КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ КУРСА ЛЕКЦИЙ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(анализ и синтез Фурье)

КАЗАНЬ – 1999

Утверждено
на заседании кафедры
дифференциальных
уравнений.
Протокол №3 от 29.10.98.

Составители:
доценты Салехов Л.Г., Бикчантаев И.А.

Методические разработки являются продолжением курса лекций „Уравнения математической физики” для второй ступени образования (магистры). В них излагаются: ряды Фурье периодических обобщенных функций, преобразование Фурье-Лапласа и ультраобобщенные функции на $\mathbb{R}^n$; анализ и синтез Фурье в пространствах периодических ультраобобщенных функций; преобразование Фурье-Лапласа и ультраобобщенные функции на $\mathbb{C}^n$ (аналитические функционалы); преобразование Лапласа в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Сохраняется символика обозначений предыдущих изданий 1986 и 1987 годов. Данные разработки могут быть полезны для студентов, специализирующихся по кафедре дифференциальных уравнений, и слушателей ФПК, а также при чтении спецкурсов и проведении спецсеминаров.

Ряды Фурье

Для изучения рядов Фурье периодических обобщенных функций на $\mathbb{R}^n$ применимо так называемое *периодическое преобразование обобщенной функции с компактным носителем*, основанное на *периодическом разбиении (разложении) единицы.*

I. Суммируемые семейства в топологических векторных пространствах

Пусть X — хаусдорфово (отделимое) топологическое векторное пространство, а $(x_i)_{i\in I}$ — семейство элементов из X. Обозначим через J множество *конечных* множеств из I. Множество J частично упорядочено по включению. Для каждого $j \in J$ положим $S_j = \sum_{i\in j} x_i$.

Определения.

Пусть $S \in X$. Говорят, что *семейство* $(x_i)_{i\in I}$ *суммируемо к* S, если последовательность $(S_j)_{j\in J}$ сходится к S. Тогда S называют *суммой семейства.*

Говорят, что *семейство* $(x_i)_{i\in I}$ *удовлетворяет критерию Коши*, если последовательность $(S_j)_{j\in J}$ есть последовательность Коши, то есть для любой окрестности V начала существует $j_0 \in J$ такое, что для всякого $K \in J$, не пересекающего j_0, имеем: $S_K \in V$.

Как и в классической теории рядов, имеют место следующие общие свойства.

1) Сумма суммируемого семейства единственна.

2) Суммируемое семейство удовлетворяет критерию Коши.

3) Если X — полное, то всякое семейство в X, удовлетворяющее критерию Коши, является суммируемым.

4) Пусть f — линейное непрерывное отображение X в другое топологическое векторное пространство Y. Если семейство (x_i) суммируемо к S, то семейство $(f(x_i))$ суммируемо к $f(S)$.

Нормально суммируемые семейства

Пусть X — полное хаусдорфово топологическое векторное пространство, а $\mathcal{P}$ — семейство непрерывных полунорм, характеризующее топологию на X.

Говорят, что *семейство* $(x_i)_{i\in I}$ *нормально суммируемо*, если $\forall p \in \mathcal{P}$ семейство $(p(x_i))_{i\in I}$ является суммируемым в $\mathbb{R}$.

Теорема. *В X всякое нормально суммируемое семейство является суммируемым.*

Доказательство. Пусть j и j' — два элемента из J. Имеем для любого $p \in \mathcal{P}$:

$$p(S_j - S_{j'}) \leqslant p\left(\sum_{i \in j \triangle j'} x_i\right) \leqslant \sum_{i \in j \triangle j'} p(x_i),$$

где $j \triangle j'$ — симметрическая разность множеств j и j', то есть $j \triangle j' := (j \setminus j') \cup (j' \setminus j)$. Суммируемость семейства $(p(x_i))_{i \in I}$ показывает, что $\forall \varepsilon > 0$ существует $j_0 \in J$ такое, что $j,\ j' \supset j_0$ влечет $\sum_{i \in j \triangle j'} p(x_i) < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $(p(S_j - S_{j'}))$ сходится к нулю, то есть последовательность $S_j - S_{j'}$ сходится к нулю. Тогда полнота пространства X завершает доказательство.

N.B. Если размерность пространства X конечна, то всякое суммируемое семейство является нормально суммируемым.

II. Пространства последовательностей

I. Пространства $l^p(\mathbb{Z}^n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Комплекснозначная функция, определенная на $\mathbb{Z}^n$, называется *последовательностью*. Ее обозначают $(a_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$, или (a_λ), или $\mathbf{a}$.

Множество последовательностей, суммируемых со степенью p, обозначают $l^p(\mathbb{Z}^n)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, а множество ограниченных последовательностей обозначают $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$. Естественная норма в $l^p(\mathbb{Z}^n)$ обозначается через $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. В частности,

$$\mathbf{a} \in l^1(\mathbb{Z}^n) \iff \|\mathbf{a}\|_1 := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} |a_\lambda| < \infty,$$

$$\mathbf{a} \in l^2(\mathbb{Z}^n) \iff \|\mathbf{a}\|_2 := \sqrt{\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} |a_\lambda|^2} < \infty,$$

$$\mathbf{a} \in l^\infty(\mathbb{Z}^n) \iff \|\mathbf{a}\|_\infty := \sup_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} |a_\lambda| < \infty.$$

II. Быстрое убывание.

Последовательность (a_λ) называют *быстро убывающей*, если она удовлетворяет одному из четырех эквивалентных условий:

$$a)\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ последовательность } (\lambda^\alpha a_\lambda) \in l^\infty(\mathbb{Z}^n),$$

$$b)\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ последовательность } (\lambda^\alpha a_\lambda) \in l^1(\mathbb{Z}^n),$$

$c)\forall k \in \mathbb{N}$ последовательность $((1+|\lambda|^2)^k a_\lambda) \in l^\infty(\mathbb{Z}^n)$,

$d)\forall k \in \mathbb{N}$ последовательность $((1+|\lambda|^2)^k a_\lambda) \in l^1(\mathbb{Z}^n)$.

Множество быстро убывающих последовательностей обозначают $s(\mathbb{Z}^n)$. Это множество превращается в хаусдорфово топологическое векторное пространство одним из семейств полунорм:

$$q_\alpha(\mathbf{a}) := \sup_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} |\lambda^\alpha a_\lambda|,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^n,$$

$$q^*_\alpha(\mathbf{a}) := \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} |\lambda^\alpha a_\lambda|,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^n,$$

$$|\mathbf{a}|_k := \sup_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}(1+|\lambda|^2)^k|a_\lambda|,\ \forall k\in\mathbb{N},$$

$$|\mathbf{a}|^*_k := \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}(1+|\lambda|^2)^k|a_\lambda|,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Имеет место ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ:

Множество конечных последовательностей $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ плотно в $s(\mathbb{Z}^n)$.

Эта теорема аналогична теореме о плотности $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

III. **Медленное (умеренное) возрастание**

Последовательность $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}$ называется последовательностью *медленного (умеренного) роста*, если функция $\lambda\mapsto a_\lambda$ есть функция медленного роста, иначе говоря, если существует $k>0$ такое, что последовательность $(a_\lambda(1+|\lambda|^2)^{-k})_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}$ есть элемент из $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ или из $l^1(\mathbb{Z}^n)$.

Множество последовательностей медленного роста пока обозначаем через $r(\mathbb{Z}^n)$.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ.

Существует биекция между пространством $r(\mathbb{Z}^n)$ последовательностей медленного роста и пространством $s'(\mathbb{Z}^n)$ — дуальным к пространству $s(\mathbb{Z}^n)$. Если отождествить последовательность медленного роста с непрерывным линейным функционалом на пространстве $s(\mathbb{Z}^n)$, то дуальность (сопряженность) выразится формулой:

$$\langle\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} b_\lambda a_\lambda,$$

где $\mathbf{b}\in r(\mathbb{Z}^n),\ \mathbf{a}\in s(\mathbb{Z}^n)$.

N.B. В дальнейшем отождествляем $s'(\mathbb{Z}^n)$ и $r(\mathbb{Z}^n)$.

III. Периодические обобщенные функции

В дальнейшем для определенности период будем считать равным 1. Говорят, что обобщенная функция F-периодическая (с периодом 1), если $\tau_\lambda F = F$ для всех $\lambda \in \mathbb{Z}^n$.

Множество периодических обобщенных функций обозначим через $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$. Очевидно, это есть подмножество из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Далее, положим $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n) := \mathcal{L}(\mathbb{T}^n) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, то есть всякий элемент из $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ есть бесконечно дифференцируемая периодическая функция.

Свойства множества $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$

1^0. *Множество $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ является замкнутым в топологическом векторном пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.*

В самом деле, известно, что $\forall \lambda \in \mathbb{Z}^n$ оператор τ_λ является непрерывным на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Тогда ядро оператора, то есть $\mathrm{Ker}\,(\tau_\lambda - I)$, где I — тождественный оператор в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, является замкнутым множеством в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Но

$$\mathcal{P}(\mathbb{T}^n) = \cap_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \mathrm{Ker}\,(\tau_\lambda - I).$$

Откуда и вытекает свойство.

2^0. *Множество $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ является замкнутым в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ снабжено слабой или сильной дуальной топологией.*

Показывается аналогично, учитывая, что оператор τ_λ непрерывен на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ибо он является транспонированным для оператора $\tau_{-\lambda}$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Периодическое преобразование обобщенной функции с компактным носителем.

Определение. *Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Полагаем*

$$\tilde{\omega}\varphi = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda \varphi.$$

Очевидно, сумма содержит только *конечное число* членов, отличных от нуля. $\tilde{\omega}\varphi$ называют *периодическим преобразованием функции* φ. Периодическое преобразование $\tilde{\omega}\varphi$ является периодической функцией класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для любых $\varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\langle \tilde{\omega}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \tilde{\omega}\varphi \rangle .$$

Пусть теперь $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Полагаем

$$\langle \tilde{\omega}T, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\omega}\varphi \rangle ,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Функционал $\tilde{\omega}T$, определенный на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, называется *периодическим преобразованием обобщенной функции* T.

Свойства периодического преобразования.

1^0. *Линейное отображение* $\tilde{\omega}$ *преобразует непрерывно* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *в* $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *в* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть K — некоторый компакт из $\mathbb{R}^n$. Тогда $\tilde{\omega}$ непрерывно отображает $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, ибо $\tilde{\omega}$ есть конечная сумма непрерывных линейных отображений. А так как K — произвольный компакт из $\mathbb{R}^n$, то $\tilde{\omega}$ непрерывно отображает $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Соотношение

$$\langle \tilde{\omega}T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\omega}\varphi \rangle\,,\ T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

показывает, что $\tilde{\omega}T$ есть обобщенная функция, то есть $\tilde{\omega}T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, и что отображение $T \mapsto \tilde{\omega}T$ непрерывно из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ в силу топологических свойств транспонированного отображения, где $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ снабжены одновременно слабыми или сильными дуальными топологиями.

2^0. $\forall T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *обобщенная функция* $\tilde{\omega}T$ *является периодической, то есть* $\tilde{\omega}(\tau_\lambda T) = \tau_\lambda \tilde{\omega}T = \tilde{\omega}T,\ \forall \lambda \in \mathbb{Z}^n$.

Доказательство. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем: $\tau_\lambda \tilde{\omega}\varphi = \tilde{\omega}(\tau_\lambda \varphi) = \tilde{\omega}\varphi,\ \forall \lambda \in \mathbb{Z}^n$. Откуда, в силу транспозиции, имеем $\tilde{\omega}(\tau_{-\lambda}T) = \tau_{-\lambda}\tilde{\omega}T = \tilde{\omega}T,\ \forall \lambda \in \mathbb{Z}^n$.

3^0. $\forall F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *имеем:* $\tilde{\omega}(\psi F) = F \cdot (\tilde{\omega}\psi)$;
$\forall f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n),\ \forall T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *имеем:* $\tilde{\omega}(fT) = f \cdot (\tilde{\omega}T)$

Доказательство. Прежде всего, $\forall T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\langle \tilde{\omega}T, \varphi \rangle = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \langle \tau_\lambda T, \varphi \rangle\,,$$

так как сумма в правой части конечна. Это соотношение может быть записано в виде:

$$\tilde{\omega}T = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda T.$$

Теперь, если F — периодическая, то имеем:

$$\tau_\lambda(\psi F) = \tau_\lambda \psi \cdot \tau_\lambda F = F \cdot \tau_\lambda \psi.$$

Откуда

$$\tilde{\omega}(\psi F) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda(\psi F) = F \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda \psi = F \cdot \tilde{\omega}\psi.$$

Аналогично, если f — периодическая, то есть $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$, то имеем: $\tau_\lambda(fT) = f \cdot (\tau_\lambda T)$. Откуда

$$\tilde{\omega}(fT) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda(fT) = f \cdot \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda T = f\tilde{\omega}T.$$

Периодическое разбиение единицы в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Определение. *Функция $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, такая, что $\tilde{\omega}\theta = 1$, называется периодическим разбиением единицы.*

Теорема о существовании периодического разбиения единицы в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Существует по крайней мере одно периодическое разложение единицы в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Доказательство. Пусть ψ — неотрицательная функция на $\mathbb{R}^n$, неравная нулю на $(\mathcal{L}I)^n$, где I — открытый интервал $]-1/2;+1/2[$, принадлежащая $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. По лемме об отделимости Урынсона такая функция существует. Заметим, что $\tilde{\omega}\psi > 0$ в $\mathbb{R}^n$. Положим $\theta = \psi/\tilde{\omega}\psi$. Далее имеем: $\tilde{\omega}\theta = \tilde{\omega}\psi/\tilde{\omega}\psi = 1$, в силу свойства 3^0 периодического преобразования.

N.B. Периодическое разложение единицы в $L^\infty_{\text{compact}}(\mathbb{R}^n)$ построить еще проще. Достаточно взять характеристическую (индикаторную) функцию для I^n.

Лемма о сюръекции.

Всякая периодическая функция из класса C^∞ является периодическим преобразованием функции из класса C^∞ с компактным носителем.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Положим $\varphi = \theta f$. Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{\omega}\varphi = f \cdot \tilde{\omega}\theta = f$.

Аналогично, пусть $F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$. Положим $T = \theta F$. Тогда $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{\omega}T = F \cdot \tilde{\omega}\theta = F$.

N.B. Также можно показать, что всякая периодическая обобщенная функция порядка не выше k (соответственно мера Радона, функция класса C^k) является периодическим преобразованием обобщенной функции порядка не выше k с компактным носителем (соответственно меры Радона, функции класса C^k с компактным носителем). Также всякая периодическая функция, локально интегрируемая со степенью p, является периодическим преобразованием функции φ, интегрируемой со степенью p и с компактным носителем.

Дуальность между $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$.

Обозначим через $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ множество линейных функционалов, непрерывных на $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Значение $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ на элементе $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ будем записывать в виде: $\langle L, f\rangle_{\mathbb{T}^n}$. Пусть $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ снабжено или слабой, или сильной дуальной топологией.

Теорема о дуальности. *Топологические векторные пространства $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ изоморфны (алгебраически и топологически).*

Конечно, в этой теореме, когда $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ снабжается сильной дуальной топологией (соответственно слабой), то $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ должно снабжаться сильной дуальной топологией (соответственно слабой), индуцируемой из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. I. Известно, что $\tilde{\omega}$ непрерывно преобразует $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Транспонированное к нему отображение ${}^t\tilde{\omega}$ определяется формулой: $\langle {}^t\tilde{\omega}L, \varphi\rangle := \langle L, \tilde{\omega}\varphi\rangle_{\mathbb{T}^n}$, где $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Это транспонированное отображение непрерывно преобразует $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что ${}^t\tilde{\omega}L$ есть периодическая обобщенная функция (периода 1). Следовательно, ${}^t\tilde{\omega}$ непрерывно отображает $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$.

II. С другой стороны, пусть θ есть $\mathcal{D}$-периодическое разбиение единицы. Тогда отображение $f \mapsto \theta f$ непрерывно отображает $cE(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Обозначая заново через θ сужение этого отображения на $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$, имеем, что θ непрерывно отображает $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. А поэтому транспонированное к нему отображение ${}^t\theta$ непрерывно отображает $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$. Напомним, что это транспонированное отображение определяется формулой:

$$\left\langle {}^t\theta U, f\right\rangle_{\mathbb{T}^n} := \langle U, \theta f\rangle, \ U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \ f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n).$$

Рассмотрим сужение ${}^t\theta$ на $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$. Обозначим его заново через ${}^t\theta$. Тогда ${}^t\theta$ непрерывно отображает $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$.

III. Покажем теперь, что ${}^t\tilde{\omega}$ и ${}^t\theta$ являются взаимно обратными отображениями между $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$.

В самом деле, с одной стороны, очевидно, что $(\tilde{\omega} \circ \theta)$ есть тождественное отображение в $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. В силу свойств транспонирования $({}^t\theta \circ {}^t\tilde{\omega})$ *есть тождество в* $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$. С другой стороны, $\forall F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\left\langle {}^t\tilde{\omega}({}^t\theta F), \varphi\right\rangle = \left\langle {}^t\theta F, \tilde{\omega}\varphi\right\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle F, \theta(\tilde{\omega}\varphi)\rangle =$$
$$= \langle \theta F, \tilde{\omega}\varphi\rangle = \langle \tilde{\omega}(\theta F), \varphi\rangle = \langle F, \varphi\rangle,$$

то есть ${}^t\omega \circ {}^t\theta$ есть тождественное отображение в $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$.

Выражение дуальности между $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$.

Теорема. *При отождествлении $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ дуальность между $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ выражается формулой:*

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle T, f\rangle\,,\ F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n),\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n),$$

где T есть обобщенная функция с компактным носителем, периодическое преобразование которого есть F.

Доказательство. Так как отождествление $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ осуществляется через изоморфизм ${}^t\theta$, рассмотренный выше, то

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle F, \theta f\rangle\,,\ F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n),\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n).$$

Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\tilde{\omega}T = F$. Тогда

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle F, \theta f\rangle = \langle \tilde{\omega}T, \theta f\rangle = \langle T, \tilde{\omega}(\theta f)\rangle = \langle T, f\rangle\,.$$

N.B. 1^0. Так как всякая периодическая обобщенная функция F может быть всегда рассматриваема как периодическое преобразование некоторой обобщенной функции с компактным носителем, то предпочтительнее писать:

$$\langle \tilde{\omega}T, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle T, f\rangle\,,\ T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n).$$

2^0. Если F — локально интегрируемая периодическая функция, то можно брать $T = \chi_{I^n} \cdot F$. Поэтому

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \int\limits_{I^n} F(x)f(x)\mathrm{d}x,\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n).$$

IV. Ряды Фурье.

Отныне отождествляем $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$.

Определения.

Мы определим два отображения: $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$, которые будем называть соответственно *анализ Фурье* и *синтез Фурье.*

а) **Анализ Фурье.**

Пусть U — периодическая обобщенная функция (с периодом 1). Для любого $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ полагаем:

$$\hat{U}_\lambda = \langle U, \overline{\chi}_\lambda\rangle_{\mathbb{T}^n}\,,$$

где $\chi_\lambda(x) = \exp(2\pi \mathrm{i}\lambda x)$, $\lambda x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Последовательность $\hat{U}_\lambda = (\hat{u}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$ называют *последовательностью коэффициентов Фурье периодической обобщенной функции* U.

Отображение $\mathcal{H} : U \mapsto \hat{U}$, которое отображает $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ в пространство последовательностей $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$, называют *анализом Фурье.*

b) **Синтез Фурье.**

Для каждой последовательности $\mathbf{a} = (a_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$ рассматриваем ряд $\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} a_\lambda \chi_\lambda$. Если этот ряд суммируем, по определенной топологии, к обобщенной (периодической) функции U, то говорят, что *синтез Фурье* последовательности $\mathbf{a}$ возможен по этой топологии. А отображение $\mathcal{G} : \mathbf{a} \mapsto U$ называют *синтезом Фурье.*

Теорема обращения для $L^2(\mathbb{T}^n)$ и $l^2(\mathbb{Z}^n)$.

Через $L^2(\mathbb{T}^n)$ обозначим множество (классов) функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, периодических (с периодом 1), квадрат модуля которых локально интегрируем на $\mathbb{R}^n$, то есть $L^2(\mathbb{T}^n) = \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Будем снабжать $L^2(\mathbb{T}^n)$ топологией, индуцированной из $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Эта топология, очевидно, эквивалентна топологии, порождаемой скалярным произведением

$$(f|g)_{\mathbb{T}^n} = \int\limits_{I^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Имеет место

Предложение. *Пространство $L^2(\mathbb{T}^n)$, снабженное этой предгильбертовой структурой, является полным, то есть $L^2(\mathbb{T}^n)$ есть гильбертово пространство.*

В самом деле, так как $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ является полным, то достаточно показать, что $L^2(\mathbb{T}^n)$ является *замкнутым* в $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\overline{L^2(\mathbb{T}^n)}$ есть замыкание для $L^2(\mathbb{T}^n)$ по топологии пространства $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Так как эта топология сильнее (тоньше), чем топология пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и так как $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ является замкнутым в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то имеем: $\overline{L^2(\mathbb{T}^n)} \subset \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$. Следовательно,

$$\overline{L^2(\mathbb{T}^n)} \subset (\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{T}^n).$$

Теорема обращения.

1^0. *Анализ Фурье $\mathcal{H}$ является изометрическим изоморфизмом $L^2(\mathbb{T}^n)$*

на $l^2(\mathbb{Z}^n)$*. В частности, для любого* $U \in L^2(\mathbb{T}^n)$ *имеем:*

$$\int\limits_{I^n} |U|^2 \mathrm{d}x = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} |\hat{u}_\lambda|^2 \quad \textit{(формула Парсеваля).}$$

2^0. *Синтез Фурье* $\mathcal{G}$ *всякой последовательности* $\mathbf{a} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ *возможен по топологии пространства* $L^2(\mathbb{T}^n)$. $\mathcal{G}$ *является изометрическим изоморфизмом* $l^2(\mathbb{Z}^n)$ *на* $L^2(\mathbb{T}^n)$.

3^0. $\mathcal{H}$ *и* $\mathcal{G}$ *являются взаимно обратными изоморфизмами между* $L^2(\mathbb{T}^n)$ *и* $l^2(\mathbb{Z}^n)$.

Доказательство. Согласно теореме Стоуна-Вейерштрасса множество $\{\chi_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z}^n\}$ является полным в пространстве $L^2(\mathbb{T}^n)$, при этом оно образует ортонормированную систему. Тогда теорема вытекает из результатов *о представлении в гильбертовом пространстве.* Напомним эти результаты.

Представление в пространстве Гильберта.

a) Пусть $(e_i)_{i\in I}$ — ортонормированное семейство в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1) Семейство $(e_i)_{\mathrm{i}\in I}$ является полным.

2) $\forall x \in H$ семейство $\{(x|e_i)e_i,\ i \in I\}$ является суммируемым в H и $x = \sum_{i\in I}(x|e_i)e_i$.

3) $\forall x \in H$ имеем: $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2$.

b) Пусть $(e_i)_{i\in I}$ — гильбертовый базис (то есть семейство полное и ортонормированное) в пространстве Гильберта H. Тогда $\forall \lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in l^2(I)$ семейство $(\lambda_i e_i)_{i\in I}$ является суммируемым в H к некоторому элементу $x \in H$ и $\lambda_i = (x|e_i)$.

Теорема обращения для $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ и $S(\mathbb{Z}^n)$.

1^0. *Анализ Фурье* $\mathcal{H}$ *является топологическим изоморфизмом* $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ *на* $S(\mathbb{Z}^n)$.

2^0. *Синтез Фурье* $\mathcal{G}$ *возможен на* $S(\mathbb{Z}^n)$ *по топологии* $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. $\mathcal{G}$ *является топологическим изоморфизмом* $S(\mathbb{Z}^n)$ *на* $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$.

3^0. $\mathcal{H}$ *и* $\mathcal{G}$ *являются взаимно обратными изоморфизмами.*

Доказательство.

1^0. Покажем, что $\mathcal{H}$ непрерывно отображает $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ на $S(\mathbb{Z}^n)$. Используя регулярность (гладкость) и периодичность U и интегрируя по частям, имеем $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$:

$$(2\pi\mathrm{i}\lambda)^\alpha\hat{u}_\lambda=\int\limits_{I^n} D^\alpha U(x)\exp(-2\pi\mathrm{i}x\lambda)\mathrm{d}x=(\widehat{D^\alpha U})_\lambda.$$

Откуда $\|(\lambda^\alpha\hat{u}_\lambda)\|_{l^\infty}\leqslant\|D^\alpha U\|_{L^1(I^n)}\leqslant\|D^\alpha U\|_{L^\infty(I^n)}$. Это показывает, что $\hat{u}\in S(\mathbb{Z}^n)$ и что отображение $\mathcal{H}$ непрерывно отображает $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ в $S(\mathbb{Z}^n)$.

2^0. Покажем, что $\mathcal{G}$ непрерывно отображает $S(\mathbb{Z}^n)$ в $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Сначала заметим, что полнота пространства $C(\mathbb{R}^n)$ означает, что $\forall a\in l^1(\mathbb{Z}^n)$ синтез Фурье возможен по топологии $C(\mathbb{R}^n)$, иначе говоря, ряд $\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}a_\lambda\chi_\lambda$ суммируем по топологии $C(\mathbb{R}^n)$ к функции $U\in C(\mathbb{R}^n)$, если $\mathbf{a}\in l^1(\mathbb{Z}^n)$. С другой стороны, $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$ последовательность $(\lambda^\alpha a_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}$ также принадлежит $l^1(\mathbb{Z}^n)$. Следовательно, ряд $\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}D^\alpha(a_\lambda\chi_\lambda)$ суммируем по топологии $C(\mathbb{R}^n)$ к $D^\alpha U$. Окончательно, ряд $\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}a_\lambda\chi_\lambda$ суммируем, по топологии $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, к элементу U. Непрерывность отображения $\mathcal{G}:\mathbf{a}\mapsto U$ вытекает из неравенства

$$\|D^\alpha U\|_{L^\infty(I^n)}\leqslant\|\lambda^\alpha a_\lambda\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)}.$$

3^0. Покажем, что $\mathcal{G}$ является обратным к $\mathcal{H}$, то есть

$$\begin{cases}\mathcal{G}\mathcal{H}U=U, & \forall U\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)\\ \mathcal{H}\mathcal{G}\mathbf{a}=\mathbf{a}, & \forall a\in s(\mathbb{Z}^n).\end{cases}$$

В силу предыдущей теоремы обращения, эти два соотношения верны даже для $U\in L^2(\mathbb{T}^n)$ и $\mathbf{a}\in l^2(\mathbb{Z}^n)$.

Теорема обращения для $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $s'(\mathbb{Z}^n)$.

1^0. Анализ Фурье $\mathcal{H}$ есть топологический изоморфизм $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ на $s'(\mathbb{Z}^n)$.

2^0. Синтез Фурье $\mathcal{G}$ возможен на $s'(\mathbb{Z}^n)$ по топологии $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$. $\mathcal{G}$ есть топологический изоморфизм $s'(\mathbb{Z}^n)$ на $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$.

3^0. $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ являются взаимно обратными изоморфизмами.

N.B. В этой теореме $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $s'(\mathbb{Z}^n)$ снабжены слабыми дуальными топологиями.

Доказательство. Рассмотрим ко-анализ Фурье $\overline{\mathcal{H}}$, определяемый формулой:

$$(\overline{\mathcal{H}}f)_\lambda=\langle f,\chi_\lambda\rangle_{\mathbb{T}^n},\ f\in\mathcal{P}(\mathbb{T}^n).$$

По предыдущей теореме, это топологический изоморфизм $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ на $s(\mathbb{Z}^n)$, а обратный к нему изоморфизм, то есть ко-синтез Фурье $\overline{\mathcal{H}}$, определяется формулой $\overline{\mathcal{G}}\mathbf{a}=\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}a_\lambda\overline{\chi}_\lambda$.

Обозначим через ${}^t\overline{\mathcal{H}}$ и ${}^t\overline{\mathcal{G}}$ соответственно транспонированные отображения к $\overline{\mathcal{H}}$ и $\overline{\mathcal{G}}$. Согласно свойствам транспонированного отображения ${}^t\overline{\mathcal{H}}$ есть топологический изоморфизм $s'(\mathbb{Z}^n)$ на $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$, а ${}^t\overline{\mathcal{G}}$ есть топологический изоморфизм $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ на $s'(\mathbb{Z}^n)$, то есть ${}^t\overline{\mathcal{H}}$ и ${}^t\overline{\mathcal{G}}$ являются взаимно обратными. Поэтому теорема будет доказана, если удастся показать, что ${}^t\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{H}$ и ${}^t\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{G}$.

Далее для краткости записи будем писать $\langle\cdot,\cdot\rangle$ вместо $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{T}^n}$. Докажем, что ${}^t\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{H}$. Для любого $U \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и для любого $\mathbf{a} \in s(\mathbb{Z}^n)$ имеем:

$$\left\langle {}^t\overline{\mathcal{G}}U, \mathbf{a}\right\rangle = \left\langle U, \overline{\mathcal{G}}\mathbf{a}\right\rangle = \left\langle U, \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda \overline{\chi}_\lambda \right\rangle.$$

Но суммируемость по топологии $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ ряда $\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} a_\lambda\overline{\chi}_\lambda$ и непрерывность функционала U на $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ позволяют записать:

$$\left\langle U, \sum a_\lambda\overline{\chi}_\lambda\right\rangle = \sum \left\langle U, a_\lambda\overline{\chi}_\lambda\right\rangle = \sum \left\langle U, \overline{\chi}_\lambda\right\rangle a_\lambda = \left\langle \mathcal{H}U, \mathbf{a}\right\rangle,$$

то есть ${}^t\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{H}$.

Покажем, что ${}^t\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{G}$. Пусть $\mathbf{a}' \in s'(\mathbb{Z}^n)$ и $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Тогда имеем:

$$\left\langle {}^t\overline{\mathcal{H}}\mathbf{a}', f\right\rangle = \left\langle \mathbf{a}', \overline{\mathcal{H}}f\right\rangle = \sum_\lambda a'_\lambda \left\langle f, \chi_\lambda\right\rangle,$$

где второе равенство есть не что иное, как дуальность между $s(\mathbb{Z}^n)$ и $s'(\mathbb{Z}^n)$. Но

$$\left\langle f, \chi_\lambda\right\rangle = \int\limits_{I^n} f(x)\chi_\lambda(x)\mathrm{d}x = \left\langle \chi_\lambda, f\right\rangle.$$

Следовательно, имеем:

$$\left\langle {}^t\overline{\mathcal{H}}a', f\right\rangle = \sum_\lambda a'_\lambda \left\langle \chi_\lambda, f\right\rangle.$$

Это равенство означает, что $\forall f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ ряд $\sum_\lambda \langle a'_\lambda\chi_\lambda, f\rangle$ суммируем к $\left\langle {}^t\overline{\mathcal{H}}a', f\right\rangle$, что и доказывает, что ряд $\sum_\lambda a'_\lambda\chi_\lambda$ суммируем по слабой дуальной топологии $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ к ${}^t\overline{\mathcal{H}}\mathbf{a}'$. Следовательно, ${}^t\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{G}$.

Следствие (теорема единственности разложения в ряд Фурье).

Если все коэффициенты Фурье некоторой обобщенной функции равны нулю, то эта обобщенная функция есть нуль.

Дополнительные сведения
о периодических обобщенных функциях.

Последнюю теорему можно дополнить следующей теоремой.

Теорема.

1^0. *Синтез Фурье $\mathcal{G}$ всегда возможен на $s'(\mathbb{Z}^n)$ по топологии $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

2^0. *Всякая периодическая обобщенная функция есть обобщенная функция медленного роста и является производной (определенного порядка) от ограниченной непрерывной периодической функции (теорема о структуре).*

Доказательство. 1^0. Пусть $\mathbf{a}' \in S'(\mathbb{Z}^n)$. Тогда существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что последовательность $a'_\lambda/(1+|\lambda|^2)^k$ является элементом из $l^1(\mathbb{Z}^n)$. Положим $a_\lambda = a'_\lambda/(1+|\lambda|^2)^k$ и рассмотрим ряд $\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda\chi_\lambda$. Так как $\mathbf{a} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ и так как $C(\mathbb{R}^n)$ — полное, то этот ряд суммируем по топологии $C(\mathbb{R}^n)$ к функции $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, f является периодической, а поэтому f — ограничена. Более того, суммируемость ряда к f является, очевидно, равномерной на $\mathbb{R}^n$ (в силу периодичности). А так как равномерная сходимость на $\mathbb{R}^n$ влечет сходимость по сильной дуальной топологии (тем более по слабой) пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то ряд $\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda\chi_\lambda$ суммируем к f по сильной дуальной топологии $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Так как оператор $\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\Delta\right)^k$ является непрерывным на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то имеем:

$$\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\Delta\right)^k f = \sum_\lambda a_\lambda \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \chi_\lambda = \sum_\lambda a_\lambda \left(1+|\lambda|^2\right)^k \chi_\lambda$$

или

$$\sum_\lambda a'_\lambda\chi_\lambda = \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k f,$$

то есть ряд $\sum_\lambda a'_\lambda\chi_\lambda$ — суммируемый по сильной дуальной топологии $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2^0. Согласно предыдущей теореме, всякая периодическая обобщенная функция есть синтез Фурье некоторой последовательности $(a'_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$. Поэтому всякая периодическая обобщенная функция U может быть записана в виде:

$$U = \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k f,$$

где f есть периодическая непрерывная функция (ограниченная).

Преобразование Фурье-Лапласа и ультраобобщенные функции

I. Функции быстрого убывания и с компактным спектром.

1^0. Определение. *Положим* $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) | \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$. Элемент из $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ называют *функцией быстрого убывания и с компактным спектром*

Топология на $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ будет, по определению, прообразом при отображении $\mathcal{F}$ топологии пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

2^0. Свойства пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.

a) $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ *есть векторное подпространство из* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, плотное в* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, устойчивое при дифференцировании и мономиальном умножении.*

Это свойство вытекает из линейности преобразования Фурье $\mathcal{F}$, плотности $\mathcal{D}$ в $\mathcal{S}$ и формул

$$\mathcal{F}(D^\beta\varphi) = (2\pi \mathrm{i}\xi)^\beta \mathcal{F}\varphi \text{ и } \mathcal{F}[(-2\pi \mathrm{i}x)^\alpha \varphi] = D^\alpha \mathcal{F}\varphi,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

b) *Топология пространства* $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ *является хаусдорфовой (отделимой), согласующейся с векторной структурой пространства* $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.

Это свойство следует из топологических свойств пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

c) *Топология пространства* $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ *более тонкая (сильнее), чем топология пространства* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Это следует из того, что топология пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ тоньше (сильнее), чем топология пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

d) *Сужение* $\mathcal{F}$ *на* $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ *есть топологический изоморфизм пространства* $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ *на* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*; обратным изоморфизмом служит* $\overline{\mathcal{F}}$.

Это следует из определения пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ и того, что $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ являются взаимно обратными изоморфизмами $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ на себя. Непрерывность $\mathcal{F}$ вытекает из определения топологии на $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$. Непрерывность $\overline{\mathcal{F}}$ вытекает из аналогичности свойств $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$.

II. Ультраобобщенные функции (ультрараспределения).

1^0. Определение. *Всякий линейный функционал, непрерывный на* $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$*, называют ультраобобщенной функцией на* $\mathbb{R}^n$.

Через $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ обозначают пространство ультраобобщенных функций на $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ снабжают слабой или сильной дуальной топологией.

2^0. **Вложение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$.**

Теорема. *Всякая обобщенная функция медленного роста S на $\mathbb{R}^n$ может быть рассматриваема как ультраобобщенная функция. В частности, знание S на $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ определяет $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Для того, чтобы ультрараспределение было обобщенной функцией медленного роста, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывно на $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ по топологии, индуцируемой из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Согласно свойствам пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$, вложение $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно и плотно. А тогда достаточно применить теорему о каноническом вложении дуальных пространств.

3^0. **Образы Фурье обобщенных функций**.

a) Определение. Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{F}$ (соответственно $\overline{\mathcal{F}}$), которое биективно и непрерывно отображает $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Транспонированное к нему отображение ${}^t\mathcal{F}$ (соответственно ${}^t\overline{\mathcal{F}}$) непрерывно и биективно отображает $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$. Тогда ${}^t\mathcal{F}$, по определению, есть *преобразование Фурье на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$*, а ${}^t\overline{\mathcal{F}}$ есть *копреобразование Фурье на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Переставляя местами $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, определяют *преобразование и копреобразование Фурье на $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.*

b) Теорема.

1) *${}^t\mathcal{F}$ и ${}^t\overline{\mathcal{F}}$ являются взаимно обратными топологическими изоморфизмами.*

2) *${}^t\mathcal{F}$ и ${}^t\overline{\mathcal{F}}$ есть продолжения соответственно $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$, которые первоначально определены на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Теорема следует из общих свойств транспозиции и она позволяет в дальнейшем убрать букву „t” в ${}^t\mathcal{F}$ и ${}^t\overline{\mathcal{F}}$.

III. Пространства операторов.

1^0. Определения.

a) *Всякая ультраобобщенная функция, образ Фурье которой есть обобщенная функция с компактным носителем, называется функцией с компактным спектром.*

b) *Всякая ультраобобщенная функция, образ Фурье которой есть бесконечно дифференцируемая функция, называется ультраобобщенной функцией быстрого убывания.*

Множество функций с компактным спектром обозначают $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество ультраобобщенных функций быстрого убывания — $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$.

Итак,

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) := \{U \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n) |\ \mathcal{F}U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\},$$
$$\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n) := \{U \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n) |\ \mathcal{F}U \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Тогда, очевидно, имеем:

$$\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n).$$

Топология пространства $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ является, по определению $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, прообразом при отображении $\mathcal{F}$ сильной дуальной топологии пространства $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Аналогично, топология пространства $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ является, по определению $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$, прообразом топологии пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ суть топологические изоморфизмы между $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и между $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Можно показать, что $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ является сильным дуальным для $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и что

$$\langle T, f\rangle = \left\langle \overline{\mathcal{F}} f, \mathcal{F}T\right\rangle,\ T \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n),\ f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n).$$

2^0. **Исследование мультипликативного произведения**.

a) Лемма. *Пусть f — функция с компактным спектром, то есть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, тогда отображение $\varphi \mapsto f\varphi$ непрерывно из $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \theta_M(\mathbb{R}^n)$, где $\theta_M(\mathbb{R}^n)$ — пространство мультипликаторов для $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и для $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то имеем:

$$\mathcal{F}(f\varphi) = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}\varphi).$$

По определению имеем: $(\mathcal{F}f) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $(\mathcal{F}\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. А тогда достаточно применить теорему о регуляризации (регуляризующие свойства свертки для обобщенных функций).

b) **Определение мультипликативного произведения в $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$.**

Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а $U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$, тогда fU определяют по формуле:

$$\langle fU, \varphi\rangle := \langle U, f\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n).$$

Очевидно, $fU \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ и отображение $U \mapsto fU$ непрерывно из $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$.

c) Теорема о перестановке. *Для любой $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и для любого $U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ имеем: $\mathcal{F}(fU) = (\mathcal{F}f) * \mathcal{F}U$.*

Доказательство. $\forall \varphi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\langle \mathcal{F}(fU), \varphi \rangle = \langle fU, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle U, f\mathcal{F}\varphi \rangle = \left\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}U, f\mathcal{F}\varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathcal{F}U, \overline{\mathcal{F}}(f\mathcal{F}\varphi) \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}U, \overline{\mathcal{F}}f * \varphi \right\rangle = \langle \mathcal{F}U * \mathcal{F}f, \varphi \rangle .$$

Эквивалентная формулировка этой теоремы:

$\forall T_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\forall T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеем: $\mathcal{F}(T_1 * T_2) = (\mathcal{F}T_1) \cdot (\mathcal{F}T_2)$.

Следствие из теоремы о перестановке.

Снабженное мультипликативным произведением векторное пространство $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ является мультипликативной алгеброй с единицей, на которой пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ являются мультипликативными модулями с единицей.

3^0. **Исследование свертки**.

a) Лемма. *Пусть $\psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$. Тогда отображение $\varphi \mapsto \psi * \varphi$ непрерывно отображает $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Имеем: $\mathcal{F}(\psi * \varphi) = (\mathcal{F}\psi)(\mathcal{F}\varphi)$. Но, по определению пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}\varphi$ и $\mathcal{F}\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и отображение $\mathcal{F}\varphi \mapsto (\mathcal{F}\psi)(\mathcal{F}\varphi)$ непрерывно из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

b) **Определение свертки элемента из $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ и элемента из $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.**

Пусть $U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$. Свертку $U * \psi$ определяют по формуле

$$\langle \psi * U, \varphi \rangle := \left\langle U, \check{\psi} * \varphi \right\rangle, \ \varphi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n).$$

Иначе говоря, отображение $U \mapsto \psi * U$ является транспонированным к отображению $\varphi \mapsto \check{\psi} * \varphi$. Поэтому $\psi * U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ и отображение $U \mapsto \psi * U$ непрерывно из $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$.

c) Теорема о перестановке. *Пусть $U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\psi * U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{F}(\psi * U) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathcal{F}U)$.*

Доказательство. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\langle \mathcal{F}(\psi * U), \varphi \rangle = \langle \psi * U, \mathcal{F}\varphi \rangle = \left\langle U, \check{\psi} * \mathcal{F}\varphi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}U, \overline{\mathcal{F}}(\check{\psi} * \mathcal{F}\varphi) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathcal{F}U, \overline{\mathcal{F}}\check{\psi}(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi) \right\rangle = \langle \mathcal{F}U, (\mathcal{F}\psi)\varphi \rangle = \langle (\mathcal{F}\varphi)\mathcal{F}U, \varphi \rangle .$$

Следствие. *Пусть $T \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда отображение $\psi \mapsto \psi * T$ непрерывно отображает $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ в себя.*

В самом деле, если $T \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{F}T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и достаточно вспомнить, что отображение $\varphi \mapsto \psi\varphi$, где $\psi \in \mathcal{D}$, непрерывно из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$.

d) **Определение свертки элемента из $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ и элемента из $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$.**

Пусть $T \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ и $U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$, тогда свертку $(T * U)$ определяют по формуле:

$$\langle T * U, \varphi \rangle := \left\langle U, \check{T} * \varphi \right\rangle, \ \varphi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n).$$

Очевидно, отображение $U \mapsto T * U$ непрерывно из $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$, так как оно транспонировано по отношению к отображению $\varphi \mapsto \check{T} * \varphi$.

e) Теорема о перестановке. *$\forall T \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ и $\forall U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ имеем: $\mathcal{F}(T * U) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}U)$.*

Доказательство. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем: $\langle \mathcal{F}(T * U), \varphi \rangle = \langle T * U, \mathcal{F}\varphi \rangle = \left\langle U, \check{T} * \mathcal{F}\varphi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}U, \overline{\mathcal{F}}(\check{T} * \mathcal{F}\varphi) \right\rangle = \langle \mathcal{F}U, (\mathcal{F}T)\varphi \rangle = \langle (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}U), \varphi \rangle$.

Эквивалентная формулировка этой теоремы:

$$\forall f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \ \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ имеем: } \mathcal{F}(fT) = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}T).$$

Следствие из теоремы о перестановке. *Векторное пространство $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$, снабженное сверткой, является сверточной алгеброй с единицей, на которой векторные пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ суть модули с единицей.*

IV. Периодические ультраобобщенные функции.

1^0. Определение. *Ультраобобщенная функция U называется периодической (с периодом 1), если $\forall \lambda \in \mathbb{Z}^n$ имеем: $\delta_\lambda * U = U$.*

Множество периодических ультраобобщенных функций обозначают $\mathcal{U}(\mathbb{T}^n)$ и его снабжают топологией пространства $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$.

Через $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ обозначают пересечение $\mathcal{U}(\mathbb{T}^n)$ с $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и его снабжают топологией, индуцированной из $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Каждый элемент из $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ называют *периодической функцией с компактным спектром.*

2^0. **Периодическое преобразование ультраобобщенных функций быстрого убывания.**

a) Определение. Для каждой ультраобобщенной функции быстрого убывания, то есть $U \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$, ее периодическое преобразование $\tilde{\omega}U$ определяют по формуле:

$$\tilde{\omega}U := \tilde{\omega}\delta * U,$$

где $\tilde{\omega}\delta$ есть периодическое преобразование для δ.

b) **Свойства периодического преобразования.**

1) *Отображение $\tilde{\omega}$ непрерывно (линейно) из $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$, его*

сужение на $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно из $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$; $\tilde{\omega}$ является транспонированным к своему сужению.

Доказательство. Непрерывность есть следствие топологических свойств транспонированного отображения. А для доказательства соотношения $\langle\tilde{\omega}U,\varphi\rangle = \langle U,\tilde{\omega}\varphi\rangle$, $U \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ достаточно показать, что $\langle\mathcal{F}(\tilde{\omega}U),\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = \langle\overline{\mathcal{F}}U,\overline{\mathcal{F}}\tilde{\omega}\varphi\rangle$. А это очевидно.

2) *$\tilde{\omega}U$ является периодической (с периодом 1).*

Доказательство. $\forall U \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ имеем: $\delta_\lambda * \tilde{\omega}U = (\delta_\lambda * \tilde{\omega}\delta) * U = (\tilde{\omega}\delta) * U = \tilde{\omega}U$

3) *Если $f \in \mathcal{U}(\mathbb{T}^n)$ и $U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$ или $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ и $U \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$, то $\tilde{\omega}(fU) = f\tilde{\omega}U$.*

Доказательство. $\tilde{\omega}(fU) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}(\delta_\lambda * (fU))) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}(\delta_\lambda * f) - (\delta_\lambda * U) = f\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}(\delta_\lambda * U) = f\tilde{\omega}U$.

3^0. **Периодическое разложение единицы в $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.**

a) Определение. *Всякая функция $\Theta \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\tilde{\omega}\Theta = 1$, называется периодическим разложением единицы в $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.*

b) Теорема существования. *Существует по крайней мере одно периодическое разложение единицы в $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, где $\varphi(0) = 1$. Положим $\psi = F\varphi$. Тогда $\psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ и $1 * \psi = 1$. Рассмотрим функцию $\theta = \psi * \chi_{I^n}$, где I^n — куб со стороной $]-1/2;+1/2[$. Так как $\chi_{I^n} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$, то имеем: $\theta \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$.

С другой стороны, $\tilde{\omega}\theta = \tilde{\omega}(\chi_{I^n} * \psi) = (\tilde{\omega}\delta * \chi_{I^n}) * \psi = 1 * \psi = 1$.

4^0. Лемма о сюръективности. *Всякая периодическая ультраобобщенная функция является образом при периодическом преобразовании $\tilde{\omega}$ ультраобобщенной функции быстрого убывания.*

Всякая периодическая функция с компактным спектром есть образ, при периодическом преобразовании $\tilde{\omega}$, функции быстрого убывания и с компактным спектром.

Доказательство. Пусть θ — периодическое разбиение единицы в $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$. Если $F \in \mathcal{U}(\mathbb{T}^n)$, то $\theta F \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{\omega}(\theta F) = F\tilde{\omega}\theta = F$. А если $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, то $\theta f \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{\omega}(\theta f) = f\tilde{\omega}\theta = f$.

5^0. **Дуальность между $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{U}(\mathbb{T}^n)$.**

Теорема. *Пространство $\mathcal{U}(\mathbb{T}^n)$ может быть рассматриваемо как дуальное к $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, а дуальность выражается формулой:*

$$\langle F,f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle U,f\rangle,\ F \in \mathcal{U}(\mathbb{T}^n),\ f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n),$$

где U есть ультраобобщенная функция быстрого убывания, для которой F есть периодическое преобразование.

Доказательство этой теоремы такое же, как теоремы в теме „Дуальность между $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$".

N.B. Отныне отождествляем $\mathcal{U}(\mathbb{T}^n)$ с $\mathcal{A}'(\mathbb{T}^n)$.

V. Анализ и синтез Фурье в пространстве периодических ультраобобщенных функций (в $\mathcal{A}'(\mathbb{T}^n)$).

1^0. Определения.

a) **Анализ Фурье.**

Пусть U — периодическая ультраобобщенная функция (с периодом 1). Для любого $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ полагаем

$$\hat{u}_\lambda = \langle U, \overline{\chi}_\lambda \rangle\,, \text{ где } \chi_\lambda(x) = \exp(2\pi \mathrm{i} \lambda x).$$

Последовательность $\hat{u} = (\hat{u}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$ называется последовательностью коэффициентов Фурье периодической ультраобобщенной функции $U \in \mathcal{A}'(\mathbb{T}^n)$. Отображение $\mathcal{H} : U \mapsto \hat{U}$, которое переводит $\mathcal{A}'(\mathbb{T}^n)$ в пространство последовательностей $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$, называют анализом Фурье.

b) **Синтез Фурье.**

Для всякой последовательности $\mathbf{a} = (a_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$ рассматривают ряд $\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} a_\lambda \chi_\lambda$. Если этот ряд суммируем, по некоторой топологии, к некоторой (периодической) ультраобобщенной функции U, то говорят, что *синтез Фурье последовательности* $\mathbf{a}$ *возможен по этой топологии и отображение $\mathcal{G} : \mathbf{a} \mapsto U$ называют синтезом Фурье.*

2^0. **Теорема обращения для $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$.**

Здесь $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ — векторное пространство комплексных последовательностей с компактным носителем. Его снабжают своей естественной индуктивной топологией.

Теорема.

1) *Анализ Фурье $\mathcal{H}$ есть топологический изоморфизм $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ на $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$.*

2) *Синтез Фурье $\mathcal{G}$ возможен на $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ по топологии $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$; $\mathcal{G}$ есть топологический изоморфизм $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ на $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$.*

3) *$\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ являются взаимно обратными изоморфизмами.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n) \subset L^2(\mathbb{T}^n)$. Тогда $u = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} u_\lambda \chi_\lambda$ — суммируемый ряд, по крайне мере, в $L^2(\mathbb{T}^n)$, а следовательно, в $\mathbb{Z}'(\mathbb{R}^n)$. Ряд $\mathcal{F}u = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}_\lambda \delta_\lambda$ суммируем, по крайней мере в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Так как $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{F}u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Поэтому коэффициенты Фурье $\hat{u}_\lambda$ должны обращаться в нуль вне некоторого компакта. Иначе говоря,

$\hat{u} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$. Обратно, пусть $\mathbf{a} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$. Тогда $f = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda \chi_\lambda$ всегда имеет смысл. С другой стороны, $\mathcal{F}f = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda \delta_\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, следовательно, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$. Остальная часть теоремы доказывается без труда.

3^0. **Теорема обращения для $\mathcal{A}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$.**

Пространство $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ по-прежнему снабжено своей естественной топологией (топологией компактной сходимости). Тогда известно, что $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ является сильным дуальным к $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$.

Теорема.

1) Анализ Фурье $\mathcal{H}$ есть топологический изоморфизм $\mathcal{A}'(\mathbb{T}^n)$ на $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$.

2) По топологии ультраобобщенных функций синтез Фурье $\mathcal{G}$ всегда возможен для любой последовательности $\mathbf{a}$. *$\mathcal{G}$ есть топологический изоморфизм $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ на $\mathcal{A}'(\mathbb{T}^n)$.*

3) $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ являются взаимно обратными изоморфизмами.

Доказательство. Эта теорема вытекает из предыдущей в силу топологических свойств транспонированного отображения.

Следствие. (Теорема единственности). *Если все коэффициенты Фурье некоторой ультраобобщенной функции суть нули, то она равна нулю тождественно.*

VI. Преобразование Фурье-Лапласа и ультраобобщенные функции на $\mathbb{C}^n$.

С помощью преобразования Фурье-Лапласа мы собираемся ввести ультраобобщенные функции на $\mathbb{C}^n$, которые представляют собой более удобный инструмент, чем ультраобобщенные функции на $\mathbb{R}^n$.

1^0. **Определение и свойства преобразования Фурье-Лапласа.**

а) **Преобразование Фурье-Лапласа элементов из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.**

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Фурье-Лапласа для φ определяют по формуле

$$(\mathcal{FL}\varphi)(\zeta) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi \mathrm{i}\zeta x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\ \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Очевидно, функция $(\mathcal{FL}\varphi)(\zeta)$, определенная на $\mathbb{C}^n$, является продолжением функции $(\mathcal{F}\varphi)(\xi)$, определенной на $\mathbb{R}^n$, где $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$.

Обозначим через $\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$ образ Фурье-Лапласа для пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Характеристика пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$ была получена ранее в *теореме Пэли-Винера*:

Пусть $b > 0$; f — функция, определенная на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) f есть образ Фурье для некоторой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, носитель которой содержится в шаре $\{|x| \leqslant b\}$;

2) f продолжима до голоморфной на $\mathbb{C}^n$ функции $\tilde{f}$, обладающей свойством: $\forall k \in \mathbb{N}$ существует C_k такое, что

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leqslant C_k(1+|\zeta|^2)^{-k} \exp(2\pi b|\mathrm{Im}\zeta|),\ \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Топология в $\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$ определяется как топология, переносимая из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ при отображении $\mathcal{FL}$. Тогда $\mathcal{FL}$ есть топологический изоморфизм $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$. Обратный изоморфизм, будучи ко-преобразованием Фурье $\overline{\mathcal{F}}$, определяется по формуле:

$$(\overline{\mathcal{F}})(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\exp(2\pi \mathrm{i} x\xi)\mathrm{d}\xi,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\psi(xi)$ — сужение $\psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$ на $\mathbb{R}^n$.

b) **Преобразование Фурье-Лапласа элементов из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.**

Обозначим через $\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$ — топологическое дуальное к пространству $\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$ и его снабдим слабой или сильной дуальной топологией.

Преобразование Фурье-Лапласа для $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ определим формулой

$$\langle \mathcal{FL}T, \psi\rangle := \langle T, \mathcal{F}\psi\rangle,\ \psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}^n),$$

где $\mathcal{F}\psi$ есть образ Фурье для сужения функции ψ на $\mathbb{R}^n$.

Так как отображение $\psi \mapsto \mathcal{F}\psi$ есть есть топологический изоморфизм $\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то отображение $T \mapsto \mathcal{FL}T$ есть *топологический изоморфизм $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$*, так как это отображение является транспонированным преобразованием к преобразованию $\psi \mapsto \mathcal{F}\psi$. Заметим, что если $\mathcal{F}T_1 = \mathcal{F}T_2$, то $\mathcal{FL}T_1 = \mathcal{FL}T_2$.

2^0. **Пространства операторов.**

Обозначим через $\mathcal{O}'(\mathbb{C}^n)$ образ Фурье-Лапласа для $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и через $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ образ Фурье-Лапласа для $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Пространства $\mathcal{O}'(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ снабжаем переносными топологиями из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Так же как и в теории преобразования Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ показывается, что

$$(\mathcal{FL}T)(\zeta) = \langle T, \overline{\chi}_\zeta\rangle,\ T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\ \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

где $\chi_\zeta(x) = \exp(2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^n \zeta_k x_k)$.

Отметим, что характеристика пространства $\mathcal{O}(Cn)$ дана ранее в ТЕОРЕМЕ ПЭЛИ-ВИНЕРА-ШВАРЦА: *Пусть $b>0$, а f — функция, определенная на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) f является образом Фурье некоторой обобщенной функции $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, носитель которой содержится в компактном шаре $|x| \leqslant b$;

2) f продолжима до голоморфной функции $\tilde{f}$ на $\mathbb{C}^n$, обладающей следующим свойством: существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C>0$ такие, что

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|^2)^{m/2} \mathrm{e}^{2\pi b|\mathrm{Im}\zeta|}, \ \forall \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Так же, как и раньше, (см. „Пространство операторов в $\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^n)$") определяется мультипликативное произведение элемента из $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ и элемента из $\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$, а также свертка элемента из $\mathcal{O}'(\mathbb{C}^n)$ и элемента из $\mathbb{Z}'(\mathbb{C}^n)$.

Имеет место ТЕОРЕМА О ПЕРЕСТАНОВКЕ:

Преобразование Фурье-Лапласа переставляет операторы свертки и мультипликативного произведения. Иначе говоря, $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\mathcal{FL}(T*S) = (\mathcal{FL}T)(\mathcal{FL}S), \ \mathcal{FL}(fT) = (\mathcal{FL}f)*(\mathcal{FL}T).$$

3^0. **Примеры преобразований Фурье-Лапласа.**

a) **Преобразование Фурье-Лапласа производных и сдвигов меры Дирака**

ТЕОРЕМА. $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$ имеем:

$$\mathcal{FL}(D^\beta \delta) = (2\pi \mathrm{i}\zeta)^\beta, \ \mathcal{FL}(\delta_a) = \overline{\chi}_a(\zeta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $[\mathcal{FL}(D^\beta\delta)](\zeta) = \left\langle D^\beta\delta, \overline{\chi}_\zeta \right\rangle = (-1)^{|\beta|}\left\langle \delta, D^\beta\overline{\chi}_\zeta \right\rangle = (-1)^{|\beta|}\left\langle \delta, (-2\pi\mathrm{i}\zeta)^\beta\overline{\chi}_\zeta \right\rangle = (2\pi\mathrm{i}\zeta)^\beta$. А также $[\mathcal{FL}(\delta_a)](\zeta) = \left\langle \delta_a, \overline{\chi}_\zeta \right\rangle = \exp(-2\pi\mathrm{i}a\zeta)$.

СЛЕДСТВИЕ. $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\mathcal{FL}(D^\beta T) = (2\pi\mathrm{i}\zeta)^\beta(\mathcal{FL}T), \ \mathcal{FL}(\tau_a T) = \overline{\chi}_a(\zeta)(\mathcal{FL}T)(\zeta).$$

Действительно, $D^\beta T = D^\beta\delta * T$, $\tau_a T = \delta_a * T$ и применяем теорему о перестановке.

b) **Преобразование Фурье-Лапласа мономиальных и экспоненциальных функций**.

Сначала введем операции сдвига и дифференцирования в $\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$, полагая

$$\langle \tau_a U, \psi \rangle := \langle U, \tau_{-a}\psi \rangle, \ a \in \mathbb{C}^n, \ U \in \mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n), \ \psi \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}^n);$$

$$\left\langle D^{\beta}U,\psi\right\rangle := (-1)^{|\beta|}\left\langle U,D^{\beta}\psi\right\rangle,\ \beta\in\mathbb{N}^n.$$

Далее, для любого $a \in \mathbb{C}^n$ определяем ультраобобщенную функцию Дирака δ_a на $\mathbb{C}^n$ формулой $\langle\delta_a,\psi\rangle := \psi(a),\ \forall\psi\in\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$.

Теорема. $\forall\beta\in\mathbb{N}^n,\ \forall a\in\mathbb{C}^n$ *имеем:*

$$[\mathcal{FL}(-2\pi\mathrm{i}x)^{\beta}](\zeta) = D^{\beta}\delta(\zeta);\ [\mathcal{FL}\chi_a(x)](\zeta) = \delta_a(\zeta).$$

Доказательство. Речь идет о том, чтобы показать: $\forall\psi\in\mathbb{Z}(\mathbb{C}^n)$ имеем:

$$\left\langle D^{\beta}\delta,\psi\right\rangle = \left\langle(-2\pi\mathrm{i}x)^{\beta},\mathcal{F}\psi\right\rangle,\ \langle\delta_a,\psi\rangle = \langle\chi_a,\mathcal{F}\psi\rangle.$$

Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\mathcal{FL}\varphi=\psi$. Тогда все сводится к доказательству того, что

$$D^{\beta}(\mathcal{FL}\varphi)(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(-x)(2\pi\mathrm{i}x)^{\beta}\mathrm{d}x,\ (\mathcal{FL}\varphi)(a) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(-x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x,$$

а это очевидно.

Следствие. $\forall\beta\in\mathbb{N}^n,\ \forall a\in\mathbb{C}^n,\ \forall T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\mathcal{FL}[(-2\pi\mathrm{i}x)^{\beta}T] = D^{\beta}(\mathcal{FL}T),\ \mathcal{FL}(\chi_aT) = \tau_a(\mathcal{FL}T).$$

Это следует из теоремы о перестановке и соотношений:

$$\delta_a * U = \tau_aU,\ D^{\beta}\delta * U = D^{\beta}U,$$

которые, как легко убедиться, имеют место для любой $U\in\mathbb{Z}'(\mathbb{C}^n)$.

4^0. **Ряды Тейлора для ультраобобщенных функций из $\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$.**

В отличие от обобщенных функций, ультраобобщенная функция из $\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$ всегда „аналитическая". Точнее, имеет место теорема о разложении в ряд Тейлора:

Пусть $U\in\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$. Для любого $a\in\mathbb{C}^n$ ряд $\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}\frac{a^{\beta}}{\beta!}D^{\beta}U$ является суммируемым к ультраобобщенной функции $\tau_{-a}U$ по сильной дуальной топологии $\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$.

N.B. В силу этой теоремы пространство $\mathbf{Z}'(\mathbb{C}^n)$ называют еще *пространством аналитических функционалов на $\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$.*

Доказательство. Очевидно, ряд $\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}(2\pi\mathrm{i}ax)^{\beta}/\beta!$ сходится к функции $\chi_a(x)$ по топологии пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такая, что ее образ Фурье-Лапласа есть U. Ряд $\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}((2\pi\mathrm{i}ax)^{\beta}/\beta!)\cdot T$ сходится к обобщенной функции χ_aT по сильной дуальной топологии пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. А тогда, переходя к преобразованию Фурье-Лапласа, получаем теорему.

Преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа существенно улучшает символическое исчисление в сверточной алгебре $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Оно аналогично преобразованию Фурье-Лапласа, но в то время как образ Фурье-Лапласа функции Хевисайда достаточно сложен, образ Лапласа этой функции очень прост. Отсюда и полезность преобразования Лапласа в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

В дальнейшем положим $\mathrm{e}_p(x) = \exp(px),\ x \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{C}$.

1^0. Лемма о выпуклости.

1) *Пусть* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Положим* $\Gamma_T := \{\sigma \in \mathbb{R} | \mathrm{e}_{-\sigma}(x)T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\}$. *Тогда* Γ_T *есть выпуклое множество (пустое или нет) из* $\mathbb{R}$.

2) Кроме того, если носитель T *ограничен слева, то* Γ_T *есть полупрямая, ограниченная слева.*

Доказательство.

1) Если Γ_T — пустое или вырождается в точку, то нечего доказывать. Предположим противное. Пусть σ_1 и σ_2 — два элемента из Γ_T. Рассмотрим $\sigma = t\sigma_1 + (1-t)\sigma_2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$, и покажем, что $\sigma \in \Gamma_T$. Положим $f(x) = \exp(-\sigma x)/(\exp(-\sigma_1 x) + \exp(\sigma_2 x))$. Тогда, очевидно, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Также можно убедиться, что все производные от $f(x)$ ограничены. Следовательно, $f \in \theta_M(\mathbb{R})$ и так как $\mathrm{e}_{-\sigma}T = f\mathrm{e}_{-\sigma_1}T + f\mathrm{e}_{-\sigma_2}T$, то $\mathrm{e}_{-\sigma}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Итак, Γ_T — выпукло, а потому Γ_T есть *промежуток в* $\mathbb{R}$.

2) Предположим, что $\operatorname{supp} T \subset [a; +\infty[,\ a \in \mathbb{R}$. Пусть $\sigma_1 \in \Gamma_T$; рассмотрим точку $\sigma > \sigma_1$ и покажем, что $\sigma \in \Gamma_T$. Для этого пусть ψ — функция из класса $C^\infty(\mathbb{R})$, равная 1 на окрестности $[a, +\infty[$ и с носителем, ограниченным слева. Тогда

$$\mathrm{e}_{-\sigma}T = \mathrm{e}_{-(\sigma-\sigma_1)}\mathrm{e}_{-\sigma_1}T = (\psi\mathrm{e}_{-(\sigma-\sigma_1)})(\mathrm{e}_{-\sigma_1}T).$$

Так как функция $\psi\mathrm{e}_{-(\sigma-\sigma_1)}$ принадлежит θ_M, то $\mathrm{e}_{-\sigma}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2^0. Теорема и определение.

Пусть $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ *такое, что* Γ_T *— непустое и пусть* $\sigma_T = \inf \Gamma_T$. *Тогда*

1) $\forall p \in \mathbb{C}$ *такого, что* $\mathrm{Re} p > \sigma_T$, *можно придать смысл выражению* $\langle T, \mathrm{e}_{-p}\rangle$.

2) Функция $\mathcal{L}T : p \mapsto \langle T, \mathrm{e}_{-p}\rangle$ *является голоморфной на открытой полуплоскости* $\Gamma_T^0 \times \mathbb{R}$ *в* $\mathbb{C}$ *и имеем:*

$$D^k(\mathcal{L}T) = (-1)^k \mathcal{L}(x^k T),\ \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (I)$$

По определению эта функция называется преобразованием Лапласа для обобщенной функции $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Полуплоскость $\Gamma_T^0 \times \mathbb{R}$ называют областью существования преобразования Лапласа $\mathcal{L}T$, а σ_T называют абсциссой существования $\mathcal{L}T$. Итак, имеем:

$$\mathcal{L}T(p) = \left\langle T(x), \mathrm{e}^{-pt} \right\rangle.$$

Доказательство теоремы.

1) Пусть ψ — функция, определенная на $\mathbb{R}$, класса C^∞, равная 1 на окрестности $\mathbb{R}_+$ и с носителем, ограниченным слева. Пусть $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $\sigma_T < \sigma_1 < \mathrm{Re}p$, тогда $\mathrm{e}_{-\sigma_1}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и $\psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогда определяем $\langle T, \mathrm{e}_{-p} \rangle := \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1}T, \psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle$. Очевидно, это определение не зависит от выбора σ_1. Покажем, что оно не зависит и от выбора функции ψ. В самом деле, пусть φ — функция, обладающая свойствами функции ψ. Тогда $(\psi - \varphi)$ есть нуль на окрестности носителя T, а поэтому $\left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1}T, (\psi - \varphi)\mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle = 0$.

2) Пусть σ_1 и ψ выбраны как в пункте 1). Положим $g(p) = \langle \mathrm{e}_{-\sigma_1}T, \psi \mathrm{e}_{-p} \rangle$. Пусть $h \in \mathbb{C},\ h \neq 0$, где $|h| \leqslant \mathrm{Re}p/2$; имеем:

$$\frac{g(p+h) - g(p)}{h} = \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1}T, \psi \frac{\mathrm{e}_{-(p+h)} - \mathrm{e}_{-p}}{h} \right\rangle.$$

Очевидно, что $\psi(\mathrm{e}_{-(p+h)} - \mathrm{e}_{-p})/h$ стремится, по топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, к функции $-x\psi \mathrm{e}_{-p}$, когда h стремится к нулю. Откуда следует, что $\mathrm{d}g/\mathrm{d}p$ существует и что $\mathrm{d}g/\mathrm{d}p = \langle \mathrm{e}_{-\sigma_1}T, -\psi x \mathrm{e}_{-p} \rangle$.

Но $(\mathcal{L}T)(p) = g(p - \sigma_1) = \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1}T, \psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle$, откуда

$$\frac{\mathrm{d}(\mathcal{L}T)}{\mathrm{d}p} = \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1}T, -\psi x \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle = \mathcal{L}(-xT)(p).$$

И по индукции получаем формулу (I).

3^0. **Фундаментальное свойство преобразования Лапласа.**

а) Лемма. *Множество $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ является подалгеброй сверточной алгебры $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.*

Доказательство. Пусть S и $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Покажем, что $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Замечая, что $S * T = \tau_{-2a}(\tau_a S * \tau_a T)$, можно везде предполагать, что $\mathrm{supp}\, S$ и $\mathrm{supp}\, T$ включены в $[a; +\infty[$, где $a > 0$. Покажем, что функционал $\varphi \mapsto \langle S * T, \varphi \rangle$ непрерывен на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ по топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi^{\triangle}(x, y) := \varphi(x + y)$. Рассмотрим функцию

$\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ такую, что $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\operatorname{supp}\chi \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\chi = 1$ на окрестности $(\operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T) \cap \operatorname{supp} \varphi^{\triangle}$. По определению свертки имеем: $\langle S * T, \varphi \rangle := \left\langle S \otimes T, \chi\varphi^{\triangle} \right\rangle$. Но $\forall k \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\sup{}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |(1+x^2+y^2)^k \varphi(x+y)\chi(x,y)| \leqslant \sup{}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+} |(1+x^2+y^2)^k \varphi(x+y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup{}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+} \left(\frac{1+x^2+y^2}{1+|x+y|^2} \right)^k |(1+|x+y|^2)^k \varphi(x+y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup{}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+} |(1+|x+y|^2)^k \varphi(x+y)| \leqslant \sup{}_{z\in\mathbb{R}} |(1+z^2)^k \varphi(z)|.$$

Так как $S \otimes T$ есть обобщенная функция медленного роста, то лемма доказана.

b) Теорема о перестановке. Пусть S и $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Тогда

1) $\Gamma_{S*T} \supset \Gamma_S \cap \Gamma_T$,

2) $\forall p \in \mathbb{C}$ такого, что $\operatorname{Re} p > \sigma_S \vee \sigma_T$, имеем:

$$\mathcal{L}(S * T) = \mathcal{L}S(p)\mathcal{L}T(p),$$

где $\sigma_S \vee \sigma_T := \sup\{\sigma_S, \sigma_T\}$.

Доказательство. 1) Пусть $\sigma > \sigma_S \vee \sigma_T$. Тогда $\mathrm{e}_{-\sigma} S * \mathrm{e}_{-\sigma} T$ есть обобщенная функция, принадлежащая $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, так как $\mathrm{e}_{-\sigma} S$ и $\mathrm{e}_{-\sigma} T$ есть элементы из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Покажем, что эта обобщенная функция равна $\mathrm{e}_{-\sigma}(S * T)$. Действительно, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеем:

$$\langle (\mathrm{e}_{-\sigma} S) * (\mathrm{e}_{-\sigma} T) \rangle = \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma} S \otimes \mathrm{e}_{-\sigma} T, \varphi^{\triangle} \right\rangle = \left\langle S \otimes T, (\mathrm{e}_{-\sigma}\varphi)^{\triangle} \right\rangle =$$

$$= \langle S * T, \mathrm{e}_{-\sigma}\varphi \rangle = \langle \mathrm{e}_{-\sigma}(S * T), \varphi \rangle.$$

Таким образом, $\mathrm{e}_{-\sigma}(S * T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; следовательно, $\sigma \in \Gamma_{S*T}$. Итак, мы показали, что $\sigma_{S*T} \leqslant \sigma_S \vee \sigma_T$ и как следствие $\Gamma_{S*T} \supset \Gamma_S \cap \Gamma_T$.

2) Пусть ψ — функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$, носитель которой ограничен слева, равная 1 на окрестности $[0; \infty[$. Для $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > \sigma_S \vee \sigma_T$, имеем: $\mathcal{L}(S * T)(p) = \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1}(S * T), \psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle$, где σ_1 — вещественное число такое, что $\sigma_S \vee \sigma_T < \sigma_1 < \operatorname{Re} p$. Следовательно, имеем:

$$\mathcal{L}(S * T)(p) = \left\langle (\mathrm{e}_{-\sigma_1} S) * (\mathrm{e}_{-\sigma_1} T), \psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1} S \otimes \mathrm{e}_{-\sigma_1} T, [\psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)}]^{\triangle} \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1} S \otimes \mathrm{e}_{-\sigma_1} T, \psi^{\triangle} [\mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)}]^{\triangle} \right\rangle.$$

Можно заменить $\psi^{\triangle}$ на $\psi \otimes \psi$ в правой части, так как эти функции равны 1 на окрестности $\operatorname{supp} S * \operatorname{supp} T$. Поэтому

$$\mathcal{L}(\delta * T)(p) = \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1} S, \psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle \left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1} T, \psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle = \mathcal{L}S(p)\mathcal{L}T(p).$$

4^0. **Соотношение между преобразованиями Лапласа и Фурье**.

Будем обозначать через F *приведенное* преобразование Фурье. Напомним, что преобразование

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x,\ \lambda \in \mathbb{R},\ f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

называют *приведенным.*

a) Теорема. Пусть $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ и σ_T — абсцисса существования $\mathcal{L}T$. Тогда $\forall\sigma > \sigma_T$ образ Фурье обобщенной функции медленного роста $\mathrm{e}_{-\sigma}T$ есть функция, связанная с $\mathcal{L}T$ соотношением:

$$\mathcal{L}T(\sigma + \mathrm{i}p) = [\mathcal{F}(\mathrm{e}_{-\sigma}T)](p),\ p \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Положим $F_\sigma(p) = \mathcal{L}T(\sigma+\mathrm{i}p)$ и покажем, что $F_\sigma = \mathcal{F}(\mathrm{e}_{-\sigma}T)$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеем в сокращенных обозначениях:

$$\langle F_\sigma, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \mathrm{e}^{-\sigma_1 x}T(x), \psi(x)\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_1)x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right\rangle \varphi(p)\mathrm{d}p =$$

$$= \left\langle \mathrm{e}^{-\sigma_1 x}T(x) \otimes \varphi(p), \psi(x)\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_1)x}\mathrm{e}^{-p\mathrm{i}x}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathrm{e}^{-\sigma_1 x}T(x), \left\langle \varphi(p), \psi(x)\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_1)x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathrm{e}^{-\sigma_1 x}T(x)\psi(x)\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_1)x}, \left\langle \varphi(x), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \left\langle T(x), \mathrm{e}^{-\sigma x}\mathcal{F}\varphi(x)\right\rangle = \left\langle T\mathrm{e}_{-\sigma}, \mathcal{F}\varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}(\mathrm{e}_{-\sigma}T), \varphi\right\rangle,$$

то есть $F_\sigma = \mathcal{F}(\mathrm{e}_{-\sigma}T)$.

b) Следствие (теорема единственности).

Пусть T и S — две обобщенные функции с носителями в замыкании $\mathbb{R}_+$ и обладающие преобразованиями Лапласа. Если существует $\sigma_0 \in \Gamma_T \cap \Gamma_S$ такое, что

$$\mathcal{L}T(\sigma_0 + \mathrm{i}p) = \mathcal{L}S(\sigma_0 + \mathrm{i}p),\ p \in \mathbb{R},$$

то $T = S$.

c) **Приложение теорем о перестановке и единственности (теорема обращения)**

Пусть S и T — две обобщенные функции с носителями в $\mathbb{R}_+$ и обладающие преобразованиями Лапласа для $\mathrm{Re}p > \sigma_S$ *и* $\mathrm{Re}p > \sigma_T$. *Если*

$$\mathcal{L}S(p)\mathcal{L}T(p) = 1, \ \mathrm{Re}p > \sigma_S \vee \sigma_T,$$

то S и T есть взаимно обратные элементы в сверточной алгебре $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Согласно теореме о перестановке, $(S * T)$ обладает преобразованием Лапласа и $\mathcal{L}(S * T)(p) = 1$ для $\mathrm{Re}p > \sigma_T \vee \sigma_S$. А тогда, в силу теоремы единственности, имеем $S * T = \delta$.

N.B. Из соотношения между преобразованиями Фурье и Лапласа и формулы обращения для преобразования Фурье можно вывести формулу Бромвича, позволяющую находить обобщенную функцию, зная ее образ Лапласа. Мы не будем ее приводить, потому что она редко применяется.

5^0. **Частные случаи.**

a) **Образы Лапласа для обобщенных функций с компактным носителем.**

Теорема. *Пусть $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Тогда $(\mathcal{L}T)(p)$ есть целая голоморфная функция, определенная на $\mathbb{C}$ формулой:*

$$(\mathcal{L}T)(p) = \langle T, \mathrm{e}_{-p} \rangle .$$

В самом деле, $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ обобщенная функция $(\mathrm{e}_{-\sigma} T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Поэтому $\Gamma_T = \mathbb{R}$ и $\mathcal{L}T(p)$ определена $\forall p \in \mathbb{C}$.

N.B. Отметим, что между преобразованием Лапласа для T и преобразованием Фурье-Лапласа этой же обобщенной функции T имеет место соотношение:

$$\mathcal{L}T(2\pi \mathrm{i}\zeta) = (\mathcal{F}\mathcal{L}T)(\zeta).$$

Примеры: $\mathcal{L}\delta_b(p) = \mathrm{e}^{-bp}, \ \forall b \geqslant 0$, и $\mathcal{L}(D^m\delta) = p^m, \ \forall m \in \mathbb{N}$.

b) **Образы Лапласа для функций.**

Теорема. *Пусть f — локально-интегрируемая функция с носителем в $\mathbb{R}_+$; пусть σ_f — абсцисса существования образа Лапласа для f. Кроме того, предположим, что $\forall \sigma > \sigma_f$, мера Радона, порождаемая функцией $f\mathrm{e}_{-\sigma}$, есть мера медленного роста. Тогда*

$$\mathcal{L}f(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-px} f(x)\mathrm{d}x, \ p \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\, p > \sigma_f.$$

Доказательство. Пусть $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $\sigma_f < \sigma_1 < \operatorname{Re} p$ и пусть ψ — функция, определенная на $\mathbb{R}$, класса C^∞, равная 1 на окрестности $\mathbb{R}_+$ и с носителем, ограниченным слева. Тогда имеем:

$$\left\langle \mathrm{e}_{-\sigma_1} f, \psi \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)} \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}_{-\sigma_1} f)(\psi - \mathrm{e}_{-(p-\sigma_1)}) \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-px} f(x) \mathrm{d}x.$$

Пример. Пусть функция $Y_\lambda^\alpha, \ \alpha > 0, \ \lambda \in \mathbb{C}$, определена формулой:

$$Y_\lambda^\alpha(x) = Y(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{-\lambda x}, \ x \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Тогда область существования образа Лапласа есть полуплоскость $P := \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} \lambda\}$ *и* $\forall p \in P$ *имеем:*

$$(\mathcal{L} Y_\lambda^\alpha)(p) = \frac{1}{(p+\lambda)\alpha}.$$

N.B. В этой формуле выбрана та ветвь функции $(p+\lambda)^\alpha$ в полуплоскости P, которая строго положительна для $(p+\lambda)$ действительных.

Доказательство. Для $\sigma \in \mathbb{R}$, где $\sigma < -\operatorname{Re} \lambda$, обобщенная функция, порождаемая функцией $Y_\lambda^\alpha \mathrm{e}_{-\sigma}$, не является обобщенной функцией медленного роста. С другой стороны, для $\sigma \in \mathbb{R}$, где $\sigma > -\operatorname{Re} \lambda$, мера Радона, порождаемая функцией Y_λ^α, есть мера медленного роста, то есть обобщенная функция медленного роста.

Итак, мы только что показали, что абсцисса существования образа Лапласа для Y_λ^α есть $-\operatorname{Re} \lambda$.

Пусть теперь $p \in \mathbb{C}$, где $\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} \lambda$. Тогда, в силу только что доказанной теоремы, имеем:

$$\mathcal{L} Y_\lambda^\alpha(p) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x = \frac{1}{(p+\lambda)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{\mathrm{i} \arg(p+\lambda) \infty} z^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-z} \mathrm{d}z.$$

И, в силу теоремы о вычетах, последний интеграл равен

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \Gamma(\alpha).$$

Приведем в заключение таблицу некоторых преобразований Лапласа, в которой $m \in \mathbb{N}, \ a \in \mathbb{C}, \ \omega, \mu \in \mathbb{R}$.

Оригинал	Образ	Область существования образа
1) δ	1	$\mathbb{C}$
2) δ_b, $b>0$	e^{-pb}	$\mathbb{C}$
3) $D^m\delta$	p^m	$\mathbb{C}$
4)Y	$\frac{1}{p}$	$\mathrm{Re}p>0$
5) Yx^m	$\frac{m!}{p^{m+1}}$	$\mathrm{Re}p>0$
6) $Yx^m\mathrm{e}^{-ax}$	$\frac{m!}{(p+a)^{m+1}}$	$\mathrm{Re}p>-\mathrm{Re}a$
7) $Y\cos\omega x$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}p>0$
8) $Y\sin\omega x$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}p>0$
9) $Y\mathrm{e}^{-\mu x}\cos\omega x$	$\frac{p+\mu}{(p+\mu)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}p>-\mu$
10) $Y\mathrm{e}^{-\mu x}\sin\omega x$	$\frac{\omega}{(p+\mu)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}p>-\mu$

N.B. Первые три строчки таблицы выводятся из 5^0. a), другие — из 5^0. b).

Литература

[1] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1976.

[2] Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1967.

[3] Шварц Л. *Анализ*. Т. I, II. М.: Мир, 1972.

[4] Шварц Л. *Математические методы для физических наук.* М.: Мир, 1965.