КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. Корешков, С.М. Скрябин

АЛГЕБРЫ ЛИ И АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Казань–2007

УДК 512

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Казанского государственного университета

Научный редактор:
кандидат физико-математических наук, доцент **Ю.Б. Ермолаев**

Корешков Н.А., Скрябин С.М.
Алгебры Ли и ассоциативные алгебры: Учебное пособие. – Казань: Казанский государственный университет, 2007. – 24 с.

В пособии приведены некоторые классические результаты в теории алгебр Ли и ассоциативных алгебр. Эти результаты показывают, что имеется определенный параллелизм в структурной теории конечномерных алгебр Ли и ассоциативных алгебр.

Предназначено для студентов старших курсов.

ГЛАВА I. АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

§ 1. Разрешимые алгебры

В этом параграфе рассматриваются некоторые факты, относящиеся к произвольным алгебрам над полем. Напомним соответствующее определение.

Определение 1.1. Векторное пространство U над полем k называется алгеброй над k, если на U задано билинейное отображение $U \times U \to U$, обозначаемое $(u_1, u_1) \to u_1 u_2$, т. е.

1) $u_1(u_2+u_3) = u_1u_2+u_1u_3$, $(u_1+u_2)u_3 = u_1u_3+u_2u_3$, $u_1, u_2, u_3, \in U$;
2) $(\lambda u_1)u_2 = u_1(\lambda u_2) = \lambda(u_1u_2)$, $\lambda \in k$, $u_1, u_2 \in U$.

Таким образом, на U имеется еще одна бинарная операция, называемая умножением, связанная законами дистрибутивности с операцией сложения и согласованная с умножением на элементы поля k.

Подпространство V в U называется подалгеброй, если для $x, y \in V$ всегда выполнено условие $xy \in V$.

В дальнейшем будем рассматривать исключительно такие алгебры над k, векторное пространство которых конечномерно над полем k.

Одним из основных инструментов изучения структуры алгебры является понятие идеала и фактор-алгебры.

Определение 1.2. Подпространство I в алгебре U называется левым (соответственно правым или двусторонним) идеалом, если $ua \in I$, когда $u \in U$, $a \in I$ (соответственно $au \in I$ или $ua, au \in I$).

Заметим, что сумма и пересечение левых (соответственно правых или двусторонних) идеалов является левым (соответственно правым или двусторонним) идеалом.

Пусть I — двусторонний идеал в алгебре U. Тогда фактор-алгеброй алгебры U по идеалу I будем называть фактор-пространство $U/I = \{u+I,\, u \in U\}$, умножение в котором определяется по правилу $(u_1 + I)(u_2 + I) = u_1u_2 + I$.

Если $u_1' + I = u_1 + I$, $u_2' + I = u_2 + I$, то $u_1' = u_1 + x_1$, $u_2' = u_2 + x_2$, $x_1, x_2 \in I$ и $u_1'u_2' = u_1u_2 + x_1u_2 + u_1x_2 + x_1x_2$. Поэтому $(u_1' + I)(u_2' + I) = u_1u_2 + I$, т. к. $x_1u_2 + u_1x_2 + x_1x_2 \in I$. Эта проверка доказывает корректность введенного умножения.

С понятием фактор-алгебры тесно связано понятие гомоморфизма.

Определение 1.3. Отображение $\varphi : U \to U'$ алгебры U в алгебру U' называется гомоморфизмом, если

1) $\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1\varphi(u_1) + \alpha_2\varphi(u_2)$, $u_1, u_2 \in U$, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$;
2) $\varphi(u_1 u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2)$, $u_1, u_2 \in U$.

Если отображение φ биективно, то оно называется изоморфизмом. Условие изоморфности алгебр U и U' обозначают $U \cong U'$.

Легко проверить, что ядро гомоморфизма $\operatorname{Ker}\varphi = \{u \in U,\ \varphi(u) = 0\}$ является двусторонним идеалом в U. С другой стороны, если I — двусторонний идеал в U, то отображение $\varphi : U \to U/I$, задаваемое правилом $\varphi(u) = u + I$, $u \in U$, будет гомоморфизмом алгебры U на фактор-алгебру U/I.

Имеют место следующие стандартные утверждения.

Теорема 1.1. 1) *Если φ — гомоморфизм алгебры U на алгебру U', то $U' \cong U/\operatorname{Ker}\varphi$.*

2) *Если I и J — идеалы в U, то $I + J/J \cong I/I \cap J$.*

3) *Если I и J — идеалы в U и $J \subset I$, то I/J — идеал в U/J и $U/J\Big/I/J \cong U/I$.*

Для любых двух подпространств I и J алгебры U определим их произведение по формуле $IJ = \left\{\sum\limits_{\alpha} x_\alpha y_\alpha,\ x_\alpha \in I,\ y_\alpha \in J\right\}$. Используя это понятие, рассмотрим последовательность подпространств алгебры U:

$$U^{(0)} = U,\ U^{(1)} = U^{(0)}U^{(0)}, \ldots, U^{(i+1)} = U^{(i)}U^{(i)}, \ldots$$

Очевидно, каждое подпространство $U^{(i+1)}$ является двусторонним идеалом в $U^{(i)}$. Если существует n такое, что $U^{(n)} = 0$, то алгебра U называется разрешимой.

Приведем несколько свойств разрешимых алгебр.

Предложение 1.1. 1) *Если алгебра U разрешима, то разрешима любая ее подалгебра и любой ее гомоморфный образ.*

2) *Если I — такой разрешимый идеал в U, что фактор-алгебра U/I разрешима, то разрешима и сама алгебра U.*

3) *Если I и J — разрешимые идеалы в U, то идеал $I + J$ также разрешим.*

Доказательство. 1) Пусть U — разрешимая алгебра, т. е. $U^{(n)} = 0$ для некоторого n, а B — ее подалгебра. Тогда из определения подалгебр $U^{(i)}$ следует $B^{(i)} \subseteq U^{(i)}$. В частности, $B^{(n)} \subseteq U^{(n)}$, т. е. $B^{(n)} = 0$.

Если $\varphi : U \to B$ — эпиморфизм разрешимой алгебры U на алгебру B, то $\varphi(U^{(i)}) = B^{(i)}$. Поэтому $B^{(n)} = 0$, когда $U^{(n)} = 0$.

2) Если фактор-алгебра U/I разрешима, то $U^{(n)} \subseteq I = I^{(0)}$ для некоторого n. Отсюда $U^{(n+m)} \subseteq I^{(m)}$. Из разрешимости I получаем $U^{(n+m)} = 0$ для подходящих n и m, что доказывает п. 2.

3) Так как I — разрешимый идеал, то $I/I \cap J$ — разрешимая алгебра в силу п. 1 данного предложения. Тогда $I + J/J$ — также разрешимая алгебра, что вытекает из п. 2 предыдущей теоремы. Применяя к алгебре $I + J$ и к идеалу J п. 2 данного предложения, получаем разрешимость идеала $I + J$. $\square$

В качестве приложения рассмотрим алгебру U и ее максимальный разрешимый идеал I, т. е. такой разрешимый идеал, который не содержится ни в каком большем разрешимом идеале. Если J — любой другой разрешимый идеал в U, то из п. 3 предложения 1.1 вытекает $I + J = I$ (ввиду максимальности идеала I), т. е. $J \subseteq I$. Это доказывает существование единственного максимального разрешимого идеала, который будем называть радикалом алгебры U и обозначать $\operatorname{Rad} U$. Если $U \neq 0$ и $\operatorname{Rad} U = 0$, то алгебра U называется полупростой.

Теорема 1.2. *Если U неразрешима, то $U/\operatorname{Rad} U$ полупроста.*

Доказательство. Пусть $\overline{I}$ — разрешимый идеал фактор-алгебры $U/\operatorname{Rad} U$. Обозначим через I полный прообраз идеала $\overline{I}$ при естественном гомоморфизме из U на $U/\operatorname{Rad} U$. В силу п. 2 предложения 1.1 I — разрешимый идеал. Следовательно, $I \subseteq \operatorname{Rad} U$, т. е. $\overline{I} = \overline{0}$. $\square$

Полученный результат показывает, что изучение структуры любой алгебры сводится к изучению строения разрешимых и полупростых алгебр.

§ 2. Нильпотентность ассоциативных алгебр

Пусть A — ассоциативная алгебра, т. е. для любых элементов $a, b, c \in A$ имеет место равенство $(ab)c = a(bc)$.

Рассмотрим следующую последовательность подпространств алгебры A:

$$A^1 = A,\ A^2 = AA^1, \ldots, A^{i+1} = AA^i, \ldots$$

Легко проверить, что в ассоциативной алгебре произведение двух двусторонних идеалов является двусторонним идеалом, содержащимся в их пересечении. Поэтому каждое подпространство A^i является идеалом в A и содержится в A^{i-1}. Алгебра A называется нильпотентной, если $A^n = 0$ для некоторого n.

Предложение 2.1. *Ассоциативная алгебра A нильпотентна тогда и только тогда, когда она разрешима.*

Доказательство. Из определения подпространств в рассматриваемых цепочках имеем $A^{(i)} \subseteq A^{i+1}$. Следовательно, из нильпотентности вытекает разрешимость.

Используя ассоциативность умножения, легко по индукции доказать, что $A^{(i)} = A^{2^i}$. Поэтому из $A^{(n)} = 0$ вытекает нильпотентность алгебры A. $\square$

Как показывает приводимая ниже теорема, нильпотентность конечномерной ассоциативной алгебры обусловлена нильпотентностью ее элементов.

Будем говорить, что элемент a ассоциативной алгебры A нильпотентен, если $a^n = 0$ для некоторого n.

Покажем, что нильпотентность идеалов согласована с операцией сложения.

Предложение 2.2. *Конечная сумма левых нильпотентных идеалов есть нильпотентный левый идеал.*

Доказательство. Единственный нетривиальный факт в сформулированном предложении — это нильпотентность суммы идеалов. Очевидная индукция сводит это утверждение к случаю двух идеалов. Пусть I и J — левые нильпотентные идеалы. т. е. $I^n = 0$, $I^m = 0$ для некоторых n и m. Тогда $(I + J)^{n+m} = 0$.
Действительно, во-первых, заметим, что $(I+J)^{n+m} = \sum I^{k_1} J^{r_1} \dots I^{k_s} J^{r_s}$, где $\sum\limits_{i=1}^{s} k_i + \sum\limits_{j=1}^{s} r_j = n+m$. Кроме того, в силу включения $AI^s \subseteq I^s$ имеем $I^{k_1} J^{r_1} \dots I^{k_s} J^{r_s} \subseteq I^k J^{r_s}$, $k = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i$. Если $k \geq n$, то последнее произведение равно нулю. В противном случае $\sum\limits_{j=1}^{s} r_j \geq m$ и, используя включение $I^{k_1} J^{r_1} \dots I^{k_s} J^{r_s} \subseteq I^{k_1} J^r$, $r = \sum\limits_{j=1}^{s} r_j$, опять получаем равенство нулю произведения $I^{k_1} J^{r_1} \dots I^{k_s} J^{r_s}$. Приведенные рассуждения объясняют нильпотентность идеала $I + J$. $\square$

Теорема 2.1 (Веддерберн). *Конечномерная ассоциативная алгебра A нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентен любой ее элемент.*

Доказательство. Если A нильпотентна, т. е. $A^n = 0$ для некоторого n, то $a^n = 0$ для любого элемента $a \in A$.

Обратно, пусть для каждого элемента $a \in A$ существует натуральное $n = n(a)$ такое, что $a^n = 0$. Докажем нильпотентность алгебры A индукцией по ее размерности.

Если $\dim A = 1$, т. е. $A = ka$, то из условия $a^n = 0$ следует $A^n = 0$. Пусть для любой алгебры размерности меньше m утверждение теоремы справедливо. Рассмотрим алгебру A размерности m. Если $A^2 \neq A$, то подалгебра A^2 нильпотентна, т. е. $(A^2)^s = 0$ для некоторого s. Тогда $A^{2s} = 0$, т. е. A — нильпотентная алгебра.

Покажем, что случай $A^2 = A$ невозможен. Зафиксируем какой-либо базис $e_1, \dots, e_m$ алгебры A. Тогда $A^2 = Ae_1 + \dots + Ae_m$. Если $A = A^2$, то алгебра A является конечной суммой левых идеалов Ae_i, $i = 1, \dots, m$. Пусть все эти идеалы собственные. Тогда по предположению индукции каждый идеал Ae_i нильпотентен. Применяя предложение 2.2, получаем нильпотентность алгебры A. В частности, $A \supsetneqq A^2$, что противоречит предположению.

Предположим теперь, что для некоторого i идеал Ae_i совпадает с A. Тогда в алгебре A существует элемент a такой, что $ae_i = e_i$. Итерируя это равенство, имеем $a^k e_i = e_i$ для любого натурального k. Так как $a^n = 0$ для некоторого n, то $e_i = 0$, что противоречит принадлежности e_i к базису алгебры A. Итак, последний случай также невозможен. Следовательно, в условиях теоремы всегда $A \supsetneqq A^2$. Отсюда, как показано выше, вытекает нильпотентность алгебры A. $\square$

Если A является алгеброй линейных операторов, то можно получить информацию о строении матриц этих операторов.

Теорема 2.2. *Пусть A — алгебра линейных операторов, действующих на конечномерном векторном пространстве V. Если любой оператор $a \in A$ ассоциативно нильпотентен, то в пространстве V существует базис, в котором матрицы всех операторов из A имеют строго треугольный вид.*

Доказательство. Из теоремы Веддерберна следует, что алгебра A нильпотентна, т. е. существует натуральное n такое, что $A^n = 0$, но $A^{n-1} \neq 0$. Тогда в пространстве V существует строго убывающая цепочка инвариантных подпространств

$$V \supset AV \supset A^2V \supset \dots \supset A^{n-1}V \supset A^nV = 0.$$

Выбирая в пространстве V базис, согласованный с этой цепочкой, получаем утверждение теоремы. $\square$

Рассмотрим критерий нильпотентности конечномерной ассоциативной алгебры в терминах функции следа.

Пусть U — алгебра (не обязательно ассоциативная) над k. Обозначим через L_a оператор левого умножения для элемента a алгебры U. т. е. $L_a : x \to ax$, $x \in U$.

Теорема 2.3. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль. Тогда A нильпотентна, если и только если* $\operatorname{tr} L_a = 0 \quad \forall a \in A$.

Доказательство. У нильпотентной алгебры A каждый ее элемент a нильпотентен. Используя гомоморфизм $\varphi : a \to L_a$ ассоциативной алгебры A в алгебру линейных операторов $\operatorname{End}_k A$, получаем, что каждый оператор L_a нильпотентен. Но все собственные значения нильпотентного оператора равны нулю. Поэтому $\operatorname{tr} L_a = 0$, $a \in A$.

Обратно, пусть $\operatorname{tr} L_a = 0 \quad \forall a \in A$. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n = \dim A$ собственные значения оператора L_a. Так как $\operatorname{tr}(L_a)^k = \operatorname{tr} L_{a^k} = 0$, $k \geq 1$, то, применяя конструкцию жордановой нормальной формы, получим $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0$, $k \geq 1$. Используя формулы Ньютона, связывающие выражения элементарных симметрических многочленов σ_i, $i = 1, \ldots, n$, и степенных сумм, получаем (в силу того, что характеристика поля k равна нулю) $\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому все собственные значения λ_i, $i = 1, \ldots, n$, оператора L_a нулевые, а значит, L_a — нильпотентный оператор. Если $L_a^n = 0$, то $a^{n+1} = 0$, поэтому алгебра A состоит из нильпотентных элементов. Следовательно, по теореме Веддерберна A — нильпотентная алгебра. $\square$

§ 3. Полупростые алгебры

Определение 3.1. Отображение $(\ ,\ ) : B \times B \to k$ произвольной алгебры B над полем k назовем билинейной симметричной инвариантной формой, если

1) $(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, b_3) = \beta_1(b_1, b_3) + \beta_2(b_2, b_3)$, $\beta_1, \beta_2 \in k$, $b_1, b_2, b_3 \in B$;
2) $(b_1, b_2) = (b_2, b_1)$;
3) $(b_1 b_2, b_3) = (b_1, b_2 b_3)$.

В силу симметричности формы $(\ ,\ )$ ее левое ядро $B_e^{\perp} = \{x \in B$, $(x, b) = 0$, $b \in B\}$ совпадает с ее правым ядром $B_r^{\perp} = \{x \in B$, $(b, x) = 0, b \in B\}$, и можно говорить просто о ядре формы $B^{\perp} = B_e^{\perp} = B_r^{\perp}$. Если ядро формы $B^{\perp}$ равно нулю, то форму будем называть невырожденной.

Алгебру будем называть простой, если она не содержит нетривиальных двусторонних идеалов.

Теорема 3.1. *Конечномерная алгебра B над полем k, обладающая невырожденной билинейной симметричной инвариантной формой, и не имеющая идеалов, квадраты которых равны нулю, является прямой суммой двусторонних идеалов, каждый из которых является простой алгеброй.*

Доказательство. Пусть I — двусторонний идеал алгебры B. Тогда $I^\perp = \{x \in B,\ (x, b) = 0,\ b \in I\}$ — также двусторонний идеал. Обозначим через J пересечение идеалов I и $I^\perp$. Пусть $a, b \in J$, $c \in B$. Тогда $(ab, c) = (a, bc) = 0$, т. к. $bc \in I^\perp$. Из невырожденности формы немедленно получаем $J^2 = 0$. По условию теоремы алгебра B не имеет ненулевых двусторонних идеалов, квадраты которых равны нулю. Следовательно, $J = 0$.

Покажем, что $B = I \oplus I^\perp$. Выберем базис $e_1, \dots, e_m$ в I. Для любого элемента $b \in B$ существуют константы $\beta_1, \dots, \beta_m \in k$ такие, что $b - \sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i \in I^\perp$. Действительно, последнее условие принадлежности равносильно разрешимости системы линейных уравнений $\sum_{i=1}^{m} \beta_i (e_i, e_j) = (b, e_j)$, $j = 1, \dots, m$. Но определитель матрицы $\big((e_i, e_j)\big)$ отличен от нуля, т. к. $I \cap I^\perp = 0$. Поэтому для любого элемента $b \in B$ существуют элементы $x \in I$, $y \in I^\perp$ такие, что $b = x + y$, т. е. $B \subseteq I \oplus I^\perp$.

Предположим дополнительно, что I — минимальный двусторонний идеал. Если K — идеал алгебры I, то из условия $KI^\perp \subset I \cap I^\perp = 0$ (соответственно $I^\perp K \subset I^\perp \cap I = 0$) немедленно получим, что K — идеал всей алгебры B. Тогда из минимальности I вытекает, что либо $K = 0$, либо $K = I$. т. е. I — простая алгебра.

Из невырожденности формы $(\ ,\ )$ на B вытекает невырожденность ограничения этой формы на $I^\perp$. Кроме того, любой идеал алгебры $I^\perp$ является идеалом всей алгебры. Применяя индукционные выкладки, легко получим утверждение теоремы. □

Для любой конечномерной ассоциативной алгебры A определим билинейную форму $t : A \times A \to k$ по правилу

$$t(a, b) = \operatorname{tr} L_a L_b, \quad a, b \in A.$$

Легко видеть, что и два других свойства из определения 3.1 для формы t также выполнены.

Теорема 3.2. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда* *ее радикал совпадает с ядром $A^{\perp} = \{x \in A,\ t(x, A) = 0\}$ билинейной формы t.*

Доказательство. Обозначим через R радикал алгебры A. Если $b \in R$, то для любого элемента $a \in A$ произведение ba принадлежит R и ba — нильпотентный элемент в A. Тогда L_{ba} — нильпотентный оператор, а значит $\operatorname{tr} L_{ba} = 0$. Последнее равенство можно записать в виде $t(b, A) = 0$. Таким образом, $b \in A^{\perp}$, или $R \subseteq A^{\perp}$.

Пусть теперь $b \in A^{\perp}$. Из этого условия, в частности, получаем $\operatorname{tr} L_{b^2}^k = \operatorname{tr} L_b L_{b^{2k-1}} = t(b, b^{2k-1}) = 0$, $k \geq 1$. Рассуждая далее, как в теореме 2.3, получим, что L_{b^2} — нильпотентный оператор, т. е. $L_{b^2}^n = 0$ для некоторого натурального n. Тогда $b^{2n+1} = 0$. Значит, по теореме Веддерберна идеал $A^{\perp}$ нильпотентен. Следовательно, $A^{\perp} \subseteq R$.

Соединяя два полученных включения, имеем $R = A^{\perp}$. $\square$

Следствие 3.1. Конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль полупроста тогда и только тогда, когда форма t невырождена.

Используя полученные результаты, опишем строение конечномерной полупростой ассоциативной алгебры.

Теорема 3.3. *Пусть A — полупростая конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда A является прямой суммой двусторонних идеалов, каждый из которых является простой алгеброй.*

Доказательство. Так как A полупроста, то в силу следствия 3.1 форма t невырождена. Кроме того, из полупростоты алгебры A вытекает отсутствие в ней двусторонних идеалов, квадраты которых равны нулю. Поэтому, используя теорему 3.1, получаем сформулированное разложение. $\square$

ГЛАВА II. АЛГЕБРЫ ЛИ

§ 4. Определение и примеры алгебр Ли

Определение 4.1. Алгебра L над полем k с билинейной операцией $L \times L \to L$, обозначаемой $(x, y) \to [x, y]$ и называемой коммутатором элементов x и y, называется алгеброй Ли, если выполняются следующие аксиомы:

1. $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;
2. $\big[x[y, z]\big] + \big[y[z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$ $(x, y, z \in L)$.

Последняя аксиома называется тождеством Якоби.

Заметим, что из аксиомы 1, примененной к элементу $[x+y, x+y]$, следует соотношение антикоммутативности:

1′). $[x, y] = -[y, x]$.

Если характеристика поля k отлична от 2, то из $1'$ следует 1.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над k. Тогда $\operatorname{End} V$ будет обозначать множество линейных преобразований $V \to V$. Оно имеет размерность n^2 как векторное пространство над k, где $n = \dim_k V$. Определим новую операцию $[x, y] = xy - yx$, $x, y \in \operatorname{End} V$. С этой операцией $\operatorname{End} V$ становится алгеброй Ли над k: аксиома 1 очевидна, а проверка аксиомы 2 требует небольшого вычисления. Эту алгебру Ли назовем полной линейной алгеброй и будем обозначать $\mathrm{gl}(V)$.

Пусть U — k-алгебра с билинейной операцией $U \times U \to U$, т. е. $(x, y) \to xy$. Дифференцированием в алгебре U назовем линейное отображение $D : U \to U$ со свойством

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy).$$

Легко проверить, что совокупность всех дифференцирований $\operatorname{Der} U$ алгебры U является векторным пространством над k. Кроме того, коммутатор $[D_1, D_2]$ двух дифференцирований снова является дифференцированием. Действительно,

$$\begin{aligned}
D_1D_2(xy) &= (D_1D_2x)y + (D_1x)(D_2y) + (D_2x)(D_1y) + x(D_1D_2y),\\
D_2D_1(xy) &= (D_2D_1x)y + (D_1x)(D_2y) + (D_2x)(D_1y) + x(D_2D_1y).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$[D_1D_2](xy) = ([D_1, D_2]x)y + x([D_1, D_2]y).$$

Таким образом, $\operatorname{Der} U$ — подалгебра в $\mathrm{gl}(U)$. В частности, для любой алгебры Ли L определена алгебра $\operatorname{Der} U$. Некоторые элементы последней возникают вполне естественным образом. Если $x \in L$, то отображение $\operatorname{ad} x : y \to [x, y]$ является эндоморфизмом пространства L. В действительности $\operatorname{ad} x \in \operatorname{Der} L$, поскольку тождество Якоби можно переписать в виде $\big[x, [y, z]\big] = \big[[x, y], z\big] + \big[y[x, z]\big]$. Дифференцирования такого вида называются внутренними, а все остальные — внешними. Отображение $L \to \operatorname{Der} L$, имеющее вид $x \to \operatorname{ad} x$, называется присоединенным представлением алгебры L.

§ 5. Идеалы и гомоморфизмы

Подпространство I алгебры Ли L называется идеалом, если $[x, a] \in I$ для любого $x \in I$ и любого $a \in L$. В отличие от общего случая (см. § 1) в алгебре Ли в силу ее антикоммутативности все идеалы двусторонние.

Важными примерами идеалов алгебры Ли L являются

1) ее центр $Z(L) = \{x \in L,\ [x,a] = 0,\ a \in L\}$,

2) ее коммутант $[L,L] = \Big\{ \sum\limits_{k\in S} [x_k, y_k],\ x_k, y_k \in L,\ S$ — любое конечное множество$\Big\}$.

Заметим, что как и в общем случае (см. § 1) сумма и пересечение двух идеалов являются идеалами. Более того, для алгебры Ли и произведение $[I,J] = \Big\{ \sum\limits_{k\in S} [x_k, y_k],\ x_k \in I,\ y_k \in J \Big\}$ двух идеалов I и J является идеалом. Коммутант $[L,L]$ — частный случай этой конструкции.

Если в алгебре Ли L нет идеалов, кроме нее самой и нуля, причем $[L,L] \neq 0$, то L называется простой алгеброй. Ясно, что если L — простая алгебра, то $Z(L) = 0$ и $L = [L,L]$.

Пример. Пусть $L = \mathrm{sl}(2,k) = \{x \in \mathrm{gl}(2,k),\ \mathrm{tr}\, x = 0\}$, $\mathrm{char}\, k \neq 2$. Выберем стандартный базис в L в виде трех матриц

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Умножение в алгебре полностью определяется равенствами

$$[e,f] = h, \quad [h,e] = 2e, \quad [h,f] = -2f.$$

Пусть I — ненулевой идеал в L и $ae + bf + ch$ — ненулевой элемент в I. Дважды применяя к этому элементу оператор $\mathrm{ad}\, e$, получаем $-2be \in I$, а применяя дважды оператор $\mathrm{ad}\, f$, получаем $-2af \in I$. Поэтому, если a или b отлично от нуля, то I содержит e или f и, значит, $I = L$. С другой стороны, если $a = b = 0$, то $0 \neq ch \in I$, т. е. $h \in I$, что снова влечет $I = L$. Заключаем, что L — простая алгебра.

Так же, как в § 1, для алгебр Ли определяется понятие фактор-алгебры, гомоморфизма и изоморфизма алгебр. Используя эти понятия для алгебр Ли, получаем утверждение, дословно повторяющее теорему 1.1.

§ 6. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли

В § 1 было введено понятие разрешимой алгебры, а именно, таковой была названа алгебра U, в которой цепочка подпространств $U^{(0)} = U$, $U^{(1)} = U^{(0)}U^{(0)}, \ldots, U^{(i+1)} = U^{(i)}U^{(i)}, \ldots$ заканчивается нулевым подпространством, т. е. существует n такое, что $U^{(n)} = 0$. Применяя это определение к алгебре Ли L, получим понятие разрешимой алгебры Ли. Следует заметить, что в случае, когда L — алгебра Ли, ее подпространства $L^{(i)}$ являются идеалами алгебры Ли.

В определенном смысле общим примером разрешимой алгебры Ли служит алгебра верхнетреугольных матриц $T(n,k) = \{(a_{ij}), i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n,\ a_{ij} \in k,\ a_{ij} = 0,\ i > j\}$. Очевидно, базис этой алгебры состоит из матричных единиц e_{ij}, $i \leq j$, ее размерность равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Чтобы доказать, что алгебра $L = T(n,k)$ разрешима, найдем ряд ее коммутантов при помощи формулы

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj},$$

где δ_{rs} — символ Кронекера. В частности, имеем $[e_{ii}, e_{ij}] = e_{ij}$ при $i < j$. Откуда следует $N(n,k) \subset [L,L]$, где $N(n,k) = \{(a_{ij}),\ a_{ij} = 0, i \geq j\}$. Так как $T(n,k) = D(n,k) + N(n,k)$, где $D(n,k)$ — алгебра диагональных матриц, то $N(n,k) = [L,L]$.

В алгебре $N(n,k)$ естественно определено понятие “уровня”, а именно, уровень элемента e_{ij} равен $j - i$. В формуле для коммутаторов будем предполагать, что $i < j$, $k < l$. Без ограничения общности можно также считать, что $i \neq l$. Тогда $[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il}$, если $j = k$ или 0 (в противном случае). Как следствие, любой элемент e_{il} является коммутатором двух матриц, уровни которых в сумме дают его уровень. Отсюда следует, что $L^{(2)}$ порождается элементами e_{ij}, уровень которых больше или равен 2, а $L^{(i)}$ — элементами, уровень которых больше или равен 2^{i-1}. Наконец, очевидно, что $L^{(i)} = 0$ при $2^{i-1} > n - 1$.

Для разрешимых алгебр Ли имеет место предложение 1.1. Поэтому так же, как в § 1, доказывается существование единственного максимального разрешимого идеала в L, называемого радикалом алгебры L и обозначаемого $\operatorname{Rad} L$. Если $L \neq 0$ и $\operatorname{Rad} L = 0$, то алгебра L называется полупростой.

Далее рассмотрим понятие нильпотентной алгебры Ли. Так же, как в § 2, определим последовательность идеалов алгебры L, полагая

$$L^0 = 0,\ L^1 = [L,L],\ L^2 = [L,L^1],\ldots,L^i = [L,L^{i-1}],\ldots$$

Алгебра L называется нильпотентной, если $L^n = 0$ при некотором n. Очевидно, $L^{(i)} \subset L^i$ для всех i, и поэтому нильпотентная алгебра Ли разрешима.

Приведем пример, показывающий, что класс разрешимых алгебр шире класса нильпотентных. Пусть $L = \langle e, f\rangle$ — алгебра Ли размерности два со следующей таблицей умножения: $[e,e] = [f,f] = 0$,

$[e, f] = -[f, e] = f$. Тогда для любого $i \geq 1$ $L^i = L^1 = \langle f \rangle \neq 0$, но $L^{(2)} = 0$, т. е. L разрешима, но не нильпотентна.

Более того, L^1 — максимальный нильпотентный идеал, для которого фактор-алгебра L/L^1 нильпотентна. Таким образом, п. 2 предложения 1.1 неверен, если условие разрешимости идеала и фактор-алгебры заменить на условие нильпотентности. Тем не менее, сумма двух нильпотентных идеалов снова является нильпотентным идеалом, т. е. п. 3 предложения 1.1 справедлив при замене условия разрешимости на условие нильпотентности. Для проверки последнего утверждения заметим, что любое произведение элементов алгебры Ли является линейной комбинацией левонормированных произведений вида $\big[a_1[a_2 \ldots [a_{n-1}, a_n] \ldots]\big]$. Это легко доказывается индукцией по количеству множителей с использованием тождества Якоби. Пусть I_1 и I_2 — нильпотентные идеалы, т. е. $I_1^n = 0$ и $I_2^m = 0$ для некоторых n и m. Тогда любое произведение, входящее в $(I_1 + I_2)^{n+m}$, имеет вид $\big[a_1, [a_2 \ldots [a_{n+m-1}, a_{n+m}] \ldots]\big]$, где каждое a_i принадлежит либо I_1, либо I_2. Пусть для определенности количество множителей, принадлежащих I_1, в некотором произведении равно k, где $k \geq n$. Тогда, используя тот факт, что $[I_1^s, L] \subseteq I_1^s$, получим, что данное произведение принадлежит k-й степени идеала I_1, которая равна нулю. Таким образом, доказано

Предложение 6.1. *Сумма двух нильпотентных идеалов есть нильпотентный идеал.*

Применяя рассуждение, аналогичное рассуждению из § 1, для разрешимых алгебр имеем

Следствие 6.1. Любая конечномерная алгебра Ли имеет наибольший нильпотентный идеал.

Будем называть этот идеал нильрадикалом алгебры L и обозначать $\mathrm{Nil}(L)$.

Пример двумерной разрешимой алгебры показывает, что возможна ситуация, когда фактор-алгебра $L/\mathrm{Nil}(L)$ содержит ненулевой нильпотентный идеал. Следовательно, нильрадикал не обладает характеристическим свойством разрешимого идеала, но благодаря тесной связи этих радикалов нильрадикал используется при изучении структуры алгебр Ли.

Рассмотрим некоторые свойства алгебр Ли, связанные с нильпотентностью.

Предложение 6.2. *Пусть L — алгебра Ли.*

1) *Если L нильпотентна, то все ее подалгебры и гомоморфные образы нильпотентны.*

2) *Если нильпотентна алгебра $L/Z(L)$, то нильпотентна и алгебра L.*

Доказательство. 1) Нужно воспроизвести доказательство утверждения 1 предложения 1.1.

2) Если $\big(L/Z(L)\big)^n = 0$, то $L^n \subset Z(L)$. Тогда $L^{n+1} = [L, L^n] \subset [L, Z(L)] = 0$. $\square$

Условие нильпотентности алгебры L может быть сформулировано по-другому: при некотором n (зависящем только от L)

$$\operatorname{ad} x_1 \operatorname{ad} x_2 \ldots \operatorname{ad} x_n(y) = 0$$

для всех x_i, $y \in L$. В частности, $(\operatorname{ad} x)^n = 0$ для всех $x \in L$. Если теперь x — элемент произвольной алгебры Ли L, то назовем x ad-нильпотентным, если эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Тогда предыдущее условие можно сформулировать так: если алгебра L нильпотентна, то все ее элементы ad-нильпотентны. Примечательно, что верно и обратное.

Теорема 6.1 (Энгель). *Если все элементы алгебры Ли* ad*-нильпотентны, то алгебра L нильпотентна.*

Вначале докажем следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Пусть L — алгебра Ли линейных операторов в* $\mathrm{gl}(V)$*, где V — конечномерное векторное пространство. Если любой элемент x из L ассоциативно нильпотентен, то L — нильпотентная алгебра Ли.*

Доказательство. Пусть M — подпространство в L. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную пространством M. Докажем, что $A(L)$ — нильпотентная ассоциативная алгебра в $\operatorname{End} V$. Предположим противное. Тогда в L существует максимальная подалгебра M такая, что $A(M)$ — нильпотентная алгебра. (Такие подалгебры существуют, например, любая одномерная подалгебра Ли kx, $x \in L$.) Пусть $\big(A(M)\big)^n = 0$, тогда для любого $x \in L$ и любых $m_1, m_2, \ldots, m_{2n-1} \in M$ $[\ldots[x, m_1], \ldots, m_{2n-1}] = 0$. Это легко проверить, если заменить каждый коммутатор $[a, b]$ его выражением $ab - ba$.

Если $x \notin M$ и для некоторых $m_1, \ldots, m_{2n-1} \in M$ элемент $x' = [\ldots[x, m_1], \ldots, m_{2n-2}] \notin M$, то из приведенного выше равенства, в частности, следует $[x', m] \in M$ для любого $m \in M$. В противном случае в качестве x' берем элемент $[\dots[x, m_1], \dots, m_{2n-3}]$ и т. д. Через конечное число шагов получим, что существует элемент $y \in L$, $y \notin M$, но $[y, m] \in M$ для любого $m \in M$. Из полученных условий следует, что пространство $M' = ky \oplus M$ является алгеброй Ли.

Проверим, что $A(M')$ — нильпотентная ассоциативная алгебра. Используя условие $my = ym + m'$, $m, m' \in M$, легко показать, что любой элемент алгебры $A(M')$ является линейной комбинацией мономов вида $y^r m_1 \dots m_s$, где $s < n$, $r < k$, и k — степень нильпотентности элемента y. В частности, любой моном a из $A(M')$, у которого количество множителей из M не меньше n, равен нулю, т. к. при перестановке элемента y с элементами из M количество множителей из M сохраняется. Поэтому одночлен a может быть отличен от нуля тогда и только тогда, когда количество множителей из M в нем меньше n и они перемежаются степенями элемента y с показателями меньшими чем k. Следовательно, общее количество множителей любого отличного от нуля одночлена a не превосходит $n-1+n(k-1) = nk-1$.

Этим доказано, что если число множителей одночлена a не меньше nk, то $a = 0$, т. е. алгебра $A(M')$ ассоциативно нильпотентна. Поскольку это противоречит максимальности подалгебры M, то $A(L)$ — нильпотентная ассоциативная алгебра. В частности L — нильпотентная алгебра Ли. $\square$

Доказательство теоремы Энгеля. Если для некоторой алгебры Ли L любой оператор $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, нильпотентен, то алгебра Ли линейных операторов $\operatorname{ad} L$ нильпотентна в силу предыдущей теоремы. Так как ядро присоединенного представления алгебры L является центром $Z(L)$ этой алгебры, то нильпотентность алгебры $\operatorname{ad} L$ означает нильпотентность фактор-алгебры $L/Z(L)$. Отсюда в силу п. 2 предложения 6.2 имеем нильпотентность алгебры L. $\square$

В доказанной форме теорема Энгеля аналогична теореме Веддерберна для ассоциативных алгебр.

Приведем еще одну форму теоремы Энгеля.

Теорема 6.3. *Пусть L — алгебра Ли линейных операторов пространства V. Если любой элемент из L ассоциативно нильпотентен, то существует базис в V такой, что матрицы линейных операторов из L одновременно приводятся в этом базисе к строго треугольному виду.*

Доказательство. Как было доказано в теореме 6.2, ассоциативная алгебра $A(L)$ нильпотентна. Следовательно, имеет место цепочка строгих включений $V \supset \widetilde{L}V \supset \widetilde{L}^2V \supset \cdots \widetilde{L}^nV = 0$, где $\widetilde{L}^i = \langle x_1 \dots x_i,$

$x_k \in L\rangle$. Выбирая базис, согласованный с этой цепочкой, получим утверждение теоремы. $\square$

§ 7. Теорема Ли

Аналогом матричной формы теоремы Энгеля является теорема Ли об одновременном приведении к треугольному виду линейных операторов любой разрешимой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Теорема 7.1 (Ли). *Пусть L — разрешимая алгебра Ли линейных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль. Тогда в пространстве V существует базис такой, что все матрицы линейных операторов из L имеют в нем треугольный вид.*

Доказательство. Вначале докажем существование общего собственного вектора для всех элементов из L. Для этого воспользуемся индукцией по $\dim_k L$. Если $\dim_k L = 1$, то утверждение очевидно. Так как $[L, L] \supsetneqq L$, то выбираем любое подпространство K, содержащее $[L, L]$ и имеющее коразмерность 1 в L. Очевидно, K — идеал в L. По предположению индукции у всех элементов из K существует общий собственный вектор $w \in V$, т. е. $xw = \lambda(x)w$, $x \in K$. Обозначим через $W = \{w \in V,\ xw = \lambda(x)w,\ x \in K\}$ ненулевое подпространство в V.

Покажем, что W инвариантно относительно алгебры L. Пусть x — произвольный элемент из L. Рассмотрим подпространство, натянутое на векторы $w, xw, \dots, x^{n-1}w$, $w \in W$, которые линейно независимы, и $x^n w = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i w$, $\alpha_i \in k$. Если $y \in K$, то $yx^i w \equiv \lambda(y)x^i w$ $(\operatorname{mod} W_{i-1})$, $i = 0, \dots, n-1$, где $W_j = \langle w, xw, \dots, x^j w\rangle$, $j = 0, \dots, n-1$, $W_{-1} = 0$.

Действительно, случай, когда $i = 0$, вытекает из определения пространства W, а переход от i к $i+1$ следует из формулы

$$yx^{i+1}w = xyx^i w + [y, x]x^i w \equiv \lambda(y)x^{i+1}w \ (\operatorname{mod} W_i),$$

поскольку $[y, x] \in K$. Таким образом, любой элемент из K имеет в базисе $w, xw, \dots, x^{n-1}w$ пространства W_{n-1} матрицу треугольного вида. В частности, элемент $[y, x]$, $y \in K$, имеет матрицу треугольного вида с диагональными элементами $\lambda([y, x])$. Поэтому $\operatorname{tr}_{W_{n-1}}([y, x]) = n\lambda([y, x])$. С другой стороны, в силу известного свойства функции следа для коммутатора $\operatorname{tr}_{W_{n-1}}([y, x]) = 0$ (благодаря инвариантности

W_{n-1} относительно y и x). Так как характеристика поля k равна нулю, то $\lambda([y,x]) = 0$.

Используя полученный факт, проверим инвариантность пространства W относительно L. Пусть $x \in L$, $y \in K$, $w \in W$. Тогда $y(xw) = x(yw) + [y,x]w = x(yw) = \lambda(y)xw$, т. к. $\lambda([y,x]) = 0$.

Пусть $L = K \oplus kz$. В силу инвариантности пространства W относительно оператора z в нем существует собственный вектор v этого оператора. Но тогда $xv = \lambda(x)v$ для любого элемента $x \in L$.

Предположим, что уже найдены i линейно независимых векторов $e_1, \dots, e_i$ таких, что $xe_j = \sum\limits_{k=1}^{j} \alpha_k e_k$. Обозначим через U подпространство, натянутое на эти векторы. Тогда алгебра L действует в фактор-пространстве V/U по правилу $x(v+u) = xv + U$, $x \in L$. Это действие определяет разрешимую алгебру линейных операторов на фактор-пространстве V/U и (по доказанному выше) в V/U существует ненулевой общий собственный вектор $v_0 + U : x(v_0 + U) = \lambda(x)(v_0 + U)$. Тогда любой представитель e_{i+1} этого класса имеет свойство $xe_{i+1} = \lambda(x)e_{i+1} + u$, $u = \sum\limits_{k=1}^{i} \alpha_k e_k \in U$. Очевидно, векторы $e_1, \dots, e_i, e_{i+1}$ линейно независимы. Через конечное число шагов получим базис, фигурирующий в утверждении теоремы. $\square$

§ 8. Разложение Жордана–Шевалле

Для получения критерия разрешимости алгебры Ли рассмотрим представление любого линейного оператора в виде суммы полупростой и нильпотентной компоненты, которое уточняет теорему о жордановой нормальной форме.

Определение 8.1. Оператор $x \in \operatorname{End}_k V$ называется полупростым, если все корни его минимального многочлена различны.

Заметим, что если поле k алгебраически замкнуто, то это определение равносильно диагонализируемости оператора x.

Теорема 8.1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k, $x \in \operatorname{End}_k V$.*

a) *Существуют единственные элементы $x_s, x_n \in \operatorname{End}_k V$, удовлетворяющие следующим условиям: $x = x_s + x_n$, где x_s — полупрост, x_n — нильпотентен, и $x_s x_n = x_n x_s$.*
b) *Существуют многочлены $p(T)$, $q(T)$ от одного переменного без свободного члена такие, что $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$.*

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_r$ (с кратностями $m_1, \dots, m_r$) — различные собственные значения отображения x, так что его характеристический многочлен равен $\prod_{i=1}^{r}(T-a_i)^{m_i}$. Если $V_i = \mathrm{Ker}(x-a_i\cdot 1)^{m_i}$, то V является прямой суммой подпространств $V_1, \dots, V_r$, каждое из которых инвариантно относительно x. Ясно, что характеристический многочлен для x на V_i равен $(T-a_i)^{m_i}$.

Так как многочлены $(T-a_i)^{m_i}$, $i = 1, \dots, r$, и T взаимно просты (если все a_i отличны от нуля), то согласно китайской теореме об остатках, гомоморфизм $\varphi : k[T] \to \oplus k[T]/I_j$, где I_j – идеалы кольца $k[T]$, порождаемые многочленами $(T-a_j)^{m_j}$ и T, является эпиморфизмом. (В случае, когда оператор x имеет нулевое собственное значение, многочлен T отбрасывается.) Поэтому существует многочлен $p(T) \in k[T]$ такой, что $p(T) \equiv a_i \pmod{(T-a_i)^{m_i}}$, $i = 1, \dots, r$, $p(T) \equiv 0 \pmod T$. Положим $q(T) = T - p(T)$. Очевидно, у многочленов $q(T)$ и $p(T)$ нулевой свободный член, т. к. $p(T) \equiv 0 \pmod T$.

Положим $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Поскольку эти эндоморфизмы являются многочленами от x, они коммутируют друг с другом. Также они оставляют инвариантными все подпространства V_i.

Сравнение $p(T) \equiv a_i \pmod{(T-a_i)^{m_i}}$ показывает, что ограничение отображения $x_s - a_i \cdot 1$ равно нулю на V_i. Следовательно, x_s действует диагонально на V_i с единственным собственным значением a_i. Используя строение жордановой нормальной формы для оператора x, немедленно получаем, что оператор $x_n = x - x_s$ нильпотентен.

Осталось доказать утверждение о единственности полученного разложения. Пусть $x = s + n$ — другое разложение оператора x, причем s — полупростой оператор, n — нильпотентный оператор и они коммутируют.

Так как n коммутирует с s, то он коммутирует с x, а следовательно, и с x_n. Аналогично, операторы s и x_s также коммутируют. Тогда оператор $n - x_n$ нильпотентен, а оператор $x_s - s$ полупрост. Первое утверждение очевидно. Проверим второе. Так как s и x_s коммутируют, то каждое пространство V_i инвариантно относительно s. Из полупростоты оператора s следует, что его ограничение на V_i также полупросто. Поэтому существует базис в V_i, в котором матрица оператора s диагональна. Объединяя эти базисы, получим базис пространства V, в котором оба оператора s и x_s одновременно имеют диагональный вид. Следовательно, оператор $x_s - s$ диагонализируем.

Из равенства $x_s - s = n - x_n$ получаем, что один и тот же оператор одновременно полупрост и нильпотентен. Но таким может быть только нулевой эндоморфизм. Отсюда следует $s = x_s$, $n = x_n$. □

Теорема 8.2. *Пусть* $x \in \operatorname{End} V$ $(\dim V < \infty)$, $x = x_s + x_n$ *— разложение Жордана. Тогда* $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ *— разложение Жордана для* $\operatorname{ad} x$ *в* $\operatorname{End}(\operatorname{End} V)$.

Доказательство. Если элемент $y \in \operatorname{End} V$ нильпотентен, то нильпотентен и элемент $\operatorname{ad} y$. Действительно, $\operatorname{ad} y = \rho_y - \lambda_y$, где $\rho_y(a) = ya$, $\lambda_y(a) = ay$, $a \in \operatorname{End} V$. Эндоморфизмы ρ_y и λ_y нильпотентны в силу нильпотентности y. Но сумма коммутирующих нильпотентов есть нильпотентный элемент. Поэтому отображение $\operatorname{ad} y$ нильпотентно.

Аналогично, если элемент y полупрост, то полупрост и элемент $\operatorname{ad} y$. Проверим это. Выберем базис $v_1, \ldots, v_n$ в V, в котором матрица y имеет вид $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть $\{e_{ij}\}$ — стандартный базис в $\operatorname{End} V$, который соответствует $v_1, \ldots, v_n$: $e_{ij} v_k = \delta_{jk} v_i$. Тогда простое вычисление показывает, что $\operatorname{ad} y(e_{ij}) = (a_i - a_j) e_{ij}$. Таким образом, матрица $\operatorname{ad} y$ диагональна в выбранном базисе для $\operatorname{End} V$.

Итак, эндоморфизм $\operatorname{ad} x_s$ полупрост, а эндоморфизм $\operatorname{ad} x_n$ нильпотентен. Они коммутируют: $[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad}[x_s, x_n] = 0$. Остается применить п. а) предыдущей теоремы. $\square$

§ 9. Критерий разрешимости Картана

Здесь и всюду далее поле k алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль.

Лемма 9.1. *Пусть* $A \subset B$ *— два подпространства в* $\mathrm{gl}(V)$, $\dim_k V < \infty$. *Положим* $M = \{x \in \mathrm{gl}(V),\ [x, B] \subset A\}$. *Предположим, что для некоторого* $x \in M$ *выполняется свойство* $\operatorname{tr}(xy) = 0$ $\forall y \in M$. *Тогда элемент* x *нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $x = s + n$ — разложение Жордана для x. (Здесь $s = x_s$, $n = x_n$.) Выберем базис $v_1, \ldots, v_m$ в V, в котором s имеет матрицу $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_m)$, где $a_1, \ldots, a_m$ — собственные значения оператора x. Пусть $E = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Q} a_i$ — векторное подпространство над $\mathbb{Q}$ в k, порожденное собственными значениями $a_1, \ldots, a_m$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Нужно доказать, что $s = 0$, что равносильно равенству $E = 0$. Поскольку пространство E конечномерно над $\mathbb{Q}$, достаточно показать, что двойственное пространство E^* нулевое, т. е. что любая линейная функция $f : E \to \mathbb{Q}$ нулевая.

Для данной функции f пусть y — тот элемент в $\mathrm{gl}(V)$, матрица которого в выбранном базисе равна $\operatorname{diag}\big(f(a_1), \ldots, f(a_m)\big)$. Если $\{e_{ij}\}$ — соответствующий базис из матричных единиц в $\mathrm{gl}(V)$, то, как следует из доказательства теоремы 8.2, $\operatorname{ad} s(e_{ij}) = (a_i - a_j) e_{ij}$, $\operatorname{ad} y(e_{ij}) =$

$\big(f(a_i)-f(a_j)\big)e_{ij}$. Пусть теперь $r(T)\in K[T]$ — многочлен без свободного члена, удовлетворяющий условиям $r(a_i-a_j)=f(a_i)-f(a_j)$ для всех пар i, j. Существование такого многочлена следует из интерполяционной формулы Лагранжа. Неоднозначности в заданных значениях нет, поскольку из равенства $a_i-a_j=a_k-a_l$ следует (ввиду линейности f) $f(a_i)-f(a_j)=f(a_k)-f(a_l)$. Ясно, что $\operatorname{ad}y=r(\operatorname{ad}s)$.

Согласно теореме 8.2, элемент $\operatorname{ad}s$ — полупростая часть элемента $\operatorname{ad}x$, и ее можно представить как многочлен от $\operatorname{ad}x$, т. е. $\operatorname{ad}s=h(\operatorname{ad}x)$, где $h(T)$ — многочлен без свободного члена. Поэтому $\operatorname{ad}y=r\big(h(\operatorname{ad}x)\big)$, причем многочлен $r\Big(h(T)\Big)$ — без свободного члена.

По предположению $\operatorname{ad}x$ отображает B в A, откуда следует $\operatorname{ad}y(B)\subset A$, т. е. $y\in M$. Используя предположение $\operatorname{tr}(xy)=0$, получим $\sum\limits_{i=1}^{m}a_if(a_i)=0$. Левая часть равенства — это $\mathbb{Q}$-линейная комбинация элементов из E. Применяя f, получим $\sum\limits_{i=1}^{m}\big(f(a_i)\big)^2=0$. Так как $f(a_i)$ — рациональные числа, то отсюда вытекает их равенство нулю. Поскольку a_i порождают E, функция f должна быть нулевой. $\square$

Перед тем как сформулировать критерий разрешимости, приведем тождество, аналогичное тождеству из § 3 гл. 1. Пусть $x,y,z\in\operatorname{End}V$. Тогда

$$\operatorname{tr}([x,y]z)=\operatorname{tr}(x[y,z]).$$

Для его проверки следует раскрыть коммутаторы и воспользоваться свойством следа $\operatorname{tr}\big(y(xz)\big)=\operatorname{tr}\big((xz)y\big)$.

Теорема 9.1 (критерий Картана). *Пусть L — подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Предположим, что $\operatorname{tr}(xy)=0$ при всех $x\in[L,L]$, $y\in L$. Тогда L разрешима.*

Доказательство. Достаточно проверить, что алгебра $[L,L]$ нильпотентна или, что равносильно, все $x\in[L,L]$ — ассоциативно нильпотентные эндоморфизмы (см. теорему Энгеля).

Рассмотрим доказанную лемму для случая, когда $A=[L,L]$, $B=L$. Тогда $M=\{x\in\mathrm{gl}(V),\ [x,L]\subset[L,L]\}$. Ясно, что $L\subset M$.

Если теперь $[x,y]$ – один из образующих в $[L,L]$, а $z\in M$, то вышеприведенное тождество дает

$$\operatorname{tr}([x,y]z)=\operatorname{tr}(x[y,z])=\operatorname{tr}([y,z]x)=0,$$

т. к. $[y,z]\in[L,L]$ по определению множества M. Из полученного соотношения имеем нильпотентность элемента $[x,y]$. $\square$

Следствие 9.1. Пусть L — алгебра Ли такая, что $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y) = 0$ для всех $x \in [L, L]$, $y \in L$. Тогда алгебра L разрешима.

Доказательство. В силу сформулированного равенства имеем разрешимость алгебры $\operatorname{ad} L$. Поскольку $\operatorname{Ker} \operatorname{ad} = Z(L)$ — разрешимый идеал в L, то и L разрешима (см. предложение 1.1). $\square$

§ 10. Полупростые алгебры Ли

Пусть L — произвольная алгебра Ли. Если $x, y \in L$, то положим $K(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y)$. Тогда K — симметричная билинейная форма на L, которая называется формой Киллинга. Форма K также инварианта в том смысле, что $K([x, y], z) = K(x, [y, z])$. Это следует из тождества предыдущего параграфа: $\operatorname{tr}([a, b]c) = \operatorname{tr}(a[b, c])$, где a, b, c — эндоморфизмы конечномерного векторного пространства.

Теорема 10.1. *Пусть L — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда L полупроста, если и только если ее форма Киллинга невырождена.*

Доказательство. Предположим вначале, что $\operatorname{Rad} L = 0$. Пусть $S = L^{\perp} = \{x \in L,\ K(x, y) = 0,\ y \in L\}$. По определению $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y) = 0$ для любых $x \in S$, $y \in L$. В частности, $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y) = 0$, когда $x \in S$, $y \in [S, S]$. По критерию разрешимости Картана, алгебра $\operatorname{ad}_L S$ разрешима. Но ядро отображения $\operatorname{ad} : S \to \operatorname{ad}_L S$ равно $Z(L) \cap S$, т. е. является разрешимым идеалом в S. Поэтому S — разрешимая алгебра. Так как S — идеал в L, то $S \subset \operatorname{Rad} L = 0$, т. е. форма Киллинга алгебры L невырождена.

Обратно, пусть $S = 0$. Чтобы доказать полупростоту алгебры L, достаточно установить, что любой абелев идеал I из L содержится в S.

Предположим, что $x \in I$, $y \in L$. Тогда композиция $\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y$ задает отображение $L \to L \to I$ и $(\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y)^2$ отображает L в $[I, I] = 0$. Это означает, что эндоморфизм $\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y$ нильпотентен. Отсюда следует $0 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\ \operatorname{ad} y) = K(x, y)$, т. е. $I \subset S = 0$. $\square$

Используя доказанную теорему и теорему 3.1, получим утверждение, аналогичное теореме 3.4 для ассоциативных алгебр.

Теорема 10.2. *Пусть L — полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда L есть прямая сумма идеалов, каждый из которых является простой алгеброй Ли.*

В доказательстве теоремы 3.1 используется ограничение билинейной формы на идеале алгебры B. Поэтому возникает естественный вопрос: как отличается значение формы Киллинга K_I на идеале I, рассматриваемом как самостоятельная алгебра, и значение формы Киллинга K на алгебре L в ограничении на I? Как показывает приводимая ниже лемма, эти значения совпадают.

Лемма 10.1. *Пусть I — идеал алгебры Ли L. Если K_I — форма Киллинга на идеале I (рассматриваемом как алгебра Ли), а K — форма Киллинга на алгебре L, то $K_I(x, y) = K(x, y)$, когда $x, y \in I$.*

Доказательство. Во-первых, вспомним простой факт из линейной алгебры: если W — подпространство конечномерного векторного пространства V, а φ — эндоморфизм, отображающий V в W, то $\operatorname{tr}\varphi = \operatorname{tr}\varphi|_W$. (Чтобы убедиться в этом, дополним базис пространства W до базиса в V и посмотрим на получившуюся матрицу оператора φ.) Если теперь $x, y \in I$, то $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ — эндоморфизм пространства L, отображающий L в I. Поэтому его след $K(x, y) = \operatorname{tr}\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ совпадает со следом эндоморфизма $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)|_I = (\operatorname{ad}_I x)(\operatorname{ad}_I y)$. Так как $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_I x)(\operatorname{ad}_I y) = K_I(x, y)$, то получаем утверждение леммы. $\square$

В § 3 было показано, что радикал конечномерной ассоциативной алгебры A над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль равен $A^\perp = \{x \in A, t(x, y) = 0, y \in A\}$, где $t(x, y) = \operatorname{tr} L_x L_y$. Для алгебры Ли ее радикал также можно описать в терминах функции следа.

Теорема 10.3. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль, а $R = \operatorname{Rad} L$ — ее радикал. Тогда $R = [L, L]^\perp = \{x \in L,\ K(x, [L, L]) = 0\}$.*

Доказательство. Если a — произвольный элемент из L то $A = ka + R$ — подалгебра Ли в L. Очевидно, A — разрешимая алгебра, а поэтому и $\operatorname{ad}_L A$ — разрешимая алгебра линейных операторов, действующих в пространстве L. В силу теоремы Ли существует базис в L, в котором все операторы из $\operatorname{ad}_L A$ одновременно приводятся к треугольному виду. Значит, для любого $b \in R$ матрица оператора $[\operatorname{ad} a, \operatorname{ad} b]$ имеет строго треугольный вид, т. е. для любого элемента x из $[L, R]$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Более того, строго треугольный вид имеет и матрица оператора $\operatorname{ad} a[\operatorname{ad} c, \operatorname{ad} b]$, где $b \in R$, $c \in L$. Таким образом, $K(a, [c, b]) = 0$, а значит $K([a, c], b) = 0$ для $a, c \in L$, $b \in R$. Следовательно, $R \subset [L, L]^\perp$.

Докажем обратное включение. Обозначим $I = [L, L]^{\perp}$. По определению ортогонального дополнения имеем $K(I, [L, L]) = 0$. Тем более, $K(I, [I, I]) = 0$. Так как значение формы Киллинга K_I на идеале I совпадает с его значением на всей алгебре (см. лемму 10.1), то $K_I(I, [I, I]) = 0$, т. е. $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_I\, I[\mathrm{ad}_I\, I, \mathrm{ad}_I\, I]) = 0$. По критерию разрешимости Картана получаем, что алгебра линейных операторов $\mathrm{ad}_I\, I$ разрешима, а тогда разрешима и алгебра I. Так как I — кроме того, еще и идеал, то $I = [L, L]^{\perp} \subset R = \mathrm{Rad}\, L$. Два полученных включения доказывают указанное в теореме равенство. $\square$

Литература

1. Хамфрис Дж. *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* – М.: МЦМНО, 2003. – 216 с.
2. Капланский И. *Алгебры Ли и локально компактные группы.* – М.: Мир, 1974. – 148 с.
3. Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* – М.: Мир, 1964. – 355 с.
4. Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.* – М.: Мир, 1986. – 541 с.
5. Херстейн И. *Некоммутативные кольца.* – М.: Мир, 1972. – 191 с.
6. Чеботарев Н.Г. *Введение в теорию алгебр.* – М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1949. – 88 с.

Содержание