Б.Г. Габдулхаев

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Казань — 2006

Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова-Ленина

Б.Г. Габдулхаев

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Казань
2006

УДК 517.9 : 519.6

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Казанского государственного университета
от 26 мая 2006 г.

Научный редактор
кандидат физико-математических наук, доцент Ожегова А.В.

Габдулхаев Б.Г.

Теория приближенных методов решения операторных уравнений. Учебное пособие. — Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2006. — 112 с.

Излагается теория приближенных методов решения операторных уравнений в нормированных и гильбертовых пространствах. На ее основе строится теория наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений с приложениями к решению проблемы оптимизации прямых и проекционных методов.

Для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по теории функции и приближений, а также по прикладному функциональному анализу и вычислительным методам.

УДК 517.9 : 519.6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многочисленные теоретические и прикладные задачи науки, техники и производства приводят к необходимости решения различных классов операторных уравнений в функциональных пространствах; частными случаями таких уравнений являются хорошо известные интегральные, дифференциальные (как обыкновенные, так и в частных производных) и интегродифференциальные уравнения (одномерные и многомерные; линейные и нелинейные; регулярные и сингулярные; корректные и некорректные).

Указанные уравнения, как правило, точно не решаются. Поэтому для их решения разработаны и применяются различные приближенные методы (прямые, проекционные, итеративные, смешанные и др.). Однако, несмотря на полученные в этой области многочисленные результаты, она все еще далека от своего завершения.

Ниже излагается теория приближенных методов решения операторных (как правило, линейных) уравнений в банаховых и гильбертовых пространствах. Она трактуется нами как продолжение и дальнейшее развитие хорошо известной общей теории приближенных методов, предложенной академиком Л.В. Канторовичем для операторных уравнений второго рода и приводящихся к ним в определенном смысле; с другой стороны, она (предлагаемая теория) обусловлена приложениями к широким классам уравнений (первую очередь, к сингулярным интегральным и интегродифференциальным уравнениям и краевым задачам теории функций комплексных переменных), задача решения которых может быть поставлена как корректно, так и некорректно. Указанные результаты изложены в первой главе книги.

Во второй главе книги, как приложение результатов предыдущей главы, строится теория наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений и рассматриваются ее применения к решению проблемы оптимизации прямых и проекционных методов решения операторных уравнений в нормированных и гильбертовых пространствах.

Отметим, что изложение ведется в основном по результатам автора. При этом в каждой из глав принята автономная двойная нумерация формул, теорем и замечаний; например, теорема 2.3 и формула (4.5) гл. I (соответственно гл. II) означают теорему 3 § 2 и соответственно формулу 5 § 4 той главы, о которой идет речь.

Результаты книги неоднократно использовались на спецкурсах и спецсеминарах для студентов старших курсов и аспирантов механико–математического факультета Казанского государственного университета. Она может оказаться полезной также для специалистов по теории функций и приближений, прикладному функциональному анализу и вычислительным методам.

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА

Введение

В настоящее время по приближенным методам решения различных классов операторных уравнений имеются многочисленные работы (см., напр., работы [2]–[8], [10]–[20], [38]–[49], [53]–[64], [66], [67], [69], [71] и библиографию в них). Среди них исключительно важное значение имеют работы академика Л.В. Канторовича [45]–[49], в которых впервые предложена (1948 г.) и в дальнейшем развита общая теория приближенных методов решения операторных уравнений II-го рода и приводящихся к ним уравнений в определенном смысле. Эта теория сыграла решающую роль при обосновании различных приближенных методов и значительно способствовала появлению большого цикла исследований в области теории и приложений приближенных методов.

В этой главе книги дается компактное изложение некоторых результатов автора (см., напр., [10]–[20], [29], [31], [35]-[37]), полученных, по существу, в рамках общей теории Л.В. Канторовича и посвященных ее продолжению и развитию в следующем смысле.

1). В общей теории Канторовича существенное значение имеет требование о том, чтобы основные операторы K и $\widetilde{K}$ одновременно являлись линейными непрерывными операторами второго рода или же приводящимися к ним в определенном смысле. Предлагаемая ниже теория приближенных методов справедлива для общих линейных уравнений, т. е для общих операторных уравнений с линейными (аддитивными и однородными) операторами, в том числе она справедлива одновременно как для уравнений второго рода, так и для уравнений, приводящихся к ним в более широком[1] смысле, чем в [45]–[49].

2). Отправной точкой для получения основных теорем в теории Канторовича является доказательство существования решения приближенного уравнения, что в ряде случаев эквивалентно существованию линейного

[1]Имеются в виду сингулярные интегральные и интегродифференциальные уравнения и краевые задачи теории функций комплексных переменных в связи с их приближенными методами решения. Это обстоятельство явилось, по существу, основной причиной появления результатов этой главы.

непрерывного правого обратного оператора $\widetilde{K}_r^{-1}$ для аппроксимирующего оператора $\widetilde{K}$. Ниже общая теория приближенных методов строится в первую очередь на основании доказательства существования левого обратного оператора $\widetilde{K}_l^{-1}$ для аппроксимирующего оператора $\widetilde{K}$. Кроме того, как непосредственное обобщение теории Канторовича, строится также вариант теории приближенных методов, основанный на доказательстве существования правого обратного оператора $\widetilde{K}_r^{-1}$ для общего линейного приближенного уравнения.

3). В теории Канторовича основные операторы K, $\widetilde{K}$ и P предполагаются линейными непрерывными, причем оператор P является проекционным ($P^2 = P$). Однако на практике встречаются и такие приближенные методы, в которых это предположение не выполняется (такая ситуация возникает, например, при исследовании сходимости в среднем метода механических квадратур решения сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений). В связи с этим ниже рассматривается такой вариант общей теории, когда указанные операторы или же некоторые из них являются неограниченными, причем оператор P может и не быть проекционным.

4). Ввиду большой практической значимости специально исследуются прямые методы. В частности, рассматриваются вопросы устойчивости, обусловленности и практической реализации таких методов.

5). В теории Канторовича рассматриваются лишь такие уравнения, задача решения которых поставлена в классическом смысле корректно. Ниже рассматривается такой вариант общей теории, который приспособлен для применения и к некорректно поставленным задачам. В частности, предлагаются и исследуются два прямых метода решения некорректных задач в сепарабельных гильбертовых пространствах.

6). Исследуются аппроксимативно-итерационные методы, в том числе метод уточняющих итераций.

7). Предлагается теоретическое обоснование метода наименьших квадратов и метода минимальных невязок для линейных операторных уравнений в парах нормированных пространств.

8). Исследуются приближенные методы решения линейных и нелинейных уравнений с монотонными операторами в гильбертовых пространствах.

§ 1. Постановка задачи

Введем основные уравнения, пространства и операторы. Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, а $\widetilde{X} \subset X$ и $\widetilde{Y} \subset Y$ — их произвольные подпространства. Рассмотрим два уравнения: точное —

$$Kx = y \quad (x \in X,\ y \in Y) \tag{1.1}$$

и соответствующее ему приближенное —

$$\widetilde{K}\widetilde{x} = \widetilde{y} \quad (\widetilde{x} \in \widetilde{X},\ \widetilde{y} \in \widetilde{Y}), \tag{1.2}$$

где K и $\widetilde{K}$ — линейные (т. е аддитивные и однородные) операторы, действующие соответственно из X в Y и из $\widetilde{X}$ в $\widetilde{Y}$.

Иногда будем предполагать, что существует аддитивный и однородный (т. е. линейный) оператор P, отображающий Y на $\widetilde{Y} : PY = \widetilde{Y}$.

Пространства X и $\widetilde{X}$, Y и $\widetilde{Y}$, операторы K и $\widetilde{K}$, P и E (здесь и далее E — единичный оператор) являются в определенном смысле близкими, точнее, связанными между собой некоторыми условиями близости. Это дает основание называть уравнение (1.1) "точным", а уравнение (1.2) — "приближенным", соответствующим точному уравнению (1.1), что в свою очередь позволяет за приближенное решение точного уравнения (1.1) принять точное решение приближенного уравнения (1.2).

В дальнейшем, в зависимости от ситуации, нам понадобятся некоторые из следующих условий (точнее, в некоторой их совокупности)[2].

Условие А. $\widetilde{X} \subset X$ *и* $\widetilde{Y} \subset Y$ *— конечномерные подпространства одинаковой размерности:*

$$\dim \widetilde{X} = \dim \widetilde{Y} < \infty.$$

Условие Б. $P^2 = P$, $\widetilde{K}$ *— непрерывный оператор,* $\widetilde{X}$ *есть банахово пространство, причем для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $x \in X$ *существует элемент* $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ *такой, что*

$$\|PKx - \widetilde{K}\widetilde{x}\| < \varepsilon.$$

I. *Для любого* $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$

$$\|\widetilde{K}\widetilde{x} - PK\widetilde{x}\| \leqslant \varepsilon_1 \|\widetilde{x}\|.$$

[2]Отметим, что естественные ограничения, обусловленные возможной неограниченностью оператора P, а также операторов K и $\widetilde{K}$, вполне очевидны и поэтому здесь специально не оговариваются.

II. *Для любого* $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ *существует элемент* $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ *такой, что*

$$\|K\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \leqslant \varepsilon_2 \|\widetilde{x}\|,$$

где ε_1 *и* ε_2 *— положительные постоянные, не зависящие от* $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$.

III. *Для решения* $x_0 \in X$ *уравнения* $Kx_0 = \widetilde{y}$, *где* $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, *существует такой элемент* $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$, *что*

$$a) \ \|x_0 - \widetilde{x}_0\| \leqslant \varepsilon_3 \|x_0\|,$$

$$b) \ \|PKx_0 - PK\widetilde{x}_0\| \leqslant \varepsilon_3^0 \|x_0\|,$$

где постоянные ε_3 *и* ε_3^0 *не зависят от* x_0.

Ниже устанавливаются достаточные условия, при выполнении которых из существования соответственно левого, правого, одностороннего и двустороннего операторов K_l^{-1}, K_r^{-1}, K_s^{-1} и K^{-1} для точного уравнения (1.1) следует существование соответственно операторов $\widetilde{K}_l^{-1}$, $\widetilde{K}_r^{-1}$, $\widetilde{K}_s^{-1}$ и $\widetilde{K}^{-1}$ для приближенного уравнения (1.2). Эти результаты позволяют в свою очередь исследовать различные вопросы, связанные с разрешимостью приближенного уравнения и единственностью приближенного решения, а также с оценкой погрешности приближенного решения и сходимостью приближенных методов и т. п. При этом значительное внимание уделяется *прямым методам* решения операторных уравнений, имеющим существенное значение во всем дальнейшем изложении.

§ 2. Односторонняя и двусторонняя обратимость аппроксимирующих операторов

При выводе основных результатов работы существенным образом используются следующие вспомогательные леммы.

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие* A. *Тогда для того, чтобы оператор* $\widetilde{K}$ *из* (1.2) *имел левый линейный обратный* $\widetilde{K}_l^{-1}$, *необходимо и достаточно, чтобы этот оператор имел правый линейный обратный* $\widetilde{K}_r^{-1}$.

Следствие. *Пусть выполнено условие* A. *Тогда для существования двустороннего линейного обратного оператора* $\widetilde{K}^{-1}$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал любой из операторов* $\widetilde{K}_s^{-1}$ $(s = l$ *или* $r)$.

Доказательство этого утверждения может быть проведено различными способами (см., напр., в гл. 1 [10]). Мы будем пользоваться теорией Рисса–Шаудера [65] для конечномерных уравнений.

Итак, положим $m = \dim \widetilde{X} = \dim \widetilde{Y}$ и рассмотрим m-мерное евклидово пространство $\widetilde{Z} = \mathbb{E}_m$ с обычной нормой и скалярным произведением. Известно, что линейные нормированные пространства $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Z}$, а также $\widetilde{Y}$ и $\widetilde{Z}$ являются гомеоморфными. Пусть φ — гомеоморфизм $\widetilde{X}$ на $\widetilde{Z}$, а ψ — гомеоморфизм $\widetilde{Y}$ на $\widetilde{Z}$. Тогда уравнение (1.2) эквивалентно, очевидно, следующему операторному уравнению:

$$\widetilde{U}\widetilde{z} = \widetilde{f} \quad (\widetilde{z},\, \widetilde{f} \in \widetilde{Z}), \quad \widetilde{U} = \psi \widetilde{K} \varphi^{-1}, \quad \widetilde{f} = \psi \widetilde{y}, \quad \widetilde{z} = \varphi \widetilde{x}. \tag{2.1}$$

Легко видеть, что если оператор $\widetilde{K}$ имеет односторонний обратный $\widetilde{K}_s^{-1}$ $(s = l$ или $r)$, то в силу (2.1) оператор $\widetilde{U}$ имеет также соответствующий обратный $\widetilde{U}_s^{-1}$ $(s = l$ или $r)$, и наоборот, причем

$$\widetilde{U}_s^{-1} = \varphi \widetilde{K}_s^{-1} \psi^{-1}, \quad \widetilde{K}_s^{-1} = \varphi^{-1} \widetilde{U}_s^{-1} \psi. \tag{2.2}$$

Поэтому лемму достаточно доказать применительно к оператору $\widetilde{U}$ из (2.1). При этом существенно будем использовать соотношения (см., напр., [65])

$$R(\widetilde{U}) \oplus N(\widetilde{U}^*) = \widetilde{Z} = R(\widetilde{U}^*) \oplus N(\widetilde{U}), \tag{2.3}$$

$$\dim N(\widetilde{U}) = \dim N(\widetilde{U}^*) < \infty, \tag{2.4}$$

эквивалентные теории Рисса–Шаудера для уравнения (2.1), заданного в конечномерном гильбертовом пространстве $\widetilde{Z}$; здесь и далее $\widetilde{U}^* = (\widetilde{U})^*$ — соответствующий сопряженный оператор.

Пусть существует левый линейный обратный $\widetilde{U}_l^{-1}$. Тогда подпространство нулей линейного оператора $\widetilde{U}$ пусто, т. е. $N(\widetilde{U}) = \emptyset$. В силу (2.4) имеем $N(\widetilde{U}^*) = \emptyset$, т. е. подпространство нулей сопряженного оператора $\widetilde{U}^*$ тоже пусто. Поэтому из первой части равенств (2.3) находим $\widetilde{Z} = R(\widetilde{U})$, откуда уже легко убедиться в существовании $\widetilde{U}_r^{-1}$. Отсюда и из соотношений (2.2) следует справедливость необходимости условий леммы.

Пусть теперь существует правый линейный обратный $\widetilde{U}_r^{-1}$. Так как $R(\widetilde{U}) = \widetilde{Z}$, то из первой части равенств (2.3) следует $N(\widetilde{U}^*) = \emptyset$, а значит, в силу (2.4) и $N(\widetilde{U}) = \emptyset$. Но тогда из второй части равенств (2.3) получаем условие $\widetilde{Z} = R(\widetilde{U}^*)$, достаточное для существования левого линейного обратного оператора $\widetilde{U}_l^{-1}$. Отсюда и из соотношений (2.2) следует справедливость достаточности условий леммы.

Замечание 2.1. Отметим, что условия леммы 2.1 относительно $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ не могут быть ослаблены. Действительно, пусть, напр., $\dim \widetilde{X} = n < < m = \dim \widetilde{Y} < \infty$. Тогда оставшиеся условия леммы обеспечивают существование левого обратного оператора $\widetilde{K}_l^{-1}$. При этих предположениях приближенное уравнение (1.2) можно подобрать так, чтобы оно было в определенном смысле эквивалентно переопределенной системе из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Поскольку такая система не всегда совместна, то правый обратный оператор $\widetilde{K}_r^{-1}$ будет существовать не всегда.

Лемма 2.2. *Для того, чтобы линейный оператор $K : X \longrightarrow Y$ имел левый линейный обратный K_l^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *подпространство нулей $N(K)$ оператора K было тривиальным, т. е.*

$$N(K) \equiv \{x \in X : Kx = 0\} = \{0\};$$

2) *множество значений $R(K)$ оператора $K : X \longrightarrow Y$ имело прямое дополнение в пространстве Y.*

Лемма 2.3. *Для того, чтобы линейный оператор $K : X \longrightarrow Y$ имел правый линейный обратный K_r^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *множество значений $R(K)$ оператора K совпадало с Y, т.е. $R(K) \equiv KX = Y$;*

2) *множество $N(K)$ имело прямое дополнение в пространстве X.*

Лемма 2.4. *Пусть X — полное линейное нормированное пространство и*

$$\|U\| \leqslant q < 1.$$

Тогда оператор $E - U : X \longrightarrow X$ имеет линейный непрерывный обратный, причем

$$\|(E - U)^{-1}\| \leqslant 1/(1 - q).$$

Следствие. *Пусть* X, Y *— банаховы пространства,* G, U : $X \longrightarrow Y$ *— линейные непрерывные операторы, причем существует линейный обратный оператор* $G^{-1} : Y \longrightarrow X$ *такой, что*

$$\|G^{-1}U\|_{X \to X} \leqslant q < 1.$$

Тогда оператор $G - U : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратим и*

$$\|(G - U)^{-1}\| \leqslant \|G^{-1}\|/(1 - q).$$

Лемма 2.5. *Пусть* X, Y *— линейные нормированные пространства,* K *— линейный оператор из* X *в* Y.

Тогда для того, чтобы оператор K *был непрерывно обратимым слева, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная* $m > 0$, *не зависящая от элементов* $x \in X$, *такая, что*

$$\|Kx\| \geqslant m||x||, \ \forall x \in X.$$

При выполнении этого неравенства имеем

$$\|K_l^{-1}\| \leqslant 1/m, \quad K_l^{-1} : Y \longrightarrow X.$$

Лемма 2.6. *Если линейный оператор* U, *переводящий банахово пространство* X *в банахово пространство* Y, *имеет левый линейный непрерывный обратный* U_l^{-1}, *то множество* $Y' = UX$ *представляет собой банахово пространство.*

Следствие. *В условиях леммы множество* Y' *замкнуто в* Y.

Лемма 2.7. *Пусть* U *— линейный непрерывный оператор из банахова пространства* X *в банахово пространство* Y *и пусть для каждого* $y \in Y$ *существует такой элемент* $x \in X$, *что*

$$||Ux - y|| \leqslant q||y||; \ ||x|| \leqslant N||y||,$$

где $q < 1$ *и* N *— положительные постоянные. Тогда уравнение*

$$Ux = y$$

при любом $y \in Y$ *имеет решение* $x^* \in X$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|x^*\| \leqslant \frac{N}{1-q}\|y\|.$$

Лемма 2.8. *Если X — банахово пространство, то и фактор-пространство X/X_0 пространства X по произвольному фиксированному подпространству $X_0 \subset X$ будет банаховым.*

В дальнейшем существенную роль играет следующая

Теорема 2.1. *Пусть оператор K имеет левый линейный непрерывный обратный $\widetilde{K}_l^{-1}$, а оператор $E - P : Y^0 \to Y$ ограничен, где*

$$Y^0 = \{y = K\widetilde{x} - \widetilde{y} \in Y : \ \widetilde{x} \in \widetilde{X}, \ \widetilde{y} \in \widetilde{Y}\} \subset Y.$$

Если выполнены условия I, II, $P^2 = P$ *и*

$$p = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|E - P\|_{Y^0 \to Y}) \|K_l^{-1}\| < 1, \tag{2.5}$$

то приближенный оператор $\widetilde{K}$ имеет также левый линейный непрерывный обратный $\widetilde{K}_l^{-1}$, причем

$$\|\widetilde{K}_l^{-1}\| \leqslant \|K_l^{-1}\| (1 - p)^{-1}. \tag{2.6}$$

Следствие. *Пусть выполнено одно из следующих условий: а)* А; *б)* Б; *в) уравнение* (1.2) *является уравнением второго рода с вполне непрерывным оператором в полном пространстве $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$. Если оператор K имеет двусторонний линейный непрерывный обратный K^{-1}, то при*

$$p = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|E - P\|_{Y^0 \to Y}) \|K^{-1}\| < 1 \tag{2.7}$$

приближенный оператор $\widetilde{K}$ имеет также линейный двусторонний оператор $\widetilde{K}^{-1}$ и

$$\|\widetilde{K}^{-1}\| \leqslant \|K^{-1}\| (1 - p)^{-1}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ — элемент, удовлетворяющий условию II. Тогда для любого $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ с учетом $P^2 = P$ имеем

$$\|K\widetilde{x} - PK\widetilde{x}\| = \|(E - P)(K\widetilde{x} - \widetilde{y})\| \leqslant \varepsilon_2 \|E - P\|_{Y^0 \to Y} \|\widetilde{x}\|.$$

Поэтому для любого $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ с учетом условия I последовательно находим

$$\|K\widetilde{x} - \widetilde{K}\widetilde{x}\| \leqslant \|K\widetilde{x} - PK\widetilde{x}\| + \|PK\widetilde{x} - \widetilde{K}\widetilde{x}\| \leqslant \varepsilon_1 \|\widetilde{x}\| +$$

$$+ \varepsilon_2 \|E - P\|_{Y^0 \to Y} \|\widetilde{x}\| = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|E - P\|_{Y^0 \to Y}) \|\widetilde{x}\|. \tag{2.9}$$

С помощью неравенства (2.9) любого $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ находим

$$\|\widetilde{K}\widetilde{x}\| \geqslant \|K\widetilde{x}\| - \|\widetilde{K}\widetilde{x} - K\widetilde{x}\| \geqslant \|K_l^{-1}\|^{-1}\|\widetilde{x}\| -$$
$$-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\|E - P\|_{Y^0\to Y})\|\widetilde{x}\| = \|K_l^{-1}\|^{-1}(1-p)\|\widetilde{x}\|.$$

Отсюда в силу (2.5) и леммы 2.5 следует существование левого обратного оператора $\widetilde{K}_l^{-1}$ и справедливость оценки (2.6).

Предположим теперь, что существует двусторонний линейный оператор K^{-1} и выполнено неравенство (2.7). Тогда в силу теоремы существует левый обратный $\widetilde{K}_l^{-1}$. Поэтому в случае а) из следствия леммы 2.1 вытекает также существование $\widetilde{K}_r^{-1}$, что равносильно равенствам $\widetilde{K}_l^{-1} = \widetilde{K}_r^{-1} = \widetilde{K}^{-1}$, а это приводит, очевидно, к оценке (2.8).

В случае б) доказательство ведется следующим образом. Поскольку линейный оператор $\widetilde{K}$ имеет левый линейный обратный $\widetilde{K}_l^{-1}$, то в силу леммы 2.6 множество $\widetilde{Y}' = R(\widetilde{K})$ замкнуто в подпространстве $\widetilde{Y}$. С другой стороны, т. к. $\widetilde{Y} = PY = PKX$ в силу существования K^{-1} и $\widetilde{Y}' = \widetilde{K}\widetilde{X}$ согласно определению, то с помощью условия Б можно показать, что множество $\widetilde{Y}'$ всюду плотно в пространстве $\widetilde{Y}$. Тогда $R(\widetilde{K}) = \widetilde{Y} = \widetilde{Y}'$, и поэтому уравнение (1.2) разрешимо при любой правой части $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$. Отсюда и из теоремы 2.1 получаем требуемое утверждение.

В случае же в) справедливость следствия вытекает из теоремы 2.1 и теорем Фредгольма для операторных уравнений второго рода с вполне непрерывными операторами.

В приложениях оказывается полезным

Замечание 2.2. Справедливы следующие утверждения:

а) Оператор $E-P : Y^0 \longrightarrow Y$ очень часто является ограниченным, если даже оператор $P : Y \longrightarrow Y$ не ограничен (см., напр., [10]–[13], [17], [18]).

б) Если $P : Y \longrightarrow Y$ — ограниченный оператор, то в условиях теоремы 2.1, несколько огрубляя, можно положить

$$p \leqslant [\varepsilon_1 + (1 + \|P\|)\varepsilon_2]\|K_l^{-1}\| \leqslant (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\|P\|)\|K_l^{-1}\|.$$

в) Если $P^2 \neq P$, то теорема 2.1 не верна. В этом случае, как видно из ее доказательства, справедлива (см. также [69]) следующая

Теорема 2.1$'$. *Пусть оператор K имеет левый линейный непрерывный обратный K_l^{-1}, а оператор $\triangle K = K - \widetilde{K} : \widetilde{X} \longrightarrow Y$ ограничен.*

Если
$$p' = \|\triangle K\|\,\|K_l^{-1}\| < 1,\ \triangle K : \widetilde{X} \longrightarrow Y, \tag{2.5'}$$
то приближенный оператор $\widetilde{K}$ *имеет также левый линейный непрерывный обратный* $\widetilde{K}_l^{-1}$, *причем*
$$\|\widetilde{K}_l^{-1}\| \leqslant \|K_l^{-1}\|(1-p')^{-1}. \tag{2.6'}$$

Далее, имеет место следующая

Теорема 2.2. *Пусть оператор* K *имеет правый линейный непрерывный обратный* K_r^{-1} *и выполнены условия* I *и* III *с*
$$q = (2\varepsilon_1 + \varepsilon_3^0)\|K_r^{-1}\| < 1. \tag{2.10}$$
Если подпространство нулей $N(\widetilde{K})$ *линейного оператора* $\widetilde{K}$ *имеет прямое дополнение в банаховом пространстве* $\widetilde{X}$, *то приближенный оператор* $\widetilde{K}$ *имеет также правый линейный непрерывный обратный* $\widetilde{K}_r^{-1}$ *и*
$$\|\widetilde{K}_r^{-1}\| \leqslant 2\|K_r^{-1}\|(1-q)^{-1}. \tag{2.11}$$

Следствие 1. *Пусть оператор* K *имеет двусторонний линейный непрерывный обратный* K^{-1}, *выполнены условия* A, I *и* III *с*
$$q = (2\varepsilon_1 + \varepsilon_3^0)\|K^{-1}\| < 1. \tag{2.12}$$
Тогда оператор $\widetilde{K}$ *имеет также двусторонний линейный обратный* $\widetilde{K}^{-1}$ *и*
$$\|\widetilde{K}^{-1}\| \leqslant 2\|K^{-1}\|(1-q)^{-1}. \tag{2.13}$$

Следствие 2. *Пусть* X, Y, $\widetilde{X}$ *— полные пространства, а* K *и* $\widetilde{K}$ *— линейные непрерывные операторы. Обозначим через* $\overline{X} = X/N(K)$ *фактор-пространство пространства* X *по подпространству нулей* $N(K)$ *оператора* K, *а через* $\overline{K}$ *линейный оператор из* $\overline{X}$ *в* Y, *индуцированный оператором* K. *Если уравнение* (1.1) *разрешимо при любом* $y \in Y$ *и выполнены условия* I *и* III, *то при*
$$q_1 = 2(2\varepsilon_1 + \varepsilon_3^0)\|\overline{K}^{\,-1}\| < 1 \tag{2.14}$$
приближенное уравнение (1.2) *имеет решение* $\widetilde{x^*} \in \widetilde{X}$ *при любом* $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, *причем*
$$\|\widetilde{x^*}\| \leqslant 4\|\overline{K}^{\,-1}\|(1-q_1)^{-1}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Рассмотрим решение x_0 уравнения $Kx = \widetilde{y}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$. Тогда для любого $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ имеем $\|x_0\| \leqslant \|K_r^{-1}\| \, \|\widetilde{y}\|$. По условию III а) существует элемент $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ такой, что для любого $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$

$$\|\widetilde{x_0}\| \leqslant \|x_0 - \widetilde{x_0}\| + \|x_0\| \leqslant 2\|K_r^{-1}\| \, \|\widetilde{y}\|. \tag{2.16}$$

С другой стороны, для любого $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ с помощью условий I, III б) и (2.12) находим

$$\|\widetilde{K}\widetilde{x_0} - \widetilde{y}\| \leqslant \|\widetilde{K}\widetilde{x_0} - PK\widetilde{x_0}\| + \|PK\widetilde{x_0} - PKx_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1\|\widetilde{x_0}\| + \varepsilon_3^0\|x_0\| \leqslant q\|\widetilde{y}\|. \tag{2.17}$$

Тогда в силу (2.10), (2.16) и (2.17) и известной леммы[3] Л.В. Канторовича [47, с.489] (см. также выше лемму 2.7) приближенное уравнение (1.2) имеет решение $\widetilde{x}^*$ при любой правой части $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, причем

$$\|\widetilde{x}^*\| \leqslant 2\|K_r^{-1}\|(1-q)^{-1}\|\widetilde{y}\|. \tag{2.18}$$

Из (2.18) и из того, что множество $N(\widetilde{K})$ имеет прямое дополнение в $\widetilde{X}$, в силу леммы 2.3 следует существование оператора $\widetilde{K}_r^{-1}$ и справедливость оценки (2.11).

Справедливость следствия 1 вытекает из леммы 2.1 и хода доказательства теоремы 2.2.

Докажем следствие 2. Поскольку $R(K) = Y$, то (см., напр., [47]) оператор $\overline{K}$ осуществляет взаимно однозначное отображение полного пространства $\overline{X}$ на полное пространство Y. Поэтому существует непрерывный оператор $\overline{K}^{\,-1} : Y \longrightarrow \overline{X}$, откуда в свою очередь следует существование такого элемента x_0, $Kx_0 = \widetilde{y}$, что для любого $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ справедливо неравенство $\|x_0\| \leqslant 2\|\overline{K}^{\,-1}\| \, \|\widetilde{y}\|$. Дальнейшее следует из хода доказательства теоремы 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть X, Y, $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ — полные пространства и существует оператор U такой, что*

$$U : X \to Y, \quad \|U - K\| \leqslant \eta_1; \quad U : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}, \quad \|U - \widetilde{K}\| \leqslant \eta_2. \tag{2.19}$$

Если оператор K имеет односторонний линейный непрерывный обратный K_s^{-1} $(s = l$ или $r)$, то при

$$t_s = (\eta_1 + \eta_2)\|K_s^{-1}\| < 1 \quad (s = l \text{ или } r) \tag{2.20}$$

[3] Эта лемма, как видно из способа ее доказательства, справедлива также для неполных подпространств $\widetilde{Y}$.

приближенный оператор $\widetilde{K}$ *имеет также односторонний линейный обратный* $\widetilde{K}_s^{-1}$, *причем*

$$\|\widetilde{K}_s^{-1}\| \leqslant \|K_s^{-1}\|(1-t_s)^{-1} \quad (s = l \text{ *или* } r). \tag{2.21}$$

Следствие. *Если оператор* K *имеет двусторонний линейный обратный* K^{-1} *и*

$$t = (\eta_1 + \eta_2)\|K^{-1}\| < 1, \tag{2.22}$$

то оператор $\widetilde{K}$ *имеет также двусторонний линейный обратный* $\widetilde{K}^{-1}$ *и*

$$\|\widetilde{K}^{-1}\| \leqslant \|K^{-1}\|(1-t)^{-1}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Так как для любого $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$

$$\|K\widetilde{x} - \widetilde{K}\widetilde{x}\| \leqslant \|K\widetilde{x} - U\widetilde{x}\| + \|U\widetilde{x} - \widetilde{K}\widetilde{x}\| \leqslant (\eta_1 + \eta_2)\|\widetilde{x}\|,$$

то при $s = l$ доказательство теоремы немедленно следует из доказательства теоремы 2.1. Однако здесь приведем доказательство сразу для любого s $(s = l$ или $r)$.

Итак, пусть существует K_l^{-1} или K_r^{-1}. Тогда оператор U можно представить в виде соответственно

$$U = [E_y - (K-U)K_l^{-1}]K, \quad U = K[E_x - K_r^{-1}(K-U)], \tag{2.24}$$

где E_y и E_x — единичные операторы в Y и X соответственно.

Поскольку $t_1 = \eta_1\|K_s^{-1}\| \leqslant t < 1$, то из соотношений (2.24) нетрудно видеть, что оператор U имеет обратный

$$U_s^{-1} : Y \to X, \quad \|U_s^{-1}\| \leqslant \|K_s^{-1}\|(1-t_1)^{-1}. \tag{2.25}$$

Очевидно, что в силу (2.19) существует также

$$U_s^{-1} : \widetilde{Y} \to \widetilde{X}, \quad \|U_s^{-1}\|_{\widetilde{Y}\to\widetilde{X}} \leqslant \|U_s^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant \|K_s^{-1}\|(1-t_1)^{-1}. \tag{2.26}$$

Благодаря (2.20) и (2.26) имеем

$$t_2 = \eta_2\|U_s^{-1}\|_{\widetilde{Y}\to\widetilde{X}} \leqslant \eta_2\|K_s^{-1}\|(1-t_1)^{-1} < 1.$$

Поэтому с помощью соотношений

$$\widetilde{K} = [\widetilde{E}_y - (U-\widetilde{K})\,U_l^{-1}]U, \quad \widetilde{K} = U[\widetilde{E}_x - U_r^{-1}(U-\widetilde{K})], \tag{2.27}$$

где $\widetilde{E}_y$ и $\widetilde{E}_x$ — единичные операторы в $\widetilde{Y}$ и $\widetilde{X}$ соответственно, справедливых при существовании соответственно U_l^{-1} и U_r^{-1}, находим, что приближенный оператор $\widetilde{K}$ имеет обратный

$$\widetilde{K}_s^{-1} : \widetilde{Y} \to \widetilde{X}, \quad \|\widetilde{K}_s^{-1}\| \leqslant \|U_s^{-1}\|(1 - t_2)^{-1}. \tag{2.28}$$

Из соотношений (2.20), (2.25)–(2.28) и из легко проверяемого неравенства

$$t_1 + t_2 - t_1 t_2 \leqslant t \equiv (\eta_1 + \eta_2)\|K_s^{-1}\|, \tag{2.29}$$

где $t_1 = \eta_1\|K_s^{-1}\|$, $t_2 = \eta_2\|U_s^{-1}\| \leqslant \eta_2\|K_s^{-1}\|(1 - t_1)^{-1}$, находим оценку (2.21), а из нее и из (2.22) следует, очевидно, оценка (2.23).

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие* Б *и множество* $R(\widetilde{K})$ *замкнуто в* $\widetilde{Y}$. *Если уравнение* (1.1) *разрешимо при любой правой части, то уравнение* (1.2) *также разрешимо при любой правой части.*

Следствие. *Пусть выполнено одно из следующих условий: а)* А*; б)* $\widetilde{K} = E + \widetilde{H}$, *где* E *— единичный, а* $\widetilde{H}$ *— вполне непрерывный операторы в полном пространстве* $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$. *Если, кроме того, выполняется условие* Б, *а оператор* K *имеет двусторонний линейный обратный, то приближенный оператор* $\widetilde{K}$ *имеет также двусторонний линейный обратный.*

Действительно, условия теоремы обеспечивают, как мы уже видели при доказательстве случая б) следствия из теоремы 2.1, справедливость равенства $R(\widetilde{K}) = \widetilde{Y}$, откуда следует разрешимость уравнения (1.2) при любой правой части $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$. Тогда справедливость следствия в случае а) вытекает, очевидно, из леммы 2.1, а в случае б) легко доказывается с помощью теорем Фредгольма для операторных уравнений второго рода.

§ 3. О погрешности приближенного решения

В дальнейшем, как уже отмечалось в § 1, решение $\widetilde{x}^*$ приближенного уравнения (1.2) принимается за приближение к решению x^* точного уравнения (1.1). В следующих теоремах и их следствиях устанавливается оценка погрешности приближенного решения.

Теорема 3.1. *Пусть существует линейный оператор* K^{-1} *и уравнение* (1.2) *имеет решение* $\widetilde{x}^*$ *при любой правой части* $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$. *Тогда* *справедлива следующая двусторонняя оценка:*

$$\delta\|K\|^{-1} \leqslant \|x^* - \widetilde{x}^*\| \leqslant \delta\|K^{-1}\|, \tag{3.1}$$

где

$$\delta = \|y - \widetilde{y} + (\widetilde{K} - K)\,\widetilde{x}^{\,*}\|.$$

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *Если выполнено неравенство*

$$p = \|K^{-1}\|\,\|K - \widetilde{K}\| < 1, \quad K - \widetilde{K} : \widetilde{X} \to Y, \tag{3.2}$$

то в условиях следствия из теоремы 2.1 *справедлива оценка*

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\| \leqslant \{\|y - \widetilde{y}\| + p\|y\|\}\|K^{-1}\|(1-p)^{-1}. \tag{3.3}$$

б) *Если выполнены условия* I *и* II *с*

$$p' = \|K^{-1}\|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\|E - P\|_{Y_0 \to Y}) < 1, \tag{3.2$'$}$$

то в условиях следствия из теоремы 2.1 *справедлива оценка* (3.3) *с заменой* p *на* p', *где* $Y^0 = \{y^0\}$ — *множество элементов из* Y, *представимых в виде*

$$y^0 = K\widetilde{x} - \widetilde{y} \quad (\widetilde{x} \in \widetilde{X},\, \widetilde{y} \in \widetilde{Y}).$$

Доказательство. Так как уравнения (1.1) и (1.2) разрешимы при любых правых частях соответственно $y \in Y$ и $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, то справедливо тождество

$$y - K\widetilde{x}^* = K(x^* - \widetilde{x}^*) = y - \widetilde{y} + (\widetilde{K} - K)\,\widetilde{x}^*. \tag{3.4}$$

Поскольку

$$\|K(x^* - \widetilde{x}^*) \geqslant \|K^{-1}\|^{-1}\|x^* - \widetilde{x}^*\|, \quad \|K(x^* - \widetilde{x}^*)\| \leqslant \|K\|\,\|x^* - \widetilde{x}^*\|,$$

то из тождества (3.4) легко выводятся оценки (3.1). Далее, в условиях следствия с помощью неравенства (2.8) последовательно находим

$$\delta \leqslant \|y - \widetilde{y}\| + \|\widetilde{K} - K\|\,\|\widetilde{x}^{\,*}\| \leqslant \|y - \widetilde{y}\| + \|\triangle K\|_{\widetilde{X} \to Y}\|\widetilde{K}^{-1}\|\,\|\widetilde{y}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|y - \widetilde{y}\| + \|\triangle K\|_{\widetilde{X} \to Y}\|K^{-1}\|(1-p)^{-1}\|\widetilde{y}\| =$$
$$= \|y - \widetilde{y}\| + p(1-p)^{-1}\|\widetilde{y}\| \leqslant (\|y - \widetilde{y}\| + p\|y\|)(1-p)^{-1}, \tag{3.5}$$

откуда и следует утверждение следствия в случае а). Отсюда и из замечания 2.2 получаем утверждение следствия и в случае б).

Теорема 3.1 при несколько более жестких условиях допускает (с учетом замечания 2.2) формулировку, которая более удобна для приложений.

Теорема 3.1′. *Пусть оператор* $\widetilde{K}$ *имеет линейный обратный (например, в условиях следствия любой из теорем* 2.1 − 2.4*) и выполнены условия* I *и* II *с ограниченным оператором* P. *Если уравнение* (1.1) *имеет решение* x^* *при данной правой части* $y \in Y$, *то для невязки справедлива оценка*

$$\|y - K\widetilde{x}^*\| \leqslant r\|\widetilde{y}\| + \|y - \widetilde{y}\|, \tag{3.5′}$$

где $\widetilde{x}^*$ *— решение уравнения* (1.2) *при правой части* $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, *а*

$$r = (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\|P\|)\|\widetilde{K}^{-1}\|. \tag{3.6}$$

Если же существует непрерывный оператор K^{-1}, *то для решений уравнений* (1.1) *и* (1.2) *справедлива оценка*

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\| \leqslant \|K^{-1}\|(r\|\widetilde{y}\| + \|\widetilde{y} - y\|). \tag{3.7}$$

Теорема 3.2. *Пусть уравнение* (1.1) *имеет решение* $x^* \in X$ *при данной правой части* $y \in Y$ *и оператор* $\widetilde{K}$ *имеет линейный обратный. Тогда абсолютная погрешность приближенного решения* $\widetilde{x}^*$ *для правой части* $\widetilde{y} = Py$ *представляется в виде*

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\| = \|E - \widetilde{K}^{-1}PK)(x^* - \widetilde{x}) + \widetilde{K}^{-1}(\widetilde{K}\widetilde{x} - PK\widetilde{x})\|, \tag{3.8}$$

где $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ *— произвольный элемент, который может быть выбран исходя из минимальности правой части* (3.8).

Следствие 1. *Пусть* $K = E + \lambda H$, $\widetilde{K} = E + \lambda\widetilde{H}$, *где* H *и* $\widetilde{H}$ *— линейные непрерывные операторы в нормированных пространствах соответственно* $X = Y$ *и* $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$, *а* λ *— параметр. Если* $\widetilde{H} - PH$ *непрерывен в* $\widetilde{X}$, PH *— непрерывен из* $X - \widetilde{X}$ *в* $\widetilde{X}$, *а* $P^2 = P$, *то в условиях теоремы* 3.2 *справедлива оценка*

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\| = \|(E - \lambda\widetilde{K}^{-1}PH)(x^* - Px^*) + \lambda\widetilde{K}^{-1}(\widetilde{H} - PH)Px^*\| \leqslant$$

$$\leqslant (1 + |\lambda|\|\widetilde{K}^{-1}PH\|)\|x^* - Px^*\| + |\lambda|\|\widetilde{K}^{-1}\|\,\|(\widetilde{H} - PH)Px^*\|. \tag{3.9}$$

Следствие 2. *Пусть* $K = G + T,\ \widetilde{K} = G + \widetilde{T},\ \widetilde{y} = Py,\ P^2 = P$, *где* G, T *и* $\widetilde{T}$ *— линейные операторы соответственно из* X *в* Y *и из* $\widetilde{X}$ *в* $\widetilde{Y}$. *Пусть* $G(X) = Y,\ G(\widetilde{X}) = \widetilde{Y}$ *и существует линейный обратный* $G^{-1} : Y \longrightarrow X,\ G^{-1} : \widetilde{Y} \longrightarrow \widetilde{X}$. *Тогда в условиях теоремы* 3.2 *справедливо соотношение*

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\| = \|(E - \widetilde{K}^{-1}PT)(x^* - G^{-1}PGx^*)+$$

$$+\widetilde{K}^{-1}(\widetilde{T} - PT)\, G^{-1}\, P\, G\, x^*\|. \tag{3.10}$$

Доказательство. Так как $y = Kx^*$ и $\widetilde{K}\widetilde{x}^* = Py$, то $\widetilde{K}\widetilde{x}^* = PKx^*$ и $\widetilde{x}^* = \widetilde{K}^{-1}PKx^*$. Тогда для любого $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ последовательно находим тождества

$$x^* - \widetilde{x}^* = (E - \widetilde{K}^{-1}PK)x^* = (E - \widetilde{K}^{-1}PK)(x^* - \widetilde{x})+$$

$$+(E - \widetilde{K}^{-1}PK)\widetilde{x} = (E - \widetilde{K}^{-1}PK)(x^* - \widetilde{x}) + \widetilde{K}^{-1}(\widetilde{K}\widetilde{x}^* - PK\widetilde{x}), \tag{3.11}$$

откуда следует оценка (3.8)

В условиях следствия 1 тождество (3.11) принимает вид

$$x^*-\widetilde{x}^* = (E-\lambda\widetilde{K}^{-1}PH)(x^*-\widetilde{x})+\lambda\widetilde{K}^{-1}(\widetilde{H}\widetilde{x}-PH\widetilde{x})-\widetilde{K}^{-1}P(x^*-\widetilde{x}). \tag{3.12}$$

Выберем элемент $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ так, чтобы $\widetilde{K}^{-1}P(x^* - \widetilde{x}) = 0$. Ясно, что в силу $P^2 = P$ это будет так при $\widetilde{x} = Px^*$. Но тогда из (3.12) при $\widetilde{x} = Px^*$ следует оценка (3.9), т. е. следствие 1 доказано.

Для доказательства следствия 2 в тождестве (3.11) положим $\widetilde{x} = G^{-1}PGx^*$. Тогда с учетом равенства $\widetilde{K}\widetilde{x} - PK\widetilde{x} = \widetilde{T}\widetilde{x} - PT\widetilde{x}$ из (3.11) находим

$$x^* - \widetilde{x}^* = (E - \widetilde{K}^{-1}PK)(x^* - G^{-1}PGx^*) + \widetilde{K}^{-1}(\widetilde{T} - P\,T)G^{-1}PGx^*. \tag{3.13}$$

Поскольку $PG(x^* - G^{-1}PGx^*) = 0$, то из (3.13) следует оценка (3.10).

Отметим, что из теоремы 3.2 следуют соответствующие результаты [45]–[49], полученные для частных случаев более сложным способом, чем здесь.

§ 4. Прямые методы решения операторных уравнений

По определению С.Л. Соболева (см., напр., [62]–[64]), *прямыми методами* решения операторных уравнений называются такие приближенные методы, которые приводят к решению конечных систем линейных алгебраических уравнений (кратко: СЛАУ). Этим обусловливается, в частности, та особая роль, которую играют прямые методы среди других приближенных методов.

В этом параграфе приводятся некоторые результаты по прямым методам решения линейных операторных уравнений, которые получаются в основном на базе результатов §§ 2 и 3.

Итак, пусть X и Y — полные линейные нормированные пространства, а X_n и Y_n— произвольные последовательности их конечномерных подпространств: $X_n \subseteq X,\ Y_n \subseteq Y\ \ (n = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим уравнения

$$Kx = y \quad (x \in X,\, y \in Y), \tag{4.1}$$

$$K_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\, y_n \in Y_n), \tag{4.2}$$

где K и K_n — линейные операторы из X в Y и из X_n в Y_n соответственно.

Очевидно, что уравнение (4.2) эквивалентно системе из $m_2 = m_2(n) = \dim Y_n$ линейных алгебраических уравнений с $m_1 = m_1(n) = \dim X_n$ неизвестными, т. е. мы имеем здесь дело с прямым методом решения уравнения (4.1). Если же выполняется условие А, т. е. $\dim X_n = \dim Y_n = m = m(n) < \infty$, то получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей $m \otimes m$, что существенно облегчает численную реализацию прямых методов.

Из теорем 2.1 и 3.1 (и их следствий) вытекает

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия:*
а) *оператор* $K : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратим;*
б) $\varepsilon^{(n)} \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to Y} \to 0, \quad n \to \infty;$ (4.3)
в) $\dim X_n = \dim Y_n = m(n) < \infty\ \ (n = 1, 2, \ldots).$
Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих неравенству*

$$p_n = \|K^{-1}\|\,\|K - K_n\| < 1, \quad K - K_n : X_n \to Y, \tag{4.4}$$

приближенное уравнение (4.2) *имеет единственное решение* $x_n^* \in X_n$ *при любой правой части* $y_n \in Y_n$*, причем*

$$\|x_n^*\| \leqslant \|K_n^{-1}\| \, \|y_n\|, \quad \|K_n^{-1}\| \leqslant \|K^{-1}\|(1-p_n)^{-1}. \tag{4.5}$$

Если, кроме того, выполнено условие

г) $\delta^{(n)} \equiv \|y - y_n\| \to 0, \quad n \to \infty,$

то приближенные решения $x_n^* \in X_n$ *сходятся к точному решению* $x^* \in X$ *по норме пространства* X*. При этом погрешность приближенного решения может быть оценена любым из неравенств*

$$\|K\|^{-1}\alpha_n \leqslant \|x^* - x_n^*\| \leqslant \alpha_n \|K^{-1}\|, \quad \alpha_n = \|(y - y_n) + (K_n - K)\, x_n^*\|, \tag{4.6}$$

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \frac{\|K^{-1}\|}{1-p_n} [\, \|y - y_n\| + p_n\|y\| \,] = O(\varepsilon^{(n)} + \delta^{(n)}). \tag{4.7}$$

Теперь из теоремы 3.2 и следствия 1 теоремы 2.2 легко получается

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия:*

а) *оператор* K *непрерывно обратим;*

б) *выполнены условия* I *и* III *при каждом* $n = 1, 2, \ldots,$ *причем*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(n)} \to 0, \quad \varepsilon_3^0 = \varepsilon_3^{0\,(n)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty; \tag{4.8}$$

в) $\dim X_n = \dim Y_n = m = m(n) < \infty \;\; (n = 1, 2, \ldots).$

Тогда при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ *приближенные уравнения* (4.2) *однозначно разрешимы.*

Если, кроме того, выполнено условие

г) $\|P_n\| E_n(x^*) \to 0, \quad n \to \infty, \quad P_n^2 = P_n,$ (4.9)

где $E_n(x^*) = \inf\{\|x^* - x_n\| : x_n \in X_n\}$*, а* P_n *— ограниченный оператор (при каждом* n*), то при* $y_n = P_n y$ *приближенные решения* $x_n^* \in X_n$ *сходятся к точному решению* $x^* \in X$ *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_1^{(n)} + \|P_n\| E_n(x^*)). \tag{4.10}$$

Полезной может оказаться также следующая легко доказываемая

Теорема 4.3. *Пусть существует линейный оператор* K^{-1} *и при каждом* n $(n \geqslant n_0)$ *уравнения* (4.2) *разрешимы. Тогда для сходимости приближенных решений к точному* $x^* = K^{-1}y$ *необходимо и достаточно, чтобы при* $n \to \infty$

$$y_n - y \to 0, \quad (K_n - K)\, x_n^* \to 0. \tag{4.11}$$

При выполнении этого условия погрешность приближенного решения может быть оценена неравенствами (4.6).

Заметим, что нарушение условия в) теорем 4.1 и 4.2 приводит к некоторым "осложнениям"в доказательствах. Для примера приведем следующую теорему.

Теорема 4.4. *Пусть* $K : X \longrightarrow Y$, $K_n : X_n \longrightarrow Y_n$, $P_n : Y \longrightarrow Y_n$ *— линейные непрерывные операторы, причем* $X_n \subset X_{n+1}$, $Y_n \subset Y_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Пусть при каждом натуральном* $n \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* I *и* II *с*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1 = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_2 \|P_n\| = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(n)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(n)}, \quad P_n^2 = P_n, \tag{4.12}$$

и для любого $x \in X$ *существует элемент* $x_n \in X_n$ *такой, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n K x - P_n K x_n\| = 0. \tag{4.13}$$

Если оператор K *непрерывно обратим, то при достаточно больших* $n \geqslant n_0$ *операторы* K_n *также непрерывно обратимы и*

$$\|K_n^{-1}\| \leqslant 2\|K^{-1}\| \quad (n \geqslant n_0). \tag{4.14}$$

Если, кроме того, выполнено условие г) *теоремы* 4.2 *или же теоремы* 4.1, *то приближенные решения* $x_n^* = K_n^{-1} y_n$ *сходятся к точному со скоростями соответственно* (4.10) *и*

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)} \|P_n\| + \|y - y_n\|). \tag{4.15}$$

Доказательство. В силу условий (4.12) и (4.13) первая часть теоремы 4.4 выводится из теоремы 2.1 и ее следствия в случае б), а вторая часть теоремы в силу (4.14) следует из теорем 4.2 и 4.1 соответственно.

Замечание 4.1. Заметим, что условие (4.13) теоремы 4.4 можно заменить следующим:

для любого $x \in X$ *существует элемент* $x_n \in X$ *такой, что*

$$\|P_n\| \, \|x - x_n\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.16}$$

Однако обратное утверждение, вообще говоря, не верно (например, для метода коллокации решения интегральных уравнений Фредгольма).

Ясно, что в силу условия $P_n^2 = P_n$ имеем $\|P_n\| \geqslant 1$. Тогда из (4.16) следует, что для любого $x \in X$ существует элемент $x_n \in X_n$ такой, что

$$\|x - x_n\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.17}$$

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система линейно независимых элементов из X, а X_n — линейное многообразие, натянутое на первые n элементов этой системы. Тогда соотношение (4.17) эквивалентно полноте системы $\{\varphi_k\}$. Аналогичным образом вводится также K- полнота [63], согласно которой для любого $x \in X$ существует элемент $x_n \in X_n$ такой, что

$$\|Kx - Kx_n\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.18}$$

Известно [62], [63], что в силу непрерывности K из обычной полноты следует K-полнота. В наших условиях (т. е. в условиях теоремы 4.4) справедливо и обратное утверждение, что следует из соотношения

$$\|Kx - Kx_n\| \geqslant \|K^{-1}\|^{-1}\|x - x_n\|.$$

В связи со сказанным выше соотношение (4.13) естественно назвать условием P_nK-полноты системы $\{\varphi_k\}$. Ясно, что если операторы P_n ограничены по норме в совокупности, то P_nK-полнота следует из K-полноты, а потому и из обычной полноты; однако обратное утверждение, как правило, не верно.

§ 5. Об устойчивости и обусловленности прямых методов

5.1. На практике приближенные уравнения (4.2) в силу неточности задания его элементов решаются, вообще говоря, только приближенно. Например, уравнение (4.2) заменяется уравнением вида

$$L_n x_n = z_n \quad (x_n \in X_n,\, z_n \in Y_n), \tag{5.1}$$

где L_n — линейный оператор из X_n в Y_n, причем y_n и z_n близки в определенном смысле.

Возможна также ситуация несколько обратная, а именно, пусть уравнение (5.1) является приближенным для точного уравнения (4.1), тогда уравнение (4.2) можно считать приближенным в том смысле, что его элементы являются приближенными значениями соответствующих элементов уравнения (5.1).

Поэтому возникает необходимость исследования на устойчивость прямых методов решения уравнения (4.1). В связи с этим следует отметить, что устойчивость приближенных методов решения исследовалась рядом авторов. Интересные результаты по устойчивости проекционных методов в гильбертовых пространствах получены Г.М. Вайникко и С.Г. Михлиным (см., напр., [7], [8], [53], [62]–[64]). Ниже другим способом исследуются вопросы устойчивости прямых методов решения операторных уравнений в банаховых пространствах.

Имеет место следующая

Теорема 5.1. *Пусть X и Y — банаховы пространства и выполнены условия теоремы* 4.1. *Если уравнения* (4.2) *и* (5.1) *близки в том смысле, что при $n \to \infty$*

$$||y_n - z_n|| \to 0 \quad и \quad ||K_n x_n - L_n x_n|| \to 0 \tag{5.2}$$

для любых $x_n \to x \ \ (x_n \in X_n, x \in X)$, то при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ уравнения (4.1) *и* (5.1) *однозначно разрешимы и их решения x^* и x_n^* близки в том смысле, что*

$$||x_n^* - \widetilde{x}_n^*|| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.3}$$

со скоростями соответственно

$$||x_n^* - \widetilde{x}_n^*|| \leqslant ||L_n^{-1}||(||y_n - z_n|| + ||K_n x_n^* - L_n x_n^*||), \tag{5.4}$$

$$||x_n^* - \widetilde{x}_n^*|| \leqslant \frac{||K^{-1}||}{1 - p_n}[\,||y - y_n|| + p_n||y||\,] + ||x_n^* - \widetilde{x}_n^*||, \tag{5.5}$$

где

$$p_n = ||K^{-1}||\,||K - K_n|| < 1, \ K - K_n : X_n \to Y.$$

Доказательство. В условиях теоремы операторы K и K_n $(n \geqslant n_0)$ непрерывно обратимы и $x_n^* = K_n^{-1} y_n \to K^{-1} y = x^*$ при $n \to \infty$. Тогда в силу (5.2) имеем $||K_n x_n^* - L_n x_n^*|| \to 0$, $n \to \infty$.

С другой стороны, в силу теоремы 4.1 и условий (5.2) легко показать, что операторы $L_n : X_n \to Y_n$ компактно аппроксимируют (по терминологии Вайникко [7]) оператор $K : X \to Y$. Тогда из [7], [8] следует существование $L_n^{-1}\,(n \geqslant n_1)$ и их ограниченность в совокупности.

Теперь возьмем $n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1)$. Тогда для решений уравнений (4.2) и (5.1) справедливо соотношение

$$x_n^* - \widetilde{x}_n^* = L_n^{-1}(L_n - K_n)\,x_n^* - L_n^{-1}(y_n - z_n), \ x_n^* = K_n^{-1} y_n, \ \widetilde{x}_n^* = L_n^{-1} z_n.$$

Отсюда и из сказанного выше получаем соотношения (5.3) и оценку (5.4), откуда и из (4.7) следует оценка (5.5).

Теорема 5.1 доказана. Отметим, что эта простая теорема играет важную роль при обосновании метода механических квадратур решения полных сингулярных интегральных уравнений (см., напр., [10], [13], [17], [18]).

Теорему 5.1 несколько дополняет следующая

Теорема 5.2. *Пусть X_n и Y_n — конечномерные пространства одинаковой размерности, а операторы K_n (хотя бы при достаточно больших $n \geqslant n_0$) линейно обратимы и обратные операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности. Если уравнения* (4.2) *и* (5.1) *близки в том смысле, что*

$$||K_n x_n - L_n x_n|| \to 0 \quad (x_n \in X_n,\ ||x_n|| = 1), \quad ||y_n - z_n|| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.2'}$$

то при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ уравнения (5.1) *однозначно разрешимы и решения x_n^* и $\widetilde{x}_n^*$ уравнений* (4.2) *и* (5.1) *близки в том смысле, что*

$$x_n^* - \widetilde{x}_n^* \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.3'}$$

причем справедлива двусторонняя оценка

$$\beta_n ||K_n||^{-1} \leqslant ||x_n^* - \widetilde{x}_n^*|| \leqslant \beta_n ||K_n^{-1}||, \tag{5.4'}$$

где

$$\beta_n = ||(y_n - z_n) + (L_n - K_n)\,\widetilde{x}_n^*||.$$

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим K_n и L_n как линейные операторы, определенные на единичной сфере пространства X_n. Положим $R(L_n) = Z_n$. Очевидно, что множество $Z_n \subset Y_n = R(K_n)$ и замкнуто как конечномерное множество.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим произвольный элемент $f_n \in Y_n$. Ясно, что существует единственный элемент $x_n \in X_n$ такой, что $K_n x_n = f_n$. Положим $g_n \equiv L_n x_n$. Тогда в силу первого из соотношений (5.2) найдется такой номер $n = n_0$, что справедливо неравенство $||f_n - g_n|| = ||K_n x_n - L_n x_n|| < \varepsilon$ при $n > n_0$.

Таким образом, множество Z_n плотно в Y_n и, следовательно, имеем $Z_n = R(L_n) = Y_n$. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что операторное уравнение (5.1) имеет (хотя бы при достаточно больших n) единственное решение $\widetilde{x}_n^* = L_n^{-1} z_n, \quad z_n \in Y_n$. Тогда справедливость (5.3), (5.4) легко устанавливается с помощью теоремы 4.3.

Следует отметить, что если операторы K_n $(n \geqslant n_0)$ линейно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности (например, в условиях любой из теорем 4.1, 4.2, 4.4), а уравнения (4.2) и (5.1) близки в том смысле, что

$$\eta_n \equiv ||K_n - L_n|| \to 0, \quad \theta_n \equiv ||y_n - z_n|| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.2$''$}$$

то устойчивость прямых методов доказывается с помощью простейших средств функционального анализа.

Действительно, в этом случае при достаточно больших n, например, при

$$||E - K_n^{-1} L_n|| = ||E - L_n K_n^{-1}|| \leqslant ||K_n^{-1}\| \, \|K_n - L_n|| \leqslant q_n \leqslant q_0 < 1,$$

имеем

$$L_n^{-1} - K_n^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (E - K_n^{-1} L_n)^j K_n^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} K_n^{-1} (E - L_n K_n^{-1})^j.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$||x_n^* - \widetilde{x}_n^*|| = ||K_n^{-1} y_n - L_n^{-1} z_n|| = O\{||K_n - L_n|| + ||y_n - z_n||\} \to 0.$$

С другой стороны, в условиях теоремы 4.1 имеем при $n \to \infty$

$$||K - L_n||_{X_n \to Y} \leqslant \varepsilon^{(n)} + \eta_n, \quad ||y - z_n|| \leqslant \delta^{(n)} + \theta_n \to 0.$$

Поэтому при n таких, что $(\varepsilon^{(n)} + \eta_n)||K^{-1}|| < 1$, мы находимся в условиях применимости теоремы 4.1, но уже к операторам K и L_n, согласно которой при $n \to \infty$

$$||x_n^* - \widetilde{x}_n^*|| = O\{||y - z_n|| + ||K - L_n||\} = O\{(\varepsilon^{(n)} + \eta_n) + (\delta^{(n)} + \theta_n)\} \to 0.$$

5.2. Далее, в ряде литературных источников (см., напр., [6], [54]) определено число обусловленности матрицы и исследована его роль при решении (в том числе при рассмотрении устойчивости) систем линейных алгебраических уравнений. Результаты, полученные в этом направлении в [6], [54], с помощью теорем 4.1, 4.2, 4.4 легко переносятся также на операторные уравнения. Ниже приводятся соответствующие сведения из этой области, а также изучается связь между числами обусловленности операторных уравнений (4.1) и (4.2).

Рассмотрим уравнение (4.1), где линейный оператор K действует из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, причем существует (ограниченный или неограниченный) обратный оператор K^{-1}. Величину

$$\eta = \eta(K) = ||K||\,||K^{-1}||; \quad K : X \to Y, \quad K^{-1} : Y \to X,$$

будем называть числом обусловленности оператора K и уравнения (4.1); уравнение (4.1) будем называть хорошо обусловленным, если η – невелико, и плохо обусловленным — в противном случае.

Заметим, что для некорректных уравнений (4.1) число обусловленности $\eta = \infty$, и поэтому они являются плохо обусловленными, что хорошо согласуется со свойствами таких уравнений.

Число обусловленности оператора K служит той количественной характеристикой, которая позволяет судить о связи погрешности приближенного решения и соответствующей невязки, т. е. величин $\varepsilon = x^* - \widetilde{x}^*$, $\delta = y - K\widetilde{x}^* = Kx^* - K\widetilde{x}^*$. Действительно, как показано в [6], [54], справедливо соотношение

$$\eta(K) = \sup_{x^*} \left\{ \sup_{\delta} \left(\frac{||\varepsilon||}{||x^*||} : \frac{||\delta||}{||y||} \right) \right\} = ||K||\,||K^{-1}||. \tag{5.6}$$

Кроме того, число обусловленности $\eta(K)$ позволяет судить также об устойчивости решений соответствующего уравнения. Действительно, из [6], [54] следует, что влияние неточности в задании оператора K на решение x^* уравнения (4.1) в определенном смысле меньше для хорошо обусловленных операторов и больше — для плохо обусловленных.

Далее, как уже указывалось выше, в качестве приближенного решения точного уравнения (4.1) мы берем точное решение x_n^* приближенного уравнения (4.2). Однако на практике, как отмечалось перед теоремой 5.1, x_n^* может быть найдено, вообще говоря, только приближенно. Определенное представление о допускаемой при этом погрешности дает, как это видно из сказанного, число обусловленности

$$\eta_n = ||K_n||\,||K_n^{-1}||,\ K_n : X_n \to Y_n,\ K_n^{-1} : Y_n \to X_n,$$

(в случае его существования) для приближенного оператора K_n (приближенного уравнения (4.2)). Поэтому представляет интерес исследовать связь между числами обусловленности точного и приближенного уравнений (4.1) и (4.2).

Имеет место следующая

Теорема 5.3. *Пусть существует число обусловленности* $\eta = \eta(K)$ *для точного уравнения* (4.1). *Тогда в условиях любой из теорем* 4.1, 4.2, 4.4 *хотя бы при достаточно больших* n *существуют также числа обусловленности* $\eta_n = \eta(K_n)$ *для приближенного уравнения* (4.2), *причем*

$$\eta_n \leqslant c\,\eta \quad (1 \leqslant c = \mathrm{const} \leqslant 1+\varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ n \geqslant n_0(\varepsilon)), \tag{5.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta. \tag{5.8}$$

Доказательство рассмотрим лишь в условиях теоремы 4.1 (в условиях теоремы 4.2 или 4.4 рассуждения проводятся аналогично).

В силу теоремы 4.1 при всех n таких, что $p_n = ||K^{-1}||\cdot ||K - K_n||_{X_n\to Y} < 1$, имеем $||K_n^{-1}|| \leqslant ||K^{-1}||(1-p_n)^{-1}$. Отсюда ясно, что для таких n существуют числа обусловленности $\eta_n = \eta(K_n) = ||K_n||\,||K_n^{-1}||$ оператора K_n, ограниченные (при $n \geqslant n_0$) в совокупности. Так как $||K_n||_{X_n\to Y_n} \leqslant ||K_n||_{X_n\to Y} \leqslant ||K_n - K||_{X_n\to Y} + ||K||_{X_n\to Y} \leqslant [p_n + \eta(K)]||K^{-1}||^{-1}$, то справедливы оценки

$$\eta(K_n) = ||K_n||\,||K_n^{-1}|| \leqslant [p_n + \eta(K)](1-p_n)^{-1},$$

$$\eta(K_n) - \eta(K) \leqslant p_n(1+\eta(K))(1-p_n)^{-1}.$$

Остальное следует из теоремы 4.1.

Таким образом, если точное уравнение (4.1) хорошо обусловлено, то в условиях любой из теорем 4.1, 4.2 и 4.4 хорошо обусловленным является также приближенное уравнение (4.2). А это в свою очередь приводит к тому, что решение соответствующей приближенному уравнению (4.2) эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений в определенном смысле будет устойчивым относительно неточности задания элементов этой системы.

§ 6. Некоторые дополнения

6.1. В случае уравнений II-го рода и приводящихся к ним уравнений результаты §§ 2–5 значительно упрощаются и усиливаются. В частности, из теорем 2.2, 3.2, 4.2 и их следствий легко выводятся (см., напр., работу автора [14]) основные теоремы теории Канторовича [45]–[49]. Остановимся здесь лишь на некоторых, нужных нам ниже, результатах, которые легко выводятся из теорем 2.1, 3.1, 3.2 и их следствий.

Теорема 6.1. *Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, а $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ — их конечномерные подпространства одинаковой размерности. Пусть существует линейный оператор $P_n = P_n^2$, отображающий Y в Y_n. Рассмотрим операторные уравнения вида*

$$Kx \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X,\, y \in Y), \tag{6.1}$$

$$K_n x_n \equiv Gx_n + P_n T x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\, y_n \in Y_n), \tag{6.2}$$

где G, T и $P_n T$ — линейные непрерывные операторы соответственно из X в Y и из X_n в Y_n. Пусть $G(X) = Y, \quad G(X_n) = Y_n$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *если оператор $K : X \longrightarrow Y$ непрерывно обратим, а* $\dim X_n = \dim Y_n < \infty$, *то при*

$$\alpha_n = ||K^{-1}||\,||T - P_n T|| < 1, \quad T - P_n T : X_n \to Y, \tag{6.3}$$

оператор $K_n : X_n \to Y_n$ также непрерывно обратим и

$$||x^* - x_n^*|| \leqslant ||K^{-1}||(1-\alpha_n)^{-1}\{||y - y_n|| + \alpha_n ||y||\},$$

где

$$x^* = K^{-1}y, \quad x_n^* = K_n^{-1}y_n, \quad ||K_n^{-1}|| \leqslant ||K^{-1}||(1-\alpha_n)^{-1}; \tag{6.4}$$

б) *если уравнение* (6.1) *имеет решение $x^* \in X$ при правой части $y \in Y$, оператор G линейно обратим и операторы K_n линейно обратимы (например, в условиях пункта а)), то при $y_n = P_n y$ справедлива оценка*

$$||x^* - x_n^*|| = ||(E - K_n^{-1}P_n T)(x^* - G^{-1}P_n G x^*)|| \leqslant$$

$$\leqslant ||E - K_n^{-1}P_n T||_{X\to X}||G^{-1}||_{Y\to X}||Gx^* - P_n G x^*||_Y; \tag{6.4'}$$

в) *если оператор* $K = G + T : X \longrightarrow Y$ *линейно обратим и*

$$\varepsilon_n' \equiv \|T - P_n T\|_{X\to Y} \to\ 0,\ n \to \infty,\ P_n^2 = P_n,$$

то при $n \in \mathbb{N}$ *таких, что*

$$q_n' \equiv \|K^{-1}\|\varepsilon_n' < 1,$$

каждый из операторов

$$K_n = G + P_n T : X \longrightarrow Y \quad \text{и} \quad K_n = G + P_n T : X_n \longrightarrow Y_n$$

также линейно обратим, а для погрешности приближенного решения справедливы соотношения

$$\|x^* - x_n^*\| = \|(G + P_n T)^{-1}(Gx^* - P_n G x^*)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(G + P_n T)^{-1}\|_{Y\to X} \cdot \|Gx^* - P_n G x^*\|_Y = O\{\|Gx^* - P_n G x^*\|_Y\},$$

где $x_n^* \in X_n$ *— решение уравнения* (6.2) *при* $y_n = P_n\, y \in Y_n$.

Отметим, что на практике условие $GX_n = Y_n$ и тем самым существенно используемое в теореме 6.1 тождество $P_n G x_n \equiv G x_n$ (для любого $x_n \in X_n$) нередко не выполняется. В этом случае выход из положения позволяет найти (см. также [39])

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия:*

а) *линейные операторы* K *и* $G : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратимы;*

б) $P_n^2 = P_n$, $n \in \mathbb{N}$; $\|P_n\|_{Y\to Y_n \subset Y} = O(1)$, $n \to \infty$;

в) $GX_n \neq Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, *а* $T : X \longrightarrow Y$ *есть вполне непрерывный оператор;*

г) *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *хотя бы начиная с некоторого, существуют операторы* $G_n^{-1} \equiv (P_n G)^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n$, *ограниченные по норме в совокупности.*

Тогда для всех $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$ *уравнения* (6.2) *однозначно разрешимы при любых правых частях и приближенные решения* $x_n^* = K_n^{-1} P_n y$ *сходятся к точному решению* $x^* = K^{-1} y$ *в пространстве* X *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\big\{E_n(x^*)_X\big\}. \tag{6.5}$$

Доказательство. В силу условий а) и г) уравнения (6.1) и (6.2) эквивалентны уравнениям соответственно

$$Ax \equiv x + G^{-1} T x = G^{-1} y \quad (x, G^{-1} y \in X), \tag{6.6}$$

$$A_n x_n \equiv x_n + G_n^{-1} P_n T x_n = G_n^{-1} P_n y \quad (x_n, G_n^{-1} P_n y \in X_n). \tag{6.7}$$

Покажем близость уравнений (6.6) и (6.7) в смысле теоремы 4.1.

Применяя к вспомогательным уравнениям

$$Gx = y \ (x \in X,\, y \in Y); \quad G_n x_n = P_n G x_n = P_n y \ (x_n \in X_n,\, P_n y \in Y_n)$$

теорему 3.2, в силу условий а) и г) находим

$$\delta_n \equiv \|x^0 - x_n^0\|_X = \|G^{-1}y - G_n^{-1} P_n y\|_X = \|(E - G_n^{-1} P_n G)(G^{-1} y - \widetilde{x}_n)\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \|E - G_n^{-1} P_n G\|_{X \to X} \cdot E_n(G^{-1} y)_X \leqslant$$
$$\leqslant \big(1 + \|G_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \|P_n\|_{Y \to Y_n} \|G\|_{X \to Y}\big) E_n(G^{-1} y)_X =$$
$$= O\big\{E_n(G^{-1} y)_X\big\} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{6.8}$$

где $\widetilde{x}_n \in X_n \subset X$ есть элемент наилучшего приближения для элемента $x^0 = G^{-1} y \in X$ в пространстве X.

Для любого $x_n \in X_n$, $x_n \neq 0$, из (6.6)–(6.8) находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_X = \|G^{-1} T x_n - G_n^{-1} P_n T x_n\|_X =$$
$$= \|x_n\|_X \|G^{-1} T z_n - G_n^{-1} P_n T z_n\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n\|_X \|E - G_n^{-1} P_n G\|_{X \to X} \cdot E_n(G^{-1} T z_n)_X \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n\|_X \big(1 + \|G_n^{-1} P_n G\|_{X \to X}\big) \widetilde{\varepsilon}_n, \quad z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \tag{6.9}$$

где

$$\widetilde{\varepsilon}_n = \sup_{\substack{z_n \in X_n \\ \|z_n\| \leqslant 1}} E_n(G^{-1} T z_n)_X \leqslant \sup_{\substack{z \in X \\ \|z\| \leqslant 1}} E_n(G^{-1} T z)_X =$$
$$= \sup_{u \in G^{-1} T S(0,1)} E_n(u)_X \equiv \widetilde{\varepsilon}'_n, \quad S(0,1) = \big\{x \in X \,:\, \|x\|_X \leqslant 1\big\}. \tag{6.10}$$

В силу условий а) и в) множество $G^{-1} T S(0,1)$ является компактным в пространстве X, поэтому $\widetilde{\varepsilon}'_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из соотношений (6.8)–(6.10) следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to X} \leqslant \|E - G_n^{-1} P_n G\|_{X \to X} \widetilde{\varepsilon}_n \leqslant$$
$$\leqslant \big(1 + \|G_n^{-1} P_n G\|_{X \to X}\big) \widetilde{\varepsilon}'_n = O(\widetilde{\varepsilon}'_n) \to 0,\ n \to \infty. \tag{6.11}$$

Теперь в силу условия а) и соотношений (6.8), (6.11) к уравнениям (6.6), (6.7) применима теорема 4.1, откуда следуют такие утверждения:

α) для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n \equiv \varepsilon_n \, \|A^{-1}\|_{X \to X} \leqslant \widetilde{\varepsilon}'_n \|K^{-1}G\|_{X \to X} < 1,$$

операторы $A_n : X_n \longrightarrow X_n$ линейно обратимы и

$$\|A_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \leqslant \|K^{-1}G\|_{X \to X}(1-q_n)^{-1}. \tag{6.12}$$

Отсюда и из уравнения (6.7) с учетом условия г) получаем, что операторы $K_n = G_n A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ также линейно обратимы хотя бы при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|K_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} = \|A_n^{-1} G_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leqslant \|A_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \|G_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} = O(1); \tag{6.13}$$

β) приближенные решения

$$x_n^* = A_n^{-1} G_n^{-1} P_n y = K_n^{-1} P_n y \in X_n$$

при любых $y \in Y$ сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}G^{-1}y = K^{-1}y \in X$ в пространстве X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\big(\varepsilon_n + \delta_n\big). \tag{6.14}$$

Теперь, применяя теорему 3.2 к уравнениям (6.1) и (6.2), с учетом условий а), б) и (6.13), (6.14) находим

$$\begin{gathered}\|x^* - x_n^*\|_X = \|(E - K_n^{-1} P_n K)(x^* - \overline{x}_n)\|_X \leqslant \\ \leqslant \big(1 + \|K_n^{-1} P_n K\|_{X \to X}\big) E_n(x^*)_X = O(1)\, E_n(x^*)_X = \\ = O\big\{E_n(x^*)_X\big\} \to 0,\ n \to \infty,\end{gathered}$$

где $\overline{x}_n \in X_n$ есть элемент наилучшего приближения для решения $x^* = K^{-1}y \in X$ уравнения (6.1) в пространстве X.

Теорема 6.2 доказана.

6.2. Ясно, что при $X = Y, X_n = Y_n, G = E$ из теорем 6.1 и 6.2 получаем соответствующий результат для проекционного метода решения уравнений II-го рода. Кроме того, для уравнений II-го рода вида

$$Kx \equiv x + Hx = y, \quad K_n x_n \equiv x_n + H_n x_n = y_n,$$

где H и H_n — линейные непрерывные операторы в полных пространствах $X = Y$ и $X_n = Y_n \subset X$ соответственно, в приложениях весьма полезным оказывается следующее простое утверждение:

если H (или его некоторая степень) — оператор сжатия в X, а

$$\varepsilon_n \equiv \|H - H_n\| \to 0,\ n \to \infty, \quad H - H_n : X_n \to X,$$

то при достаточно больших n операторы H_n (или их соответствующие степени) будут операторами сжатия в X_n и

$$||K^{-1}|| \leqslant (1 - ||H||)^{-1},\ ||K_n^{-1}|| \leqslant (1 - ||H_n||)^{-1}.$$

Если же H_n строится специальным образом, например, $H_n = {}$ $= P_n H$ на X_n, где $||P_n H|| \leqslant 1$ $\;(||P_n|| \leqslant 1)$, то ситуация еще более упрощается:

$$||K_n^{-1}|| \leqslant (1 - ||P_n H||)^{-1}; \quad (\|K_n^{-1}\| \leqslant (1 - ||H||)^{-1}).$$

6.3. В другом частном случае, когда приближенное уравнение (1.2) ((4.2)) строится специальным образом, а именно,

$$\widetilde{K}\widetilde{x} \equiv PK\widetilde{x} = Py,\ P^2 = P \quad (K_n x_n\ P_n K x_n = P_n y,\ P_n^2 = P_n),$$

то условие I выполняется тривиальным образом с постоянной $\varepsilon_1 \equiv 0$ ($\varepsilon_1^{(n)} \equiv 0$); тогда все приведенные выше теоремы снова значительно упрощаются и усиливаются (см., напр., п. б) теоремы 6.1). Ясно, что рассматриваемым случаем охватывается класс важных в практическом отношении приближенных методов, называемых очень часто *проекционными.* К таким методам относятся, например, методы Галеркина, моментов, наименьших квадратов, коллокации (совпадения), подобластей и др. И вполне естественно, что проекционные методы весьма хорошо разработаны (см., напр., работы [7], [8], [10]–[16], [39], [45]–[49], [53], [56], [57], [59], [62]–[64] и библиографию в них).

Здесь мы отметим только следующие простые факты. Пусть даны уравнения (4.1), (4.2), где подпространство Y_n выбирается специальным образом, а именно, $Y_n = K(X_n) = \{Kx_n\}$, а P_n есть оператор проектирования Y на $Y_n = K(X_n)$, такой, что $P_n^2 = P_n$. Тогда приближенное уравнение проекционного метода принимает вид

$$P_n K x_n = K x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\ P_n y \in Y_n),$$

и оно, очевидно, разрешимо при любой правой части из Y_n $(n = 1, 2, \dots)$. Поэтому в случае разрешимости уравнения (4.1) для невязки имеем

$$\|Kx^* - Kx_n^*\| = \|y - P_n y\| \leqslant \|E - P_n\| E_n(y) = \|E - P_n\| E_n(Kx^*) \leqslant$$

$$\leqslant \|E - P_n\| \, \|K\| E_n(x^*).$$

Отсюда в случае обратимости оператора K находим

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \eta(K) E_n(x^*) \|E - P_n\|,$$

где $E_n(x^*) = \rho(x^*, X_n)_X$, $E_n(y) = \rho(y, Y_n)_Y$. Если же Y — гильбертово пространство, а P_n — оператор ортогонального проектирования на Y_n, то, очевидно, имеем оценки

$$\|y - Kx_n^*\| \leqslant E_n(y), \; \|x^* - x_n^*\| \leqslant \eta(K) E_n(x^*),$$

где $\eta(K) = \|K\| \, \|K^{-1}\|$ — число обусловленности оператора K.

Другими словами, из приведенных выше общих результатов получаются утверждения, аналогичные одному результату С.Г. Михлина по методу наименьших квадратов (см. [62]–[64]).

К сказанному о методе наименьших квадратов добавим следующий результат (см. также ниже § 10).

Пусть X — банахово пространство с базисом

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{6.15}$$

а Y — гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g)_Y$ произвольных элементов $f, g \in Y$ и с порождаемой им нормой $\|f\|_Y = \sqrt{(f, f)}$, $f \in Y$. Приближенное решение уравнения (1.1) будем искать в виде элемента

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \varphi_k \in X, \; n \in \mathbb{N}, \tag{6.16}$$

неизвестные коэффициенты $\alpha_k \in \mathbb{C}$ будем определять из условия минимальности нормы невязки $r_n \equiv y - Kx_n$ в пространстве Y. Тогда, пользуясь соответствующими результатами § 83 монографии С.Г. Михлина [62], для указанных коэффициентов находим СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, (K\varphi_k, K\varphi_j)_Y = (y, K\varphi_j)_Y, \quad j = \overline{1, n}. \tag{6.17}$$

Такой способ решения уравнения (1.1) с оператором $K : X \longrightarrow Y$ можно рассматривать как обобщение метода наименьших квадратов решения операторного уравнения вида $Ax = y$ $(x, y \in X)$, где $A : X \longrightarrow X$ есть линейный оператор в гильбертовом пространстве $X = Y$.

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия:*

а) *оператор* $K : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратим;*

б) *система элементов* (6.15) *линейно независима и полна в пространстве* X.

Тогда справедливы утверждения:

α) *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *СЛАУ* (6.17) *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots \alpha_n^* \in \mathbb{C}$*;*

β) *приближенные решения*

$$x_n^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \varphi_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.16*}$$

сходятся к точному решению $x^* = K^{-1}y \in X$ *в пространстве* X *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_n(x^*)_X \leqslant \|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \eta(K)\, E_n(x^*)_X, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.18}$$

где $\eta(K)$ — *число обусловленности оператора* $K : X \longrightarrow Y$, *а* $E_n(x^*)_X$ — *наилучшее приближение* $x^* \in X$ *всевозможными элементами вида* (6.16) *в пространстве* X.

Доказательство. Поскольку система функций (6.15) линейно независима, то в силу условия а) можно доказать, что система функций $\{K\varphi_k\}_1^\infty \subset Y$ также будет линейно независимой. Тогда определитель Грамма этой системы, совпадающий с определителем СЛАУ (6.17), будет отличен от нуля при любых $n \in \mathbb{N}$. Поэтому первое утверждение теоремы доказано.

Оценим погрешность приближенного решения (6.16*). Для любого элемента вида (6.16) справедливо неравенство

$$\|y - Kx_n^*\|_Y \leqslant \|y - Kx_n\|_Y, \quad x_n \in X_n,\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.19}$$

где $y \equiv Kx^*$. Отсюда в силу условия а) находим для любых $n \in \mathbb{N}$ неравенства

$$\frac{\|x^* - x_n^*\|_X}{\|K^{-1}\|_{Y\to X}} \leqslant \|K(x^* - x_n^*)\|_Y \leqslant \|K(x^* - x_n)\|_Y \leqslant$$
$$\leqslant \|K\|_{X\to Y}\|x^* - x_n\|_X, \tag{6.20}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|K\|_{X\to Y}\|K^{-1}\|_{Y\to X}\|x^* - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \varphi_k\|_X, \tag{6.21}$$

где α_k — произвольные постоянные. Поэтому в силу (6.21) и $x_n^* \in X_n$ имеем

$$E_n(x^*)_X \leqslant \|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \eta(K) \inf_{\alpha_k \in \mathbb{C}} \|x^* - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\|_X = \eta(K)\, E_n(x^*)_X.$$

Отсюда и из условий а) и б) теоремы следует, что

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n(x^*)_X\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{6.22}$$

Теорема 6.3 доказана.

Заметим, что утверждение теоремы о сходимости метода остается справедливым и тогда, когда оператор $K : X \longrightarrow Y$ является *неограниченным*; в этом случае дополнительно предполагается, что система функций $\{K\varphi_k\}_1^\infty \subset Y$ является полной в пространстве Y. Тогда в силу неравенства (6.19) и первой части неравенств (6.20) имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|K^{-1}\|_{Y \to X} \|y - Kx_n\|_Y, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $x_n \in X$ — произвольный элемент вида (6.16). Поэтому последовательно находим

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|K^{-1}\|_{Y \to X} \inf_{\alpha_k \in \mathbb{C}} \|y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, K\varphi_k\|_Y \equiv$$

$$\equiv \|K^{-1}\|_{Y \to X} E_n(y)_Y, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.23}$$

Отсюда в силу K-полноты [63] системы функций (6.15) находим

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n(y)_Y\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{6.24}$$

Если же *неограниченным* является оператор $K^{-1} : Y \longrightarrow X$, то естественно исследовать сходимость *невязки* метода. В этом случае из (6.19) находим

$$\|y - Kx_n^*\|_Y \leqslant \|y - Kx_n\|_Y = \|K(x^* - x_n)\|_Y \leqslant \|K\|_{X \to Y} \|x^* - x_n\|_X;$$

отсюда в силу произвольности элемента $x_n \in X_n$ следует, что

$$\|y - Kx_n^*\|_Y \leqslant \|K\|_{X \to Y} \inf_{\alpha_k \in \mathbb{C}} \|x^* - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \varphi_k\|_X \equiv$$

$$\equiv \|K\|_{X \to Y} \cdot E_n(x^*)_X,\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.25}$$

поэтому
$$\|y - Kx_n^*\|_Y = O\{E_n(x^*)_X\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{6.26}$$

6.4. Далее, рассмотрим условие

IV. *Для любого* $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$
$$||K\widetilde{x} - \widetilde{K}\widetilde{x}|| \leqslant \varepsilon_4 ||\widetilde{x}||,$$
где ε_4 *— постоянная, не зависящая от* $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$.

Отметим, что это условие по существу уже использовано нами в теоремах 2.1, 2.3, 3.1 (см. следствие), 4.1, 5.1, 5.3.

Как видно из замечания 2.2, из условий I и II при $P^2 = P$ следует условие IV с
$$\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 ||E - P||_{Y^0 \to Y}, \tag{6.27}$$
где Y^0 — множество элементов из Y, представимых в виде
$$y^0 = K\widetilde{x} - \widetilde{y} \quad (\widetilde{x} \in \widetilde{X},\, \widetilde{y} \in \widetilde{Y});$$
если же P — ограниченный оператор, то можно положить
$$\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 \|P\|. \tag{6.28}$$
Однако обратное утверждение не верно, т. е. из условия IV условия I и II (в совокупности) не следуют. Более того, в ряде случаев (см., напр., [10], [17], [18] об обосновании прямых методов решения сингулярных интегральных уравнений в пространстве L_2) даже условия (6.27) и (6.28) существенно отличаются друг от друга в том смысле, что условие (6.27) выполняется с достаточно малой величиной ε_4, а условие (6.28) — с величиной $\varepsilon_4 = \infty$.

6.5. Выше приближенные уравнения всюду рассматривались на подпространствах основных пространств. На практике часто приходится иметь дело с методами, приближенные уравнения которых задаются на пространствах, изоморфных некоторым подпространствам исходных пространств. Поэтому представляет смысл остановиться на исследовании таких уравнений и указать способ перенесения полученных выше результатов на этот случай.

Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — некоторые полные линейные нормированные пространства, и пусть существуют линейные операторы φ и ψ, осуществляющие взаимно однозначные отображения пространств $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ на пространства $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ соответственно. Согласно известной теореме Банаха операторы φ и ψ имеют линейные обратные φ^{-1} и ψ^{-1}. Поэтому приближенное уравнение (1.2) приводится к эквивалентному уравнению вида

$$\overline{K}\overline{x} = \overline{y} \quad (\overline{x} = \varphi\widetilde{x} \in \overline{X},\ \overline{y} = \psi\widetilde{y} = \overline{P}y \in \overline{Y}), \tag{6.29}$$

где

$$\overline{K} = \psi\widetilde{K}\varphi^{-1}, \quad \overline{P} = \psi P \quad \text{и} \quad \widetilde{K} = \psi^{-1}\overline{K}\varphi, \quad P = \psi^{-1}\overline{P}. \tag{6.30}$$

Поскольку уравнения (1.2) и (6.29) являются эквивалентными во вполне определенном смысле, то соотношения (6.30) позволяют перенести все результаты, установленные для уравнения (1.2), на уравнения (6.29), и наоборот. В частности, учитывая (6.30) и следуя Л.В. Канторовичу [47, с. 500–503], все вышеприведенные теоремы легко переформулировать в терминах подпространств $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ и операторов $\overline{K}$ и $\overline{P}$. Ввиду очевидности на этом более подробно останавливаться не будем.

6.6. Многие результаты работы основаны на существовании обратного оператора $K^{-1} : Y \longrightarrow X$ (или же обратного оператора $K_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n$) и оценках норм обратных операторов. Ряд важных результатов для оценки норм обратных операторов получен в работах И.П. Мысовских и С.А. Шелепень (см., напр., работу [73] и библиографию в ней).

Отметим, что грубо найденные обратные операторы K^{-1} и K_n^{-1} в ряде случаев могут быть уточнены с помощью специальных итерационных процессов. Укажем один из таких процессов для операторов K из (4.1) при $X = Y$ и операторов K_n из (4.2) при $X_n = Y_n$ (общий случай рассматривается аналогично), где X — банахово пространство, а X_n — его конечномерное подпространство.

Пусть операторы K и K_n $(n \geqslant n_0)$ непрерывно обратимы в X и X_n соответственно. Положим $K^{-1} \equiv A,\ K_n^{-1} \equiv A_n$ $(n \geqslant n_0)$. Пусть для A и A_n найдены некоторые, вообще говоря, грубые приближения $A^1 \approx A$ и $A_n^1 \approx A_n$, такие, что

$$q = \|E - KA^1\|_{X \to X} < 1, \quad q_n = \|E - K_n A_n^1\|_{X_n \to X_n} < 1 \quad (n \geqslant n_0). \tag{6.31}$$

Тогда, следуя [5], обратные операторы K^{-1} и K_n^{-1} можно найти как пределы итерационных последовательностей соответственно

$$A^{j+1} = A^j(2E - KA^j), \quad A_n^{j+1} = A_n^j(2E - K_n A_n^j),\ n \geqslant n_0,\ j = 1, 2, \ldots . \tag{6.32}$$

Для (6.32) можно показать, что

$$\lim_{j\to\infty} A^j = A, \quad \lim_{j\to\infty} A_n^j = A_n \ (n \geqslant n_0) \tag{6.33}$$

в пространствах линейных операторов $\mathcal{L}(X, X)$ и $\mathcal{L}(X_n, X_n)$ соответственно со скоростями, определяемыми неравенствами

$$\|K^{-1} - A^j\|_{X\to X} \leqslant \|K^{-1}\|q^{2^{j-1}},$$

$$\|K_n^{-1} - A_n^j\|_{X_n\to X_n} \leqslant \|K_n^{-1}\|q_n^{2^{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{6.34}$$

Таким образом, с помощью итерационных процессов (6.32) грубо найденные значения обратных операторов K^{-1} и K_n^{-1} в условиях (6.31) могут быть уточнены до любой степени точности.

§ 7. О прямых методах решения некоторых некорректных задач

При обосновании приближенных (в том числе прямых) методов решения операторных уравнений в ряде случаев мы существенным образом пользовались условием непрерывной обратимости оператора $K : X \longrightarrow Y$. Однако это условие на практике нередко не выполняется; тогда задача решения уравнения (1.1) не является корректной по Адамару [44], [66], [71]. В этом параграфе (см. также § 8) рассматриваются вопросы обоснования прямых методов решения уравнения (1.1) при нарушении некоторых условий корректности.

Итак, пусть оператор K^{-1} не существует, но, тем не менее, уравнение (1.1) имеет решение (вообще говоря, не единственное) при любой правой части $y \in Y$ (такая ситуация характерна для сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений и краевых задач теории функций комплексных переменных). Тогда многие из вышеприведенных результатов не верны, но обоснование прямых методов решения уравнения (1.1) можно вести на основе некоторых из этих результатов. В частности, в условиях следствия 2 из теоремы 2.2 из разрешимости точного уравнения при любой правой части следует разрешимость приближенного уравнения (1.2) тоже при любой правой части, а погрешность приближенного решения можно оценить с помощью теорем 3.1 и 3.2; кроме того, разрешимость приближенных уравнений можно доказать с помощью теоремы 2.1, переходя предварительно от основных пространств

X и $\widetilde{X}$ к фактор-пространствам этих пространств по подпространствам нулей $N(K)$ и $N(\widetilde{K})$ точного и приближенного операторов K и $\widetilde{K}$ соответственно и пользуясь при этом операторами $\overline{K}$ и $\overline{\widetilde{K}}$, индуцированными основными операторами K и $\widetilde{K}$ в фактор-пространствах $\overline{X} = X/N(K)$, $\overline{\widetilde{X}} = \widetilde{X}/N(\widetilde{K})$ соответственно.

Остановимся на этом вопросе хотя бы вкратце, придерживаясь в основном результатов и обозначений §§ 1 и 4.

Итак, пусть X и Y — данные банаховы пространства, а X_n и Y_n — их произвольные подпространства соответственно. Рассмотрим уравнения (4.1) и (4.2), где всюду в этом пункте предполагаем, что $K : X \longrightarrow Y$ и $K_n : X_n \longrightarrow Y_n$ — линейные непрерывные операторы. Пусть существует линейный оператор P_n, отображающий Y на Y_n. Введенные пространства и операторы при каждом натуральном $n \in \mathbb{N}$ свяжем условиями I, II и III (а, б) из § 1.

С учетом сказанного в начале этого пункта, с помощью теорем 2.1, 2.2 и 3.1 доказывается следующая

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия:*

а) I *и* II *с*

$$\overline{p}_n = \|\overline{K}^{\,-1}\|\{\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)}\|E - P_n\|\} < 1, \quad E - P_n : Y^0 \longrightarrow Y,\ n \in \mathbb{N},$$

где Y^0 *— множество элементов из* Y, *представимых в виде*

$$y^0 = Kx_n - y_n \ (x_n \in X_n,\ y_n \in Y_n);$$

б) $\dim X_n = \dim Y_n < \infty$;

в) *уравнение* (4.1) *разрешимо при любой правой части* $y \in Y$.

Тогда уравнение (4.2) *также разрешимо при любой правой части* $y_n \in Y_n$, *при этом любые решения* x^* *и* x_n^* *уравнений* (4.1) *и* (4.2) *близки в том смысле, что для невязки справедливы оценки*

$$\|y - Kx_n^*\| \leqslant \frac{\|y - y_n\| + \overline{p}_n\|y\|}{1 - \overline{p}_n} = O(\delta^{(n)} + \varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)}\|E - P_n\|), \quad (7.1)$$

где $\delta^{(n)} = \|y - y_n\|,\ E - P_n : Y^0 \to Y$.

Следствие. *В условиях теоремы существуют такие решения* x^* *и* x_n^* *уравнений* (4.1) *и* (4.2), *что справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant 2\|\overline{K}^{\,-1}\|\,\|y - Kx_n^*\| = O\{\delta^{(n)} + \varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)}\|E - P_n\|\}. \quad (7.2)$$

Доказательство. В силу условия в) оператор $\overline{K} : \overline{X} \longrightarrow Y$ непрерывно обратим [47]. Так как

$$\|\overline{K} - \overline{K}_n\|_{\overline{X}_n \to Y} \leqslant \|K - K_n\|_{X_n \to Y} \leqslant \varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)} \|E - P_n\|_{Y^0 \longrightarrow Y},$$

то в силу условия а) из теоремы 2.1 следует существование оператора $\overline{K}_{nl}^{-1}$ и $\|\overline{K}_{nl}^{-1}\| \leqslant \|\overline{K}^{\,-1}\|(1 - \overline{p}_n)^{-1}$. Тогда в силу условия б) и леммы 2.1 оператор $\overline{K}_n : \overline{X}_n \to Y_n$ линейно обратим и

$$\|\overline{K}_n^{-1}\| \leqslant \|\overline{K}^{\,-1}\|(1 - \overline{p}_n)^{-1}. \tag{7.3}$$

А тогда по теореме о гомоморфизмах [47] для любого $y_n \in Y_n$ существует $x_n^* \in X_n$ такой, что $K_n x_n^* = y_n$. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 3.1, с помощью (7.3) последовательно находим

$$\|y - Kx_n^*\| \leqslant \|y - y_n\| + \|(K - K_n)x_n^*\| = \|y - y_n\| + \|(\overline{K} - \overline{K}_n)\overline{x}_n^*\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y - y_n\| + \|\overline{K} - \overline{K}_n\|_{\overline{X}_n \to Y} \cdot \|\overline{x}_n^*\| \leqslant \|y - y_n\| + \|\overline{K} - \overline{K}_n\|_{\overline{X}_n \to Y} \cdot \|\overline{K}_n^{-1}\| \, \|y_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y - y_n\| + \overline{p}_n(1 - \overline{p}_n)^{-1}\|y_n\| \leqslant (\|y - y_n\| + \overline{p}_n\|y\|)(1 - \overline{p}_n)^{-1},$$

где через $\overline{x}_n^*$ $(\overline{x}^*)$ обозначены классы смежности, содержащие элементы x_n^* (x^*).

Таким образом, оценка (7.1) доказана. Так как $y = Kx^* = \overline{K}\overline{x}^*$ и $y_n = K_n x_n^* = \overline{K}_n \overline{x}_n^*$, то утверждение следствия можно вывести из результатов по каноническому гомоморфизму [47].

Теорема 7.1 доказана. Аналогично, но с помощью теорем 2.2 и 3.2 доказывается следующая

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия:*

а) I *и* III *с*

$$\overline{q}_n = 2\|\overline{K}^{-1}\|\{\varepsilon_1^{(n)}(1 + \varepsilon_3^{(n)}) + \varepsilon_3^{0(n)}\} < 1; \tag{7.4}$$

б) $P_n^2 = P_n$*;*

в) *уравнение* (4.1) *разрешимо при любой правой части* $y \in Y$.

Тогда уравнение (4.2) *также имеет решение* $x_n^* \in X_n$ *при любой правой части* $y_n = P_n y \in Y_n$, *причем*

$$\|x_n^*\| \leqslant \overline{N}_n(1 - \overline{q}_n)^{-1}\|y\|, \quad \overline{N}_n = 2(1 + \varepsilon_3^{(n)})\|\overline{K}^{-1}\|. \tag{7.5}$$

Следствие 1. *Если выполнены условия* I *и* II, *то в условиях теоремы* 7.1 *решения* x^* *и* x_n^* *уравнений* (4.1) *и* (4.2) *близки в том смысле, что*

$$\|y - Kx_n^*\| \leqslant \|y - P_n y\| + 2(1 + \varepsilon_3^{(n)})\overline{p}_n \|P_n y\| (1 - \overline{q}_n)^{-1}. \tag{7.6}$$

Следствие 2. *Если оператор* P_n *ограничен (при каждом фиксированном* $n \in \mathbb{N}$*), то в условиях теоремы* 7.1 *существуют такие решения* x^* *и* x_n^* *уравнений соответственно* (4.1) *и* (4.2), *что справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant 2\{(1 + \overline{N}_n \|K\| \, \|P_n\|)\|x^* - x_n\| + \overline{N}_n \varepsilon_1^{(n)} \|x_n\|\}(1 - \overline{q}_n)^{-1} =$$
$$= O\{\|P_n\| \, \|x^* - x_n\| + \varepsilon_1^{(n)}\}, \tag{7.7}$$

где x_n — *произвольный элемент из* X_n*; поэтому*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\varepsilon_1^{(n)} + \|P_n\|_{Y \to Y} E_n(x^*)_X\}, \ n \to \infty. \tag{7.7$'$}$$

Доказательство. В силу условия в) оператор $\overline{K} : \overline{X} \to Y$ линейно обратим; тогда существует элемент $x^0 \in X$ такой, что $Kx^0 = y_n$ ($y_n \in Y_n$) и $\|x^0\| \leqslant 2\|\overline{K}^{-1}\| \, \|y_n\|$. Далее, в силу условия IIIa существует элемент $x_n^0 \in X_n$ такой, что

$$\|x_n^0\| \leqslant (1 + \varepsilon_3^{(n)})\|x^0\| \leqslant 2(1 + \varepsilon_3^{(n)})\|\overline{K}^{-1}\| \, \|y_n\| \equiv \overline{N}_n \|y_n\|. \tag{7.8}$$

Поэтому для любого $y_n \in Y_n$ существует элемент $x_n^0 \in X_n$ такой, что

$$\begin{gathered} \|K_n x_n^0 - y_n\| \leqslant \varepsilon_1^{(n)} \|x_n^0\| + \varepsilon_3^{(n)0} \|x_n^0\| \leqslant \\ \leqslant 2\|\overline{K}^{-1}\| \{\varepsilon_1^{(n)}(1 + \varepsilon_3^{(n)}) + \varepsilon_3^{(n)0}\} \|y_n\| \equiv \overline{q}_n \|y_n\|. \end{gathered} \tag{7.9}$$

Теперь в силу (7.8) и (7.9) из леммы Канторовича [47, с. 489] (см. также лемму 2.7) следует существование такого $x_n^* \in X_n$, что $K_n x_n^* \equiv y_n$ и

$$\|x_n^*\| \leqslant \overline{N}_n (1 - \overline{q}_n)^{-1} \|y_n\|, \quad y_n \in Y_n. \tag{7.10}$$

Отсюда в силу теоремы о гомоморфизмах оператор $\overline{K}_n : \overline{X}_n \longrightarrow Y_n$ линейно обратим и

$$\|\overline{K}_n^{-1}\| \leqslant \overline{N}_n (1 - \overline{q}_n)^{-1}. \tag{7.11}$$

Тогда по теореме 3.2 для любого $\overline{x}_n \in \overline{X}_n$ находим

$$\|\overline{x}^* - \overline{x}_n^*\| \leqslant \|(E - \overline{K}_n^{\,-1} P_n \overline{K})(\overline{x}^* - \overline{x}_n)\| + \varepsilon_1^{(n)} \|\overline{x}_n\| \, \|\overline{K}_n^{\,-1}\|, \tag{7.12}$$

где $\overline{x}^* = \overline{K}^{\,-1} y$, $\overline{x}_n^* = \overline{K}_n^{\,-1} y_n$, $y_n = P_n y$. Если же P_n — ограниченный оператор, то последовательно находим

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant 2\|\overline{x}^* - \overline{x}_n^*\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\{(1 + \overline{N}_n \|K\| \, \|P_n\| (1 - \overline{q}_n)^{-1}) \|\overline{x}^* - \overline{x}_n\| \ + \overline{N}_n (1 - \overline{q}_n)^{-1} \varepsilon_1^{(n)} \|\overline{x}_n\|\} \leqslant$$

$$\leqslant 2(1 - \overline{q}_n)^{-1} \{(1 + \overline{N}_n \|K\| \, \|P_n\|) \|x^* - x_n\| + \varepsilon_1^{(n)} \overline{N}_n \|\overline{x}_n\|\}. \tag{7.13}$$

Таким образом, в силу (7.10), (7.13) теорема 7.2 и ее следствие 2 доказаны.

Далее, снова последовательно находим

$$\|y - Kx_n^*\| \leqslant \|y - y_n\| + \|K - K_n\|_{X_n \to Y} \cdot \|x_n^*\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y - y_n\| + \{\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)} \|E - P_n\|_{Y_0 \to Y}\} \overline{N}_n (1 - \overline{q}_n)^{-1} \|y_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y - y_n\| + 2\overline{p}_n (1 - \overline{q}_n)^{-1} (1 + \varepsilon_3^{(n)}) \|y_n\| =$$

$$= \|y - P_n y\| + 2(1 + \varepsilon_3^{(n)}) \overline{p}_n \|P_n y\| (1 - \overline{q}_n)^{-1},$$

т. е. следствие 1 также доказано.

Очевидно, что с помощью теорем 7.1 и 7.2 и их следствий легко установить достаточные условия сходимости приближенных решений $x_n^* \in X_n$ к точному $x^* \in X$ в том или ином смысле.

§ 8. Прямые методы решения некорректных задач в гильбертовых пространствах

8.1. В предыдущем параграфе рассмотрены некоторые результаты по прямым методам решения некорректных уравнений в произвольных банаховых пространствах. В случае гильбертовых пространств эти результаты значительно упрощаются и усиливаются. Однако в этом случае независимо от § 7 можно указать и другие результаты, которые в случае произвольных банаховых пространств, вообще говоря, уже не справедливы.

Итак, пусть X и Y — сепарабельные гильбертовы пространства, а A — линейный непрерывный оператор из X в Y со всюду плотной в Y

областью значений $R(A)$, причем обратный оператор A^{-1} существует, но не ограничен.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Ax = y \quad (x \in X,\ y \in Y), \tag{8.1}$$

где y — данный, а x — искомый элементы. Известно [44], [71], что задача решения уравнения (8.1) относится к классу некорректно [41]–[43] поставленных задач. В.К. Иванов (см., напр., в [41], [42], [44]) ввел понятие квазирешения x^0:

$$x^0 \in M \subset H : \|Ax^0 - y\| = \inf_{x \in M} \|Ax - y\|_Y, \quad y \in H,$$

и при весьма общих условиях показал, что если вместо истинного решения задачи (8.1) искать ее квазирешение на некотором компактном множестве M пространства X, то для такого решения сохраняются все классические условия корректности (см. работы [44], [66], [71]).

Квазирешение, как и истинное решение, в общем случае приходится определять только приближенно. Для этих целей в ряде работ (см., напр., в [44]) предложен ряд сходящихся процессов, основанных на рассмотрении квазирешения задачи (8.1) на конечномерных множествах M_n $(n = 1, 2, \ldots)$, аппроксимирующих множество M.

В этом параграфе, следуя нашим работам [15], [16], мы указываем два приближенных способа для нахождения квазирешения задачи (8.1) на некоторых компактных множествах.

8.2. Пусть ниже $M = M_R$ есть шар

$$\|x\| \leqslant R < \infty \tag{8.2}$$

пространства X. Поскольку шар является выпуклым слабокомпактным множеством в гильбертовом пространстве и это пространство метризуемо относительно слабой топологии, то квазирешение в нем существует, единственно и слабо непрерывно зависит от y (см. [41], [44]). Тогда при выполнении условия (8.2) квазирешение определяется из уравнения

$$A^*Ax = A^*y, \tag{8.3°}$$

т. е. совпадает с истинным решением; если же условие (8.2) не выполнено, то квазирешение находится из уравнения

$$\mu x + A^*Ax = A^*y, \tag{8.3′}$$

где $A^* : Y \longrightarrow X$ — сопряженный к $A : X \longrightarrow Y$ оператор, а μ — положительный параметр.

Для удобства рассуждений уравнения (8.3°) и (8.3′) в дальнейшем будем рассматривать в виде одного операторного уравнения

$$Kx \equiv \lambda x + A^* A x = A^* y, \tag{8.3}$$

где $\lambda = 0$ и $\lambda = \mu > 0$ соответственно.

Уравнению (8.3) в свою очередь можно придать также несколько другой вид. Пусть $\{e_i\}$ и $\{g_j\}$ — полные ортонормированные системы соответственно в X и Y. Тогда, обозначая через $a_i = (x, e_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, и $b_j = (y, g_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, коэффициенты Фурье элементов $x \in X$ и $y \in Y$ соответственно, уравнение (8.3) можно записать в виде следующей эквивалентной ему системы линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda a_m + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jk} \overline{\alpha}_{jm} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{\alpha}_{jm} \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{8.4}$$

где $\alpha_{j\,k} = (Ae_k, g_j)$ — коэффициенты Фурье элемента Ae_k по системе g_j, а $\overline{\alpha_{jm}} = \alpha^*_{mj}$ — элементы матрицы, соответствующей сопряженному оператору A^*.

8.3. Поскольку определение точного квазирешения задачи (8.1), т. е. решение в явной форме уравнения (8.3) или, что сводится к тому же, бесконечной системы уравнений (8.4), в общем случае является делом весьма затруднительным и выполнимым лишь в очень редких случаях, то для нахождения квазирешения полезными могут быть следующие приближенные способы.

С п о с о б а. Пусть исходная задача (8.1) с самого начала решается каким-либо приближенным методом, при котором она заменяется приближенной задачей вида

$$\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{y} \quad (\widetilde{x} \in \widetilde{X},\ \widetilde{y} \in \widetilde{Y}), \tag{8.5}$$

где $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — подпространства X и Y соответственно, а $\widetilde{A}$ — линейный непрерывный оператор из $\widetilde{X}$ в $\widetilde{Y}$. Пусть дальше ищется квазирешение приближенного уравнения (8.5) на множестве $\widetilde{M} = \widetilde{M}_R = M_R \cap \widetilde{X}$, которое будем называть приближенным квазирешением уравнения (8.1) и обозначим его через $\widetilde{x^0}$.

Считая, что $\widetilde{M} = \widetilde{M}_R$ — шар подпространства $\widetilde{X}$, для определения $\widetilde{x}^0 \in \widetilde{M}$ получаем операторное уравнение вида

$$\lambda\widetilde{x} + (\widetilde{A})^*\widetilde{A}\widetilde{x} = (\widetilde{A})^*\widetilde{y}. \tag{8.6}$$

С п о с о б б. Пусть уравнение (8.3), из которого должно определяться точное квазирешение задачи (8.1), решается каким-либо приближенным методом. Пусть здесь применяется тот же алгоритм аппроксимации оператора, что и выше. Тогда для нахождения приближенного квазирешения задачи (8.1) получается заданное на $\widetilde{M}$ операторное уравнение

$$\lambda\widetilde{x} + \widetilde{A^*A}\widetilde{x} = \widetilde{A^*y}. \tag{8.7}$$

Заметим, что приближенные уравнения (8.6) и (8.7) определены на одном и том же множестве $\widetilde{M} = \widetilde{M}_R$, но они в общем случае не совпадают, ибо $(\widetilde{A})^*\widetilde{A} \neq \widetilde{A^*A}$.

Дальше будем рассматривать некоторые конкретизации, которые могут представиться в каждом из указанных способов.

8.4. С п о с о б а_1 (общий прямой метод). Пусть $\widetilde{X} = X_n$ и $\widetilde{Y} = Y_n$ суть n-мерные подпространства, натянутые на системы векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ соответственно. Задачу (8.1) будем решать каким-либо прямым методом:

$$A_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\ y_n \in Y_n,\ n = 1, 2, \ldots), \tag{8.8}$$

где y_n — данный, x_n — искомый элементы, а A_n — некоторый линейный оператор из X_n в Y_n. В этом случае нахождение приближенного квазирешения x_n^0 исходной задачи (8.1) сводится к определению точного квазирешения приближенной задачи (8.8) на $M_n = M \cap X_n$, где M_n есть n-мерный шар пространства X_n:

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\,a_k|^2 \leqslant R^2. \tag{8.9}$$

Пусть на M_n уравнение (8.8) имеет квазирешение $x_n^0 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^0 e_k$. Тогда при выполнении условия (8.9) коэффициенты $a_1^0, \ldots, a_n^0$ определяются из системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(A_n e_k,\, A_n e_m) = (y_n,\, A_n e_m), \quad m = \overline{1, n}. \tag{8.10°}$$

Если же условие (8.9) не выполнено, то ищем минимум функционала $\|A_n x_n - y_n\|^2$ при условии $\|x_n\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 = R^2$. В этом случае для определения $(n+1)$-неизвестных $a_1^0, \ldots, a_n^0$ и μ имеем систему из $(n+1)$-алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} \mu a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k (A_n e_k,\, A_n e_m) = (y_n,\, A_n e_m), \\ \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = R^2, \quad m = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{8.10$'$}$$

Очевидно, что система $(8.10°), (8.10')$ эквивалентна заданному на M_n операторному уравнению

$$\lambda x_n + A_n^* A_n x_n = A_n^* y_n, \tag{8.10}$$

где $A_n^* = (A_n)^*$ — сопряженный к A_n оператор.

Имеет место следующая

Теорема 8.1. *Если при* $n \to \infty$

$$\|A - A_n\|_{X_n \to Y} \to 0, \quad \|y - y_n\|_Y \to 0,$$

то хотя бы для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ *на* M_n *существует единственное приближенное квазирешение* $x_n^0 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^0 e_k$ *задачи* (8.1). *Имеет место предельное соотношение*

$$x_n^0 \to x^0 \text{ (слабо)},\ n \to \infty, \tag{8.11}$$

где x^0 *— точное квазирешение задачи* (8.1) *на* M, *причем погрешность может быть оценена соотношением*

$$\|Kx^0 - Kx_n^0\|_Y = O(\|A - A_n\|_{X_n \to Y} + \|y - y_n\|_Y). \tag{8.12}$$

С п о с о б a$_2$ (проекционный метод). Если задача (8.1) решается проекционным методом, то можно получить более сильное утверждение.

Обозначим через Φ_n и P_n операторы ортогонального проектирования на X_n и Y_n соответственно. Пусть $A_n = P_n A$ на X_n. Тогда приближенное квазирешение x_n^0 задачи (8.1) на M_n определяется из уравнения

$$\lambda x_n + \Phi_n A^* P_n A x_n = \Phi_n A^* P_n y. \tag{8.13}$$

Отметим, что при $n \to \infty$ уравнение (8.13) переходит в уравнение (8.3) в случае любого линейного непрерывного оператора A, так что приближенное уравнение (8.13) является конечномерной аппроксимацией точного уравнения (8.3) в определенном смысле.

С другой стороны, уравнение (8.13) в развернутой форме имеет вид

$$\lambda a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}\overline{\alpha}_{jm} = \sum_{j=1}^{n} b_j \overline{\alpha}_{jm} \quad (m = \overline{1,n}), \tag{8.13$'$}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 = R^2$ при $\lambda = \mu > 0$. Это соответствует тому, что бесконечная система (8.4) решается одним из вариантов метода редукции.

Теорема 8.2. *Если A — линейный оператор, то хотя бы при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ существует единственное приближенное квазирешение $x_n^0 \in M_n$, причем $x_n^0 \to x^0$ (слабо) при $n \to \infty$. Если же $\|A - P_nA\| \to 0,\ n \to \infty,\ A - P_nA : X_n \to Y$, то справедлива оценка* (8.12) *при $A_n = P_nA$.*

С п о с о б б$_1$ (второй общий прямой метод). Пусть приближенное квазирешение $x_n^0 \in M_n$ задачи (8.1) определяется из уравнения

$$\lambda x_n + B_n x_n = z_n, \tag{8.14}$$

где $B = A^*A$, $B_n = (A^*A)_n$ — линейный оператор в X_n и $z = A^*y$, $z_n = (A^*y)_n$.

Теорема 8.3. *Если $B_n \to B$ (равномерно), $z_n \to z$ (сильно), то хотя бы для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ уравнение* (8.14) *имеет единственное решение $x_n^0 \in M_n$, причем $x_n^0 \to x^0$ (слабо), $n \to \infty$, и*

$$\|Kx^0 - Kx_n^0\| = O(\|B - B_n\| + \|z - z_n\|). \tag{8.15}$$

С п о с о б б$_2$ (второй проекционный метод). Пусть уравнение (8.3) решается проекционным методом, т. е. $B_n = \Phi_n B$ на X_n и $z_n = \Phi_n z$. В этом случае приближенное квазирешение $x_n^0 \in M_n$ определяется из операторного уравнения

$$\lambda x_n + \Phi_n A^*Ax_n = \Phi_n A^*y. \tag{8.16}$$

Это уравнение в развернутой форме может быть записано в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j\,k} \overline{\alpha}_{j\,m} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{\alpha}_{jm}, \quad m = \overline{1,n}, \tag{8.17}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 = R^2$ при $\lambda = \mu > 0$.

Теорема 8.4. *Если A — линейный непрерывный оператор, то при любом натуральном n уравнение* (8.16) *имеет единственное решение $x_n^0 \in M_n$, причем $x_n^0 \to x^0$ (слабо) при $n \to \infty$ и справедлива оценка типа* (8.15).

Доказательство. Сначала покажем, что уравнение (8.16) эквивалентно уравнению для определения точного квазирешения задачи (8.1) на множестве M_n. Чтобы убедиться в этом, найдем экстремум функционала $\|Ax - y\|^2$ при условии $x \in M_n$, $y \in Y$. Тогда приходим к системе

$$\lambda a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k (Ae_k, Ae_m) = (y_n, Ae_m), \quad m = \overline{1,n}. \tag{8.18}$$

Умножая m-е уравнение системы (8.18) на e_m и суммируя по m, находим уравнение вида

$$\lambda x_n + \sum_{m=1}^{n} (Ax_n,\, Ae_m)\, e_m = \sum_{m=1}^{n} (y,\, Ae_m)\, e_m, \tag{8.19}$$

а из него — уравнение

$$\lambda x_n + \sum_{m=1}^{n} (A^* A x_n,\, e_m)\, e_m = \sum_{m=1}^{n} (A^* y, e_m)\, e_m,$$

равносильное уравнению (8.16).

Известно [41]–[44], что квазирешение задачи (8.1) на M_n удовлетворяет классическим условиям корректности. Поэтому приближенное уравнение (8.16) (а тем самым и система (8.17)) имеет единственное решение $x_n^0 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^0 e_k$. При этом сходимость $x_n^0 \to x^0$ (слабо) следует из [43], а оценки типа (8.15) — из соответствующих результатов параграфа 4.

Далее, теоремы 8.1–8.3 могут быть доказаны с помощью работ [41]–[44]. Другой, более простой способ доказательства, основанный на результатах только что указанных работ и теореме 8.4, состоит в следующем: считая уравнение (8.16) "точным", а уравнения (8.10), (8.13), (8.14) — "приближенными", соответствующими точному уравнению (8.16), для получения утверждения теорем 8.1–8.3 достаточно воспользоваться теоремой 8.4 и результатами § 4.

8.5. В заключение этого параграфа отметим, что за последние годы в области приближенных методов решения некорректных задач получен целый ряд весьма существенных результатов, из которых можно вывести также теоремы 8.1–8.3. Однако эти теоремы, полученные в [15], [16] с целью применения к исключительным случаям сингулярных интегральных уравнений, являющихся некорректными задачами, установлены нами ранее на основе и под влиянием работ Л.В. Канторовича и В.К. Иванова по общей теории приближенных методов анализа и соответственно по некорректным задачам.

§ 9. Аппроксимативно-итерационные методы решения операторных уравнений

9.1. *Об аппроксимативно-итерационных методах*

Важнейшими методами решения операторных уравнений являются прямые и итерационные методы. Однако, несмотря на ряд несомненных достоинств, эти методы как и многие другие, обладают также определенными недостатками. Например, при применении прямых методов для получения результата с требуемой точностью очень часто приходится решать алгебраические системы довольно высоких порядков, причем в каждом последующем этапе результаты счета из предыдущего этапа, вообще говоря, не используются. К недостаткам итерационных методов можно отнести то, что они (особенно метод простой итерации) применимы, как правило, лишь к ограниченному классу задач, и вычисление каждого последующего шага может быть сопряжено со значительными трудностями, что вызвано, например, необходимостью замены исходных данных некоторыми другими, в определенном смысле их аппроксирующими. Эти факты естественным образом приводят к необходимости создания и исследования смешанных методов, основанных на аппроксимативных (в первую очередь, прямых) и итерационных подходах, свободных от недостатков (хотя бы некоторых) и в то же время обладающих положительными сторонами первоначальных методов. Такие методы условно будем называть *аппроксимативно-итерационными методами* (а. и. м.).

Реальный путь к созданию а. и. м. открывают универсальные (как стационарные, так и, в первую очередь, нестационарные) итерационные процессы, которым посвящены многочисленные исследования (краткий обзор результатов приведен в работе [19] и § 7 гл. II книги [10]).

Ниже, исходя из ряда результатов § 4 по прямым методам решения операторных уравнений, на основе хорошо известных результатов по итерационным методам исследуется ряд вычислительных схем а. и. м. Значительное внимание уделяется так называемому *методу уточняющих итераций*, который является одним из вариантов а. и. м. Полученные результаты позже нашли применения к различным сингулярным интегральным уравнениям с ядрами типа Гильберта и Коши, для которых исследованы а. и. методы, в том числе квадратурно-итерационные и вырожденно-итерационные методы.

9.2. *Об универсальных итерационных методах решения нелинейных уравнений*

Рассмотрим уравнение вида

$$Ax = y \quad (x \in X,\, y \in Y), \tag{9.1}$$

где A — нелинейный непрерывный оператор из банахова пространства X в банахово пространство Y. Решение его будем определять как предел итерационного процесса

$$x^{j+1} = x^j + \tau B(y - Ax^j), \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{9.2}$$

где x^0 — произвольное начальное приближение из X, B — некоторый непрерывный оператор из Y и X, а $\tau\,(0 < \tau < \infty)$ — итерационный параметр. На практике обычно B и τ выбираются исходя из требования обеспечения максимальной асимптотической скорости сходимости итерационного процесса (9.2), причем оператор B выбирается, как правило, зависящим от A и τ, так что $B = \varphi(\tau, A)$, где φ — некоторая функция своих аргументов.

В силу ряда причин вместо уравнения (9.1) очень часто приходится решать уравнение вида

$$A_n x = y_n \quad (x \in X,\, y_n \in Y), \tag{9.3}$$

где A_n — непрерывный оператор из X в Y, а y_n и A_n в определенном смысле аппроксимируют y и A соответственно. Тогда итерационный процесс (9.2) заменяется универсальным процессом вида

$$x^{j+1} = x^j + \tau B(y_n - A_n x^j), \quad j = 0, 1, \ldots;\, n = 1, 2, \ldots, \tag{9.4}$$

где $x^j = x^j(n) = x_n^j$, или же универсальным процессом нестационарного типа

$$x^{j+1} = x^j + \tau B_j\,(y_j - A_j\, x^j), \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{9.5}$$

где B_j — некоторые непрерывные операторы из Y в X.

Ясно, что универсальные итерационные процессы (9.4) и (9.5) представляют собой некоторые конкретные алгоритмы (другие см.ниже) а. и. м. решения уравнения (9.1). Ясно также, что в (9.1)–(9.5) без ограничения общности можно считать, что $A0 = 0,\ A_n 0 = 0,\ n = 1, 2, \ldots$.

Сначала для уравнений (9.1) и (9.3) приведем две простые леммы, доказательства которых имеются в работе [19].

Лемма 9.1. *Пусть выполнены условия:*

а) $\|y - y_n\| \to 0,\ \|A_n x - Ax\| \leqslant \varepsilon_n \|x\|,$ *где* $0 \leqslant \varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty,$ *и не зависит от* $x \in X$;

б) *линейный непрерывный оператор* B *осуществляет взаимно-однозначное отображение* Y *на* X;

в) *оператор перехода* $T = E - \tau BA$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $q,\ 0 < q < 1$.

Тогда уравнения (9.1) *и* (9.3) *однозначно разрешимы при любых правых частях соответственно* y *и* $y_n \in Y$ *и их решения можно найти как пределы итерационных последовательностей* (9.2) *и* (9.4) *при* $j \to \infty$, *причем*

$$\|x^*\| \leqslant \tau \|By\| (1 - q)^{-1}, \|x_n^*\| \leqslant \tau \|By_n\| (1 - q_0)^{-1}, \tag{9.6}$$

$$\|x_n^* - x_n^j\| \leqslant q_0^j (1 - q_0)^{-1} \tau \|B\| \|y_n - A_n x_n^0\|, \tag{9.7}$$

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \tau \|B\| (1 - q)^{-1} (\varepsilon_n \|x_n^*\| + \|y - y_n\|), \tag{9.8}$$

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \tau\|B\|(1-q_0)^{-1}(\varepsilon_n\|x^*\| + \|y - y_n\|), \tag{9.9}$$

где $n, j = 1, 2, \ldots,$ *а* $q_0\,(q \leqslant q_0 < 1)$ *— вполне определенная постоянная.*

Лемма 9.2. *Пусть выполнены условия* б) *и* в) *леммы* 9.1 *и*

а$'$) $\|y - y_n\| \to 0,$ $\|A_n x^* - Ax^*\| \to 0,$ $n \to \infty,$ *где* x^* *— решение уравнения* (9.1);

в$_n$) *операторы перехода* T_n *удовлетворяют условию Липшица с постоянными* $q_n \leqslant \overline{q_0} < 1,$ $n = 1, 2, \ldots .$

Тогда при $j \to \infty$ *итерационные последовательности* (9.2) *и* (9.4) *сходятся к единственным решениям* x^* *и* x_n^* *уравнений* (9.1) *и* (9.3) *соответственно; кроме того,* $x_n^* \to x^*,$ $n \to \infty,$ *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \tau\|B\|(1-\overline{q_0})^{-1}(\|Ax^* - A_n x^*\| + \|y - y_n\|), \tag{9.10}$$

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \tau\|B\|(1-q)^{-1}(\|Ax_n^* - A_n x_n^*\| + \|y - y_n\|). \tag{9.11}$$

Далее, имеет место следующая

Теорема 9.1. *В условиях леммы* 9.1 *итерационные процессы* (9.4) *и* (9.5) *при* $B_j \to B$ *(равномерно) для любых начальных приближений* x_n^0 *и* $x^0 \in X$ *сходятся к единственному решению* x^* *уравнения* (9.1) *в том смысле, что*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} x_n^j = x^*, \tag{9.12}$$

$$\lim_{j\to\infty} x^j = x^*, \tag{9.13}$$

причем

$$\|x^* - x_n^j\| \leqslant \frac{\tau\|B\|}{1-q_0}\{\varepsilon_n\|x_n^*\| + \|y - y_n\| + q_0^j\|y_n - A_n x_n^0\|\}, \quad j = 1, 2, \ldots; \tag{9.14}$$

$$\|x^* - x_n^j\| \leqslant \frac{\tau\|B\|}{1-\overline{q_0}}\{\|Ax^* - A_n x^*\| + \|y - y_n\| + \overline{q}_0^j\|y_n - A_n x_n^0\|\}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{9.15}$$

Действительно, из соотношений (9.7) и (9.8) получаем конструктивную оценку (9.14), из которой, а также из леммы 9.1 в свою очередь следует (9.12). Оценка (9.15) доказывается аналогично (9.14). При $B_j \equiv B$ справедливость (9.13) следует из (9.14) или (9.15). Остальное почти очевидно.

Далее, следует отметить, что схему (9.4) можно рассматривать также как итерационный метод решения уравнения (9.1) с неточными входными данными. В этом случае возникает задача отыскания оптимального номера итерации $j = j_{\text{опт}}$, при котором происходит согласование всех погрешностей. Этот важный вопрос в случае линейных уравнений был исследован Г.И. Марчуком и В.Г. Васильевым [60]. Следуя им, в нелинейном случае с помощью теоремы 9.1 получается

Теорема 9.2. *Если в условиях леммы* 9.1 *положить*

$$j_0 = j_{\text{опт}} = [\![(\ln q_0)^{-1} \ln\{(\varepsilon_n \|x_n^*\| + \|y - y_n\|)/\|y_n - A_n x_n^0\|\}]\!], \qquad (9.16)$$

то итерационный процесс (9.4) *при любом* $x_n^0 \in X$ *сходится к единственному решению уравнения* (9.1) *в том смысле, что*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{j_0} = x^*; \quad \lim_{n\to\infty} x_n^j \neq x^*, \quad j \neq j_0, \qquad (9.17)$$

причем

$$\|x^* - x_n^{j_0}\| \leqslant 4\tau\|B\| q_0^{-1}(1 - q_0)^{-1}(\varepsilon_n\|x_n^*\| + \|y - y_n\|), \qquad (9.18)$$

$$\|x^* - x_n^{j_0}\| \leqslant 4\tau\|B\|(1 - q_0)^{-1} q_0^{j_0 - 1}\|y_n - A_n x_n^0\|, \qquad (9.19)$$

и оценки (9.18), (9.19) *неулучшаемы в смысле* $\|x^* - x_n^{j_0}\| \leqslant \|x^* - x_n^j\|$; $j,\, n = 1, 2, \ldots$.

Действительно, правая часть формулы (9.14) будет минимальной при

$$\varepsilon_n\|x_n^*\| + \|y - y_n\| = q_0^j\,\|y_n - A_n x_n^0\|. \qquad (9.20)$$

Обозначая через j_0 целую неотрицательную часть (относительно j) решения уравнения (9.20), приходим к (9.16), откуда и из (9.14) находим оценки (9.18) и (9.19). Очевидно, любая из оценок (9.18) и (9.19) с учетом (9.14) приводит к (9.17). Ясно, что если воспользоваться оценкой (9.15), то на основе леммы 9.2 придем к соотношениям, мало отличающимся от (9.16), (9.18)–(9.20).

Теперь рассмотрим ситуацию, несколько обратную изученной в теореме 9.2.

Известно, что при решении различных классов уравнений эффективной оказалась идея итеративного уточнения решения, определенного первоначально из более простого уравнения и являющегося в силу этого, возможно, лишь грубым приближением к искомому элементу. Одним из простейших примеров реализации этой идеи является следующая

Теорема 9.3. *Если выполнены условия леммы* 9.1 *или же леммы* 9.2, *то при* $x^0 = x_n^*$ *итерационный процесс* (9.2) *при* $j \to \infty$ *сходится к единственному решению* x^* *уравнения* (9.1) *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$\|x^* - x_n^j\| \leqslant \tau \|B\| (1-q)^{-1} q^j \|y - Ax_n^*\|; \quad j, n = 1, 2, \ldots, \tag{9.21}$$

где невязка нулевого приближения $\|y - Ax_n^*\| = \|Ax^* - Ax_n^*\| \to 0$, $n \to \infty$.

Доказательство следует из вышеприведенных фактов.

Отметим, что другие, более интересные примеры итерационного уточнения рассматриваются ниже.

Замечание 9.1. В приведенных выше утверждениях относительно процесса (9.4) можно считать также, что $B = B_n : Y \longrightarrow X_n$, $A_n : X \longrightarrow Y$ или же $B = B_n : Y_n \longrightarrow X_n$, $A_n : X \longrightarrow Y_n$, где X_n и Y_n — произвольные подпространства пространств X и Y соответственно. Тогда при $x_n^0 \in X_n$ получаем $x_n^j \in X_n$ при любых $j \in \mathbb{N}$. Эти случаи особенно удобны, когда X_n и Y_n — конечномерные подпространства одинаковой размерности; тогда мы имеем дело, по существу, с а. и. м. на базе прямых методов (см. также ниже пп. 9.3 и 9.4). С другой стороны, в случаях гладких операторов предположения вышеприведенных теорем и лемм с помощью результатов [53] можно несколько ослабить, а в других случаях — несколько усилить.

9.3. *Метод уточняющих итераций для линейных уравнений*

Одним из важнейших частных случаев а. и. м. является метод уточняющих итераций, который можно получить исходя из итерационных процессов (9.2), (9.4), (9.5) при специальном выборе оператора B и начального приближения. Рассмотрим этот вопрос более подробно для линейных уравнений.

Наряду с исходным уравнением (9.1), где A — линейный непрерывный оператор из X в Y, рассмотрим уравнение вида

$$\widetilde{A}x = y \quad (x \in X,\ y \in Y), \tag{9.22}$$

где $\widetilde{A}$ — линейный непрерывный оператор из X в Y, такой, что существует $\widetilde{A}^{-1} : Y \longrightarrow X$; в частности, возможен случай, когда $\widetilde{A} = B$, $X = Y$.

Положим

$$B = \varphi(\tau, A) = \widetilde{A}^{-1}, \quad x^0 = \widetilde{x}^* = \tau\widetilde{A}^{-1}y \ \text{ и } \quad x_n^0 = \tau\widetilde{A}^{-1}y_n.$$

Тогда итерационные процессы (9.2), (9.4), (9.5) ($B = B_j$) принимают соответственно вид

$$x^{j+1} = x^j + \tau\widetilde{A}^{-1}(y - Ax^j), \quad x^0 = \widetilde{x}^* = \tau\widetilde{A}^{-1}y, \quad j = 0, 1, \ldots; \tag{9.2$'$}$$

$$x_n^{j+1} = x_n^j + \tau\widetilde{A}^{-1}(y_n - A_n x_n^j), \quad x_n^0 = \tau\widetilde{A}^{-1}y_n, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{9.4$'$}$$

$$x^{j+1} = x^j + \tau\widetilde{A}^{-1}(y_j - A_j x^j), \quad x^0 = \tau\widetilde{A}^{-1}y, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{9.5$'$}$$

Если операторы $\widetilde{A}$ и τA достаточно близки, то из обратимости оператора $\widetilde{A}$ следует обратимость оператора A. Тогда обратные операторы $\widetilde{A}^{-1}$ и A^{-1} также близки, следовательно, оператор $\tau\widetilde{A}^{-1}A$ близок к единичному оператору E. В таком случае оператор перехода $T = T(\tau) = E - \tau\widetilde{A}^{-1}A$ будет иметь малую норму. Аналогичное рассуждение справедливо также для операторов $\widetilde{A}$ и $\tau\widetilde{A}^{-1}$. Отсюда и из результатов п. 9.2 следует

Теорема 9.4. *Пусть линейные непрерывные операторы A, $\widetilde{A}$, A_n и параметр τ таковы, что $\widetilde{A}$ линейно обратим и*

$$q = \|E - \tau\widetilde{A}^{-1}A\| < 1, \quad q_n = \|E - \tau\widetilde{A}^{-1}A_n\| \leqslant q_0 < 1. \tag{9.23}$$

Тогда уравнения (9.1) и (9.3) однозначно разрешимы при любых правых частях $y \in Y$ и $y_n \in Y$, итерационные последовательности (9.2$'$) и (9.4$'$) при $j \to \infty$ сходятся к их единственным решениям x^* и x_n^* со скоростями соответственно

$$\|x^* - x^j\| \leqslant q^{j+1}(1 - q)^{-1}\|x^0\|; \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{9.24}$$

$$\|x_n^* - x_n^j\| \leqslant q_0^{j+1}(1 - q_0)^{-1}\|x_n^0\|; \quad n, j = 1, 2, \ldots, \tag{9.25}$$

где

$$\|x_n^0\| \leqslant \|x^0\| + \tau\|\widetilde{A}^{-1}\|\,\|y - y_n\|; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Следствие 1. *В условиях теоремы при* $\tau = 1$ *и* $n, j = 1, 2, \ldots$

$$\|x^* - x_n^j\| \leqslant \|\widetilde{A}^{-1}\|(1-q_0)^{-1}\{\|y-y_n\| + \|Ax^* - A_n x^*\| + q_0^{j+1}\|y_n\|\}, \quad (9.26)$$

$$\|x_n^* - x_n^j\| \leqslant \|\widetilde{A}^{-1}\|(1-q')^{-1}\{\|y-y_n\| + \|Ax_n^* - A_n x_n^*\| + q_0^{j+1}\|y_n\|\}, \quad (9.27)$$

где

$$q' = \max(q_0, q), \quad \|x^*\| \leqslant \|\widetilde{A}^{-1}\|(1-q)^{-1}\|y\|,$$
$$\|x_n^*\| \leqslant \|\widetilde{A}^{-1}\|(1-q_0)^{-1}\|y_n\|.$$

Следствие 2. *Если* $\|y - y_n\| \to 0$, $\|Ax^* - A_n x^*\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то в условиях теоремы последовательность* (9.4) *сходится к точному решению* x^* *уравнения* (9.1) *в смысле* (9.12) *и со скоростью, определяемой неравенствами* (9.26) *и* (9.27), *причем существует такой номер итерации* $j = j_0$, *что справедливо* (9.17) *со скоростью, определяемой ниже.*

Следствие 3. *Если* $A_j \to A$ *(сильно),* $y_j \to y$ *(сильно) при* $j \to \infty$ *и*

$$q_j = \|E - \tau\widetilde{A}^{-1}A_j\| \leqslant q_0 < 1,$$

то итерационный процесс $(9.5')$ *сходится к единственному решению* x^* *операторного уравнения* (9.1).

Доказательство. В силу (9.23) операторы A и A_n линейно обратимы, причем

$$\|A^{-1}\| \leqslant \|\widetilde{A}^{-1}\|(1-q)^{-1}, \quad \|A_n^{-1}\| \leqslant \|\widetilde{A}^{-1}\|(1-q_0)^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \quad (9.28)$$

Тогда обычным способом при любых $n = 1, 2, \ldots$ находим оценки

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\| &\leqslant \|A_n^{-1}\|(\|y - y_n\| + \|Ax^* - A_n x^*\|), \\ \|x^* - x_n^*\| &\leqslant \|A^{-1}\|(\|y - y_n\| + \|Ax_n^* - A_n x_n^*\|), \end{aligned} \quad (9.29)$$

Теперь с помощью (9.25), (9.28) и первой оценки (9.29) приходим к (9.26), а с помощью (9.25), (9.28) и второй оценки (9.29) — к (9.27). Тем самым следствие 1 доказано.

Докажем следствие 2. Соотношение (9.2) следует, очевидно, как из (9.26), так и из (9.27). Выберем $j = j_0$ и $j = j_0'$ как целые части решений (относительно j) уравнений соответственно

$$\|y - y_n\| + \|Ax^* - A_n x^*\| = q_0^{j+1}\|y_n\|,$$

$$\|y - y_n\| + \|Ax_n^* - A_n x_n^*\| = q_0^{j+1}\|y_n\|.$$

Тогда, как и в п. 9.2, приходим к (9.18) со скоростями, определяемыми неравенствами

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^{j_0}\| &\leqslant 2\|\widetilde{A}^{-1}\|\,\|y_n\|(1-q_0)^{-1}q_0^{j_0+1}, \\ \|x^* - x_n^{j_0'}\| &\leqslant 2\|\widetilde{A}^{-1}\|\,\|y_n\|(1-q')^{-1}q_0^{j_0'+1}. \end{aligned} \tag{9.30}$$

Следствие 2 доказано. Следствие 3 в силу (9.26) и (9.27) становится очевидным.

Поясним вкратце смысл теоремы 9.4. Ясно, что если операторы $\widetilde{A}$ и A близки, то элемент $x^0 = \tau\widetilde{A}^{-1}y$ или $x_n^0 = \tau\widetilde{A}^{-1}y_n$ можно рассматривать как некоторое (вообще говоря, грубое) приближение к решению уравнения (9.1). Тогда в силу теоремы 9.4 и ее следствий итерационные процессы $(9.2')$, $(9.4')$ и $(9.5')$ позволяют уточнять это грубое приближение до любой степени точности. Такой метод решения уравнения (9.1) естественно назвать *"методом уточняющих итераций".* Это название оправдывается еще и тем, что из описанной схемы (9.5), $(9.5')$ в частном случае

$$X = Y, \quad A = E - \lambda H, \quad \tau = 1, \quad B = \widetilde{A}^{-1}, \quad x^0 = \widetilde{A}^{-1}y, \quad n = j, \tag{9.31}$$

где H — линейный вполне непрерывный оператор, получаем схему "уточняющих" итераций А.Б. Бакушинского для решения линейных уравнений Фредгольма II-го рода; впоследствии К.В. Емельянов и А.М. Ильин доказали, что рассматриваемый им метод является оптимальным по зависимости погрешности от числа произведенных арифметических действий. В этом же смысле оптимальным является метод полос Г.Н. Положего и П.И. Чаленко. Кроме того, когда $X = Y = M[a, b]$, а H — линейный интегральный оператор, из схемы $(9.2')$, (9.31) можно получить также интересные быстросходящиеся алгоритмы решения линейных интегральных уравнения II-го рода, предложенные Б.А. Бельтюковым. Краткий обзор результатов только что указанных авторов с соответствующими ссылками имеется в работе [19], а также в § 7 гл. II книги [10].

В силу сказанного, а также с учетом последующих приложений (в первую очередь к сингулярным интегральным уравнениям) представляет интерес детальное исследование метода уточняющих итераций. В этом смысле весьма удобными являются теорема 9.4 и ее следствия. Кроме того, ниже приводятся еще ряд теорем в этом направлении.

Теорема 9.5. *Пусть даны уравнения* (9.1) *и* (9.22), *где* $D(A) = D(\widetilde{A}) \subseteq X$, $R(A) = R(\widetilde{A}) \subseteq Y$. *Пусть приближенный оператор* $\widetilde{A}$ *имеет левый линейный обратный* $\widetilde{A}_l^{-1}$ *и спектральный радиус оператора шага* $T = T_l = E - \tau\widetilde{A}_l^{-1}$ *удовлетворяет неравенству* $\rho = \rho(T_l) < 1$. *Тогда уравнение* (9.1) *имеет единственное решение* x^* *при данной правой части* $y \in R(A)$, *и его можно найти как предел итерационной последовательности* (9.2) *при* $B = \widetilde{A}_l^{-1}$, $x^0 = \tau\widetilde{A}_l^{-1}y$, $y \in R(A)$. *Если, кроме того,* $\|T\| \leqslant q < 1$, *то указанная последовательность сходится со скоростью*

$$\|x^* - x^j\| \leqslant q^{j+1}(1-q)^{-1}\|x^0\|, \quad x^0 = \tau\widetilde{A}_l^{-1}y. \tag{9.32}$$

Теорема 9.6. *Пусть даны уравнения* (9.1) *и* (9.22), *где* $D(A) = D(\widetilde{A}) = X$, $R(A) = R(\widetilde{A}) = Y$. *Пусть оператор* $\widetilde{A}$ *имеет правый обратный* $\widetilde{A}_r^{-1}$ *и спектральный радиус оператора шага* $T = T_r = E - \tau A_r$ *удовлетворяет неравенству* $\rho = \rho(T_r) < 1$. *Тогда уравнение* (9.1) *в пространстве* $X_1 = X \ominus N(\widetilde{A})$ *имеет единственное решение* $x^* = \widetilde{A}_r^{-1}z^* \in X_1$, *где* $N(\widetilde{A})$ *— подпространство нулей оператора* $\widetilde{A}$, z^* *есть предел итерационной последовательности*

$$z^{j+1} = z^j + \tau(y - A\widetilde{A}_r^{-1}z^j) = T_r z^j + \tau y, \quad z^0 = \tau y, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{9.33}$$

Если, кроме того, $\|T_r\| \leqslant q < 1$, *то*

$$\|x^* - x^j\| \leqslant \tau q^{j+1}(1-q)^{-1}\|\widetilde{A}_r^{-1}\|\,\|y\|, \quad x^j = \widetilde{A}_r^{-1}z^j, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{9.34}$$

Доказательства теорем 9.5 и 9.6 имеются в работе автора [19].

Пусть теперь существует двусторонний линейный оператор $\widetilde{A}^{-1}$. Тогда спектральные радиусы операторов $T_l = E - \tau\widetilde{A}^{-1}A$ и $T_r = E - \tau A\widetilde{A}^{-1}$ совпадают, $N(\widetilde{A}) = \theta$, $X_1 = X = \widetilde{A}^{-1}(Y)$. Следовательно, итерационный процесс (9.2) при $x^0 = \tau\widetilde{A}^{-1}y$, $B = \widetilde{A}^{-1}$ эквивалентен процессу (9.33) в смысле замены $x^j = \widetilde{A}^{-1}z^j$, $z^j = \widetilde{A}x^j$, $j = 0, 1, \ldots$. Поэтому из теорем 9.5 и 9.6 следует

Теорема 9.7. *Пусть даны уравнения* (9.1) *и* (9.22) *с линейными непрерывными операторами* $A : X \longrightarrow Y$, $\widetilde{A} : X \longrightarrow Y$ *и* $D(A) = D(\widetilde{A}) = X$, $R(A) = R(\widetilde{A}) = Y$. *Если оператор* $\widetilde{A}$ *непрерывно обратим и спектральный радиус*

$$\rho(T_l) = \rho(T_r) < 1, \quad T_l = E - \tau\widetilde{A}^{-1}A, \quad T_r = E - \tau A\widetilde{A}^{-1}, \tag{9.35}$$

то уравнение (9.1) *имеет единственное решение* $x^* \in X$ *при любом* $y \in Y$ *и его решение можно найти как предел итерационной последовательности* (9.2) *при* $B = \widetilde{A}^{-1}$, $x^0 = \tau B y$ *или последовательности* (9.33) *при* $x^j = \widetilde{A}^{-1} z^j$.

Замечание 9.2. Утверждения, аналогичные теоремам 9.5–9.7, справедливы также для итерационных процессов (9.4) и (9.5).

9.4. *Вариант метода уточняющих итераций на базе прямых методов*

Рассмотрим еще один результат по методу уточняющих итераций, основанный на прямых методах решения операторных уравнений. Пусть X и Y — банаховы пространства, а X_n и Y_n — их конечномерные подпространства одинаковой размерности. Рассмотрим два уравнения: точное (9.1) и соответствующее ему приближенное вида

$$A_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, \quad y_n \in Y_n, \quad n = 1, 2, \ldots), \tag{9.36}$$

где $A : X \longrightarrow Y$ и $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ — линейные непрерывные операторы. Решение x^* уравнения (9.1) будем определять итерационным методом

$$x_n^{j+1} = x_n^j + \tau B(y - A x_n^j), \quad x_n^0 = x_n^*; \quad n, j = 1, 2, \ldots, \tag{9.37}$$

где x_n^* — решение приближенного уравнения (9.36) при правой части $y_n \in Y_n$, а $B : Y \longrightarrow X$ — линейный непрерывный оператор. Справедлива

Теорема 9.8. *Пусть выполнены условия:*

а) *оператор* $B : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратим;*

б) $q = \|E - \tau B A\| < 1$*;*

в) $\|A_n - A\|_{X_n \to Y} \to 0$, $\|y - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$.

Тогда итерационный процесс (9.37) *сходится к единственному решению* x^* *уравнения* (9.1) *в смысле*

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ n\to\infty}} x_n^j = x^* = \lim_{j\to\infty} x_n^j = \lim_{n\to\infty} x_n^j = \lim_{j\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_n^j, \tag{9.38}$$

причем

$$\|x^* - x_n^j\| \leqslant \tau q^j (1-q)^{-1} \|B\| \, \|y - A x_n^*\|; \quad n, j = 1, 2, \ldots . \tag{9.39}$$

Если, в частности, $j = j_0 = [\![\ln \|y - A x_n^*\| / \ln q]\!]$, *то*

$$\|x^* - x_n^{j_0}\| \leqslant \tau \|B\| q^{-1} (1-q)^{-1} \|y - A x_n^*\|^2 \leqslant \tau \|B\| (1-q)^{-1} q^{2 j_0}, \tag{9.40}$$

в то время как

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \tau\|B\|(1-q)^{-1}\|y - Ax_n^*\|, \tag{9.39$'$}$$

$$\|y - Ax_n^*\| \leqslant \frac{1}{1-p_n}(\|y - y_n\| + p_n\|y\|), \quad p_n = \frac{\tau\|B\|}{1-q}\|A - A_n\| < 1.$$

Доказательство. В силу условий а) и б) оператор A непрерывно обратим и $\|A^{-1}\| \leqslant \tau\|B\|(1-q)^{-1}$. Отсюда и из условия б) следует (см., напр., теорему 4.1) линейная обратимость операторов A_n хотя бы при $p_n < 1$ и $\|A_n^{-1}\| \leqslant \tau\|B\|(1-q)^{-1}(1-p_n)^{-1}$. Тогда приближенные уравнения (9.36) однозначно разрешимы и $x_n^* = A_n^{-1}y_n \to x^* = A^{-1}y$, $n \to \infty$, а в силу § 5 справедливы оценки (9.39$'$). Теперь ясно, что итерационный процесс (9.37) при $x_n^0 = x_n^*$ имеет смысл. Тогда в силу условия б) легко находим оценку (9.39), откуда и из (9.39$'$) следует (9.38). Оценки (9.40) выводятся из (9.39). Теорема доказана.

9.5. *Аппроксимативно-итерационный метод решения линейных уравнений*

В этом пункте рассматриваются вопросы численной реализации прямых методов решения линейных операторных уравнений. В основе исследования лежит универсальный итерационный метод решения конечномерного уравнения (9.36):

$$x_n^{j+1} = x_n^j + \tau B_n(y_n - A_n x_n^j), \quad x_n^0 = \tau B_n y_n, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{9.41}$$

где $\tau = \tau(j, n, A_n, B_n) > 0$ и $B_n : Y_n \longrightarrow X_n$ — подлежащие определению итерационный параметр и линейный непрерывный оператор соответственно.

Теорема 9.9. *Пусть выполнены условия:*

а) *оператор $A : X \longrightarrow Y$ непрерывно обратим;*

б) $\|y_n - y\| \to 0$, $n \to \infty$ *и* $\varepsilon_n \equiv \|A_n - A\| \to 0$, $A_n - A : X_n \longrightarrow Y$, $n \to \infty$;

в) *существуют такие линейные операторы $B_n : Y_n \longrightarrow X_n$ и параметр $\tau > 0$, что*

$$q_n \equiv \|E - \tau B_n A_n\| \leqslant q < 1.$$

Тогда итерационный процесс (9.41) *сходится к единственному решению* $x^* = A^{-1}y$ *уравнения* (9.1) *в том смысле, что*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} x_n^j = \lim_{n\to\infty} x_n^* = x^*. \tag{9.42}$$

При этом существует оптимальный номер итерации $j = j_0$ *такой, что при* $n \geqslant n_0$, $j = 1, 2, \ldots$ *справедливы соотношения*

$$\|x_n^{j_0} - x^*\| \leqslant \|x_n^j - x^*\|; \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{j_0} = x^*; \quad \lim_{n\to\infty} x_n^j \neq x^* \quad (j \neq j_0); \tag{9.43}$$

$$\|x^* - x_n^{j_0}\| \leqslant 2\tau(1-q)^{-1}q^{j_0+1}\|B_n y_n\|. \tag{9.44}$$

Доказательство. Положим $p_n = \|A^{-1}\|\varepsilon_n$. Ясно, что при всех $n \geqslant n_0$ в силу условия б) имеем $p_n < 1$. Тогда в силу теоремы 4.1 оператор $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ линейно обратим и

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \|A^{-1}\|(1-p_n)^{-1}\{\|y - y_n\| + p_n\|y\|\}, \tag{9.45}$$

где $x^* = A^{-1}y$, $x_n^* = A_n^{-1}y_n$. С другой стороны, оператор $B_n : Y_n \longrightarrow X_n$ можно представить в виде

$$B_n = \tau^{-1}(E - T_n)A_n^{-1}, \quad T_n = E - \tau B_n A_n, \quad n \geqslant n_0. \tag{9.46}$$

Тогда в силу условия в) оператор $B_n : Y_n \longrightarrow X_n$ линейно обратим и

$$B_n^{-1} = \tau A_n(E - T_n)^{-1}, \quad T_n = E - \tau B_n A_n, \quad n \geqslant n_0. \tag{9.47}$$

Поэтому уравнение (9.36) при всех $n \geqslant n_0$ эквивалентно уравнению

$$x_n = (E - \tau B_n A_n)x_n + \tau B_n y_n, \quad n \geqslant n_0. \tag{9.48}$$

Ясно, что метод простой итерации решения уравнения (9.48) с начальным приближением $x_n^0 = \tau B_n y_n$ совпадает с универсальным итерационным методом (9.41) для уравнения (9.1). Поэтому в силу условия в) метод (9.41) сходится при $j \to \infty$ и $n \geqslant n_0$ к единственному решению $x_n^* = A_n^{-1}y_n$ уравнения (9.36) со скоростью

$$\|x_n^* - x_n^j\| \leqslant q^{j+1}(1-q)^{-1}\tau\|B_n y_n\|, \quad n \geqslant n_0, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{9.49}$$

Из (9.45) и (9.49) находим оценку при $n \geqslant n_0$, $j = 1, 2, \ldots$:

$$\|x^* - x_n^j\| \leqslant \|A^{-1}\|(1-p_n)^{-1}\{\|y - y_n\| + p_n\|y\|\} + \tau q^{j+1}(1-q)^{-1}\|B_n y_n\|. \tag{9.50}$$

Обозначим через j_0 целую неотрицательную часть решения (относительно j) уравнения

$$\|A^{-1}\|(1-p_n)^{-1}\{\|y-y_n\|+p_n\|y\|\} = \tau q^{j+1}(1-q)^{-1}\|B_n y_n\|. \qquad (9.51)$$

Тогда из (9.50) находим оценку (9.44), откуда и из (9.50), как и в пунктах 9.2 и 9.3, следует требуемое утверждение.

Заметим, что уравнение (9.51) в силу соотношения (9.46) и теоремы 4.1 может быть заменено более простым уравнением

$$2\|y_n\|(1-q)^{-1}q^{j+1} = \|y-y_n\|+p_n\|y\|; \qquad (9.51')$$

тогда оценку (9.44) следует заменить на

$$\|x^* - x_n^{j_0}\| \leqslant 4\|A^{-1}\|(1-p_n)^{-1}(1-q)^{-1}\|y_n\|q^{j_0+1}, \qquad (9.44')$$

где $j_0 = j_0'$ — решение уравнения (9.51′).

Теорему 9.9 несколько дополняет следующая

Теорема 9.10. *Пусть выполнены условия:*

а) *существует непрерывно обратимый линейный оператор* $B : Y \to X$*;*

б) $\|B_n - B\| \longrightarrow 0, \;\; n\to\infty, \;\; B_n - B : Y_n \longrightarrow X;$

в) A_n*,* B_n*,* y_n *и* τ *таковы, что* $q_n \equiv \|E-\tau B_n A_n\| \leqslant q < 1$ *и* $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$*,* $A_n - A : X_n \longrightarrow Y$*,* $\|y_n - y\| \to 0$*,* $n\to\infty$*.*

Тогда справедливо утверждение теоремы 9.9 *для* j_0*, являющегося решением уравнения*

$$q^{j+1}\|B_n y_n\| = \|B\|(1-\gamma_n)^{-1}(\|y-y_n\|+\gamma_n\|y\|), \qquad (9.52)$$

где

$$\gamma_n = \tau\|B\|(1-q)^{-1}\|A-A_n\| < 1, \quad A - A_n : X_n \longrightarrow Y.$$

Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 9.9. Поэтому укажем только схему доказательства.

В силу условий а) и б) с помощью теоремы 4.1 доказывается линейная обратимость операторов B_n при всех $n \geqslant n_1$. Отсюда и из условия в) выводится линейная обратимость операторов A_n при $n \geqslant n_1$ и $x_n^j \to x_n^*$, $j\to\infty$, со скоростью, определяемой неравенствами

$$\|x_n^* - x_n^j\| \leqslant q^{j+1}(1-q)^{-1}\tau\|B_n y_n\|, \quad x_n^0 = \tau B_n y_n, \quad j = 1,2,\ldots. \qquad (9.53)$$

Из условий б) и в) следует оценка $\|E-\tau BA\| \leqslant q < 1$. Поэтому в силу условия а) оператор A непрерывно обратим и $\|A^{-1}\| \leqslant \tau \|B\| \, (1-p)^{-1}$. Тогда справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\| \leqslant \tau \|B\| (1-q)^{-1} (1-\gamma_n)^{-1} \{\|y_n - y\| + \gamma_n \|y\|\}. \tag{9.54}$$

Из (9.53) и (9.54) следует оценка

$$\|x^* - x_n^j\| \leqslant \frac{\tau}{1-q} \left\{ q^{j+1} \|B_n y_n\| + \frac{\|B\|}{1-\gamma_n} (\|y_n - y\| + \gamma_n \|y\|) \right\}. \tag{9.55}$$

Дальше из (9.55) получаем требуемое утверждение.

Теперь покажем, что операторы B_n и итерационные параметры $\tau = \tau_n$, о которых идет речь в теоремах 9.9 и 9.10, существуют.

Сначала рассмотрим общий случай. Справедлива следующая

Теорема 9.11. *Пусть выполнены условия* а) *и* б) *теоремы* 9.9. *Тогда существуют операторы* $B_n : Y_n \longrightarrow X_n$ *такие, что для любых* $\tau > 0$ *выполняется условие* в) *теоремы* 9.9, *и последовательность* (9.41) *сходится в смысле* (9.42)–(9.44).

Доказательство. Очевидно, что существует оператор $C_n : X_n \longrightarrow Y_n$ такой, что

$$\alpha = \alpha(n) = \|A_n^{-1}\| \, \|A_n - C_n\| < 1/2.$$

Ясно, что операторы C_n линейно обратимы и

$$C_n^{-1} = A_n^{-1} + \Delta_n, \quad \Delta_n = \sum_{j=1}^{\infty} (A_n^{-1} \delta_n)^j A_n^{-1}, \quad \delta_n = A_n - C_n. \tag{9.57}$$

В (9.41) положим $B_n = C_n^{-1}$. Тогда для решения уравнения (9.1) получаем одну из схем аппроксимативно-итерационного метода:

$$x_n^{j+1} = x_n^j + \tau (y_n - C_n^{-1} A_n x_n^j), \quad x_n^0 = \tau C_n^{-1} y_n, \quad j = 0, 1, \dots . \tag{9.41$'$}$$

Здесь элемент $x_n^0 = \tau C_n^{-1} y_n$ является лишь грубым приближением к $x_n^* = A_n^{-1} y_n$, исходя из которого последовательность (9.41) приводит к точному решению приближенного уравнения (9.36), если только $\|E - \tau C_n^{-1} A_n\| < 1$. Это неравенство, а тем самым и условие теоремы 9.9, выполняется для любых $\tau > 0$, так как в силу (9.56) и (9.57) имеем

$$q_n = \|E - \tau C_n^{-1} A_n\| = \|(1-\tau)E - \tau \Delta_n A_n\| \leqslant 1 - \tau + \tau \alpha (1-\alpha)^{-1} < 1.$$

Таким образом, теорема 9.11 доказана.

Теорема 9.12. *Пусть X и Y — гильбертовы пространства. Тогда при выполнении условий* а) *и* б) *теоремы* 9.9 *существуют операторы B_n и итерационные параметры τ_n такие, что последовательность* (9.41) *сходится в смысле* (9.42)–(9.44) *со скоростью, определяемой ниже.*

Доказательство. Для всех n, начиная с некоторого, имеем

$$\alpha_n = \|A^{-1}\|\,\|A - A_n\| < 1/2, \quad A - A_n : X_n \longrightarrow Y,$$

и, как следует из теоремы 4.1,

$$\|A_n^{-1}\| \leqslant 2\|A^{-1}\|,\ \|x^* - x_n^*\| \leqslant a\|A - A_n\| + b\|y - y_n\|,\ n \geqslant n_0, \tag{9.58}$$

где a и b — положительные постоянные, не зависящие от n. Дальше доказательство может быть продолжено различными способами. В частности, полагая $B_n = A_n^*$, где A_n^* — сопряженный к A_n оператор, получаем, что $A_n^* A_n$ в силу (9.58) является самосопряженным положительно определенным оператором с границами спектра $M_n = \|A_n\|^2$ и $m_n \geqslant \|A_n^{-1}\|^{-2} \geqslant$ $\geqslant (2\|A^{-1}\|)^2 > 0$. Если итерационный параметр $\tau = \tau_n$ выбрать из условия $0 < \tau < 2\|A_n\|^{-2} \leqslant 2\rho^{-2}(A_n)$, где $\rho(A_n)$— спектральный радиус оператора A_n, то в силу (9.58) находим $0 < \tau < 2\|A_n^{-1}\|^2 \leqslant 8\|A^{-1}\|^2$. Тогда [59], [61] последовательность (9.41) при $j \to \infty$, $n \geqslant n_0$ сходится к единственному решению уравнения (9.36). Полагая для определенности $\tau = \tau_n = (M_n + m_n)^{-1}$, для спектрального радиуса оператора перехода $T_n = E - \tau B_n A_n$ имеем

$$q_n = \rho(T_n) = \rho(E - \tau_n A_n^* A_n) = (M_n - m_n)/(M_n + m_n) < 1. \tag{9.59}$$

Поэтому $x_n^j \to x_n^*$, $j \to \infty$, как геометрическая прогрессия со знаменателем q_n, точнее,

$$\|x_n^* - x_n^j\| \leqslant (M_n^{1/2}/m_n)[(M_n - m_n)/(M_n + m_n)]^{j+1}\|y_n\|; \quad j = 0, 1, \dots . \tag{9.60}$$

Из (9.58) и (9.60) следует сходимость процесса (9.41) в смысле (9.42). С другой стороны, обозначая через j_0 целую неотрицательную часть (относительно j) решения уравнения

$$q_n^{j+1}\|y_n\|M_n^{1/2} = m_n(a\|A_n - A\| + b\|y_n - y\|),$$

в силу (9.58)–(9.60) находим

$$\|x^* - x_n^{j_0}\| \leqslant 2\|y_n\|(M_n^{1/2}/m_n)q_n^{j_0+1}. \tag{9.61}$$

С учетом $M_n \to M = \|A\|^2$, $m_n \to m \geqslant \|A^{-1}\|^{-2} > 0$ при $n \to \infty$, из (9.58)–(9.61) получаем требуемое утверждение.

Замечание 9.3. В силу того, что конечномерные пространства X_n и Y_n гомеоморфны $N = N(n)$-мерному евклидовому пространству $\mathbb{R}^N$, теорема 9.12 с некоторыми изменениями переносится и на случай, когда X и Y — произвольные банаховы пространства. При этом итерационный процесс (9.41) предварительно удобно записать для конечной системы линейных алгебраических уравнений, эквивалентной уравнению (9.36), и воспользоваться соответствующими результатами из [58], [61].

9.6. *Об оценке полной погрешности аппроксимативно-итерационного метода*

Хорошо известно, что каждый *реальный* вычислительный процесс сопровождают следующие погрешности:

а) наследственная или неустранимая погрешность $\varepsilon^{\text{н}}$;

б) погрешность метода или принципиальная погрешность $\varepsilon^{\text{м}}$;

в) вычислительная погрешность или погрешность округлений ε^0.

Тогда полная абсолютная погрешность ε^n определяется по формуле $\varepsilon^n = \varepsilon^{\text{н}} + \varepsilon^{\text{м}} + \varepsilon^0$. Учет этих погрешностей и их разумное согласование имеет, как известно, исключительно важное значение в вычислительной практике. В этом направлении в последние годы достигнут определенный прогресс. На основе ряда известных результатов, в первую очередь, результатов Н.С. Бахвалова, В.В. Воеводина, В.В. Иванова и Дж. Уилкинсона с помощью вышеприведенных результатов можно оценить полную абсолютную погрешность аппроксимативно-итерационного метода; подробные ссылки и некоторые результаты в этом направлении приведены в работах автора [19], [20] и в § 7 гл. II его книги [10].

§ 10. Решение операторных уравнений методом минимальных невязок

Этот параграф посвящен обобщению известного в научной литературе метода наименьших квадратов решения интегральных и дифференциальных уравнений в *гильбертовых* пространствах на случай общих линейных операторных уравнений, заданных *в паре произвольных* (не обязательно совпадающих) банаховых пространств. Основное внимание при этом уделено вопросам теоретического обоснования указанного метода.

Рассматривается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \quad (x \in X,\ y \in Y,\ A \in \mathcal{L}(X,Y)), \tag{10.1}$$

где X и Y — полные линейные нормированные пространства, а $\mathcal{L}(X,Y)$ — пространство всех линейных (т. е. аддитивных и однородных) операторов из X в Y.

Ниже, в продолжение начатых в работах [59], [62], [63], [40], [10]–[12] исследований, изучается приближенный метод решения уравнения (10.1), в частных случаях (напр., когда $X = Y$ или хотя бы Y есть гильбертово пространство) совпадающий с известным (см., напр., [62]–[64]) методом наименьших квадратов (см. также выше п. 6.3).

Пусть $\{X_n\}_1^\infty$ — последовательность конечномерных подпространств пространства X, $\dim X_n = n \in \mathbb{N}$, причем $X_n \subset D(A)$ в случае неограниченности оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Приближенное решение уравнения (10.1) ищем в виде элемента

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \in X_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10.2}$$

где $\{\varphi_k = \varphi_{kn}\}_1^n$ — базис подпространства X_n. Неизвестные коэффициенты $\alpha_k = \alpha_{kn} \in \mathbb{C}$ $(k = \overline{1,n})$ будем определять исходя из условия минимальности нормы невязки

$$r_n \equiv y - Ax_n = y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k, \quad \psi_k \equiv A\varphi_k, \tag{10.3}$$

в пространстве Y:

$$\inf_{x_n \in X_n} \|y - Ax_n\|_Y = \inf_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}} \|y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k\|_Y \equiv E_n^{\psi}(y), \tag{10.4}$$

где $\mathbb{C}$, как и выше, есть множество комплексных чисел.

Величина

$$E_n^{\psi}(y) = \rho(y, AX_n)_Y, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10.5}$$

существует для любого $y \in Y$, где $\rho(y, Y_n)_Y$ есть расстояние от элемента $y \in Y$ до подпространства $Y_n = AX_n$ в норме пространства Y. Если же система элементов $\{\psi_k\}_1^n \subset Y$ линейно независима, то существуют числа α_k^*, $k = \overline{1, n}$, а следовательно, и элемент

$$x_n^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \varphi_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10.2*}$$

на которых достигаются точные нижние грани в (10.4), и тогда

$$\|y - Ax_n^*\|_Y = \|y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* A\varphi_k\|_Y \equiv E_n^{\psi}(y). \tag{10.6}$$

Однако числа α_k^*, $k = \overline{1, n}$, а следовательно, и элемент $x_n^* \in X_n$, на которых реализуются inf в (10.4), не обязаны быть единственными. Если же пространство Y является *строго нормированным*, то указанная единственность обеспечивается.

В связи с этим в порядке возрастающей трудности возникают следующие задачи:

1) существование приближенного решения (10.2*) и его единственность;

2) практическое построение элемента $x_n^* \in X_n$;

3) вычисление и исследование последовательности функционалов $\{E_n^{\psi}(y)\}_1^{\infty}$ как одной из важнейших характеристик метода;

4) сходимость приближенных решений $x_n^* \in X_n$ к точному решению $x^* \in X$ уравнения (10.1) и оценка погрешности приближенной формулы $x^* \approx x_n^*$, $n \in \mathbb{N}$, в зависимости от структурных свойств исходных данных.

Решение указанных задач предлагается в следующих теоремах (ввиду ограниченности объема пособия здесь доказательства не приводятся).

Теорема 10.1. *Пусть выполнены условия:*

α) Y *— строго нормированное пространство или же имеет выпуклую сферу;*

β) *уравнение* (10.1) *имеет единственное решение* $x^* \in X$ *хотя бы при данной правой части* $y \in Y$.

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ поставленная выше задача имеет единственное решение (10.2^*). *Если, кроме того, выполнено условие*

γ) *последовательность подпространств* $\{Y_n\}_1^\infty$, *где* $Y_n = AX_n \subset Y$, *предельно плотна в пространстве* Y,

то рассматриваемый метод сходится в том смысле, что невязка

$$y - Ax_n^* = y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* A\varphi_k \to 0, \quad n \to \infty, \tag{10.7}$$

в пространстве Y, *причем для любых* $x_n \in X_n$

$$\|y - Ax_n^*\| = E_n^\psi(y) \leqslant \|y - Ax_n\|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.8}$$

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия:*

α) Y *— строго нормированное пространство или же имеет выпуклую сферу;*

β) *линейный оператор* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *имеет непрерывный обратный* $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$;

γ) *последовательность подпространств* $\{Y_n\}_1^\infty$, *где* $Y_n = AX_n \subset Y$, *предельно плотна в пространстве* Y.

Тогда приближенные решения (10.2^*) *существуют и единственны при любых* $y \in Y$ *и* $n \in \mathbb{N}$, *они сходятся к точному решению* $x^* = A^{-1}y$ *в пространстве* X, *причем*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|A^{-1}\|_{Y \longrightarrow X} E_n^\psi(y), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.9}$$

Теорема 10.3. *Пусть выполнены условия:*

α) Y *— строго нормированное пространство или же имеет выпуклую сферу;*

β) *непрерывный оператор* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *имеет непрерывный обратный* $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$;

γ) *последовательность* $\{X_n\}_1^\infty$ *подпространств* $X_n \subset X$, $\dim X_n = n \in \mathbb{N}$, *предельно плотна в пространстве* X.

Тогда при любых $y \in Y$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *поставленная выше задача имеет единственное решение* (10.2^*). *Приближенные решения* x_n^* *сходятся к точному решению* $x^* = A^{-1}y$ *уравнения* (10.1) *в пространстве* X, *причем для погрешности приближенной формулы* $x_n^* \approx x^*$, $n \in \mathbb{N}$, *справедливы оценки*

$$E_n(x^*)_X \leqslant \|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \eta(A)\, E_n(x^*)_X, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10.10}$$

где $E_n(x^*)_X = \rho(x^*, X_n)_X$ *— наилучшее приближение* $x^* \in X$ *всевозможными элементами вида* (10.2) *в пространстве* X, *а*

$$\eta(A) = \|A\|_{X \longrightarrow Y} \|A^{-1}\|_{Y \longrightarrow X}$$

— число обусловленности оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Следует отметить, что в каждой из приведенных теорем существенным образом использовано свойство строгой нормированности пространства Y; таким свойством обладают, напр., следующие пространства:

1) абстрактное гильбертово пространство $Y = \{y\}$ со скалярным произведением и с определяемой через него нормой соответственно

$$(f, g)_Y \quad \text{и} \quad \|f\|_Y = \sqrt{(f, f)} \quad (f, g \in Y);$$

2) весовое пространство Лебега $Y = L_p(\rho) = L_p(\rho; < a, b >)$ при любых $p \in (1, \infty)$ с нормой

$$\|f\|_Y = \left\{ \int_a^b \rho(t) |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad f \in L_p(\rho),$$

где $\rho = \rho(t)$ — весовая функция области $< a, b > \subset (-\infty, \infty)$ с мерой $\mathrm{mes} < a, b >= b - a \leqslant \infty$. Однако пространства $L_1(\rho)$ и $L_\infty(\rho)$, а также пространство непрерывных функций $C < a, b >$ не являются строго нормированными.

Таким образом, в условиях любой из теорем исследуемая функция

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv \|y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A \varphi_k\|_Y, \quad y \in Y, \ n \in \mathbb{N},$$

имеет единственный минимум и он достигается в единственной точке $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$. Поскольку функция $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ является выпуклой, непрерывной по Гёльдеру и ограниченной снизу, то для нахождения экстремальной точки $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ можно использовать хорошо развитые к настоящему времени методы выпуклого программирования (см., напр., [9], [68]).

В *частных* случаях можно обойтись также более простыми средствами; пусть, напр., $Y = \{y\}$ есть гильбертово пространство с указанными выше скалярным произведением и нормой, а $X = \{x\}$ — линейное нормированное пространство. Тогда экстремальная точка $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$

определяется как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A\varphi_k, A\varphi_j)_Y = (y, A\varphi_j)_Y, \quad j = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N}, \tag{10.11}$$

где $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Поскольку гильбертово пространство является строго нормированным, то в условиях любой из теорем 10.1–10.3 СЛАУ (10.11) имеет единственное решение $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ при любых $n \in \mathbb{N}$; это ясно также из того факта, что определитель $D_n = \det(\psi_k, \psi_j)_Y$ СЛАУ (10.11) совпадает, как уже указывалось в § 6, с определителем Грамма линейно независимой системы элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, где $\psi_k = A\varphi_k \in Y$.

Теперь рассмотрим *конкретизацию* метода наименьших квадратов в *частном случае*

$$y = y(t) \in R[a,b] \quad \text{и} \quad A(x_n;t) \in R[a,b],\ x_n \in X_n, \tag{10.12}$$

где $R[a,b]$ — множество всех интегрируемых по Риману функций в промежутке $[a,b] \subset (-\infty, \infty)$.

Приближенное решение уравнения (10.1) будем искать в виде элемента (10.2), неизвестные коэффициенты которого будем определять из условия

$$\sum_{l=1}^{m} B_l \, | \, y(t_l) - A(x_n; t_l)|^2 \Rightarrow \ \min, \tag{10.13}$$

где $B_l = B_{lm} \in \mathbb{R}^+$, $t_l = t_{lm} \in [a,b]$, $m \in \mathbb{N}$, причем

$$\sum_{l=1}^{m} B_l = \int_a^b \rho(t)\, dt, \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{m} B_l | \, y(t_l)|^2 = \int_a^b \rho(t) | \, y(t)|^2 dt,\ y \in R\,[a,b], \tag{10.14}$$

а $\rho(t) \in L_1[a,b]$ есть весовая функция сегмента $[a,b]$.

Условие (10.13) приводит к СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{l=1}^{m} B_l \, A(\varphi_k; t_l) \, \overline{A(\varphi_j; t_l)} = \sum_{l=1}^{m} y(t_l) \, \overline{A(\varphi_j; t_l)}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{10.15}$$

где $\overline{\alpha}$ — соответствующая комплексно сопряженная величина.

Теорема 10.4. *Пусть выполнены условие* β) *теоремы* 10.1 *и условия* (10.12).

Тогда СЛАУ (10.15) имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^* \in \mathbb{C}$ *при любых* n *и* $m \in \mathbb{N}$, *причем для любого* $x_n \in X_n$ *справедливы оценки*

$$\sigma_{nm} \equiv \left\{ \sum_{l=1}^{m} B_l \left| y(t_l) - A(x_n^*; t_l) \right|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \sum_{l=1}^{m} B_l \left| A(x^* - x_n; t_l) \right|^2 \right\}^{1/2}, \tag{10.16}$$

$$\sigma_{n\infty} \equiv \left\{ \int_a^b \rho(t) \left| y(t) - A(x_n^*; t) \right|^2 dt \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \int_a^b \rho(t) \left| A(x^* - x_n; t) \right|^2 dt \right\}^{1/2}, \tag{10.17}$$

где n, $m \in \mathbb{N}$.

Следствие. *Пусть оператор* $A : X \longrightarrow C[a, b]$ *ограничен, а последовательность подпространств* $\{X_n\}_1^\infty$ *предельно плотна в пространстве* X. *Тогда в условиях теоремы невязка рассматриваемого метода сходится при* $n \to \infty$, *причем*

$$\sigma_{nm} \leqslant \int\limits_a^b \rho(t)\, dt \cdot \|A\|_{X \to C} \cdot E_n(x^*)_X \quad (n, m \in \mathbb{N}). \tag{10.18}$$

Если, кроме того,

$$\left\{ \sum_{l=1}^{m} B_l |A(x; t_l)|^2 \right\}^{1/2} \geqslant M \, \|x\|_X, \quad x \in X, \tag{10.19}$$

где постоянная $M > 0$ *не зависит от* $x \in X$, *то метод сходится при* $n \to \infty$ *в пространстве* X, *причем равномерно относительно* $m \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\int\limits_a^b \rho(t)\, dt}{M} \|A\|_{X \to C} E_n(x^*)_X, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.20}$$

Заметим, что приведенные выше результаты (особенно соотношения (10.12)–(10.17)) весьма удобны для практических применений; при этом вместо (10.12) часто достаточно требовать, чтобы числа $A(x_n\,; t_l)$ и $y(t_l)$, $l = \overline{1, m}$, имели смысл.

§ 11. Методы решения линейных и нелинейных уравнений с монотонными операторами

Этот параграф посвящен методам решения линейных, а также некоторых классов нелинейных уравнений с монотонными операторами в гильбертовых пространствах.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Ax = y \quad (x, y \in H), \tag{11.1}$$

где A — линейный или же нелинейный оператор в вещественном[4] гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (f, g) элементов $f, g \in H$ и с нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \ \ f \in H$.

Ниже существенным образом будут использованы следующие условия.

I. Оператор $A : H \longrightarrow H$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|Af - Ag\| \leqslant M \|f - g\| \quad (f, g \in \ H),$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от элементов $f, g \in H$.

II. Оператор $A : H \longrightarrow H$ является сильно монотонным, т. е. для любых f и $g \in H$

$$(Af - Ag, f - g) \geqslant m \|f - g\|^2 \quad (f, g \in H),$$

где m — положительная постоянная, зависящая лишь от оператора A.

Заметим, что в линейном случае условие I эквивалентно ограниченности (а следовательно, непрерывности) оператора A, а условие II — его положительной определенности.

Кроме того, ниже без ограничения общности будем предполагать также, что в нелинейном случае $A0 = 0$.

Для уравнения (11.1) справедливы следующие результаты.

11.1. *Теорема существования и единственности решения*

Теорема 11.1. *Пусть выполнены условия* I *и* II. *Тогда уравнение* (11.1) *имеет единственное решение* $x^* \in H$ *при любой правой части*

[4] Все результаты без существенных изменений переносятся на комплексные уравнения в комплексном гильбертовом пространстве.

$y \in H$, причем

$$\|x^*\| \leqslant \frac{\|y\|}{m}. \qquad (11.2)$$

11.2. Универсальный итерационный метод

Теорема 11.2. *В условиях теоремы 11.1 единственное решение $x^* \in H$ уравнения (11.1) можно найти универсальным итерационным методом*

$$x^k = x^{k-1} + \frac{m}{M^2}(y - Ax^{k-1}); \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (11.3)$$

при любом начальном приближении $x^0 \in H$. Погрешность k–го приближения $x^* - x^k$ может быть оценена неравенствами

$$\|x^* - x^k\| \leqslant q^k \|x^* - x^0\| \leqslant \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (11.4)$$

где

$$q = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2} < 1; \qquad (11.5)$$

если же за начальное приближение берется элемент $x^0 = \frac{m}{M^2}y$, то погрешность может быть оценена также неравенством

$$\|x^* - x^k\| \leqslant \frac{q^{k+1}}{1-q}\frac{m}{M^2}\|y\| \quad (k = 0, 1, \ldots), \qquad (11.6)$$

где постоянные m и M определены в условиях II *и* I *соответственно.*

Замечание 11.1. Если A — самосопряженный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, то наряду с (11.3) можно пользоваться также итерационным методом

$$x^k = x^{k-1} + \frac{2}{M+m}(y - Ax^{k-1}); \; k = 1, 2, \ldots, \qquad (11.3')$$

который сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q' = \frac{M-m}{M+m} < 1 \qquad (11.5')$$

при любом начальном приближении $x^0 \in H$.

11.3. *Общий проекционный метод и его частные случаи*

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда в нем существует счетная полная система элементов $\{\varphi_r\}_1^\infty \subset H$. Обозначим через $H_n = \mathcal{L}(\{\varphi_r\}_1^n)$, $n \in \mathbb{N}$, линейную оболочку, натянутую на первые $n \in \mathbb{N}$ элементов этой системы; в том случае, когда $\varphi_r = \varphi_{r,n}$ $(r = \overline{1,n})$, т. е. зависит от $n \in \mathbb{N}$ (например, для сплайновых базисов), считаем, что последовательность подпространств $\{H_n\}_1^\infty$ предельно плотна в пространстве H.

Обозначим через $P_n : H \longrightarrow H_n \subset H$ линейный оператор ортогонального проектирования H на H_n. Тогда уравнение (11.1) можно аппроксимировать конечномерным уравнением

$$A_n x_n \equiv P_n A x_n = P_n y \quad (x_n, P_n y \in H_n), \tag{11.7}$$

которое эквивалентно системе нелинейных алгебраических уравнений (кратко: СНАУ)

$$c_r(A \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \varphi_k) = c_r(y), \quad r = \overline{1,n}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \tag{11.8}$$

порядка $n \in \mathbb{N}$, где $c_r(f) = (f, \varphi_r)$ — коэффициенты Фурье элемента $f \in H$ по системе координатных функций $\varphi_r \in H$; если же A — линейный оператор, то СНАУ (11.8) значительно упрощается и принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, c_r(A\varphi_k) = c_r(y), \quad r = \overline{1,n}. \tag{11.8$'$}$$

Элемент

$$x_n^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \, \varphi_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11.9}$$

принимается за приближенное решение операторного уравнения (11.1), где $\alpha_k^* = \alpha_{k,n}^* \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,n})$ — решение СНАУ (11.8) или же СЛАУ (11.8$'$).

Теорема 11.3. *В условиях теоремы* 11.1 *любая из систем уравнений* (11.8) *и* (11.8$'$) *имеет единственное решение* α_k^*, $k = \overline{1,n}$, *при любых* $n \in \mathbb{N}$. *Приближенные решения* (11.9) *сходятся к точному решению* $x^* \in H$ *уравнения* (11.1) *в пространстве* H, *причем для погрешности* $x^* - x_n^* \in H$ *справедливы следующие неулучшаемые по порядку* *двусторонние оценки*

$$E_n(x^*) \leqslant \|x^* - x_n^*\| \leqslant \frac{M}{m} E_n(x^*), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11.10}$$

где $E_n(x^*) = \rho(x^*, H_n)_H$ *— наилучшее приближение решения* $x^* \in H$ *всевозможными элементами из* H_n *в пространстве* H.

Теперь рассмотрим некоторые важные для приложений частные случаи рассмотренного выше общего проекционного методы.

11.3.1. *Метод редукции по тригонометрической системе функций*

Пусть $H = L_2(-\pi, \pi) \equiv L_2$ — пространство квадратично суммируемых по Лебегу 2π-периодических функций со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) g(s)\, ds \quad (f, g \in L_2),$$

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (f \in L_2).$$

Тогда L_2 превращается в сепарабельное гильбертово пространство. Возьмем в нем полную ортонормальную систему функций

$$\varphi_k = \varphi_k(s) = e^{iks} = \cos ks + i \sin ks, \quad k = 0, \pm 1, \ldots;\ -\infty < s < \infty.$$

Положим $n = 2m + 1$ $(m = 0, 1, \ldots)$ и за приближенное решение уравнения (11.1) в L_2 возьмем элемент

$$x_n(s) = x_{2m+1}(s) = \sum_{k=-m}^{m} \alpha_k\, e^{iks} = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \cos ks + \gamma_k \sin ks, \quad \overline{\alpha}_k = \alpha_k,$$

где α_k $(k = \overline{-m, m})$, а следовательно, и β_r $(r = \overline{0, m})$, γ_l $(l = \overline{1, m})$ — подлежащие определению коэффициенты. В линейном случае они находятся из СЛАУ

$$\sum_{k=-m}^{m} \alpha_k\, c_r(A\varphi_k) = c_r(y), \quad r = \overline{-m, m},$$

где

$$c_r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, e^{-irs} ds, \quad f \in L_2,$$

— тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(s) \in L_2$ в комплексной форме; в силу (11.8) в нелинейном случае вид СНАУ метода редукции очевиден.

В рассматриваемом случае оператор проектирования

$$P_n = P_{2m+1} \,:\, L_2 \longrightarrow \mathcal{L}(\{e^{irs}\}_{r=-m}^{m}) \subset L_2$$

определяется по формуле

$$P_n(f;s) = \sum_{r=-m}^{m} c_r(f)\, e^{irs}, \quad f \in L_2.$$

Ясно, что он удовлетворяет условиям

$$P_n^2 = P_n,\ P_n^* = P_n,\ \|P_n\| = 1 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Поэтому для рассматриваемой схемы метода редукции справедлива теорема 11.3, в которой $E_n(f) = E_{2m+1}(f)$ — наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$ всевозможными тригонометрическими полиномами порядка не выше m $(m = 0, 1, \ldots)$ в пространстве L_2.

11.3.2. *Метод редукции по алгебраической системе функций*

Пусть $H = L_2(\rho; (a, b)) \equiv L_2(\rho)$ — весовое пространство с весом $\rho = \rho(t) \in L_1(a, b)$ квадратично суммируемых по Лебегу в области $(a, b) \subset (-\infty, \infty)$ вещественных функций со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(f, g) = \int_a^b \rho(t) f(t) g(t)\, dt \quad (f, g \in L_2(\rho)),$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b \rho(t) f^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (f \in L_2(\rho)).$$

Хорошо известно, что для данной весовой функции $\rho \in L_1(a, b)$ существует система алгебраических многочленов $\{Q_k(t)\}_0^\infty$, ортогональных в промежутке (a, b) с весом $\rho(t)$. За приближенное решение уравнения (11.1) в пространстве $L_2(\rho)$ возьмем многочлен

$$x_n(t) = x_{m+1}(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, Q_k(t), \quad t \in (a, b),\ n = m + 1 \in \mathbb{N},$$

коэффициенты $\alpha_k \in \mathbb{R}$ которого будем определять в линейном случае из СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \, d_r(AQ_k) = d_r(y), \quad r = \overline{0,m},$$

где

$$d_r(f) = \int_a^b \rho(t) f(t) Q_r(t) \, dt, \quad f \in L_2(\rho);$$

в нелинейном случае неизвестные коэффициенты определяются из СНАУ

$$d_r\left(A \sum_{k=0}^{m} \alpha_k Q_k\right) = d_r(y), \quad r = \overline{0,m}.$$

Оператор проектирования

$$P_n = P_{m+1} : L_2(\rho) \longrightarrow \mathcal{L}(\{Q_k(t)\}_0^m) \subset L_2(\rho)$$

здесь определим по формуле

$$P_n(f;t) = \sum_{r=0}^{m} c_r(f) \, Q_r(t) \equiv P_{m+1}(f;t),$$

где $c_r(f) = d_r(f)/\|Q_r(t)\|_{L_2(\rho)}$. Нетрудно показать, что

$$P_n^2 = P_n, \quad P_n^* = P_n, \quad \|P_n\| = 1 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Поэтому для рассматриваемой схемы метода редукции справедлива теорема 11.3, в которой $H = L_2(\rho)$, а $E_n(f)$ — наилучшее весовое среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2(\rho)$ всевозможными алгебраическими многочленами степени не выше m $(m = 0, 1, \ldots)$, где $n = m + 1 \in \mathbb{N}$.

11.3.3. *Метод сплайн–подобластей нулевого порядка*

Пусть $H = L_2[a,b] \equiv L_2$ с указанными выше скалярным произведением и нормой при $\rho = \rho(t) \equiv 1$. За координатную систему функций в этом пространстве возьмем систему фундаментальных сплайнов $\varphi_k = \varphi_{k,n}(t)$, $k = \overline{1,n}$, $t \in [a,b]$, нулевой степени по сетке узлов

$$t_k = t_{k,n} = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (11.11)$$

Тогда приближенное решение уравнения (11.1) в пространстве L_2 принимает вид сплайна нулевой степени

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \varphi_k(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

коэффициенты $\alpha_k \in \mathbb{R}$ которого определяются в линейном случае из СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \Phi_r(A\varphi_k) = \Phi_r(y), \quad r = \overline{1, n},$$

где

$$\Phi_r(f) = \frac{1}{t_r - t_{r-1}} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} f(t)\, dt, \quad f \in L_2;$$

в нелинейном случае неизвестные коэффициенты сплайна определяются из СНАУ

$$\Phi_r\left(A \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) = \Phi_r(y), \quad r = \overline{1, n}.$$

Здесь оператор проектирования $P_n : L_2 \longrightarrow \mathcal{L}(\{\varphi_r(t)\}_1^n) \subset L_2$ определим по формуле

$$P_n(f; t) = \sum_{r=1}^{n} \Phi_r(f)\, \varphi_r(t), \quad f \in L_2.$$

Нетрудно показать, что в пространстве L_2

$$P_n^2 = P_n, \quad P_n^* = P_n, \quad \|P_n\| = 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Поэтому для рассматриваемой здесь схемы проекционного метода справедлива теорема 11.3, в которой $H = L_2$, а $E_n(f)$ — наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$ всевозможными сплайнами нулевой степени по сетке узлов (9.11).

11.4. *Проекционно-итеративные методы*

При больших $n \in \mathbb{N}$ решение проекционного уравнения (11.7), а следовательно, и СЛАУ (11.8′) и тем более СНАУ (11.8), представляет значительные практические трудности. Поэтому его будем решать универсальным итерационным методом вида

$$x_n^j = x_n^{j-1} + \frac{m}{M^2}(P_n y - A_n x_n^{j-1}); \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{11.12}$$

где $j, n \in \mathbb{N}$, x_n^0 – произвольное начальное приближение из H_n, а постоянные M и m определены в условиях I и II соответственно.

Теорема 11.4. *В условиях теоремы* 11.1 *решение* $x_n^* \in H_n$ *уравнения* (11.7) *можно найти как предел в* H *итерационной последовательности* (11.12) *при* $j \to \infty$, *причем для* $x_n^0 = \dfrac{m}{M^2} P_n y$ *справедливы оценки*

$$\|x_n^* - x_n^j\| \leqslant \frac{q^{j+1}}{1-q} \frac{m}{M^2} \|P_n y\| \leqslant \frac{q^{j+1}}{1-q} \frac{m}{M^2} \|y\| \quad (n, j \in \mathbb{N}), \tag{11.13}$$

где q *определено в* (11.5).

Теорема 11.5. *В условиях теоремы* 11.1 *единственное решение* $x^* \in H$ *уравнения* (11.1) *можно найти как пределы*

$$x^* = \lim_{n \to \infty} \lim_{j \to \infty} x_n^j = \lim_{n \to \infty} x_n^*$$

в пространстве H *проекционно-итеративной последовательности* (11.12). *Если* $x_n^0 = \big(m/M^2\big) P_n y$, *то для любых* $n, j \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$\|x^* - x_n^j\| \leqslant \frac{M}{m} E_n(x^*) + \frac{q^{j+1}}{1-q} \frac{m}{M^2} \|P_n y\| \leqslant \frac{M}{m} \left\{ E_n(x^*) + q^{j+1} \frac{\|y\|}{M(1-q)} \right\},$$

где число q *определено в* (11.5).

Замечание 11.2. В условиях замечания 11.1 теоремы 11.3–11.5 несколько упрощаются и усиливаются.

Отметим, что теоремы 11.1–11.5 получены как обобщения соответствующих результатов работ [10], [11], [19], [29], [31], [35]–[37], а при их доказательстве существенным образом использованы некоторые результаты из линейного и нелинейного функционального анализа (см., напр., [38], [49], [53]), а также результаты других параграфов этой главы. Однако ввиду излишней громоздкости выкладок и из-за ограниченности объема книги подробные доказательства здесь не приводятся. Такое же замечание справедливо относительно результатов § 10, а также следующей главы. Тем не менее при чтении спецкурсов и проведении спецсеминаров все результаты излагаются с полными доказательствами.

ГЛАВА II

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Введение

Многочисленные крупные и плодотворные результаты, полученные в различных областях математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, вычислительной математики и математической физики, стимулируют создание теории наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений в функциональных пространствах. С другой стороны, создание такой теории в значительной степени стимулируют потребности реальной вычислительной практики, связанные с сравнительным анализом большого числа уже имеющихся приближенных методов и построением оптимальных (т. е. наилучших) в том или ином смысле методов решения конкретных классов уравнений. Дело в том, что в настоящее время для приближенного решения различных классов математических задач имеются многочисленные результаты, в связи с чем и возникла важная и трудная задача построения и исследования наиболее точных и экономически выгодных методов решения задач, т.е. возникла, по определению академиков А.Н. Колмогорова, Л.В. Канторовича, Г.И. Марчука, С.М. Никольского, С.Л. Соболева, А.Н. Тихонова, Н.С. Бахвалова, К.И. Бабенко, В.К. Иванова и Н.П. Корнейчука, проблема оптимизации вычислительных методов.

Указанная проблема чрезвычайно сложна и, естественно, в ее решении сделаны лишь первые шаги (по сравнению с тем, что необходимо сделать). С точки зрения приложений здесь особенно актуальными являются исследования, связанные с точностными характеристиками вычислительных методов, что приводит к необходимости создания теории наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений в функциональных пространствах.

В ряде работ автора построена теория наилучших конечномерных приближений решений операторных уравнений в нормированных и гильбертовых пространствах. Она трактуется нами как теория оптимизации по точности прямых и проекционных методов, и именно в этом смысле она нашла многочисленные применения при оптимизации по точности конечномерных методов решения различных классов операторных уравнений. В частности, на ее основе решена нами проблема оптимизации различных классов вычислительных методов для таких уравнений, как:

а) регулярные интегральные уравнения;

б) обыкновенные дифференциальные уравнения;

в) сингулярные интегральные уравнения с ядрами Гильберта и Коши;

г) сингулярные интегродифференциальные уравнения;

д) многомерные сингулярные интегральные уравнения;

е) некорректные интегральные уравнения первого рода с разностными логарифмическими и полярными ядрами в главных частях интегральных операторов;

ж) нелинейные интегральные уравнения;

з) решена также задача построения, исследования и оптимизации квадратурных и кубатурных формул для сингулярных интегралов, понимаемых в смысле главного значения по Коши.

При этом установлены также роль и место таких классических методов, как методы Галеркина, моментов, наименьших квадратов, коллокаций, механических квадратур и сплайн–методы, в классах тех или иных аппроксимативных методов, а также построены оптимальные по порядку и асимптотически оптимальные полиномиальные и сплайновые методы, обладающие наивысшей возможной степенью точности, для реализации которых на ЭВМ требуется минимально возможное количество времени, что, в свою очередь, приводит к значительной экономии времени и средств.

Теория, о которой идет речь, основана, с одной стороны, на специально предложенном ранее автором варианте общей теории приближенных методов функционального анализа (см., напр., гл. I и II книги [10], а также выше гл. I этой книги); с другой стороны, она основывается на многочисленных хорошо известных результатах по теории приближения функций полиномами и сплайнами, на аппроксимационных числах линейных операторов и на теории поперечников множеств в функциональных пространствах, развитой в трудах советских математиков (А.Н. Колмогоров, К.И. Бабенко, С.Б. Стечкин, В.М. Тихомиров, Н.П. Корнейчук, Б.С. Кашин, Ю.Н. Субботин, Р.С. Исмагилов и др.; см., напр., в [2], [3], [50]–[52], [70]).

Ниже предлагается краткий обзор ряда общих результатов автора по рассматриваемой тематике; изложение ведется по работам [10]–[13], [21]–[28], [30], [32]–[34], [37].

§ 1. Постановки задач

Пусть X и Y — данные банаховы пространства, а $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ — их произвольные конечномерные подпространства одинаковой размерности $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{L}(X, Y)$ будем обозначать пространство линейных (т. е. аддитивных и однородных) операторов, отображающих X в Y.

Рассмотрим класс $\mathcal{E} = \{e\}$ однозначно разрешимых уравнений

$$Kx = y \quad (x \in X,\ y \in Y,\ K \in \mathcal{L}(X, Y)), \tag{1.1}$$

определяемый некоторыми классами операторов $\mathcal{K} = \{K\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ и правых частей $Y^* = \{y\} \subset Y$ соответственно. Введем также класс $\mathcal{E}_n = \{e_n\}$ однозначно разрешимых операторных уравнений

$$K_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\ y_n \in Y_n,\ K_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)), \tag{1.2}$$

порождаемых *прямыми* методами решения уравнения (1.1) при каждой паре произвольно фиксированных подпространств X_n и Y_n с $\dim X_n = \dim Y_n = n < \infty$.

Решение $x^* \in X$ уравнения (1.1) из класса $\mathcal{E}$ будем аппроксимировать решениями $x_n^* \in X_n \subset X$ уравнений (1.2) из класса $\mathcal{E}_n$. При этом за *оптимальную оценку погрешности* класса $\mathcal{E}_n$ прямых методов (1.2) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1.1) примем величину [10], [26], [30], [32]

$$V_n(\mathcal{E}) = \inf_{X_n, Y_n} \inf_{e_n \in \mathcal{E}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^*\|_X, \tag{1.3}$$

где внутренняя точная нижняя грань берется по всем уравнениям вида (1.2) при произвольно фиксированных подпространствах X_n и Y_n, а внешняя — по всевозможным подпространствам $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ размерности $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *Пусть существует фиксированный прямой метод (уравнение)*

$$K_n^\circ x_n^\circ = y_n^\circ \quad (x_n^\circ \in X_n^\circ \subset X,\ y_n^\circ \in Y_n^\circ \subset Y,\ K_n^\circ \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ)) \tag{1.2°}$$

с $\dim X_n^\circ = \dim Y_n^\circ = n$, *для которого выполняется одно из условий соответственно*[1]

$$\sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X =, \sim, \asymp V_n(\mathcal{E}), \quad x_n^\circ = K_n^{\circ-1} y_n^\circ. \tag{1.4}$$

Тогда метод (1.2°) *называется соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку среди всевозможных прямых методов вида* (1.2) *на классе* $\mathcal{E}$ *уравнений* (1.1).

В связи со сказанным возникает *задача 1* нахождения оптимальной оценки погрешности (1.3) и построения фиксированного метода (1.2°), оптимального в смысле определения 1.

Далее, обозначим через $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(Y, Y_n) \subset \mathcal{L}(Y, Y_n)$ некоторое множество линейных операторов из Y в Y_n и наряду с (1.2) и (1.2°) рассмотрим уравнения

$$K_n x_n \equiv P_n K x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\ P_n \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n)), \tag{1.5}$$

$$K_n^\circ x_n^\circ \equiv P_n^\circ K x_n^\circ = P_n^\circ y \quad (x_n^\circ \in X_n^\circ,\ P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ)). \tag{1.5°}$$

Отметим, что уравнениями (1.5), (1.5°) описываются часто используемые на практике т. н. *проекционные* методы. Проекционными являются, например, хорошо известные методы Галеркина, моментов, наименьших квадратов, коллокаций, осциллирующих функций и др.

Ясно, что проекционные методы (1.5) и (1.5°) являются частными случаями прямых методов (1.2) и (1.2°) соответственно. Поэтому, если элемент $x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y$ удовлетворяет одному из условий (1.4), то проекционный метод (1.5°) является соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку среди всех прямых методов вида (1.2). Однако на практике многие проекционные методы такой "конкуренции" не выдерживают. Таким "неприятным" свойством обладают, например, важнейшие полиномиальные проекционные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений в пространствах типа C и $C^{(m)}$ (m – порядок уравнения) с обычными нормами. Поэтому имеет смысл специально организовать оптимизацию класса проекционных методов вида (1.5).

В этом случае за оптимальную оценку погрешности класса $\mathcal{E}_n$ проекционных методов (1.5) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1.1) естественно принять

[1]Здесь и далее символы $\sim$ и $\asymp$ означают соответственно сильную и слабую эквивалентности.

величину (см. работы [10], [26], [30], [32])

$$U_n(\mathcal{E}) = \inf_{X_n, Y_n} \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^*\|_X. \tag{1.6}$$

Определение 2. *Если элемент $x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y$ удовлетворяет одному из условий соответственно*

$$\sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X =, \sim, \asymp U_n(\mathcal{E}), \tag{1.7}$$

то проекционный метод (1.5°) *называется соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку среди всех проекционных методов вида* (1.5) *на классе $\mathcal{E}$ уравнений* (1.1).

В связи со сказанным возникает *задача 2* нахождения оптимальной оценки погрешности (1.6) при различных способах задания класса операторов $\mathcal{P}_n$ и построения метода (1.5°), оптимального прежде всего в смысле определения 2, а также в смысле определения 1 — т. е. построения проекционного метода (1.5°), оптимального или асимптотически оптимального или же оптимального по порядку среди всех прямых методов вида (1.2) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1.1).

Следует отметить, что задачи 1 и 2 содержательны даже в частных случаях, когда подпространства X_n и Y_n являются фиксированными, а также в случае, когда как уравнение (1.1), так и эти подпространства фиксированы, и т.п. Необходимость рассмотрения этих случаев диктуется, в частности, необходимостью оптимизации "одноименных" (напр., полиномиальных и сплайновых) методов решения интегральных и дифференциальных уравнений.

§ 2. Оптимальные прямые и проекционные методы решения операторных уравнений

2.1. *Оптимизация прямых методов*

Сначала приведем две теоремы для общих прямых методов (1.2). При этом существенную роль будут играть n-поперечники (см., напр., [2], [3], [50]–[52], [70]) Колмогорова $d_n(Y^*, Y)$ и $d_n(X^*, X)$, где

$$X^* = \{x^* \in X \,:\, Kx^* \equiv y,\ K \in \mathcal{K},\ y \in Y^*\}.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

а) X^* *(соответственно* Y^**) — центрально-симметрический компакт в пространстве* X *(соответственно в* Y*);*

б) $\|K\|_{X\to Y} \leqslant c_0 < \infty$, $\|K^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant c_1 < \infty$, *где* c_0 *и* c_1 *— положительные постоянные, общие для всего класса* $\mathcal{E}$*;*

в) *уравнения* (1.1) *и* (1.2°) *таковы, что*

$$\sup_{K\in\mathcal{K}} \|K - K_n^\circ\|_{X_n^\circ\to Y} = O(d_n), \quad \sup_{y\in Y^*} \|y - y_n^\circ\|_Y = O(d_n),$$

где $d_n = d_n(X^*, X)$ *(соответственно* $d_n = d_n(Y^*, Y)$*).*

Тогда справедливы соотношения

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp \sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X \asymp d_n,$$

и прямой метод (1.2°) *является оптимальным по порядку в смысле определения* 1.

Следствие 1. *Если*

$$K_n^\circ = P_n^\circ K \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ),\ y_n^\circ = P_n^\circ y \in Y_n^\circ,\ P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ),$$

то в условиях теоремы 2.1 *проекционный метод* (1.5°) *оптимален по порядку среди всех прямых методов вида* (1.2)*.*

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2.1 *справедливы утверждения:*

а) *оптимальный по порядку прямой метод* (1.2°) *устойчив относительно малых возмущений оператора* $K_n^\circ \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ)$ *и элемента* $y_n^\circ \in Y_n^\circ$*;*

б) *из хорошей обусловленности уравнения* (1.1) *из класса* $\mathcal{E}$ *следует хорошая обусловленность оптимального уравнения* (1.2°)*, а следовательно, и конечной системы линейных алгебраических уравнений, эквивалентной операторному уравнению* (1.2°)*.*

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия:*

а) X^* *(соответственно* Y^**) есть центрально-симметрический компакт в пространстве* X *(соответственно в* Y*);*

б) *подпространство* X_n° *(соответственно* Y_n°*) экстремально хотя бы по порядку для* $d_n(X^*, X)$ *(соответственно для* $d_n(Y^*, Y)$*);*

в) *существует такой оператор* $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ)$, *что при* $n \to \infty$

$$\sup_{K\in\mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K\|_{X\to X} = O\,(1),\ \sup_{K\in\mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K\|_{X_n^\circ\to X_n^\circ} = O\,(d_n),$$

$$\sup_{K\in\mathcal{K}, y\in Y^*} \|K_n^{\circ -1}(y_n^\circ - P_n^\circ y)\|_X = O\,(d_n),$$

где $d_n = d_n(X^*, X)$ *(соответственно* $d_n = d_n(Y^*, Y)$*).*

Тогда выполняются соотношения (2.1), *и прямой метод* (1.2°) *оптимален по порядку в смысле определения* 1.

2.2. *Оптимизация проекционных методов*

Для проекционных методов (1.5), (1.5°) теоремы 2.1 и 2.2 значительно упрощаются и усиливаются. Однако здесь можно получить и более сильные результаты; они основаны на двух леммах, доказанных с помощью результатов гл. I [10]. При этом существенную роль играют поперечники (см., напр., [2], [3], [50]–[52], [70]), а именно n-поперечник Колмогорова $d_n(X^*, X)$, n-й линейный поперечник $\lambda_n(X^*, X)$ и n-й проекционный поперечник $\pi_n(X^*, X)$ множества X^* в пространстве X, а также величина

$$\alpha_n = \alpha_n(\mathcal{K}) \equiv \sup_{K\in\mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K\|_{X\to X},\ K_n^\circ = P_n^\circ K \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ).$$

Лемма 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *Если* $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(1)}(Y, Y_n)$ *— множество всех линейных и ограниченных (при каждом фиксированном* $n \in \mathbb{N}$*) операторов из* Y *в* Y_n, *то для уравнений* (1.1), (1.5), (1.5°) *справедливы неравенства*

$$d_n(X^*, X) \leqslant \lambda_n(X^*, X) \leqslant U_n(\mathcal{E}) \leqslant \sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_n(\mathcal{K})\,\rho(X^*, X_n^\circ),\ x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y \in X_n^\circ,\ P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(1)}(Y, Y_n^\circ);$$

б) *если же* $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n)$ *— множество всех проекционных* *(*$P_n^2 = P_n$*) операторов из* $\mathcal{P}_n^{(1)}(Y, Y_n)$, *то*

$$d_n(X^*, X) \leqslant \pi_n(X^*, X) \leqslant U_n(\mathcal{E}) \leqslant \sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_n(\mathcal{K})\,\rho(X^*, X_n^\circ), \quad x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y \in X_n^\circ,\ P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n^\circ).$$

Отметим, что часть а) леммы позволяет установить простые достаточные условия оптимальности метода (1.5°) с оператором $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(1)}(Y, Y_n^\circ)$ среди всех *линейных* методов вида (1.5), а также среди всех *прямых* методов вида (1.2); часть б) леммы позволяет установить достаточные условия оптимальности метода (1.5°) с оператором $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n^\circ)$ среди всех *проекционных* методов (1.5), а также среди всех *прямых* методов вида (1.2). Некоторые подробности об этом можно найти в гл. II и IV книги [10] и в работах [21], [23]–[28], [30], [32]–[34]. Здесь приведем лишь следующие теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть X^* — центрально-симметрический компакт в пространстве X, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(1)}(Y, Y_n)$ и выполняется одно из условий:*

а) *$\alpha_n = 1$ и X_n° — экстремальное подпространство для поперечника $\lambda_n(X^*, X)$ (соответственно для $d_n(X^*, X)$);*

б) *$\alpha_n \sim 1$ и X_n° — хотя бы асимптотически экстремальное подпространство для $\lambda_n(X^*, X)$ (соответственно для $d_n(X^*, X)$);*

в) *$\alpha_n \asymp 1$ и X_n° — экстремальное хотя бы по порядку подпространство для $\lambda_n(X^*, X)$ (соответственно для $d_n(X^*, X)$).*

Тогда проекционный метод (1.5°) с $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(1)}(Y, Y_n^\circ)$ соответственно оптимален, асимптотически оптимален, оптимален по порядку в смысле определения 2 (соответственно в смысле определения 1).

Теорема 2.4. *Пусть X^* — центрально-симметрический компакт в пространстве X, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n)$ и выполняется одно из условий:*

а) *$\alpha_n = 1$ и X_n° — экстремальное подпространство для $\pi_n(X^*, X)$ (соответственно для $d_n(X^*, X)$);*

б) *$\alpha_n \sim 1$ и X_n° — хотя бы асимптотически экстремальное подпространство для $\pi_n(X^*, X)$ (соответственно для $d_n(X^*, X)$);*

в) *$\alpha_n \asymp 1$ и X_n° — экстремальное хотя бы по порядку подпространство для $\pi_n(X^*, X)$ (соответственно для $d_n(X^*, X)$).*

Тогда проекционный метод (1.5°) с оператором $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n^\circ)$ соответственно оптимален, асимптотически оптимален, оптимален по порядку в смысле определения 2 (соответственно в смысле определения 1).

Для уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода в смысле гл.14 [47], в дополнение к теоремам 2.3 и 2.4 приведем следующие две теоремы.

Теорема 2.5. *Пусть*

$$K = G + T \in \mathcal{L}(X, Y),\ K_n = P_n G + P_n T \in \mathcal{L}(X_n, Y_n),\ G X_n^\circ = Y_n^\circ,$$

$$K_n^\circ = G + P_n^\circ T \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ),\ P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n),\ P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n^\circ),$$

где $G \in \mathcal{L}(X, Y)$ *— фиксированный изометрический изоморфизм. Пусть, кроме того, выполняется одно из следующих условий:*

а) $\beta_n = 1$ *и оператор* $\Pi_n^\circ = G^{-1} P_n^\circ G \in \mathcal{L}(X, X_n^\circ)$ *является экстремальным для проекционного поперечника* $\pi_n(X^*, X)$*;*

б) $\beta_n \sim 1$ *и оператор* Π_n° *хотя бы асимптотически экстремален для* $\pi_n(X^*, X)$*;*

в) $\beta_n \asymp 1$ *и оператор* Π_n° *экстремален хотя бы по порядку для* $\pi_n(X^*, X)$*, где*

$$\beta_n = \sup_{K \in \mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ T\|_{X \to X}, \quad K_n^\circ = P_n^\circ K \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ).$$

Тогда проекционный метод (1.5°) *соответственно оптимален, асимптотически оптимален, оптимален по порядку в смысле определения* 2.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия:*

а) *для любых* $K \in \mathcal{K}$ *операторы* $T = K - G : X \longrightarrow Y$ *вполне непрерывны;*

б) $(P_n^\circ)^2 = P_n^\circ \to E$ *при* $n \to \infty$ *сильно в* Y*;*

в) $\sup_{K \in \mathcal{K}} \|T - T G^{-1} P_n^\circ G\|_{X \to Y} \to 0, \quad n \to \infty;$

г) $\sup_{x \in X^*} \|x - G^{-1} P_n^\circ G x\|_X \sim \pi_n(X^*, X), \quad n \to \infty.$

Тогда в условиях теоремы 2.5 *справедливы соотношения*

$$U_n(\mathcal{E}) \sim \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^\circ\|_X \sim \pi_n(X^*, X),$$

и метод (1.5°) *асимптотически оптимален в смысле определения* 2.

Для уравнений второго рода лемма 2.1, а следовательно, и следующие из нее теоремы значительно конкретизируются и упрощаются. Однако в этом случае справедливы и такие результаты, которые в случае общих уравнений (1.1), (1.5), (1.5°) не имеют места. Эти результаты основаны на следующей лемме.

Лемма 2.2. *Пусть* $K = E - A \in \mathcal{L}(X, X), K_n = E - P_n A \in \mathcal{L}(X_n, X_n), P_n \in \mathcal{P}_n(X, X_n)$. *Если* $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(3)}(X, X_n)$ *— класс всех линейных (необязательно ограниченных) проекционных* ($P_n^2 = P_n$) *операторов из* X *в* X_n, *то*

$$\pi_n(X^*, X) \leqslant U_n(\mathcal{E}) \leqslant \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\| \leqslant \gamma_n(\mathcal{K}) \sup_{x \in X^*} \|x - P_n^\circ x\|,$$

где

$$\gamma_n(\mathcal{K}) = \sup_{K \in \mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ A\|_{X \to X},\ K_n^\circ = E - P_n^\circ A,\ x_n^\circ = K_n^{\circ -1} P_n^\circ y.$$

Отметим, что одним из существенных отличий этой леммы от предыдущей состоит в том, что здесь операторы P_n и P_n° могут быть и неограниченными (такая ситуация встречается, например, при исследовании (см., напр., [10]–[13],[17], [18], [26], [29], [30]) методов коллокационного типа в пространствах Лебега $L_p, 1 < p < \infty$). Здесь приведем лишь один результат.

Теорема 2.7. *Пусть в условиях леммы* 2.2 *уравнения* (1.1), (1.5) *и* (1.5°) *таковы, что выполняется одно из условий:*

$$\gamma_n(\mathcal{K}) \cdot \sup_{x \in X^*} \|x - P_n^\circ x\| = , \sim , \asymp \pi_n(X^*, X).$$

Тогда проекционный метод (1.5°) *с оператором* $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(3)}(X, X_n^\circ)$ *соответственно оптимален, асимптотически оптимален, оптимален по порядку в смысле определения* 2.

Для уравнений второго рода приведем еще один результат, но в случае фиксированных пространств X и X_n (при фиксированном $n \in \mathbb{N}$).

Теорема 2.8. *Пусть* $X = C_{2\pi}$ *с обычной нормой,* $X_n = \mathbb{H}_m^T$ *— множество тригонометрических полиномов порядка не выше* m *(так что здесь* $n = 2m+1$*),* $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(2)}(C_{2\pi}, \mathbb{H}_m^T), X^* = \{(E-A)^{-1} y\}$ *— компакт в* $C_{2\pi}$, *а* $P_n^\circ = \Phi_m$ *— оператор Фурье порядка* m *по тригонометрической системе и*

$$\sup_{K \in \mathcal{K}} \|A - \Phi_m A\|_{C_{2\pi} \to C_{2\pi}} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *если выполняется одно из условий*

$$\sup_{K\in\mathcal{K}} \|E-(E-\Phi_m A)^{-1}\Phi_m A\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} = , \sim , \asymp 1,$$

то метод Галеркина решения уравнения $x - Ax = y$ *с приближенным решением* $x_n^\circ = (E-\Phi_m A)^{-1}\Phi_m y$ *является оптимальным в смысле определения* 2*;*

б) *если* $\|A\|_{L_2\to C_{2\pi}} \leqslant \mathrm{const}$*, где* $L_2 = L_2(0,2\pi)$ *с обычной нормой, то*

$$U_n(\mathcal{E}) \sim \sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_{C_{2\pi}} \sim \sup_{x\in X^*} \|x-\Phi_m x\|_{C_{2\pi}},$$

и метод Галеркина с приближеным решением $x_n^\circ = (E-\Phi_m A)^{-1}\Phi_m y$ *является асимптотически оптимальным в смысле определения* 2;

в) *любой полиномиальный проекционный метод с оператором* $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(2)}(C_{2\pi}, \mathbb{H}_m^T)$*, удовлетворяющим условию* $\|P_n^\circ\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} = O(\ln n)$*,* $n\to\infty$*, является оптимальным по порядку в смысле определения* 2.

Отметим, что при замене $\mathcal{P}_n^{(2)}(C_{2\pi}, \mathbb{H}_m^T)$ на $\mathcal{P}_n^{(1)}(C_{2\pi}, \mathbb{H}_m^T)$ ни одно из утверждений теоремы 2.8 не верно, т. е. ни метод Галеркина, ни любой другой полиномиальный метод с проекционным ($P_n^2 = P_n$) оператором не является оптимальным даже по порядку среди всех полиномиальных методов решения уравнений II рода в пространствах непрерывных функций. В указанном случае оптимальные по порядку полиномиальные методы построены в гл. IV книги [10], а также в работах [25], [26] и, естественно, они уже не являются проекционными.

2.3. *Случай фиксированных уравнений*

Теперь, с учетом приложений, приведем некоторые реализации указанных выше теорем в случае *фиксированных уравнений* (1.1) и *фиксированных подпространств* X_n, Y_n (при каждом $n\in\mathbb{N}$). Рассмотрим лишь важный для приложений случай уравнений, *приводящихся* к уравнениям второго рода. Тогда уравнения (1.1), (1.2), (1.2°), (1.5), (1.5°) принимают вид соответственно

$$Kx \equiv Gx + Tx = y \quad (x\in X,\, y\in Y), \tag{2.1}$$

$$K_n x_n \equiv G_n x_n + T_n x_n = y_n \quad (x_n\in X_n,\, y_n\in Y_n), \tag{2.2}$$

$$K_n^\circ x_n^\circ \equiv G_n^\circ x_n^\circ + T_n^\circ x_n^\circ = y_n^\circ \quad (x_n^\circ \in X_n,\, y_n^\circ \in Y_n), \tag{2.2°}$$

$$K_n x_n \equiv P_n G x_n + P_n T x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\, P_n y \in Y_n), \tag{2.3}$$

$$K_n^\circ x_n^\circ \equiv G x_n^\circ + P_n^\circ T x_n^\circ = P_n^\circ y \quad (x_n^\circ \in X_n,\, P_n^\circ y \in Y_n), \tag{2.3°}$$

где $P_n = P_n^2$, $P_n^\circ = (P_n^\circ)^2 \in \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n)$, $G : X \longrightarrow Y$ — линейная изометрия. В этом случае соотношения (1.3) и (1.6) принимают вид соответственно

$$V_n = \inf_{\substack{K_n, y_n: \\ K_n x_n^* \equiv y_n}} \|x^* - x_n^*\|_X, \quad U_n = \inf_{\substack{P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}: \\ P_n K x_n^* \equiv P_n y}} \|x^* - x_n^*\|_X.$$

Теорема 2.9. *Пусть выполнены условия:*

а) $\|K^{-1}\| = 1$;

б) $\|T - P_n^\circ T\|_{X\to Y} \to 0, \quad n \to \infty$;

в) $\|x^* - G^{-1} P_n^\circ G x^*\|_X \sim E_n(x^*)_X, \quad n \to \infty,$ (2.4)

или же

$$\|Gx^* - P_n^\circ G x^*\|_Y \sim E_n(Gx^*)_Y, \quad n \to \infty, \tag{2.5}$$

где $E_n(x^*)_X = \rho(x^*, X_n)$, $E_n(y)_Y = \rho(y, Y_n)_Y$.

Тогда

$$V_n \sim U_n \sim E_n(x^*)_X = E_n(Gx^*)_Y,$$

и проекционный метод (2.3°) *асимптотически оптимален в смысле любого из определений* 1 *и* 2.

Отметим, что если X — гильбертово пространство, а $G^{-1} P_n^\circ G : X \longrightarrow X_n$ есть оператор ортогонального проектирования, то $\|x^* - G^{-1} P_n^\circ G x^*\|_X = E_n(x^*)_X$; если же Y — гильбертово пространство, а $P_n^\circ : Y \longrightarrow Y_n$ — оператор ортогонального проектирования, то $\|Gx^* - P_n^\circ G x^*\|_Y = E_n(Gx^*)_Y$, т. е. условия (2.4) и (2.5) заведомо выполняются.

Следует отметить, что недостатком теоремы 2.9 является условие а), которое выполняется не всегда. Оно выполняется, если, например, X — гильбертово пространство, а $G^{-1}T$ — неотрицательный оператор в нем, или же Y — гильбертово пространство, а TG^{-1} — неотрицательный оператор в нем. Тем не менее в общем случае условие а) теоремы 2.9 не выполняется. Этого недостатка лишены следующие теоремы.

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия :*

а) *оператор* $K : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратим, где* X *и* Y *— рефлексивные банаховы пространства;*

б) $T : X \longrightarrow Y$ *— вполне непрерывный оператор;*

в) $P_n^\circ \longrightarrow E$ *сильно в* Y, *где* $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n)$.

Если, кроме того, выполнено условие (2.4) *или же* (2.5), *то справедливо утверждение теоремы* 2.9.

Теорема 2.11. *Пусть выполнены условия :*

а) *оператор* $K : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратим, где* X *и* Y *— банаховы пространства;*

$$\text{б)} \quad \|y - P_n^\circ y\|_Y \to 0, \qquad \|T - P_n^\circ T\|_{X\to Y} \to 0,$$

$$\|TG^{-1} - TG^{-1}P_n^\circ\|_{Y\to Y} \to 0, \quad n \to \infty, \quad P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(2)}(Y, Y_n).$$

Если, кроме того, выполнено условие (2.4) *или же* (2.5), *то справедливо утверждение теоремы* 2.9.

Следствие. *Пусть выполнены условия:*

а) $X = Y$, $X_n = Y_n$, $G = E$;

б) *оператор* $K = E + T$ *непрерывно обратим в банаховом пространстве* X;

в) $\|T - P_n^\circ T\| \to 0,\ \|T - TP_n^\circ\| \to 0,\ \|y - P_n^\circ y\| \to 0.$

Если, кроме того, выполнено условие

$$\|x^* - P_n^\circ x^*\| \sim E_n(x^*),\ P_n^\circ \in \mathcal{P}_n^{(2)}(X, X_n),$$

то

$$U_n \sim V_n \sim E_n(x^*),$$

и проекционный метод (2.3°) *асимптотически оптимален в смысле любого из определений* 1 *и* 2.

Теорема 2.12. *Пусть выполнены условия* а) – в) *следствия теоремы* 2.11. *Если*

$$\inf_{P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}(X, X_n)} \|x^* - P_n x^*\| \sim \|x^* - P_n^\circ x^*\|,$$

то

$$U_n \sim \|x^* - P_n{}^\circ x^*\|,$$

и метод (2.3°) *асимптотически оптимален в смысле определения* 2.

Следствие. *Если T — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве X, а P_n° — оператор ортогонального проектирования X на $X_n = X_n^\circ$, то*

$$V_n \sim U_n \sim E_n(x^*),$$

и метод (2.3°) *асимптотически оптимален в смысле любого из определений* 1 *и* 2.

2.4. *Уравнения с положительными операторами*

В приложениях (см., напр., § 11 гл. I и библиографию к ней) часто встречаются уравнения с положительными операторами в гильбертовых пространствах. В этом случае приведенные выше теоремы об оптимизации прямых и проекционных методов дополняет следующая

Теорема 2.13. *Пусть выполнены условия :*

а) P_n° *— оператор ортогонального проектирования гильбертова пространства $X = Y$ на подпространство $X_n^\circ = Y_n^\circ$;*

б) X_n° *— хотя бы экстремальное по порядку подпространство для $\pi_n(X^*, X)$;*

в) *для всех $x \in X$ и некоторых m и $M \in \mathbb{R}^+$*

$$\sup_{K\in\mathcal{K}} (Kx, x) \geqslant m\,\|x\|^2, \quad \sup_{K\in\mathcal{K}} \|K\| \leqslant M < \infty.$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

α) уравнения (1.1) *и* (1.5°) *при любых $n \in \mathbb{N}$ однозначно разрешимы в пространствах соответственно X и X_n°, причем*

$$\sup_{K\in\mathcal{K}} \|K^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}, \quad \sup_{K\in\mathcal{K}} \|K_n^{\circ -1}\| \leqslant \frac{1}{m} < \infty, \quad n \in \mathbb{N};$$

β) справедливы соотношения

$$d_n(X^*, X) \leqslant V_n(\mathcal{E}) \leqslant U_n(\mathcal{E}) \leqslant \sup_{x^*\in X^*} \|x^* - x_n^\circ\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{m} d_n(X^*, X),\ n \in \mathbb{N}, \quad x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y,$$

и метод (1.5°) *оптимален по порядку в смысле любого из определений* 1 *и* 2.

§ 3. Аппроксимационные числа операторов и оптимизация приближенных методов

Теперь несколько сузим класс $\mathcal{E}$ решаемых уравнений (1.1), считая, что класс $\mathcal{K} = K$, т. е. состоит из одного фиксированного оператора $K \in \mathcal{L}(X, Y)$. Здесь существенную роль будет играть n-е аппроксимационное число $s_n(K^{-1})$ (см., напр., [1], [77]) оператора $K^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия:*

а) $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ *— фиксированный линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор со всюду плотной в X областью определения $\mathcal{D}(K)$;*

б) *существует вполне непрерывный обратный оператор $K^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$;*

в) $Y^* = S(0,1)$ *— шар единичного радиуса с центром в начале координат пространства Y.*

Тогда

$$V_n(\mathcal{E}) = s_n(K^{-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

и при выполнении одного из условий

$$\sup_{y \in S(0,1)} \|x^* - x_n^\circ\| = , \sim , \asymp s_n(K^{-1})$$

прямой метод (1.2°) *с решением $x_n^\circ = K_n^{\circ -1} y_n^\circ$ является оптимальным в смысле определения* 1.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия:*

а) $X = Y \equiv H$ *— гильбертово пространство;*

б) K *— фиксированный самосопряженный положительно определенный оператор в H, причем $\overline{\mathcal{D}(K)} = H$;*

в) K^{-1} *— вполне непрерывный оператор в* H;

г) $Y^* = S(0,1)$, $X^* = K^{-1}Y^*$.

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$V_n(\mathcal{E}) = s_n(K^{-1}) = d_n(X^*, H) = \lambda_{n+1}^{-1}(K),$$

где $\lambda_i(K)$ — собственные числа оператора K, расположенные в порядке возрастания, e_i — соответствующие им ортонормальные собственные элементы. При этом оптимальным является метод Галеркина (1.5°) *с* *оператором* $K_n^\circ = P_n^\circ K \in \mathcal{L}(X_n^\circ, X_n^\circ)$, *где* P_n° *— оператор ортогонального проектирования на подпространство* $X_n^\circ = \mathrm{lin}(e_1, e_2, \dots, e_n), n \in \mathbb{N}$.

Следствие 2. *Пусть* $Y = H$, $X = H(K)$ *— энергетическое пространство оператора* K *с нормой* $\|x\| = \big(Kx, x\big)^{1/2}$. *Тогда при выполнении условий* б)–г) *следствия* 1 *справедливы соотношения*

$$V_n(\mathcal{E}) = s_n(K^{-1}) = d_n(X^*, H(K) = \lambda_{n+1}^{-1/2}(K), \quad n \in \mathbb{N},$$

и оптимальным является метод наименьших квадратов по системе ортонормальных собственных элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ *оператора* K.

Заметим, что если в следствии 2 K есть *самосопряженный положительно определенный дифференциальный оператор четного порядка с естественными краевыми условиями в* L_2 *и со всюду плотной в* L_2 *областью определения* $\mathcal{D}(K)$, то получится соответствующий результат И. Бабушки и С.Л. Соболева, приведенный в работе [4] без доказательства. В связи с этим следует подчеркнуть, что работа [4] является, по-видимому, первой работой, где в рассматриваемом частном случае указана (без доказательства) связь оптимизации вычислительных методов с n-поперечниками Колмогорова.

Здесь весьма важно отметить также, что в случае уравнений второго рода с операторами $K \equiv E - A \in \mathcal{L}(X, X), K_n \equiv E - A_n \in \mathcal{L}(X_n, X_n)$ теорема 3.1 и ее следствия уже не имеют места. Однако в этом случае можно установить связи между аппроксимационными числами оператора $A \in \mathcal{L}(X, X)$ и оптимизацией частного класса прямых методов вида (1.2) с операторами $K_n = E - A_n$, где $A_n \in \mathcal{L}(X, X_n)$, и правыми частями $y_n = y \in X$. Остановимся на этом более подробно.

Следуя § 1, сначала приведем постановку задачи в рассматриваемом частном случае. Пусть X — банахово пространство, а $\mathcal{L}(X)$ — пространство определенных в X линейных ограниченных операторов с обычной нормой. Рассмотрим в пространстве X класс $\mathcal{E} = \{e\}$ однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Kx \equiv x - Hx = y \quad (x, y \in X,\ H \in \mathcal{L}(X)\,), \tag{3.1}$$

определяемый некоторыми классами операторов $\mathcal{H} = \{H\} \subset \mathcal{L}(X)$ и правых частей $Y^* = \{y\} \subset X$. В том же пространстве введем класс $\mathcal{E}_n$

однозначно разрешимых линейных операторных уравнений вида

$$K_n x_n \equiv x - H_n x = y \quad (x, y \in X, H_n \in \mathcal{L}(X)\,), \tag{3.2}$$

определяемый классом Y^* и некоторым классом конечномерных операторов $\mathcal{H}_n = \{H_n\} \subset \mathcal{L}(X)$ размерности не выше n.

Заметим, что решение уравнения (3.2) приводит к решению систем линейных алгебраических уравнений порядка не выше n, что является значительно более простой задачей, чем решение уравнения (3.1).

Решение $x^* \in X$ уравнения (3.1) заменим решениями $x_n^* \in X$ уравнений (3.2) при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Поскольку допускаемая при этом погрешность зависит от способа выбора уравнений (3.2), то естественно попытаться, чтобы она была минимальной в зависимости от указанного выбора; другими словами, наша задача *(задача 3)* состоит в том, чтобы в классе $\mathcal{E}_n$ найти такое уравнение (кратко "метод") вида (3.2), а именно,

$$K_n^\circ x \equiv x - H_n^\circ x = y \quad (x, y \in X, H_n^\circ \in \mathcal{H}_n), \tag{3.2°}$$

решение $x_n^\circ \in X$ которого в каком–либо смысле наилучшим образом аппроксимировало бы решение $x^* \in X$ уравнения (3.1) из класса $\mathcal{E}$. Для решения этой задачи нам понадобится величина

$$V_n(\mathcal{E}) = \inf_{H_n \in \mathcal{H}_n} \sup_{H \in \mathcal{H}, y \in Y^*} \|x^* - x_n^*\|_X = \inf_{e_n \in \mathcal{E}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

являющаяся оптимальной оценкой погрешности класса $\mathcal{E}_n$ методов (3.2) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (3.1). Следуя работам [10], [24], [26], [27], введем

Определение 3. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

$$V(\mathcal{E}; H_n^\circ) = V_n(\mathcal{E}),\ V(\mathcal{E}; H_n^\circ) \sim V_n(\mathcal{E}),\ V(\mathcal{E}; H_n^\circ) \asymp V_n(\mathcal{E}),$$

где

$$V(\mathcal{E}; H_n^\circ) = \sup_{H \in \mathcal{H}, y \in Y^*} \|x^* - x_n^\circ\|, \quad x_n^\circ = (E - H_n^\circ)^{-1} y.$$

Тогда метод (3.2°) *называется соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку на классе* $\mathcal{E}$ *уравнений* (3.1).

Ниже будем рассматривать, как правило, случай, когда класс $\mathcal{H}$ состоит из вполне непрерывных операторов, а операторы $H_n \in \mathcal{H}_n$ аппроксимируют операторы $H \in \mathcal{H}$ в том смысле, что

$$\|H - H_n\| \to 0, \quad n \to \infty; \tag{3.3}$$

при этом будем предполагать также, что для любых $H \in \mathcal{H}$

$$\|K\| \leqslant c_0 < \infty, \quad \|K^{-1}\| \leqslant c_1 < \infty \; (c_0,\, c_1 \geqslant 1), \tag{3.4}$$

где c_0 и c_1 — некоторые постоянные (общие для всего класса $\mathcal{E}$), а $Y^* = S(0,1) \subset X$ — единичный шар с центром в начале координат.

Всюду далее обозначим через

$$s_n(H) = \inf_{H_n \in \mathcal{H}_n} \|H - H_n\|, \quad s_n(\mathcal{H}) = \sup_{H \in \mathcal{H}} s_n(H) \tag{3.5}$$

n-е аппроксимационные числа (см., напр., [1], [72], [77]) фиксированного вполне непрерывного оператора H и соответственно множества операторов $\mathcal{H}$; через $d_n(F) = d_n(F, X)$ и $\lambda_n(F) = \lambda_n(F, X)$ будем обозначать, как и выше, соответственно n-й поперечник Колмогорова и n-й линейный поперечник компактного множества $F \subset X$ в нормированном пространстве X.

Теорема 3.2. *Пусть множество $\mathcal{H}$ таково, что $s_n(\mathcal{H}) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для классов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$, определенных соотношениями* (3.1)–(3.4), *справедливы оценки*

$$d_n(Z^*) \leqslant V_n(\mathcal{E}) \asymp s_n(\mathcal{H}), \quad Z^* \equiv \{z^*\}, \tag{3.6}$$

где $z^* \in X$ есть решение уравнения

$$Kz \equiv z - Hz = Hy \quad (z \in X, y \in S(0,1), H \in \mathcal{H}). \tag{3.1$'$}$$

При этом метод (3.2°), *удовлетворяющий любому из условий*

$$\sup_{H \in \mathcal{H}} \|H - H_n^\circ\| \asymp s_n(\mathcal{H}), \quad \sup_{H \in \mathcal{H}} \|H - H_n^\circ\| \asymp d_n(Z^*), \tag{3.7}$$

является оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$.

Следствие. *Метод* (3.2°), *удовлетворяющий любому из условий*

$$V(\mathcal{E}; H_n^\circ) = d_n(Z^*), \quad V(\mathcal{E}; H_n^\circ) \sim d_n(Z^*),$$

является соответственно оптимальным и асимптотически оптимальным.

Теперь несколько сузим класс $\mathcal{E}$ уравнений (3.1), предполагая, что множество $\mathcal{H}$ состоит из одного фиксированного вполне непрерывного оператора H.

Теорема 3.3. *Справедлива оценка сильной эквивалентности*

$$V_n(\mathcal{E}) \sim \inf_{H_n \in \mathcal{H}_n} \|K^{-1}(H - H_n)K^{-1}\| \equiv a_n, \tag{3.8}$$

и метод (3.2°), *удовлеторяющий любому из условий*

$$\|K^{-1}(H - H_n^\circ)K^{-1}\| \sim a_n, \quad \|K_n^{\circ -1}(H - H_n^\circ)K_n^{\circ -1}\| \sim a_n, \tag{3.9}$$

является асимптотически оптимальным на классе $\mathcal{E}$.

Теорема 3.4. *Положим* $Z_0^* \equiv K^{-1}HS(0,1)$. *Тогда*

$$d_n(Z_0^*) \leqslant V_n(\mathcal{E}) \asymp s_n(H), \tag{3.10}$$

и метод (3.2°), *удовлеторяющий любому из условий*

$$\|H - H_n^\circ\| \asymp s_n(H), \quad \|H - H_n^\circ\| \asymp d_n(Z_0^*),$$

является оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$.

Теперь несколько сузим также класс допускаемых к "конкуренции" методов (3.2), (3.2°), полагая $H_n = P_n H$, $H_n^\circ = P_n^\circ H$, где P_n и $P_n^\circ \in \mathcal{L}(X)$ — линейные операторы размерности не выше n.

Теорема 3.5. *Положим* $Z_1^* \equiv HK^{-1}S(0,1)$. *Тогда справедливы оценки*

$$\lambda_n(Z_1^*) \asymp V_n(\mathcal{E}) \leqslant V(\mathcal{E}; H_n^\circ) = O(\|H - P_n^\circ H\|), \tag{3.11}$$

и метод (3.2°) *с оператором* $H_n^\circ = P_n^\circ H$, *удовлеторяющим условию* $\|H - H_n^\circ\| \asymp \lambda_n(Z_1^*)$, *оптимален по порядку на классе* $\mathcal{E}$.

В теоремах 3.2–3.5 существенным образом использованы условие (3.3) и компактность множеств Z^*, Z_0^* и Z_1^*, что достигается за счет полной непрерывности оператора H. При нарушении последнего условия эти теоремы, вообще говоря, уже не имеют места. Тем не менее в случае компактности множества $Y^* = \{y^*\}$ можно получить аналоги некоторых из указанных теорем. Для примера остановимся на следующем результате.

Теорема 3.6. *Пусть уравнения* (3.1) *и* (3.2) *таковы, что*

$$\|H\| \leqslant q < 1, \quad \|H_n\| \leqslant q < 1 \ (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.12}$$

а Y^* — компакт в X. Тогда для классов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$, определеяемых соотношениями (3.1), (3.2), (3.2°), (3.12), *справедливы оценки*

$$d_n(HX^*) \asymp V_n(\mathcal{E}) \leqslant V(\mathcal{E}; H_n^\circ), \quad X^* = K^{-1}Y^*, \tag{3.13}$$

и метод (3.2°), *удовлеторяющий любому из условий*

$$V(\mathcal{E}; H_n^\circ) \asymp d_n(HX^*), \quad \sup_{x \in X^*} \|Hx - H_n^\circ x\| \asymp d_n(HX^*), \tag{3.14}$$

является оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$.

Следствие. *Пусть $H_n = P_n H, H_n^\circ = P_n^\circ H$, где $P_n, P_n^\circ \in \mathcal{L}(X)$ — линейные операторы размерности не выше $n \in \mathbb{N}$. Тогда в условиях теоремы* 3.6 *справедливо соотношение*

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp \lambda_n(HX^*), \quad n \to \infty,$$

и метод (3.2°) *с оператором $H_n^\circ = P_n^\circ H$, удовлеторяющим условию*

$$\sup_{x \in X^*} \|Hx - P_n^\circ Hx\| \asymp \lambda_n(HX^*),$$

оптимален по порядку на классе $\mathcal{E}$.

Приведенные выше теоремы дополняет следующая общая

Теорема 3.7. *Для классов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$ однозначно разрешимых уравнений* (3.1) *и* (3.2) *имеют место соотношения*

$$V_n(\mathcal{E}) = s_n(K^{-1}H) = s_n(HK^{-1}) \asymp s_n(H),$$

и метод (3.2°), *удовлеторяющий условиям соответственно*

$$V(\mathcal{E}; H_n^\circ) = , \sim , \asymp s_n(K^{-1}H),$$

оптимален на классе $\mathcal{E}$ в смысле определения 3.

Следствие. *Если*

$$V(\mathcal{E}; H_n^\circ) \asymp s_n(H), \quad n \to \infty,$$

то метод (3.2°) *оптимален по порядку в смысле определения* 3.

Следует отметить, что в частных случаях задания пространства X и оператора H приведенные выше общие теоремы значительно упрощаются и усиливаются. Например, если X — сепарабельное гильбертово пространство, а H — самосопряженный вполне непрерывный оператор, то аппроксимационные числа $s_n(H)$ можно определить через собственные значения этого оператора (см. [1]), что позволяет придать теоремам более определенный вид; кроме того, в рассматриваемом случае полезно использовать также установленную в работе [72] связь между поперечниками и аппроксимационными числами вполне непрерывных операторов.

Литература

1. Аллахвердиев Д. Э. *О скорости приближения вполне непрерывного оператора конечномерными операторами* // Учёные записки Азерб. ун-та. – 1967. – № 2. – С. 27–35.

2. Бабенко К.И. *Основы численного анализа.* – М.: Наука, 1968. – 744 с.

3. Бабенко К.И. и др. *Теоретические основы и конструирование алгоритмов решения задач математической физики.* – М.: Наука, 1979. – 296 с.

4. Бабушка И., Соболев С.Л. *Оптимизация численных методов* // Apl. Math. – 1965. – V. 2, № 10. – С. 96–129.

5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы.* – М.: Изд-во БИНОМ, 2004. – 636 с.

6. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений.* – М.: Наука, 1966. – Том 1, 632 с. – Том 2, 639 с.

7. Вайникко Г.М. *Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений.* – Тарту: Изд-во Тартусского ун-та, 1970. – 192 с.

8. Вайникко Г.М. *Анализ дискретизационных методов. Спецкурс.* – Тарту: Изд-во Тартусского ун-та, 1976. – 161 с.

9. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1980. – 518 с.

10. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980. – 232 с.

11. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I рода.* – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. – 288 с.

12. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1995. – 230 с.

13. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: Изд-во АН СССР, 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.

14. Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы приближенных методов* // Функциональный анализ и теория функций. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1968. – Вып. 5. – С. 20–29.

15. Габдулхаев Б.Г. *О некоторых некорректных задачах* // Функциональный анализ и теория функций. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1968. – Вып. 5. – С. 30–37.

16. Габдулхаев Б.Г. *Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях* // Функциональный анализ и теория функций. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1968. – Вып. 5. – С. 38–43.

17. Габдулхаев Б.Г. // *Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений* // Труды международной конференции по конструктивной теории функций. Варна, 1970. – София: Изд-во Болг. АН, 1972. – С. 35–49.

18. Габдулхаев Б.Г. // *Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, I–IV* // Изв. вузов. Матем. – 1971, № 11. С. 33–34; – 1971, № 12. С. 28–38; – 1972, № 4. С. 32–43; – 1974, № 3. С. 18–31.

19. Габдулхаев Б.Г. *Решение операторных уравнений методом уточняющих итераций* // Изв. вузов. Матем. – 1974. – № 5. – С. 66–80.

20. Габдулхаев Б.Г. *К численной реализации прямых методов решения операторных уравнений* // Теория функций и функциональный анализ. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. – С. 46–55.

21. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация коллокационных методов* // Докл. АН СССР. – 1979. – Том 247, № 5. – С. 1033–1037.

22. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация квадратурных методов решения интегральных уравнений* // Докл. АН СССР. – 1983. – Том 271, № 1. – С. 20–25.

23. Габдулхаев Б.Г., Тихоненко Н.Я. *Оптимальные аппроксимации решений краевой задачи Римана* // Докл. АН УССР. – 1983. – Серия А, № 6. – С. 7–9.

24. Габдулхаев Б.Г., Велев Г.Д. *Наилучшие приближения решений функциональных уравнений и оптимизация численных методов* // Труды Междун. конф. по конструктивной теории функций. Варна, 1984. – София: Изд-во Болг. АН, 1984. – С. 18–26.

25. Габдулхаев Б.Г., Леонов А.И. *Оптимальные полиномиальные аппроксимации решений дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Том 20, № 10. – С. 1813–1816.

26. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений:* Дисс... д-ра физ.-матем. наук в форме научного доклада. – Киев, 1985. – 48 с.

27. Габдулхаев Б.Г. *Аппроксимационные числа линейных операторов и оптимизация приближенных методов* // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985. – Вып. 5 – С. 15–26.

28. Габдулхаев Б.Г., Велев Г.Д. *Оптимальные методы решения операторных уравнений* // Труды Междун. конф. по численным методам и приложениям. – София, 1988. – София: Изд-во Болг. АН, 1989. – С. 545–552.

29. Габдулхаев Б.Г. // *Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами* // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Том 33, № 3. – С. 400–409.

30. Габдулхаев Б.Г. // *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 12. – С. 3–18.

31. Габдулхаев Б.Г., Рахимов И.К. *Методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений с монотонными операторами* // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 7. – С. 15–27.

32. Габдулхаев Б.Г. *Наилучшие приближения решений операторных уравнений и оптимизация вычислительных методов* // Юбилейный сборник избранных трудов членов АН РТ. Отделение математики, механики и машиноведения. – Казань: Изд-во Фолиант, 2002. – С. 165–192.

33. Габдулхаев Б.Г., Рахимов И.К. *Об одном оптимальном сплайн-методе решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Матем. – 2002. – № 2. – С. 23–36.

34. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых методов решения периодических краевых задач* // Изв. вузов. Матем. – 2002. – № 12. – С. 55–65.

35. Габдулхаев Б.Г. *Решение операторных уравнений методом минимальных невязок* // Труды Матем. Центра им. Н.И. Лобачевского. – 2004. – Том 25. – С. 71–76.

36. Габдулхаев Б.Г. *Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений* // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 7. – С. 12–24.

37. Габдулхаев Б.Г. *Методы решения бисингулярных интегральных уравнений с внутренними коэффициентами* // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 8. – С. 11–25.

38. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.

39. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* – М.: Наука, 1971. – 352 с.

40. Иванов В.В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1968. – 287 с.

41. Иванов В.К. *О линейных некорректных задачах* // Докл. АН СССР. – 1962. – Том 145, № 2. – С. 270–272.

42. Иванов В.К. *О некорректно поставленных задачах* // Математический сборник. – 1963. – Том 61(103), вып. 2. – С. 211–223.

43. Иванов В.К., Домбровская И.Н. *Некоторые линейные уравнения и исключительные случаи уравнений типа свёртки*// Изв. вузов. Матем. – 1964. – № 4. – С. 69–74.

44. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и её приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.

45. Канторович Л.В. *Функциональный анализ и прикладная математика.* – УМН, 1948. – Том III, вып. 6. – С. 89–185.

46. Канторович Л.В. *К общей теории приближенных методов анализа.* – Докл. АН СССР. – 1948. – Том 60, № 6. – С. 957–960.

47. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

48. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 744 с.

49. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.

50. Корнейчук Н.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* – М.: Наука, 1976. – 320 с.

51. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.

52. Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.

53. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.

54. Крылов В.И, Бобков В.В., Монастырный П.И.*Вычислительные методы.* – М.: Наука. – Том 1, 1976, 304 с; Том 2, 1977, 400 с.

55. Лебедев В.И. *Функциональный анализ и вычислительная математика. Учебное пособие.* – М.: Наука, 2002. – 296 с.

56. Лучка А.Ю. *Проекционно-итеративные методы.* – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.

57. Лучка А.Ю., Лучка Т.Ф. *Возникновение и развитие прямых методов математической физики.* – Киев: Наук. думка, 1985. – 240 с.

58. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1980. – 536 с.

59. Марчук Г.И., Агошков В.Г. *Введение в проекционно-сеточные методы.* – М.: Наука, 1981. – 416 с.

60. Марчук Г.И., Васильев В.Г. *О приближенном решении операторных уравнений первого рода* // Докл. АН СССР. – 1970. – Том 195, № 4. – С. 773–775.

61. Марчук Г.И., Лебедев В.И. *Численные методы в теории переноса нейтронов.* – М.: Атомиздат, 1971. – 496 с.

62. Михлин С.Г. *Прямые методы в математической физике.* – М.: Гостехиздат, 1950. – 428 с.

63. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.

64. Михлин С.Г. *Некоторые вопросы теории погрешностей.* – Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988. – 334 с.

65. Морен К. *Методы гильбертова пространства.* М.: Мир, 1965. – 570 с.

66. Морозов В.А. *Регулярные методы решения некорректных задач.* – М.: Изд-во МГУ. – 1987. – 240 с.

67. Плещинский Н.Б. *Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре, алгоритмы их численного решения и приложения:* Дисс. . . д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 1997. – 230 с.

68. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. *Численные методы в экстремальных задачах.* – М.: Наука, 1975. – 319 с.

69. Слугин С.Н. *Метод замены линейного уравнения в абстрактно-нормированном пространстве* // Изв. вузов. Матем. – 1960. – № 3. – С. 235–240.

70. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 320 с.

71. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1974. – 288 с.

72. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.

73. Шелепень С.А. *Оценки нормы обратного оператора для интегрального уравнения Фредгольма второго рода:* Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Свердловск, 1971. – 140 с.

74. Gabdulkhaev B.G., Velev G.D. *Best approximations of solutions of singular integral equations of the first kind* // Proc. Int. Conf. of Constructive Theory of Functions, 1987. – Sofia, 1988. – P. 471–477.

75. Gabdulkhaev B.G., Achmetov S.M. *Spline approximations of integral and differential equations solutions* // Intern. conf. in Approxim. theory and Funct. analysis. – Italy, Maratea, 1992. – P. 52.

76. Gabdulkhaev B.G., Velev G.D. *Optimization of projection methods for solution of singular integral equations* // Intern. conf. in Approxim. theory and Funct. analysis. – Italy, Maratea, 1992. – P. 53.

77. Pietch A. *S-numbers of operators in Banach spaces* // Studia Math. – 1974. – V. 51. – P. 201–223.

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$\mathbb{E}_m$ — $m \in \mathbb{N}$ - мерное евклидово пространство;

$[\![\alpha]\!]$ — целая часть числа $\alpha \geqslant 0$;

X, Y — линейные нормированные пространства;

$\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ — подпространства пространств соответственно X и Y;

X_n — $m = m(n) \in \mathbb{N}$ - мерное подпространство пространства X, где $n \in \mathbb{N}$ — параметр дискретизации;

$\overline{X}, \overline{Y}$ — пространства, изоморфные подпространствам соответственно $\widetilde{X} \in X$ и $\widetilde{Y} \in Y$ (§ 6 гл. I);

$\overline{X}$ — фактор-пространство пространства X по подпространству $X_0 \in X$ (§ 7 гл. I);

$\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство всех линейных (т. е. аддитивных и однородных) операторов из X в Y; $\mathcal{L}(X, X) \equiv \mathcal{L}(X)$;

E — единичный оператор;

A^* — оператор, сопряженный к оператору A;

$K_l^{-1}, K_r^{-1}, K_s^{-1}$ и K^{-1} — соответственно левый, правый, односторонний и двусторонний обратные операторы для оператора $K : X \to Y$;

СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений;

СНАУ — система нелинейных алгебраических уравнений;

а. и. м. — аппроксимативно-итерационный метод;

$\sim$ и $\asymp$ — символы сильной и слабой эквивалентностей соответственно;

$d_n(F, X)$ — n-тый поперечник Колмогорова множества $F \subset X$ в нормированном пространстве X;

$\lambda_n(F, X)$ и $\pi_n(F, X)$ — n-тые линейный и проекционный поперечники множества $F \subset X$ в нормированном пространстве X;

$E_n(f)_X = \rho(f, X_n) = \inf\limits_{f_n \in X_n} \|f - f_n\|_X$ — наилучшее приближение элемента $f \in X$ элементами подпространства $X_n \subset X$ размерности не выше $n \in \mathbb{N}$;

$s_n(H)$ — n-тое аппроксимационное число оператора $H \in \mathcal{L}(X)$;

$s_n(\mathcal{H})$ — n-тое аппроксимационное число множества операторов $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ