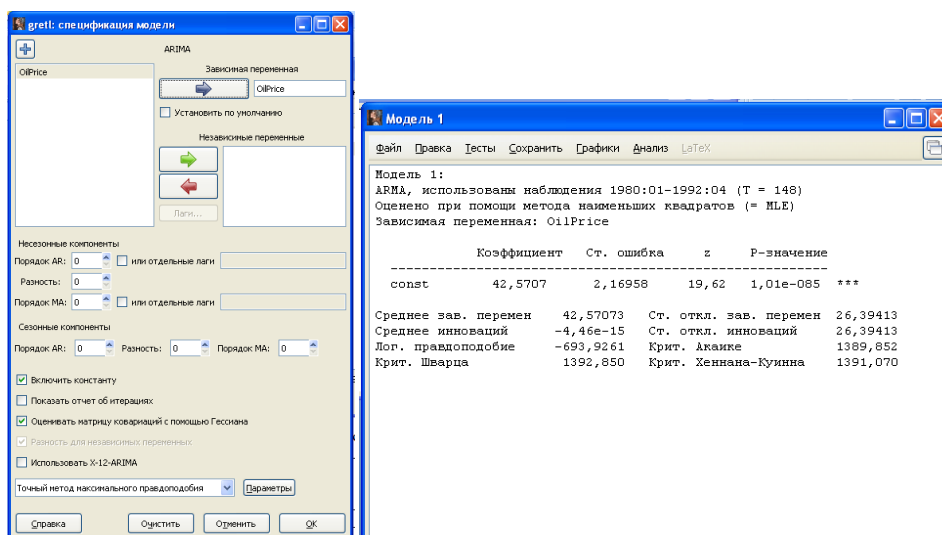


Рис. 17.8. Диалоговое окно и результат спецификации модели ARMA

Выбираем лучшую модель по минимуму информационных критериев Акаике, Шварца.

Результаты оформляем в виде таблицы:

p	q	Критерий Акаике	Критерий Шварца
0	0	1389	1391
1	1	900	912
2	2	890	908

### 3. Построение модели авторегрессии при лагах 1,2,7.

Поставить флажок в строку «Отдельные лаги» и прописать их через пробел.

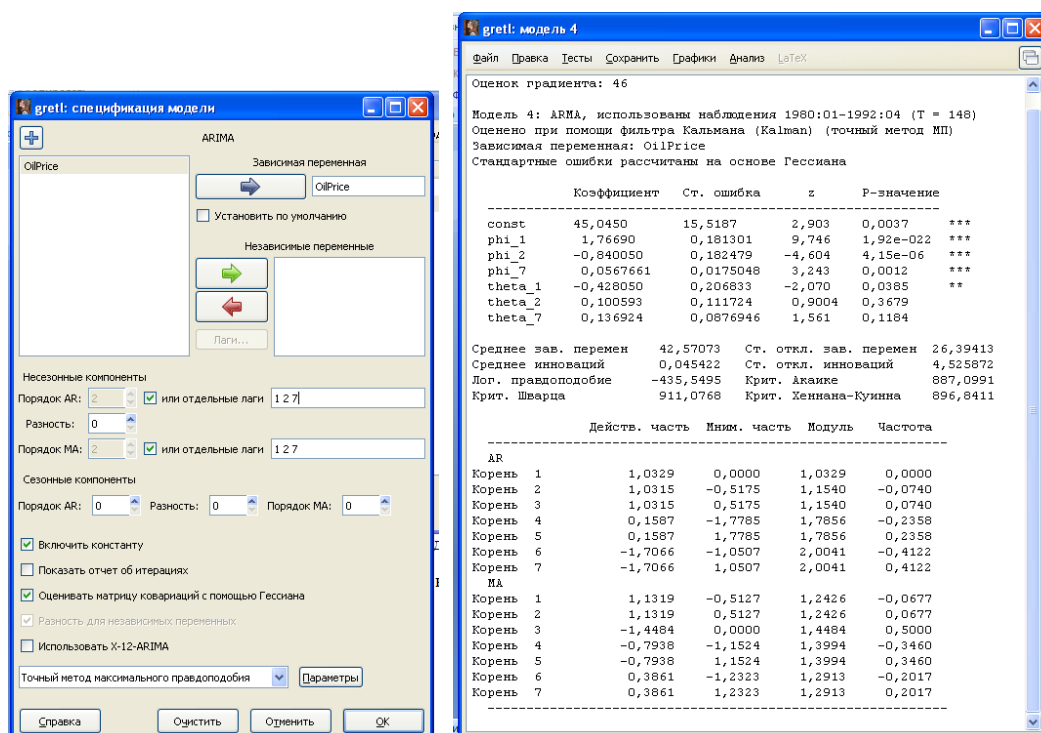


Рис. 17.9. Диалоговое окно и результат спецификации модели ARMA при заданных лагах

Если точный метод максимального правдоподобия не дает результатов (не может найти гессииан), то переходим к условному методу.

4. Строим прогноз на три периода вперед. Это динамический прогноз, поскольку в нем участвуют лаговые переменные.

В окне модели: Анализ/ Прогнозы/ Добавить 3 наблюдения.

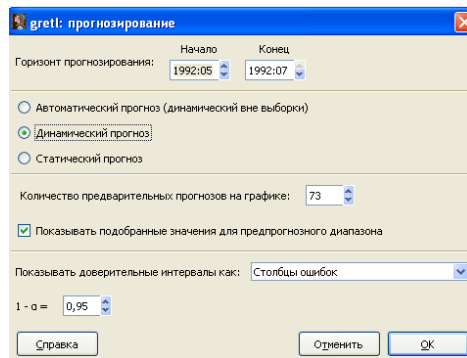


Рис. 17.10. Диалоговое окно прогнозирования зависимой переменной

1990:11	51,200	59,981		
1990:12	39,550	40,138		
1991:01	41,140	34,881		
1991:02	42,560	45,171		
1991:03	44,760	46,850		
1991:04	48,330	49,464		
1991:05	54,790	51,356		
1991:06	68,320	57,067		
1991:07	64,500	73,120		
1991:08	71,700	65,325		
1991:09	67,820	71,704		
1991:10	71,260	64,896		
1991:11	76,080	69,149		
1991:12	73,120	76,555		
1992:01	76,250	73,610		
1992:02	72,580	75,045		
1992:03	76,190	71,190		
1992:04	81,290	75,317		
1992:05		82,229	4,5259	74,358 - 92,099
1992:06		85,376	7,5631	70,552 - 100,199
1992:07		85,353	10,5531	64,669 - 106,036

Рис. 17.11. Окно с прогнозными оценками зависимой переменной

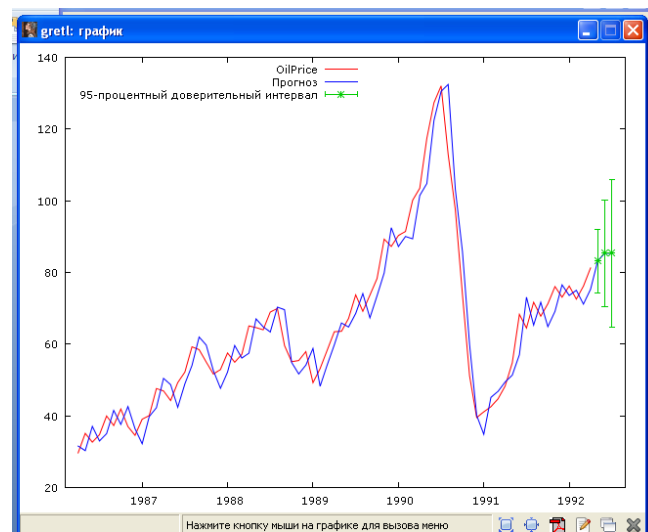


Рис. 17.12. График фактических значений и прогнозных оценок зависимой переменной с указанием доверительного интервала

### Рекомендуемая литература

1. Елисеева И.И. Эконометрика: Учебник. – М.: Проспект, 2010. – Гл. 8.
2. Мхитарян В.С., Архипова М.Ю., Балаш В.А., Балаш О.С., Дуброва Т.А., Сиратин В.П. Эконометрика: Учебник. – М.: Проспект, 2008. – Гл. 10.



3. Тихомиров Н. П., Дорохина Е.Ю. Эконометрика: Учебник. Изд-во «Экзамен», 2003. – Гл. 6.

4. Куфель Т. Эконометрика. Решение задач с применением пакета программ Gretl: пер. с польск. И. Д. Рудинского. –М.: Горячая линия - Телеком, 2007. -200 с. ил.

### **Тема 18. Модели с лаговыми переменными (занятие в интерактивной форме)**

Практическое занятие проводится в интерактивной форме путем анализа конкретных ситуаций (кресельный кейс-метод), с использованием интерактивного планшета Sympodium (ОС Windows), интерактивного тестирования в программе My Test.

Цель: обучение навыкам эконометрического моделирования динамических процессов, применения программных продуктов для построения эконометрических моделей. Формирование умения получать оценки параметров эконометрической модели и проверять их качество; проводить отбор адекватной модели из возможных вариантов.

На первом этапе занятия каждый студент выполняет интерактивный тест в программе My Test продолжительностью 10 минут для проверки степени подготовленности к занятию. Роль преподавателя на данном этапе заключается в использовании индивидуальных тестовых заданий самодиагностического характера для выявления индивидуальных способностей каждого студента. Для подготовки к тестированию студентам необходимо использовать контрольные вопросы:

1. Какая модель временного ряда называется статической?
2. Какая модель временного ряда называется динамической?
3. Какие типы включают динамические модели?
4. Как определяются модели с распределенными лагами?
5. Как интерпретируют параметры модели с распределенным лагом?

6. Как определяются авторегрессионные модели?
7. Как интерпретируют параметры моделей авторегрессии?
8. В чем состоят особенности динамических моделей первого типа?
9. Как оценить параметры моделей с распределенным лагом?
10. Что такое структура лага?
11. В чем основная идея метода Алмон и к каким моделям он применяется?
12. Когда применяется преобразование Койка?
13. Как оценить параметры моделей авторегрессии?
14. В чем суть метода инструментальных переменных?
15. Для чего применяется модель адаптивных ожиданий?
16. Для чего применяется модель частичной корректировки?

На втором этапе занятия преподаватель выполняет постановку основных вопросов проверки соблюдения предпосылок МНК и улучшения спецификации модели. Преподаватель распределяет студентов в три группы, выбирает лидера каждой группы (продолжительность решения задания 30 минут). Каждая группа студентов совместными парами выполняет одно из практических заданий №№ 1-3. Роль преподавателя на данном этапе заключается в развитии аналитического мышления студентов, обеспечении системного подхода к решению проблемы.

**Задача 1.** Динамика оборота розничной торговли  $y_t$  (% к предыдущему году) и потребительских цен  $x_t$  (% к предыдущему году) региона за 2011 -2012 гг. представлена в следующей таблице (табл.18.1):

Таблица 18.1

Год	2011											
Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y_t$	70,8	98,7	97,9	99,6	96,1	103,4	95,5	102,9	77,6	102,3	102,9	123,1
$x_t$	101,7	101,1	100,4	100,1	100,0	100,1	100,0	105,8	145,0	99,8	102,7	109,4
Год	2012											
Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y_t$	74,3	92,9	106,0	99,8	105,2	99,7	99,7	107,9	98,8	104,6	106,4	122,7

$x_t$	110,0	106,4	103,2	103,2	102,9	100,8	101,6	101,5	101,4	101,7	101,7	101,2
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Задание:

- 1) оценить параметры модели с распределенным лагом с длиной лага не более 4, используя метод Койка,;
- 2) оценить параметры модели с распределенным лагом с длиной лага не более 4 и степени аппроксимирующего полинома не более 3, используя метод Алмон,;
- 3) сравнить результаты, полученные в п. 1 и 2.

**Задача 2.** Имеются данные об объеме валового внутреннего продукта  $y$  некоторой страны в зависимости от инвестиций  $x$  в ее экономику за 20 лет (табл. 18.2):

Таблица 18.2

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_t$	193	197	202	213	222	234	247	262	269	280
$x_t$	30	29	29	32	34	37	41	44	42	44

$t$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y_t$	287	287	296	310	326	325	322	338	353	370
$x_t$	46	43	48	53	59	54	44	52	60	66

Задание: построить модель Алмон для лага  $l=3$  в предположении, что структура лага описывается полиномом второй степени. Найти краткосрочный и долгосрочный мультипликатор и дать их интерпретацию.

**Задача 3.** Приводятся следующие данные о среднемушевом доходе  $x$  и среднемушевых расходах на конечное потребление  $y$  за последние 30 лет (в усл. ед.) (табл.18.3):

Таблица 18.3

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_t$	67	67	69	71	74	77	80	82	85	87
$x_t$	73	74	76	77	81	85	88	91	94	96
$t$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y_t$	88	90	94	97	96	97	101	104	107	108

$x_t$	99	101	104	110	108	108	112	114	118	120
$t$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$y_t$	107	108	108	112	116	120	123	126	129	130
$x_t$	120	121	121	123	130	133	135	136	139	140

Задание:

1) построить по этим данным авторегрессионную модель с распределенным лагом порядков (0,1) обычным МНК;

2) построить эту же модель с использованием инструментальных переменных, используя оценку уравнения регрессии  $\hat{y}_{t-1} = \gamma_0 + \gamma_1 x_{t-1}$  (также МНК);

3) проверить гипотезу о наличии автокорреляции в модели, полученной методом инструментальных переменных, используя  $h$  - критерий Дарбина.

На третьем этапе (продолжительность 40 минут) преподаватель назначает лидера для руководства ходом обсуждения результатов выполнения заданий. Студенты под руководством лидера в ходе обсуждения сравнивают результаты моделей с лаговыми переменными, полученные методом Алмон и методом Койка, путем использования инструментальных переменных, концентрируя внимание на следующих вопросах:

1. Статические и динамические модели.

2. Авторегрессионные модели, модели с распределенным лагом и комбинированные модели.

3. Модель частичной корректировки и модель адаптивных ожиданий.

Лидер на интерактивном планшете Symposium (ОС Windows) по результатам применения метода Алмон и метода Койка делает выводы о наилучшей модели. В конце занятия преподаватель подводит итоги и оце-

нивает каждого студента в зависимости от его участия в выполнении заданий и обсуждении вопросов.

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** Задание: оценить параметры авторегрессии второго порядка  $y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$  по следующим наблюдениям (табл.18.4):

Таблица 18.4

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$y_t$	0,1	-2,5	-4	2,5	-0,2	-2,7	0,1	0,9	3,1	-0,5	1,8	0,5	1,9

**Задача 2.** Модель зависимости объемов продаж компании в среднем за месяц от расходов на рекламу была следующая (млн. руб):

$$\tilde{y}_t = -0,73 + 4,3x_t + 3,5x_{t-1} + 1,2x_{t-2} + 0,8x_{t-3} .$$

Задание: найти краткосрочный, долгосрочный мультипликатор и средний лаг.

**Задача 3.** Дана таблица следующих данных (табл.18.5):

Таблица 18.5

Момент времени	$t-3$	$t-2$	$t-1$	$t$	$t+1$
$x^*$	80				
$x$	90	95	110	120	-

Здесь  $x^*$ ,  $x$  - ожидаемый и действительный спрос на некоторый товар соответственно.

Задание: в соответствии с моделью адаптивных ожиданий

$$x_t^* = \lambda x_{t-1} + (1-\lambda)x_{t-1}^* , \text{ где } \lambda = 0,40 \text{ найти остальные значения } x^* .$$

**Задача 4.** На основе поквартальных данных получено следующее уравнение регрессии, характеризующее спрос на труд:

$$\Delta \tilde{E}_t = 14,22 + 0,172 Q_t - 0,028 t - 0,0007 t^2 - 0,297 E_{t-1}$$

(2,61)
(0,014)
(0,015)
90,0002
(2,61)

где  $\Delta E_t = E_t - E_{t-1}$ ;  $E_t$  - уровень занятости;  $Q_t$  - объем выпуска продукции;  $t$  - время. Предполагается, что механизм формирования ожидаемого уровня занятости  $E_t^*$  определяется соотношением  $E_t - E_{t-1} = \gamma(E_t^* - E_{t-1})$  ( $0 < \gamma < 1$ ).

Задание: получить модель неполной корректировки (оценку зависимости желательного уровня значимости  $E_t^*$  от переменных модели  $Q_t$  и  $t$ ).

**Задача 5.** Дана модель авторегрессии третьего порядка

$$y_t = 3y_{t-1} - 0,25y_{t-2} + 0,75y_{t-3} + \varepsilon_t$$

Задание: построить характеристическое уравнение, найти его корни и установить, является ли указанный авторегрессионный процесс стационарным.

**Задача 6.** Для авторегрессии второго порядка

$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$  найдены выборочные значения автокорреляционной функции:  $r(1) = 0,853$ ,  $r(2) = 0,826$ .

Задание: оценить параметры авторегрессии, используя для этого уравнения Юла-Уолкера.

### Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006.- Гл. 12.
2. Практикум по эконометрике: учебное пособие/ под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. – Разделы 5,6.
3. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. - М.: Финансы и статистика, 2008.- Гл. 15.

4. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 6. (<http://znanium.com>)

## **Раздел 5. Системы одновременных уравнений**

### **Тема 19. Понятие о системах эконометрических уравнений (1 занятие)**

#### **Вопросы для обсуждения**

1. Системы независимых уравнений и системы взаимозависимых уравнений. Приведенная и структурная формы модели.
2. Эндогенные, экзогенные и предопределенные переменные. Идентификация систем.

#### **Контрольные вопросы**

1. В чем преимущество систем эконометрических уравнений?
2. Каковы основные типы систем уравнений?
3. Какие переменные называют эндогенными?
4. Какие переменные называют экзогенными?
5. Какие переменные называют предопределенными?
6. В чем отличие системы взаимозависимых уравнений от системы независимых уравнений?
7. В чем особенность системы рекурсивных уравнений?
8. Что такое структурная форма модели?
9. Что такое приведенная форма модели?
10. Почему нужна приведенная форма модели?
11. Что называют идентификацией модели?
12. Когда структурная модель является идентифицируемой?
13. Когда структурная модель является неидентифицируемой?
14. В каком случае модель является сверхидентифицируемой?

15. Как идентифицируется отдельное уравнение в системе по счетному правилу?

16. В чем состоит достаточное условие идентификации отдельного уравнения?

### Практические задания

**Задача 1.** Имеется модель:

$$I_t = \beta_{13}K_t + \gamma_{11}P_{t-1} + \gamma_1 + \varepsilon_1,$$

$$Z_t = \beta_{23}K_t + \gamma_{22}P_t + \gamma_2 + \varepsilon_2,$$

$$K_t = \beta_{31}I_t + \gamma_{31}P_{t-1} + \gamma_{33}K_{t-1} + \gamma_3 + \varepsilon_3.$$

Задание:

- 1) классифицировать переменные на эндогенные, экзогенные и предопределенные;
- 2) записать приведенную форму модели;
- 3) выразить коэффициенты и случайные компоненты приведенной модели в виде функции этих величин в структурной форме.

**Задача 2.** Задана модель:

$$W_t = \alpha_1P_t + \alpha_2W_{t-1} + \alpha_3S_{t-1} + \alpha_4 + \varepsilon_1,$$

$$P_t = \beta_1W_t + \beta_2W_{t-1} + \beta_3S_{t-1} + \beta_4 + \varepsilon_2.$$

Задание:

- 1) классифицировать тип переменных модели;
- 2) записать приведенную форму модели;
- 3) выразить коэффициенты и случайные компоненты приведенной модели в виде функции этих величин в структурной форме.

**Задача 3.** Модель денежного рынка имеет следующий вид:

$$R_t = a_1 + b_{11} * M_t + b_{12} Y_t + e_1,$$

$$Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{22} I_t + e_2,$$

где: R – процентная ставка;

Y – ВВП;



$M$  - денежная масса;

$I$  – внутренние инвестиции;

$t$ - текущий период.

Задание: применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицировано ли каждое из уравнений модели. Определите метод оценки параметров модели. Запишите приведенную форму модели.

**Задача 4.** Одна из версий модели Кейнса имеет вид:

$$C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1,$$

$$I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2,$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$

где:  $C$  - расходы на потребление;

$Y$  - доход;

$I$  - инвестиции;

$G$  - государственные расходы;

$t$  - текущий период;

$t-1$  - предыдущий период.

Задание: применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицировано ли каждое из уравнений модели. Определите метод оценки параметров модели. Запишите приведенную форму модели.

**Задания для самостоятельной работы**

**Задача 1.** Дана модель Менгеса:

$$Y_t = \alpha_1 + b_{11}Y_{t-1} + b_{12}I_t + \varepsilon_1,$$

$$I_t = \alpha_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Q_t + \varepsilon_2,$$

$$C_t = \alpha_3 + b_{13}Y_t + b_{32}C_{t-1} + b_{33}P_t + \varepsilon_3,$$

$$Q_t = \alpha_4 + b_{41}Q_{t-1} + b_{42}R_t + \varepsilon_4.$$

где  $Y$  - национальный доход;  $C$  - расходы на личное потребление;  $I$  - чистые инвестиции;  $Q$  - валовая прибыль экономики;  $P$  - индекс стоимости жизни;  $R$  - объем продукции промышленности;  $t$  - текущий период;  $(t-1)$  - предыдущий период.

Задание: проверить идентифицируемость каждого уравнения с использованием необходимого и достаточного условий идентификации.

**Задача 2.** Имеется модель денежного и товарного рынков:

$$R_t = \alpha_1 + b_{12}Y_t + b_{14}M_t + \varepsilon_1,$$

$$Y_t = \alpha_2 + b_{21}R_t + b_{23}I_t + b_{25}G_t + \varepsilon_2,$$

$$I_t = \alpha_3 + b_{31}R_t + \varepsilon_3,$$

где  $R$  - процентные ставки;  $Y$  - реальный ВВП;  $M$  - денежная масса;  $I$  - внутренние инвестиции;  $G$  - реальные государственные расходы;  $t$  - текущий период.

Задание: проверить идентифицируемость каждого уравнения с использованием необходимого и достаточного условий идентифицируемости и записать приведенную форму модели.

**Задача 3.** Одна из версий модифицированной модели Кейнса имеет вид:

$$C_t = \alpha_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1,$$

$$I_t = \alpha_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2,$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

где  $C$  - расходы на потребление;  $Y$  - доход;  $I$  - инвестиции;  $G$  - государственные расходы;  $t$  - текущий период;  $(t-1)$  - предыдущий период.

Задание: проверить идентифицируемость каждого уравнения с использованием необходимого и достаточного условий идентифицируемости и записать приведенную форму модели.

**Задача 4.** Эконометрическая модель содержит четыре уравнения, четыре эндогенные переменные ( $y_i$ ) и три экзогенные переменные ( $x_j$ ). Ниже представлена матрица коэффициентов при переменных в структурной форме этой модели (табл.19.1):

Таблица 19.1

Уравнение	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
I	-1	0	$b_{13}$	$b_{14}$	$a_{11}$	0	0
II	0	-1	$b_{23}$	0	$a_{21}$	0	0
III	0	$b_{23}$	-1	0	$a_{31}$	0	$a_{33}$
IV	$b_{41}$	$b_{42}$	$b_{43}$	-1	0	$a_{42}$	$a_{43}$

Задание: проверить идентифицируемость каждого уравнения с использованием необходимого и достаточного условий идентифицируемости.

#### Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006.- Гл. 13.
2. Валентинов, В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 13. (<http://znanium.com>)
3. Практикум по эконометрике: учебное пособие / под ред. И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007.- Раздел 4.
4. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. - М.: Финансы и статистика, 2008. – Гл. 5.
5. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 7. (<http://znanium.com>)

## Тема 20. Методы оценки систем одновременных уравнений (самостоятельное изучение)

### Вопросы для изучения

1. Косвенный, двухшаговый и трехшаговый МНК.
2. Применение систем уравнений для построения макроэкономических моделей и моделей спроса – предложения.

### Контрольные вопросы

1. Для оценки каких систем возможно применять обычный МНК?
2. В чем суть косвенного МНК?
3. Всегда ли можно применить косвенный МНК?
4. В чем суть двухшагового МНК и когда он применяется?
5. Что представляют собой мультипликаторные модели кейнсианского типа?

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** Для определения влияния некоторых факторов на результаты аграрного производства 11 агропредприятий, входящих в состав агропромышленного комбината, построена модель:

$$P = a_{11}W + \alpha_1 + \varepsilon_1,$$

$$M = a_{21}P + \alpha_2 + \varepsilon_2,$$

где:  $P$  - урожайность зерновых культур (центнер с 1 га);  $M$  - производство мяса в кг на 1 га;  $W$  - показатель качества земли.

Наблюдения перечисленных переменных представлены в следующей таблице (табл.20.1):

Таблица 20.1

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_t$	33	42	28	29	31	38	25	30	35	30	22
$M_t$	220	240	180	190	210	250	170	230	210	200	170
$W_t$	1,0	1,3	0,8	0,7	1,1	1,3	0,9	1,0	1,1	1,2	0,6

Задание: оценить структурные коэффициенты модели.

**Задача 2.** Имеется модель, построенная по 16 наблюдениям:

$$y_1 = \alpha_1 + b_{12}y_2 + \varepsilon_1.$$

$$y_2 = \alpha_2 + b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + \varepsilon_2,$$

$$y_3 = y_2 + x_2.$$

Ей соответствует следующая приведенная форма:

$$y_1 = -1,25 + 22x_1 + 0,67x_2 + \zeta_1,$$

$$y_2 = 2 - 4x_1 + 10x_2 + \zeta_2,$$

$$y_3 = -30 + 12x_1 + 8x_2 + \zeta_3.$$

Известны также следующие исходные данные (табл.20.2):

Таблица 20.2

$n$	1	2	3	4	5	6
$y_1$	3	2	4	1	5	8
$x_1$	2	3	5	6	10	8
$x_2$	4	7	3	6	5	5

Задание:

- 1) определить структурные параметры первого уравнения, если это возможно;
- 2) определить структурные параметры второго уравнения, если это возможно.

**Задача 3.** Имеется следующая модель:

$$y_1 = \alpha_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{12}y_2 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = \alpha_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}y_1 + \varepsilon_2,$$

$$y_3 = \alpha_3 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + \varepsilon_3.$$

Приведенная форма этой модели имеет вид:

$$y_1 = 6 + 8x_1 + 10x_2 + 4x_3 + v_1,$$

$$y_2 = 16 - 12x_1 - 70x_2 + 8x_3 + v_2,$$

$$y_3 = 10 - 5x_1 - 22x_2 + 5x_3 + v_3.$$

Задание: определить все возможные структурные коэффициенты на основе приведенной формы модели.

**Задача 4.** Имеется следующая гипотетическая структурная модель:

$$y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2,$$

$$y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + \varepsilon_3.$$

Приведенная форма исходной модели имеет вид:

$$\tilde{y}_1 = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3,$$

$$\tilde{y}_2 = 2x_1 + 4x_2 + 10x_3,$$

$$\tilde{y}_3 = -5x_1 + 6x_2 + 5x_3.$$

Задание:

- 1) проверить структурную форму модели на идентифицируемость;
- 2) определить структурные коэффициенты модели.

**Задача 5.** Рассматривается следующая модель:

$$y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2,$$

$$y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{33}x_3 + \varepsilon_3.$$

Приведенная форма этой модели, оцененная с помощью обычного МНК, имеет вид:

$$\tilde{y}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,$$

$$\tilde{y}_2 = x_1 + 4x_2 + 8x_3,$$

$$\tilde{y}_3 = 2x_1 + 4x_2 + x_3.$$

Известно, что второе и третье уравнение точно идентифицируемы.

Задание: определить оценки коэффициентов структурной формы этих уравнений косвенным методом наименьших квадратов.

**Задача 6.** Построена модель:

$$y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2.$$

Таблица 20.3

$t$	$y_1$	$y_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	1	2	1	0	1
2	2	1	1	1	0
3	2	1	1	1	0
4	3	0	1	1	1
5	2	1	1	1	1

Задание: оценить коэффициенты исходной модели косвенным МНК, если известно, что второе уравнение точно идентифицируемо.

**Задача 7.** Дана эконометрическая модель:

$$y_1 = \alpha_1 + b_{12}(y_2 + x_1) + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = \alpha_2 + b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2.$$

и выборочные данные (табл.20.4):

Таблица 20.4

$t$	$y_1$	$y_2$	$x_1$	$x_2$
1	2	5	1	3
2	3	6	2	1
3	4	7	3	2
4	5	8	2	5
5	6	5	4	6

Задание: проверить структурную форму модели на идентификацию и определить структурные коэффициенты модели с использованием косвенного и двухшагового, трехшагового МНК.

**Задача 8.** Задана модель:

$$y_1 = b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \varepsilon_2,$$

$$y_3 = b_{31}y_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \varepsilon_3$$

и известны следующие данные (табл.20.5):

Таблица 20.5

$t$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	1	6	3	1	2	1
2	2	8	4	1	2	1
3	3	8	4	2	2	1
4	4	10	4	2	3	1
5	5	12	5	2	3	1

Задание: оценить двухшаговым, трехшаговым методом наименьших квадратов структурные коэффициенты второго уравнения.

**Задача 9.** Имеется следующая структурная модель:

$$Y_1 = b_{12}Y_2 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2,$$

$$Y_2 = b_{21}Y_1 + b_{23}Y_3 + a_{22}X_2,$$

$$Y_3 = b_{32}Y_2 + a_{31}X_1 + a_{33}X_3.$$

Приведенная форма исходной модели имеет вид:

$$Y_1 = 3X_1 - 5X_2 + 11X_3,$$

$$Y_2 = 2X_1 + 4X_2 + 3X_3,$$

$$Y_3 = -5X_1 + 6X_2 + 5X_3.$$

Задание: определить структурные коэффициенты модели.

### Решение типовых задач

**Задача 1.** Имеется следующая структурная точно идентифицируемая модель:

$$\begin{cases} y_1 = b_{13} \cdot y_3 + a_{11} \cdot x_1 + a_{13} \cdot x_3, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + b_{23} \cdot y_3 + a_{22} \cdot x_2, \\ y_3 = b_{32} \cdot y_2 + a_{31} \cdot x_1 + a_{33} \cdot x_3. \end{cases}$$

Исходя из приведенной формы модели уравнений



$$\begin{cases} y_1 = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3, \\ y_2 = 3 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3, \\ y_3 = -5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3. \end{cases}$$

определить структурные коэффициенты модели.

Решение:

*Первое уравнение:* из третьего уравнения приведенной формы выразим  $x_2$  (так как его нет в первом уравнении структурной формы):

$$x_2 = \frac{y_3 + 5 \cdot x_1 - 5 \cdot x_3}{8}.$$

Данное выражение содержит переменные  $y_3, x_1, x_3$ , которые нужны для первого уравнения структурной формы модели (СФМ). Подставим полученное выражение  $x_2$  в первое уравнение приведенной формы модели (ПФМ):

$$y_1 = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot \frac{y_3 + 5 \cdot x_1 - 5 \cdot x_3}{8} + 10 \cdot x_3 \Rightarrow y_1 = 0,5 \cdot y_3 + 4,5 \cdot x_1 + 7,5 \cdot x_3 - \text{ первое}$$

уравнение СФМ.

*Второе уравнение:* в нем нет переменных  $x_1$  и  $x_3$ . Структурные параметры второго уравнения СФМ можно будет определить в два этапа:

Первый этап: выразим  $x_1$  в данном случае из первого или третьего уравнения ПФМ. Например, из первого уравнения:

$$x_1 = \frac{y_1 - 4 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3}{2} = 0,5 \cdot y_1 - 2 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3.$$

Подстановка данного выражения во второе уравнение ПФМ не решила бы задачу до конца, так как в выражении присутствует  $x_3$ , которого нет в СФМ.

Выразим  $x_3$  из третьего уравнения ПФМ:

$$x_3 = \frac{y_3 + 5 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2}{5}$$

Подставим его в выражение  $x_1$ :

$$x_1 = 0,5 \cdot y_1 - 2 \cdot x_2 - 5 \cdot \left( \frac{y_3 + 5 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2}{5} \right) = 0,5 \cdot y_1 - y_3 + 6 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1;$$

$$x_1 = \frac{0,5 \cdot y_1 - y_3 + 6 \cdot x_2}{6}.$$

Второй этап: аналогично, чтобы выразить  $x_3$  через искомые  $y_1$ ,  $y_3$  и  $x_2$ , заменим в выражении  $x_3$  значение  $x_1$  на полученное из первого уравнения ПФМ:

$$x_3 = \frac{y_3 + 5 \cdot (0,5 \cdot y_1 - 2 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3) - 8 \cdot x_2}{5} = 0,2 \cdot y_3 + 0,5 \cdot y_1 - 3,6 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3.$$

Следовательно,  $x_3 = 0,033 \cdot y_3 + 0,083 \cdot y_1 - 0,6 \cdot x_2$ .

Подставим полученные  $x_1$  и  $x_3$  во второе уравнение ПФМ:

$$y_2 = 3 \cdot \frac{0,5 \cdot y_1 - y_3 + 6 \cdot x_2}{6} - 6 \cdot x_2 + 2 \cdot (0,033 \cdot y_3 + 0,083 \cdot y_1 - 0,6 \cdot x_2) \Rightarrow$$

$$y_2 = 0,416 \cdot y_1 - 0,434 \cdot y_3 - 4,2 \cdot x_2$$

- второе уравнение СФМ.

*Третье уравнение:* из второго уравнения ПФМ выразим  $x_2$ , так как его нет в третьем уравнении СФМ:

$$x_2 = \frac{-y_2 + 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3}{6} = -0,167 \cdot y_2 + 0,5 \cdot x_1 + 0,333 \cdot x_3.$$

Подставим полученное выражение в третье уравнение ПФМ:

$$y_3 = -5 \cdot x_1 + 8 \cdot (-0,167 \cdot y_2 + 0,5 \cdot x_1 + 0,333 \cdot x_3) + 5 \cdot x_3 \Rightarrow y_3 = -1,336 \cdot y_2 - x_1 + 7,664 \cdot x_3$$

- третье уравнение СФМ.

Таким образом, СФМ примет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 0,5 \cdot y_3 + 4,5 \cdot x_1 + 7,5 \cdot x_3, \\ y_2 = 0,416 \cdot y_1 - 0,434 \cdot y_3 - 4,2 \cdot x_2, \\ y_3 = -1,336 \cdot y_2 - x_1 + 7,664 \cdot x_3. \end{cases}$$

**Задача 2.** Имеется следующая точно идентифицируемая структурная модель:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{22}x_2, \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

Соответствующая ей приведенная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3, \\ y_3 = -5x_1 + 6x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Задание: Определить неизвестные параметры структурной модели.

Решение: Для идентифицируемых систем методом оценки структурных параметров является косвенный МНК. Он заключается в том, что уравнения приведенной формы модели (ПФМ), полученные обычным МНК как уравнения множественной регрессии, с помощью алгебраических преобразований превращаются в уравнения структурной формы модели (СФМ). Здесь, как видим, МНК применяется только один раз – для оценки коэффициентов приведенной формы.

Начнем с построения первого уравнения СФМ. Из всех уравнений ПФМ к нему ближе всех по структуре первое уравнение: в обоих уравнениях слева стоит  $y_1$ , а справа стоят  $x_1$  и  $x_2$ . Однако они отличаются тем, что в первом уравнении ПФМ стоит  $x_3$ , а в первом уравнении СФМ стоит  $y_2$ . Поэтому, чтобы получить первое уравнение СФМ из первого уравнения ПФМ, надо в последнем заменить  $x_3$  на выражение, в котором появилась бы  $y_2$ . Эту замену делаем с помощью второго уравнения ПФМ:

$$x_3 = \frac{1}{5}(y_2 - 2x_1 - 4x_2).$$

Подставим в первое уравнение ПФМ, получаем после элементарных преобразований:

$$y_1 = 3x_1 - 4x_2 + 2\left[\frac{1}{5}(y_2 - 2x_1 - 4x_2)\right],$$

или

$$y_1 = 0,4y_2 + 2,2x_1 - 5,64x_2.$$

Это и есть первое уравнение СФМ.

Для получения третьего уравнения СФМ действуем аналогично: в третьем уравнении ПФМ заменяем  $x_2$  так, чтобы в результате замены появилась  $y_2$ . такую замены также делаем через второе уравнение ПФМ:

$$x_2 = \frac{1}{4}(y_2 - 2x_1 - 5x_3).$$

Подставим в третье уравнение ПФМ, получаем:

$$y_3 = -5x_1 + 6\left[\frac{1}{4}(y_2 - 2x_1 - 5x_3)\right] + 5x_3,$$

или

$$y_3 = 1,5y_2 - 8x_1 - 2,5x_3.$$

Это и есть третье уравнение СФМ.

Для получения второго уравнения СФМ требуются более сложные преобразования. Это связано с тем, что из второго уравнения ПФМ, как наиболее похожего на второе уравнение СФМ, надо исключить сразу две переменные –  $x_1$  и  $x_3$ , чтобы при этом появились  $y_1$  и  $y_3$ . Последовательное исключение здесь не годится, их надо исключать одновременно. Для этого запишем первое и третье уравнения ПФМ как систему относительно исключаемых переменных:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = y_1 + 4x_2; \\ -5x_1 + 5x_3 = y_3 - 6x_2. \end{cases}$$

Решаем эту систему любым способом, например, методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 25;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 + 4x_2 & 2 \\ y_3 - 6x_2 & 5 \end{vmatrix} = 5(y_1 + 4x_2) - 2(y_3 - 6x_2) = 5y_1 - 2y_3 + 32x_2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & y_1 + 4x_2 \\ -5 & y_3 - 6x_2 \end{vmatrix} = 3(y_3 - 6x_2) - (-5)(y_1 + 4x_2) = 5y_1 + 3y_3 + 2x_2;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,2y_1 - 0,08y_3 + 1,28x_2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0,2y_1 + 0,12y_3 + 0,08x_2.$$

Подставим полученные решения во второе уравнение ПФМ, получаем второе уравнение СФМ:

$$y_2 = 2(0,2y_1 - 0,08y_3 + 1,28x_2) + 4x_2 + 5(0,2y_1 + 0,12y_3 + 0,08x_2),$$

или

$$y_2 = 1,4y_1 + 0,44y_3 + 6,96x_2.$$

Теперь можем полностью записать структурную модель:

$$\begin{cases} y_1 = 0,4y_2 + 2,2x_1 - 5,6x_2, \\ y_2 = 1,4y_1 + 0,44y_3 + 6,96x_2, \\ y_3 = 1,5y_2 - 8x_1 - 2,5x_3. \end{cases}$$

**Задача 3.** Имеется структурная модель:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Для нее записана приведенная форма модели:

$$\begin{cases} y_1 = 0,852x_1 + 0,373x_2 + u_1, \\ y_2 = -0,072x_1 - 0,00557x_2 + u_2. \end{cases}$$

Задание: оценить структурные коэффициенты модели.

Решение: На основе второго уравнения приведенной формы модели можно найти теоретические значения для эндогенной переменной  $y_2$ , т.е.  $\hat{y}_2$ . Подставим в это уравнение значения  $x_1$  и  $x_2$  в форме отклонений от средних значений, запишем в виде таблицы:

$x_1$	$x_2$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_2 + x_1 = z$	$y_1$	$y_1 z$	$z^2$
-1,4	-0,4	0,103	-1,297	-2	2,594	1,682
-0,4	-2,4	0,042	-0,358	-1	0,358	0,128
0,6	-1,4	-0,035	0,565	0	0	0,319
-0,4	1,6	0,02	-0,38	1	-0,38	0,144
1,6	2,6	-0,13	1,47	2	2,94	2,161
0	0	0	0	0	5,512	4,434

После того, как найдены оценки  $\hat{y}_2$ , заменим в уравнении  $y_1 = b_{12}(y_2 + x_1)$  фактические значения  $y_2$  их оценками  $\hat{y}_2$ , найдем значения новой переменной  $z = \hat{y}_2 + x_1$ . Применим МНК к уравнению:

$$y_1 = b_{12}z.$$

Получим:

$$b_{12} = \frac{\sum y_1 z}{\sum z^2} = \frac{5,512}{4,434} = 1,243.$$

В целом рассматриваемая система будет иметь вид:

$$\begin{cases} y_1 = 1,243(y_2 + x_2) \\ y_2 = -0,085y_1 + 0,026x_2 \end{cases}$$

**Задача 4.** Система структурных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

т.е. является сверхидентифицируемой.

В этом случае матрицы эндогенных и экзогенных переменных имеют вид:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 & -1,2 \\ -1 & -0,2 \\ 0 & 0,8 \\ 1 & 1,8 \\ 2 & -1,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1,4 & -0,4 \\ -0,4 & -2,4 \\ 0,6 & -1,4 \\ -0,4 & 1,6 \\ 1,6 & 2,6 \end{pmatrix}.$$

Важная для расчетов матрица сумм попарных произведений факторов равна:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5,2 & 4,2 \\ 4,2 & 17,2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы значений переменных в правых частях уравнений следующие:

$$\mathbf{Z}(1) = \begin{pmatrix} -2,6 \\ -0,6 \\ 1,4 \\ 1,4 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}(2) = \begin{pmatrix} -2 & -0,4 \\ -1 & -2,4 \\ 0 & -1,4 \\ 1 & 1,6 \\ 2 & 2,6 \end{pmatrix},$$

причем в матрице  $\mathbf{Z}(1)$  записаны значения  $(y_2 + x_1)$ , а в  $\mathbf{Z}(2)$  - значения переменных  $y_1$  и  $x_2$ , которые присутствуют в правых частях соответствующих уравнений.

Отсюда вспомогательные матрицы  $\mathbf{X}'\mathbf{Z}(1)$  и  $\mathbf{X}'\mathbf{Z}(2)$  равны:

$$\mathbf{X}'\mathbf{Z}(1) = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 3,8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}'\mathbf{Z}(2) = \begin{pmatrix} 6 & 4,2 \\ 10 & 17,2 \end{pmatrix}.$$

Соберем матрицу  $\tilde{\mathbf{Z}}$  из этих блоков и транспонируем её:

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 4,8 & 0 & 0 \\ 3,8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4,2 \\ 0 & 10 & 17,2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}' = \begin{pmatrix} 4,8 & 3,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 4,2 & 17,2 \end{pmatrix}.$$

Построим оценку матрицы ковариаций случайных возмущений структурной формы:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\tilde{\lambda}} &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \hat{\sigma}_{12}\mathbf{X}'\mathbf{X} \\ \hat{\sigma}_{21}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \hat{\sigma}_{22}\mathbf{X}'\mathbf{X} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,483 \begin{pmatrix} 5,2 & 4,2 \\ 4,2 & 17,2 \end{pmatrix} & -1,218 \begin{pmatrix} 5,2 & 4,2 \\ 4,2 & 17,2 \end{pmatrix} \\ -1,218 \begin{pmatrix} 5,2 & 4,2 \\ 4,2 & 17,2 \end{pmatrix} & 1,441 \begin{pmatrix} 5,2 & 4,2 \\ 4,2 & 17,2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7,713 & 6,23 & -6,331 & -5,114 \\ 6,23 & 25,513 & -5,114 & -20,941 \\ -6,331 & -5,114 & 7,488 & 6,048 \\ -5,114 & -20,941 & 6,042 & 24,77 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В последнем выражении значок  $\otimes$  обозначает операцию тензорного произведения двух матриц, в результате которой получается матрица, состоящая из блоков, которые состоят из произведений элементов первой матрицы на всю вторую матрицу.

Находим обратную к ней:

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{\lambda}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,528 & -0,129 & 0,446 & -0,109 \\ -0,129 & 0,159 & -0,109 & 0,135 \\ 0,446 & -0,109 & 0,544 & -0,133 \\ -0,109 & 0,135 & -0,133 & 0,164 \end{pmatrix}.$$

Необходимая для расчетов матрица  $\tilde{\mathbf{Y}}$  собирается из следующих блоков:



$$X'Y^{(1)} = \begin{pmatrix} -1,4 & -0,4 & 0,6 & -0,4 & 1,6 \\ -0,4 & -2,4 & -1,4 & 1,6 & 2,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$X'Y^{(2)} = \begin{pmatrix} -1,4 & -0,4 & 0,6 & -0,4 & 1,6 \\ -0,4 & -2,4 & -1,4 & 1,6 & 2,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,2 \\ -0,2 \\ 0,8 \\ 1,8 \\ -1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} X'Y^{(1)} \\ X'Y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -0,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}.$$

Структурные параметры уравнений записываются так:

$$\Theta(1) = (b_{12}), \quad \Theta(2) = \begin{pmatrix} b_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta(1) \\ \Theta(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} \\ \hat{a}_{22} \end{pmatrix} = (\tilde{Z}' \hat{\Sigma}_{\tilde{X}}^{-1} \tilde{Z})^{-1} \tilde{Z}' \hat{\Sigma}_{\tilde{X}}^{-1} \tilde{Y} =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,8 & 3,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 4,2 & 17,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,528 & -0,129 & 0,446 & -0,109 \\ -0,129 & 0,1569 & -0,109 & 0,135 \\ 0,446 & -0,109 & 0,544 & -0,133 \\ -0,109 & 0,135 & -0,133 & 0,164 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,8 & 0 & 0 \\ 3,8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4,2 \\ 0 & 10 & 17,2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 4,8 & 3,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 4,2 & 17,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,528 & -0,129 & 0,446 & -0,109 \\ -0,129 & 0,1569 & -0,109 & 0,135 \\ 0,446 & -0,109 & 0,544 & -0,133 \\ -0,109 & 0,135 & -0,133 & 0,164 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -0,4 \\ -0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,243 \\ -0,375 \\ 0,446 \end{pmatrix}$$

Тогда систему уравнений с оцененными параметрами запишем так:

$$\begin{cases} y_1 = 1,243(y_2 + x_1) + \varepsilon_1 \\ y_2 = -0.375y_1 + 0.446x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

### Рекомендуемая литература

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие. -Мн.: Новое знание, 2006.- Гл. 13.
2. Валентинов В. А. Эконометрика [Электронный ресурс]: практикум / В. А. Валентинов. - 3-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 436 с.: Гл. 13. (<http://znanium.com>)
3. Практикум по эконометрике: учебное пособие / под ред И. И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика, 2007. - Раздел 4.
4. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд. - М.: Финансы и статистика, 2005. Гл. 5.
5. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.И. Новиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 144 с.: Гл. 7. (<http://znanium.com>)

## Приложение 1

### Таблица значений функции Лапласа

	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0600	0,0700	0,0800	0,0900
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,1	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,2	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,3	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,4	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

**Приложение 2**  
**Таблица критических точек распределения Хи-квадрат**

Число степеней свободы $\nu$	Уровень значимости												
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,28	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,037	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	17,240	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	23,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490

продолжение приложения 2

60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	61,698	69,334	77,577	85,527	90,531	95,023	100,43	104,21
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	71,145	79,334	88,130	96,578	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	80,625	89,334	98,650	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	90,133	99,334	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17
110	75,550	78,458	82,867	86,792	91,471	99,666	109,33	119,61	129,39	135,48	140,92	147,41	151,95
120	83,852	86,923	91,573	95,705	100,62	109,22	119,33	130,05	140,23	146,57	152,21	158,95	163,65

**Приложение 3**

Двухсторонние критические значения  $t$ -критерия Стьюдента при уровне значимости  $\alpha = 0,10; 0,05; 0,01$

Число степеней свободы	A		
	0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657
2	2,9200	4,3027	9,9248
3	2,3534	3,1825	5,8409
4	2,1318	2,7764	4,6041
5	2,0150	2,5706	4,0321
6	1,9432	2,4469	3,7074
7	1,8946	2,3646	3,4995
8	1,8595	2,3060	3,3554
9	1,8331	2,2622	3,2498
10	1,8125	2,2281	3,1693
11	1,7959	2,2010	3,1058
12	1,7823	2,1788	3,0545
13	1,7709	2,1604	3,0123
14	1,7613	2,1448	2,9768
15	1,7530	2,1315	2,9467
16	1,7459	2,1199	2,9208
17	1,7396	2,1098	2,8982
18	1,7341	2,1009	2,8784
19	1,7291	2,0930	2,8609
20	1,7247	2,0860	2,8453
21	1,7207	2,0796	2,8314
22	1,7171	2,0739	2,8188
23	1,7139	2,0687	2,8073
24	1,7109	2,0693	2,7969
25	1,7081	2,0595	2,7874

продолжение приложения 3

26	1,7056	2,0555	2,7787
27	1,7033	2,0518	2,7707
28	1,7011	2,0484	2,7633
29	1,6991	2,0452	2,7564
30	1,6973	2,0423	2,7500
40	1,6839	2,0211	2,7045
60	1,6707	2,0003	2,6603
120	1,6577	1,9799	2,6174
$\infty$	1,6449	1,9600	2,5758

Приложение 4

Таблица значений F–критерия Фишера при уровне значимости  $\alpha=0,05$

$k_1$ $k_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$
1	161,4	199,5	215,7	224,5	230,1	233,9	238,8	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31

продолжение приложения 3

90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
$\infty$	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Приложение 5

Значения критерия Дарбина-Уотсона  $d_1$  и  $d_2$  ( $\alpha=0,05$ )

n	K=1		K=2		K=3	
	D1	D2	D1	D2	D1	D2
16	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75
17	1.1	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73
18	1.13	1.38	1.02	1.54	0.9	1.71
19	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69
20	1.18	1.4	1.08	1.53	0.97	1.68
21	1.2	1.41	1.1	1.54	1	1.68
22	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67
23	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66
24	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66
25	1.27	1.45	1.19	1.55	1.1	1.66
26	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66
27	1.3	1.16	1.22	1.55	1.14	1.65
28	1.32	1.17	1.24	1.56	1.16	1.65
29	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65
30	1.34	1.48	1.27	1.56	1.2	1.65
31	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65
32	1.36	1.5	1.3	1.57	1.23	1.65
33	1.37	1.5	1.31	1.57	1.24	1.65
34	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65
35	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65
36	1.4	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65
	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65