КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Т.В.КРОПОТОВА, В.Г.ПОДОЛЬСКИЙ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО:

примеры и задачи

ЧАСТЬ 1

Казань – 2004

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета Казанского государственного университета.

УДК

Т.В.Кропотова, В.Г.Подольский.
Интегрирование функций одного переменного: примеры и задачи. Ч.1.
Неопределенный интеграл: основные понятия, свойства, методы интегрирования.

Пособие представляет собой руководство по решению задач раздела «Интегрирование функций одного переменного» математического анализа. Часть 1 посвящена неопределенным интегралам (основные понятия, свойства, методы интегрирования), содержит необходимые теоретические сведения и решения типовых задач. Приводятся упражнения и задачи для самостоятельной работы, способствующие выработке устойчивых навыков вычисления интегралов. Пособие предназначено для студентов физико-математических специальностей университетов.

Предисловие

Данное пособие написано на основе многолетнего опыта ведения практических занятий на физическом факультете Казанского государственного университета и представляет собой руководство по решению задач раздела «Интегрирование функций одного переменного» математического анализа. Цель пособия — не только помочь студентам в приобретении практических навыков вычисления интегралов, но и способствовать развитию у студентов культуры математических вычислений в целом.

Главное внимание в книге уделено подбору и решению типовых задач указанного раздела (от самых простых до сложных), поэтому основные теоретические сведения и формулы приведены лишь в объёме, необходимом для их осмысленного практического использования. При решении задач авторы стремились не только научить читателя «техническим приёмам» интегрирования, но и «склонить» к размышлению над «тонкими местами» вычислений, к поиску оптимального способа решения, для чего некоторые задачи решались несколькими способами.

Пособие содержит задачи для самостоятельной работы в объёме, необходимом для успешного овладения навыками элементарного интегрирования. Все задачи снабжены ответами для самоконтроля.

Книга разделена на три части. Предлагаемая ниже Часть 1 посвящена теме «Неопределенный интеграл (основные определения, понятия, методы интегрирования)».

При написании первых четырех параграфов было использовано учебное пособие [1].

Рассмотренные в пятом параграфе задачи отобраны из сборника задач [2], который является программным задачником по математическому анализу для физического факультета КГУ (нумерация сохранена).

Задачи для самостоятельной работы и ответы к ним, приведенные в параграфах шесть и семь соответственно, взяты из учебного пособия [3] (нумерация изменена).

Вторая часть пособия также будет посвящена неопределенным интегралам (интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических, трансцендентных функций). В третьей части будут рассматриваться определенные интегралы вместе с приложениями.

Авторы стремились излагать материал на уровне, доступном широкому кругу студентов.

Объём и содержание пособия соответствуют программе курса «Математический анализ» для физических специальностей университетов. Книга может оказаться полезной также при самостоятельном изучении математического анализа.

1. Основные определения и понятия

Определение 1. *Пусть функция f определена на некотором конечном или бесконечном промежутке Δ числовой оси R, т.е. на интервале, полуинтервале или отрезке.*

Функция F, определенная на этом же промежутке, называется первообразной функцией (или просто первообразной) функции f на Δ, если

1) функция F непрерывна на Δ;

2) во всех внутренних точках x промежутка Δ функция F имеет производную и $F'(x) = f(x)$.

Иногда вместо «первообразная данной функции» говорят «первообразная для данной функции».

Если функция F является какой-либо первообразной функции f на промежутке Δ, то всякая функция вида $F(x) + C$ также является первообразной функцией f, и, наоборот, всякая первообразная функции f представима в виде $F(x) + C$.

Определение 2. *Совокупность всех первообразных функции f, определенных на некотором промежутке Δ, называется неопределенным интегралом от функции f на этом промежутке и обозначается через*

$$\int f(x)dx.$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

Таким образом, согласно определению, $\int f(x)dx = \{F(x)+C\}$, где фигурные скобки являются символом множества. Однако, в целях сокращения записи фигурные скобки, как правило, не ставят, и пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Иногда тот же символ $\int f(x)dx$ используется для обозначения не всей совокупности первообразных, а какой-то одной первообразной функции f. Однако, *всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.*

2. Основные свойства неопределенного интеграла

(1) Пусть функция F непрерывна на промежутке Δ и дифференцируема в его внутренних точках, тогда

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

или, что то же,

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

(2) Пусть функция f имеет первообразную на промежутке Δ; тогда для любой внутренней точки промежутка Δ имеет место равенство

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

(В данной формуле под символом $\int f(x)dx$ понимается произвольная первообразная F функции f).

(3) Если функции f и g имеют первообразные на Δ, то и функция $f+g$ также имеет первообразную на Δ, причем

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций и означает, что сумма каких-либо первообразных для функций f и g является первообразной для функции $f + g$, и, наоборот, всякая первообразная для функции $f + g$ является суммой некоторых первообразных для функций f и g.

Свойство 3 называется *аддитивностью интеграла относительно функций.*

(4) Если функция f имеет первообразную на промежутке Δ и λ — число, то функция λf также имеет на Δ первообразную, причем при $\lambda \neq 0$ справедливо равенство:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

3. Табличные интегралы

Заметим, что операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции, называемая *интегрированием*, является действием, обратным дифференцированию. Поэтому всякая формула вида $F'(x) = f(x)$ может быть обращена, т.е. записана в виде интегральной формулы:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

На основании этого замечания составляется таблица простейших интегралов, представленная ниже.

ТАБЛИЦА ПРОСТЕЙШИХ ИНТЕГРАЛОВ

I. $\displaystyle\int dx = x + C.$

II. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$

III. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0).$

IV. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & +C, \\ -\operatorname{arcctg} x & +C. \end{cases}$

V. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x & +C, \\ -\arccos x & +C. \end{cases}$

VI. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1),$

$\displaystyle\int e^x dx = e^x + C.$

VII. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

VIII. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

IX. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

X. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XI. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$ XII. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$ XIV. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

Далее приведем еще восемь интегралов, которые считаются табличными и находятся с помощью использования простейших методов интегрирования и интегралов I–XIV, указанных в таблице выше.

XV. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad (a \neq 0),$

$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

XVI. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$

XVII. $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a^2| + C.$

XVIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

XIX. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

XX. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$

XXI. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

XXII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Если первообразная некоторой функции f является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл* $\int f(x)dx$ *выражается через элементарные функции* или *что этот интеграл вычисляется.*

4. Основные методы интегрирования

(1) **Метод разложения.** Если $f(x) = g(x) + h(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx + \int h(x)dx.$$

(2) **Метод введения нового аргумента.** Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

(3) **Метод подстановки.** Если $f(x)$ непрерывна, то, полагая

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ функция, получим

$$\int f(x)dx = \int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)dt.$$

(4) **Метод интегрирования по частям.** Если u и v — некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x, то

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Отметим, что методы 2 и 3 являются разновидностями одного общего метода — **метода замены переменной**.

5. Решение задач

5.1. **Использование таблицы простейших интегралов и метода разложения.**

При решении задач 1628–1653 предполагается использование только таблицы простейших интегралов и метода разложения.

1628. $\int (3 - x^2)^3 dx$.

Распишем куб разности в подынтегральном выражении:

$$(3 - x^2)^3 = 27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6.$$

Далее используем свойства интегралов 3,4 и метод разложения. Таким образом, получаем:

$$\int (3 - x^2)^3 dx = 27 \int dx - 27 \int x^2 dx + 9 \int x^4 dx - \int x^6 dx =$$

(используем табличные интегралы I, II)

$$= 27x - 27\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

1631. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.
Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1.$$

Используя табличные интегралы I, II и III, получим:

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

1636. $\int (1 - \frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$.
При вычислении этого интеграла используются свойства степеней и табличный интеграл II:

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int \left(1 - x^{-2}\right) x^{\frac{3}{4}} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx - \int x^{-\frac{5}{4}} dx$$

$$= \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}} + C.$$

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}$.
Подкоренное выражение представляет собой полный квадрат суммы: $x^4 + x^{-4} + 2 = (x^2)^2 + (x^{-2})^2 + 2x^2x^{-2} = (x^2 + x^{-2})^2$. Имеем:

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5}\right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

1639. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$.
Заметим, что подынтегральная функция есть неправильная дробь.

Выделим целую часть, — для этого в числителе дроби достаточно прибавить и вычесть единицу: $x^2 = x^2 \underbrace{+1-1}_{0} = (x^2+1)-1$.

Таким образом, получим:

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}$.

Преобразуем радикал в знаменателе:

$$\sqrt{x^4-1} = \sqrt{(x^2+1)(x^2-1)} = \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}.$$

Получим:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \ln|x+\sqrt{x^2+1}| +$$

$$+ C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

1644. $\int (2^x+3^x)^2\, dx$.

В этой задаче используется табличный интеграл VI:

$$\int (2^x+3^x)^2\, dx = \int (4^x + 2\cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

1650. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Используя тригонометрические соотношения и табличные интегралы I и X, получим:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - x + C.$$

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x dx$.

При вычислении этого интеграла используются соотношения, связывающие гиперболические функции (см. Приложение), и табличные интегралы I, XIII.

$$\int \mathrm{cth}^2 x dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} dx = \int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} + \int dx =$$

$$= -\mathrm{cth} x + x + C.$$

5.2. **Использование метода введения нового аргумента.**

В задаче под номером 1654 предлагается доказательство формулы, очень часто используемой при вычислении интегралов.

1654. Доказать, что если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

$$\text{то} \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

Для доказательства используем метод введения нового аргумента. Положим $ax+b=u$. Тогда $x=\frac{u-b}{a}$, $dx=\frac{du}{a}$. Получим:

$$\int f(ax+b)dx = \int f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u) + C =$$

$$= \frac{1}{a}f(ax+b) + C.$$

Таким образом, мы доказали, что при замене аргумента x у подынтегральной функции на линейное выражение $(ax+b)$ интеграл «реагирует» появлением множителя $\frac{1}{a}$.

1656. $\int (2x-3)^{10} dx$.

Этот интеграл можно найти и не производя замены переменной. Для этого достаточно разложить выражение $(2x-3)^{10}$ по формуле бинома Ньютона и применить метод разложения. Однако такое решение связано с большим количеством вычислений. При помощи замены переменой можно сразу свести данный интеграл к табличному.

Положим $2x-3=u$, тогда $x=\frac{u+3}{2}$; $dx=\frac{du}{2}$. Получим:

$$\int (2x-3)^{10}dx = \int u^{10}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{10}du = \frac{1}{2}\frac{u^{11}}{11}+C =$$

$$= \frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C.$$

Отметим, что еще проще было бы воспользоваться формулой задачи 1654:

$$\int x^{10}dx = \frac{x^{11}}{11}+C;$$

$$\int (2x-3)^{10}dx = \Big[ax+b=2x-3,\ a=2\Big] = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{11}}{11}+C.$$

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

При вычислении этого интеграла также удобно использовать метод введения нового аргумента, положив $5x-2=u$. Однако мы не будем вводить u явно, а используем *прием занесения нового аргумента под знак дифференциала*. Итак:

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x)}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d(5x-2)}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-\frac{5}{2}}d(5x-2) =$$

(получили интеграл от степенной функции, причем подынтегральное выражение полностью выражается через разность $(5x-2)$, играющую роль нового аргумента)

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+C = -\frac{2}{15}\frac{1}{(5x-2)^{\frac{3}{2}}}+C.$$

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

Преобразуем интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\frac{3}{2}x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = (\text{используем табличный интеграл XV})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}x}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}x} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}x}{\sqrt{2} - \sqrt{3}x} \right| + C.$$

Замечание. Если на данном этапе занесение нового аргумента под знак дифференциала вызывает у читателя определенные трудности, то с использованием этого приёма не следует торопиться. Вводите новый аргумент u и последовательно осуществляйте замену переменного под знаком интеграла, описывая все шаги с нужной для Вас степенью детализации. После решения определенного количества задач Вы сами ощутите потребность отказаться от излишних подробностей.

1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

Воспользуемся формулой $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Получим:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\mathrm{ctg}\frac{x}{2} + C.$$

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Вычислим интеграл двумя способами.

Используя формулы приведения и двойного угла, преобразуем знаменатель:

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^2 \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} = 2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \left[\frac{dx}{2} = d\left(\frac{x}{2}\right) = d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= (\text{используем табличный интеграл X}) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Теперь этот же интеграл вычислим, используя другие тригонометрические соотношения — основное тригонометрическое тождество и формулу для синуса двойного угла. Итак,

$$1 + \sin x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{1+\sin x} = \int\frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)^2} =$$

$$\left[\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2\,\frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2\,d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = 2\,d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)\right]$$

$$= 2\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)^2} = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1} + C.$$

Сравним оба полученных ответа. На первый взгляд, они различны. Однако это не так. Напомним, что неопределенный интеграл есть множество первообразных функций, и покажем, что множества

$$\left\{-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1} + C\right\} \text{ и } \left\{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C\right\}$$

совпадают. Действительно:

$$-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1} + 1 = -\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}} + 1 = \frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

При решении данной задачи мы убедились в следующем: используя в процессе интегрирования различные способы, можно получить не совпадающие по форме ответы (и каждый из них — правильный). Поэтому, если Вы уверены в правильности своего решения, но Ваш ответ не совпадает с ответом, приведенном в задачнике, — не отчаивайтесь. Справедливость своего результата можно легко проверить. Для этого достаточно продифференцировать полученную Вами совокупность функций. Если производная совпадает с подынтегральной функцией, значит Ваш ответ является верным.

Задачи 1674 — 1720 решаются с помощью метода введения нового аргумента (в большинстве из них используется прием занесения нового аргумента под знак дифференциала).

1674. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Занесем новый аргумент $1-x^2$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

1679. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$.

Очевидно, что роль нового аргумента играет x^4. Имеем:

$$\int \frac{x^3dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-2} = \left[x^4 = u\right] = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2-2} =$$

(используем табличный интеграл XV)

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$$

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.
Вынесем x из-под знака корня:

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } \ x = 0; \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$|x| = x\operatorname{sgn} x; \quad \frac{dx}{x|x|} = \frac{1}{\operatorname{sgn} x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{\operatorname{sgn} x}d\left(\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Кроме того,

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{|x|^2}}.$$

Таким образом, получим:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{dx}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{|x|^2}}} =$$

$$= -\arcsin\left(\frac{1}{|x|}\right) + C.$$

Однако, можно поступить и по-другому. Сделаем замену переменной:

$$\sqrt{x^2-1} = u; \quad x^2-1 = u^2; \quad x^2 = u^2+1; \quad xdx = udu.$$

Имеем:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{udu}{(u^2+1)u} =$$

$$= \int\frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C.$$

Замечание для сомневающихся в справедливости обоих полученных результатов: используя соотношения между обратными тригонометрическими функциями, можно свести первый ответ ко второму. Однако ещё раз подчеркнем, что проверку правильности своего ответа необходимо делать с помощью дифференцирования.

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Область определения подынтегральной функции задается неравенством $x(1-x) > 0$, т.е. $0 < x < 1$. Следовательно,

$$\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x}\,\sqrt{1-x}.$$

Используя то, что $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,d(\sqrt{x})$, а $x = (\sqrt{x})^2$, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

1700(a). $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$.

Заметим, что

$$d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) = (2a^2\sin x\cos x - 2b^2\cos x\sin x)dx =$$

$$= 2(a^2-b^2)\sin x\cos x dx$$

и, таким образом,

$$\sin x\cos x\,dx = \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{2(a^2-b^2)}.$$

Имеем:

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}dx = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} =$$

$$= \left[a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x = u\right] = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{du}{2\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \int d(\sqrt{u}) = \frac{\sqrt{u}}{a^2 - b^2} + C = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C,$$

$$\text{если } a^2 \neq b^2.$$

Замечание. При $a^2 = b^2$ знаменатель в подынтегральном выражении обращается в константу:

$$\sqrt{a^2 \sin^2 x + a^2 \cos^2 x} = \sqrt{a^2(\sin^2 x + \cos^2 x)} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Таким образом, при $a^2 = b^2$ имеем:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + a^2 \cos^2 x}} dx = \frac{1}{|a|} \int \sin x \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{|a|} \int \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2|a|} \sin^2 x + C.$$

Исходный интеграл можно было бы вычислить, выбрав в качестве нового аргумента синус двойного угла:

$$\sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} d(\cos 2x).$$

Учитывая, что $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, а $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, получим:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{d(\cos 2x)}{\sqrt{\frac{a^2}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{b^2}{2}(1 + \cos 2x)}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{d(\cos 2x)}{\sqrt{(a^2 + b^2) + (b^2 - a^2)\cos 2x}} =$$

(пользуемся результатом задачи 1654)

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{b^2 - a^2} \sqrt{(a^2 + b^2) + (b^2 - a^2)\cos 2x} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C.$$

1700(б). $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

На роль нового аргумента «претендует» $\sqrt{2}\cos x$. Действительно:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = (\sqrt{2}\cos x)^2 - 1,$$

$$\sin x dx = -d(\cos x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}d(\sqrt{2}\cos x).$$

Имеем:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\cos x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\cos x)^2 - 1}} =$$

(используем табличный интеграл XVIII)

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2\cos^2 x - 1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}\right| + C.$$

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

И вновь предлагаем Вам два способа вычисления интеграла. Перейдя в знаменателе к половинному углу, получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{d(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2})}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

Вычисляя интеграл вторым способом, умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sin x$:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right| + C.$$

Используя тригонометрические соотношения и свойства логарифма, покажем, что второй ответ преобразуется в первый:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| = \ln\sqrt{\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|^2} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

1711. $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx.$

После некоторого раздумья и, возможно, нескольких неудачных попыток интегрирования, «рискнем» вычислить

$$d\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right) = \left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Таким образом,

$$\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx = \int \ln^{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \int \ln^{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})\, d\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right) = \frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

1713. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$

Вынесем x^2 в числителе и знаменателе подынтегральной функции:

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx.$$

Заметив, что

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

$$x^2+\frac{1}{x^2} = x^2+\frac{1}{x^2}\underbrace{+2-2}_{0} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

получим:

$$\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} = \int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \left[\left(x+\frac{1}{x}\right)=u\right] = \int\frac{du}{u^2-2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right| + C.$$

1718. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Данный интеграл можно вычислить, выбрав в качестве нового аргумента $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; $\cos 2x$; $\mathrm{tg}^2 x$; $\mathrm{ctg}^2 x$. Рассмотрим лишь два способа вычисления .

Проще всего, на наш взгляд, выразить подынтегральное выражение через $\mathrm{tg}^2 x$ (или $\mathrm{ctg}^2 x$) и использовать табличный интеграл IV. Действительно:

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\sin x \cos x dx}{\cos^4 x(1+\mathrm{tg}^4 x)} = \int \frac{\mathrm{tg}\, x}{(1+\mathrm{tg}^4 x)} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{tg}\, x\, d(\mathrm{tg}\, x)}{1+\mathrm{tg}^4 x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\mathrm{tg}^2 x)}{1+(\mathrm{tg}^2 x)^2} = \frac{1}{2} \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2 x) + C.$$

Вычисляя интеграл вторым способом, выберем в качестве нового аргумента $\cos 2x$. В числителе получим:

$$\sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} d(\cos 2x).$$

В знаменателе используем формулы понижения степени для тригонометрических функций:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

$$\text{Тогда} \quad \sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2, \ \cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2,$$

$$\text{и} \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1+\cos^2 2x}{2}.$$

Можно получить этот результат и по-другому:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{1+\cos^2 2x}{2}.$$

Таким образом:

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(\cos 2x)}{\frac{1}{2}(1+\cos^2 2x)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos 2x)}{1+(\cos 2x)^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\cos 2x) + C.$$

1720. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Занесем (x^2+1) под знак дифференциала:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}} =$$

$$\left[x^2+1 = u, \text{ причем } u > 0\right] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u+u^{\frac{3}{2}}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}} = \int \frac{d(\sqrt{u})}{\sqrt{1+\sqrt{u}}} = \left[\sqrt{u} = z\right] =$$

$$= 2\sqrt{1+z} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{u}} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

5.3. **Совместное использование методов введения нового аргумента и разложения.**

При решении задач 1721–1765 предполагается использование методов введения нового аргумента и разложения.

1722. $\int \frac{1+x}{1-x}dx$.

Для использования метода разложения выделим целую часть дроби, стоящей в подынтегральном выражении. Преобразуем числитель: $1 + x = 2 + x - 1 = 2 - (1 - x)$. Таким образом, получим:

$$\int \frac{1+x}{1-x}dx = \int \frac{2-(1-x)}{1-x}dx = \int \frac{2}{1-x}dx - \int dx =$$

$$= -2\ln|1-x| - x + C.$$

1724. $\int \frac{x^3}{3+x}dx$.

Выделим целую часть дроби:

$$\int \frac{x^3}{3+x}dx = \int \frac{(x^3+27)-27}{x+3}dx = \int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}dx -$$

$$-27\int \frac{dx}{x+3} = \int x^2dx - 3\int xdx + 9\int dx - 27\int \frac{d(x+3)}{x+3} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C.$$

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$.

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}dx = \int \frac{((x-1)+1)^2}{(x-1)^{100}}dx =$$

$$= \int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^{100}}dx = \int (x-1)^{-98}dx +$$

$$+2\int (x-1)^{-99}dx + \int (x-1)^{-100}dx =$$

$$= -\frac{1}{97(x-1)^{97}} - \frac{1}{49(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C.$$

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Умножив числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ (сопряженное знаменателю), получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\,dx = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx$.

Введем новый аргумент $u = x^2+1$. При этом

$$x^3dx = \frac{1}{2}x^2d(x^2) = \frac{1}{2}((x^2+1)-1)\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}(u-1)du.$$

Получим:

$$\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int (u-1)\,u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{4}{3}}du - \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du =$$

$$= \frac{3}{14}\,u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}\,u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{14}(x^2+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C.$$

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

Распишем единицу в числителе: $1 = \frac{1}{5}((x^2+3)-(x^2-2))$. Получим:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{(x^2+3)-(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2+3)}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x^2-2} - \int \frac{dx}{x^2+3}\right) = \frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| -$$

$$-\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

1738. $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

Перейдем к новому аргументу $u = x^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+3x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3u+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+1)(u+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{(u+2)-(u+1)}{(u+1)(u+2)}du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u+2} = \frac{1}{2}\left(\ln|u+1| - \ln|u+2|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C.$$

1742. $\int \cos^2 x\,dx$.

Используя формулу понижения степени для косинуса, получим:

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

1746. $\int \sin(2x - \frac{\pi}{6})\cos(3x + \frac{\pi}{4})dx.$
Используя тригонометрические соотношения, получим:

$$\int \sin(2x - \frac{\pi}{6})\cos(3x + \frac{\pi}{4})dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\sin\left(5x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(-x - \frac{5\pi}{12}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin\left(5x + \frac{\pi}{12}\right) dx - \frac{1}{2}\int \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{10}\cos\left(5x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + C.$$

1749. $\int \sin^4 x\, dx.$
Используем формулы понижения степени для синуса и косинуса:

$$\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

1752. $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx.$
Заменим тангенс на отношение синуса и косинуса:

$$\int \mathrm{tg}^3 x\, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x(\sin x dx)}{\cos^3 x} =$$

$$= -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} d(\cos x) = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C.$$

Можно поступить иначе:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg} x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \operatorname{tg} x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\, dx = \int \operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

И еще раз убеждаемся в том, что при использовании разных способов интегрирования можно получить различные *по форме* результаты. В данном случае в совпадении первого и второго ответов можно убедиться, используя формулу $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Действительно:

$$\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C = \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2 x) + \ln|\cos x| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + \left(\frac{1}{2} + C\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + \tilde{C}.$$

1753. $\int \sin^2 3x\, \sin^3 2x\, dx$.

Используя тригонометрические соотношения, получим:

$$\int \sin^2 3x\, \sin^3 2x\, dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2}\, \sin 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sin 2x - \sin 2x\cos 6x - \sin 2x \cos 4x + \sin 2x \cos 4x \cos 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int \sin 2x dx - \frac{1}{2}\Big(\int \sin 8x dx + \int \sin(-4x) dx\Big) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\Big(\int \sin 6x dx + \int \sin(-2x) dx\Big) + \frac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 2x)\sin 2x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int \Big(\sin 12x + \sin(-8x)\Big) dx + \frac{1}{4}\int \sin 4x dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-\frac{3}{4}\cos 2x + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right)\cos 4x + \frac{1}{12}\cos 6x + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right)\cos 8x - \frac{1}{48}\cos 12x\right\} + C = -\frac{3}{16}\cos 2x - \frac{3}{64}\cos 4x +$$

$$+ \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{3}{128}\cos 8x - \frac{1}{192}\cos 12x + C.$$

1756. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

Используя основное тригонометрическое тождество, распишем единицу в числителе: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. Получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx =$$

$$= \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} +$$

$$+ \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

1760. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx$.

Возведем в квадрат сумму в числителе дроби:

$$\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1+2e^x+e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}} dx +$$

$$+2\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int dx + 2\int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} dx = x + 2\operatorname{arctg} e^x + C.$$

1764. $\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x \, dx$.

Используя формулу для произведения гиперболических косинусов (см. Приложение), получим:

$$\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x \, dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 4x + \operatorname{ch} 2x) dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 4x \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2x \, dx = \frac{1}{8}\operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + C.$$

1770. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx.$

Преобразуя подынтегральное выражение, введем новый аргумент:

$$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx=\int x^3(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}x^2dx=\frac{1}{3}\int x^3(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}d(x^3)=$$

$$=-\frac{1}{15}\int x^3(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}d(2-5x^3)=\left[2-5x^3=u,\ x^3=\frac{2-u}{5}\right]=$$

$$=-\frac{1}{15}\int\frac{2-u}{5}u^{\frac{2}{3}}du=-\frac{1}{75}\int(2-u)u^{\frac{2}{3}}du=-\frac{2}{75}\int u^{\frac{2}{3}}du+$$

$$+\frac{1}{75}\int u^{\frac{5}{3}}du=-\frac{2}{75}\cdot\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{75}\cdot\frac{3}{8}u^{\frac{8}{3}}+C=-\frac{2}{125}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+$$

$$+\frac{1}{200}(2-5x^3)^{\frac{8}{3}}+C=-\frac{(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}}{1000}\big(16-5(2-5x^3)\big)+C=$$

$$=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C.$$

1773. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

Выразим подынтегральное выражение через $\operatorname{tg} x$:

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int\operatorname{tg}^2x\big(1+\operatorname{tg}^2x\big)d(\operatorname{tg}x)=\int\operatorname{tg}^2x\,d(\operatorname{tg}x)+\int\operatorname{tg}^4x\,d(\operatorname{tg}x)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5x}{5}+C.$$

1777. $\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}.$

Вспомнив, что $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,d(\sqrt{x})$, введем новый аргумент $u=\sqrt{x}$:

$$\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}=2\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{1+x}d(\sqrt{x})=2\int\frac{\operatorname{arctg}u}{1+u^2}du=$$

$$=2\int\operatorname{arctg}u\,d(\operatorname{arctg}u)=\operatorname{arctg}^2u+C=\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}+C.$$

5.4. **Использование тригонометрических подстановок при интегрировании.**

Задачи 1778–1785 решаются с помощью использования тригонометрических подстановок $x = a\sin t$, $x = a\cos t$, $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\sin^2 t$ (параметры положительны) и т.п.

Указанные подстановки удобны при вычислении некоторых типов интегралов, содержащих радикалы (подробнее см. п. 5.6). Выбирать конкретную подстановку $x = \varphi(t)$ необходимо так, чтобы

- после замены переменной в подынтегральном выражении «исчез» радикал;
- равенство $x = \varphi(t)$ позволило «заполнить» область определения подынтегральной функции;
- соответствие между x и t было взаимно-однозначным.

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Область определения подынтегральной функции: $|x| < 1$. Положим $x = \sin t$ и рассмотрим только $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. В этом случае x «пробежит» по всей указанной области определения, причем соответствие между x и t будет взаимно-однозначным. Имеем:

$$x = \sin t;\ dx = \cos t dt;\ 1-x^2 = 1-\sin^2 t = \cos^2 t;\ (1-x^2)^{\frac{3}{2}} = |\cos t|^3.$$

В рассматриваемой области изменения t: $\cos t > 0$, $|\cos t| = \cos t$. Итак:

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\sin t}{\cos t} + C =$$

$$= \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

1779. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

Забегая вперед, заметим, что проще всего вычислить данный интеграл, используя гиперболические подстановки. Мы продемонстрируем это в п. 5.5, но здесь, в соответствии с заданием, будем использовать тригонометрические подстановки.

Область определения подынтегральной функции задается неравенством $x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{2}$.
Если положить $x = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}$, $t \neq \pi n$, $n \in \mathbf{N}$, то, поскольку $|\sin t| < 1$, x автоматически будет удовлетворять указанной области определения. Действительно:

$$\left\{ |x| = \frac{\sqrt{2}}{|\sin t|},\ |\sin t| < 1 \right\} \Rightarrow |x| > \sqrt{2}.$$

Причем, для того чтобы соответствие между x и t было взаимнооднозначным, достаточно рассматривать $t \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2})$. Итак:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}, \quad dx = -\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t}dt; \quad x^2 - 2 = \frac{2}{\sin^2 t} - 2 =$$

$$= \frac{2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t} = \frac{2\cos^2 t}{\sin^2 t}; \quad \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2}\left|\frac{\cos t}{\sin t}\right| = \frac{\sqrt{2}\cos t}{|\sin t|},$$

т.к. в указанной области изменения переменной t косинус t положителен.
Отметим также, что знаки $\sin t$, t и x совпадают, т.е. $\operatorname{sgn}(\sin t) = \operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} x$. Это мы будем использовать ниже. Имеем:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{\frac{2}{\sin^2 t}\left(-\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t}dt\right)}{\frac{\sqrt{2}\cos t}{|\sin t|}} = -2\int \frac{|\sin t|}{\sin^4 t}dt =$$

$$= -2\operatorname{sgn}(\sin t)\int \frac{dt}{\sin^3 t} = -2\operatorname{sgn} t \int \frac{\left(\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}\right)^2}{8\sin^3\frac{t}{2}\cos^3\frac{t}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\operatorname{sgn} t\left(\int \operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\frac{dt}{\cos^2\frac{t}{2}} + 2\int\frac{dt}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} + \int \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn} t\left(\int \operatorname{tg}\frac{t}{2}\, d\Big(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big) + \int\frac{dt}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} - \int \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, d\Big(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\Big)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn} t\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}\right) + C =$$

$$= \operatorname{sgn} t \left(\frac{1}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right) - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| \right) + C =$$

$$= \operatorname{sgn} t \left(\frac{\left(\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} - \ln\left|\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\right| \right) + C =$$

$$= \operatorname{sgn} t \left(\frac{\left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)\left(\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}\right)}{\sin^2 t} - \ln\left|\frac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}\right| \right) + C$$

$$= \operatorname{sgn} t \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \ln\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right| \right) + C = I.$$

Вернемся к x:

$$\operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} x; \quad \sin t = \frac{\sqrt{2}}{x}; \quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-2}}{|x|}; \quad \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{\sqrt{x^2-2}}{2\,|x|}\cdot x^2 = \frac{\sqrt{x^2-2}}{2}\,|x|.$$

Преобразуем аргумент логарифма:

$$1+\cos t = 1 + \frac{\sqrt{x^2-2}}{|x|} = \frac{|x|+\sqrt{x^2-2}}{|x|};$$

$$\frac{1+\cos t}{\sin t} = \frac{|x|+\sqrt{x^2-2}}{|x|\cdot\frac{\sqrt{2}}{x}} = \frac{|x|+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}\,\operatorname{sgn} x} = \frac{x+\operatorname{sgn} x\,\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, исходный интеграл равен:

$$I = \operatorname{sgn} x \left(\frac{\sqrt{x^2-2}}{2}\,|x| + \ln\left|\frac{x+\operatorname{sgn} x\,\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| \right) + C =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-2}}{2} + \underbrace{\operatorname{sgn} x\,\ln\left|\frac{x+\operatorname{sgn} x\,\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|}_{S_2} + C.$$

Выясним, какие значения может принимать S_2.

$$x > \sqrt{2}: \quad S_2 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-2}\right) - \ln\sqrt{2};$$

$$x<-\sqrt{2}:\ \ S_2=-\ln\left|\frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|=-\ln\left|\frac{x^2-(x^2-2)}{\sqrt{2}\,(x+\sqrt{x^2-2})}\right|=$$

$$=-\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{x^2-2}}\right|=-\ln\sqrt{2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|.$$

И, окончательно:

$$I=\frac{x\sqrt{x^2-2}}{2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|\underbrace{-\ln\sqrt{2}+C}_{\tilde{C}}=$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2-2}}{2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+\tilde{C}.$$

1781. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

В данном случае удобно воспользоваться подстановкой

$$x=a\,\mathrm{tg}\,t,\quad t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

При этом:

$$dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t};\quad x^2+a^2=a^2(\mathrm{tg}^2 t+1)=\frac{a^2}{\cos^2 t};\quad |\cos t|=\cos t.$$

Имеем:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\frac{a\,dt}{\cos^2 t}}{\frac{a^3}{\cos^3 t}}=\frac{1}{a^2}\int\cos t dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C=$$

$$=\frac{1}{a^2}\,\mathrm{tg}\,t\cos t+C=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

1782. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$.

Область определения подынтегральной функции:

$$\frac{a+x}{a-x}\geq 0\Rightarrow -a\leq x<a.$$

Очевидно, что любая подстановка вида

$$x = a\sin\alpha t \quad \text{или} \quad x = a\cos\alpha t$$

позволит x «заполнить» указанную область.
Выбирая конкретную подстановку, мы должны максимально упростить подынтегральное выражение. Избавимся от радикала, положив $x = a\cos 2t$. При этом

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{a(1+\cos 2t)}{a(1-\cos 2t)} = \frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t} = \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^2; \ \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \left|\frac{\cos t}{\sin t}\right|.$$

Чтобы «заполнить» всю область определения подынтегральной функции, достаточно рассматривать $t \in (0; \frac{\pi}{2}]$ (напомним, что соответствие между x и t должно быть взаимно-однозначным). В этом случае $|\cos t| = \cos t$; $|\sin t| = \sin t$. Имеем:

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int \frac{\cos t}{\sin t}(-2a\sin 2t)dt = -4a\int \frac{\cos t}{\sin t}\,\sin t\cos t dt =$$

$$= -4a\int \cos^2 t dt = -2a\int(1+\cos 2t)dt = -2a\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$

$$= -2a\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C = -a\arccos\frac{x}{a} -$$

$$-\sqrt{a^2-x^2} + C = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + \tilde{C}.$$

Для получения последнего результата мы воспользовались формулой

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}.$$

1783. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx.$
В области определения подынтегральной функции:

$$\frac{x}{2a-x} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 2a.$$

Положим $x = 2a\sin^2 t$, $t \in [0; \frac{\pi}{2})$. Тогда

$$dx = 4a\sin t\cos t dt, \quad \frac{x}{2a-x} = \frac{2a\sin^2 t}{2a(1-\sin^2 t)} = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2.$$

Учитывая, что в рассматриваемой области $\sin t \geq 0$; $\cos t > 0$, получим:

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = \int 2a\sin^2 t\,\frac{\sin t}{\cos t}\,4a\sin t\cos t dt = 8a^2\int \sin^4 t dt =$$

(воспользуемся результатом задачи 1749)

$$= a^2(3t - 2\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t) + C = a^2(3t - 2\sin 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\cos 2t) + C =$$

$$= 3a^2 t + \frac{a^2}{2}\sin 2t(\cos 2t - 4) + C = I.$$

Вернемся к x:

$$x = 2a\sin^2 t,\ t \in [0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{x}{2a}}; \quad t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}.$$

$$x = 2a\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} = a(1-\cos 2t) \Rightarrow \cos 2t = \frac{a-x}{a};$$

$$\sin 2t = \sqrt{1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{x(2a-x)}}{a}.$$

Таким образом:

$$I = 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{x+3a}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C.$$

5.5. **Использование гиперболических подстановок при интегрировании.**

При решении задач 1786–1790 предлагается использование гиперболических подстановок $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $x = a\,\mathrm{ch}\,t$ (параметры положительны) и т.п.

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$.
Гиперболическая подстановка $x = a\operatorname{sh} t$ позволит нам избавиться от радикала. Имеем:

$$x = a\operatorname{sh} t, \quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\operatorname{sh}^2 t)} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = a\operatorname{ch} t,$$
$$dx = a\operatorname{ch} t dt.$$

Для интеграла получим:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \frac{a^2\operatorname{sh}^2 t}{a\operatorname{ch} t}\cdot a\operatorname{ch} t\,dt = a^2\int \operatorname{sh}^2 t dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int(\operatorname{ch} 2t - 1)dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t - t\right) + C.$$

Вернемся к исходной переменной интегрирования. Очевидно, что

$$\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t = 2\cdot\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2}.$$

Осталось выразить t через x. Для этого предварительно решим относительно t уравнение $\operatorname{sh} t = z$:

$$\operatorname{sh} t = z \Rightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = z, \quad \left(e^t\right)^2 - 2z\,e^t - 1 = 0, \quad e^t = z \pm \sqrt{z^2+1}.$$

Поскольку $e^t > 0$, то один корень является посторонним. Следовательно

$$e^t = z + \sqrt{z^2+1} \quad \text{и} \quad t = \ln(z+\sqrt{z^2+1}).$$

Отметим, что таким образом мы получили выражение для обратного гиперболического синуса:

$$\boxed{\operatorname{sh} t = z \Rightarrow t = \ln(z+\sqrt{z^2+1}) = \operatorname{Arsh} z}$$

В нашем случае $\operatorname{sh} t = \frac{x}{a}$, поэтому $t = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln a$. Таким образом,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \tilde{C}.$$

Вернемся теперь к задаче 1779 и продемонстрируем обещанное ранее использование гиперболических подстановок при её решении. Итак,

1779. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

Напомним, что область определения подынтегральной функции: $|x| > \sqrt{2}$.

Для $x > \sqrt{2}$ положим $x = \sqrt{2}\operatorname{ch} t$, $t \in (0; +\infty)$. Тогда

$$dx = \sqrt{2}\operatorname{sh} t dt, \quad x^2 - 2 = 2(\operatorname{ch}^2 t - 1) = 2\operatorname{sh}^2 t,$$

$$\sqrt{x^2-2} = \sqrt{2}|\operatorname{sh} t| = \sqrt{2}\operatorname{sh} t.$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{2\operatorname{ch}^2 t(\sqrt{2}\operatorname{sh} t)dt}{\sqrt{2}\operatorname{sh} t} = 2\int \operatorname{ch}^2 t dt =$$

$$= \int (1 + \operatorname{ch} 2t)dt = t + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t + C = t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + C.$$

Выразим результат через x. Для этого предварительно, как и при решении предыдущей задачи, получим выражение для обратного гиперболического косинуса. Имеем:

$$\operatorname{ch} t = z \Rightarrow \frac{e^t + e^{-t}}{2} = z, \ \left(e^t\right)^2 - 2z\,e^t + 1 = 0, \ e^t = z \pm \sqrt{z^2-1}.$$

Поскольку $z \geq 1$ и $e^t > 0$, то корень со знаком «минус» опять оказывается посторонним. Поэтому

$$e^t = z + \sqrt{z^2-1} \quad \text{и} \quad t = \ln(z + \sqrt{z^2-1}).$$

Таким образом:

$$\boxed{\operatorname{ch} t = z \Rightarrow t = \ln(z + \sqrt{z^2-1}) = \operatorname{Arch} z}$$

В нашем случае

$$t = \ln(x + \sqrt{x^2-2}) - \sqrt{2}, \ \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}.$$

Для интеграла получаем:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln(x+\sqrt{x^2-2}) + \tilde{C}.$$

Сделав аналогичные выкладки для $x < -\sqrt{2}$:

$$x = -\sqrt{2}\operatorname{ch} t, \quad t \in (0; +\infty) \quad \text{и т.д.},$$

получим результат, указанный на с. 34.

1788. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx.$

Найдем область определения подынтегральной функции:

$$\frac{x-a}{x+a} \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x < -a. \end{array}\right.$$

Рассмотрим случай $x \geq a$. Положим $x - a = 2a\operatorname{sh}^2 t$, $t \in [0; +\infty)$. Тогда

$$x + a = 2a\operatorname{sh}^2 t + 2a = 2a(\operatorname{sh}^2 t + 1) = 2a\operatorname{ch}^2 t;$$

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{2a\operatorname{sh}^2 t}{2a\operatorname{ch}^2 t}} = \left|\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right| = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t};\ dx = 4a\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t dt.$$

Получим:

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = 4a\int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t dt = 4a\int \operatorname{sh}^2 t dt =$$

$$= 2a\int(\operatorname{ch} 2t - 1)dt = 2a\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t - t\right) + \tilde{C} = a\operatorname{sh} 2t - 2at + \tilde{C} =$$

$$= 2a\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t - 2at + \tilde{C}.$$

Вернемся к x:

$$\operatorname{sh} t = \sqrt{\frac{x-a}{2a}}; \quad \operatorname{ch} t = \sqrt{\frac{x+a}{2a}}; \quad t = \operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{x-a}{2a}} =$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{x-a}{2a}} + \sqrt{\frac{x-a}{2a}+1}\right) = \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) - \ln\sqrt{2a}.$$

Таким образом, для $x \geq a$:

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}) + C.$$

Рассмотрим теперь случай $x < -a$. Положим $x+a = -2a\operatorname{sh}^2 t$, $t \in (0;+\infty)$. Тогда

$$x-a = -2a\operatorname{sh}^2 t - 2a = -2a(\operatorname{sh}^2 t+1) = -2a\operatorname{ch}^2 t;$$

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{-2a\operatorname{ch}^2 t}{-2a\operatorname{sh}^2 t}} = \left|\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right| = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t};\ dx = -4a\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t dt.$$

Получим:

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = -4a\int \operatorname{ch}^2 t dt = -2a\int(\operatorname{ch} 2t+1)dt =$$

$$= -2a\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t + t\right) + \tilde{C} = -2a\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t - 2at + \tilde{C}.$$

Вернемся к x:

$$\operatorname{sh} t = \sqrt{\frac{x+a}{-2a}};\quad \operatorname{ch} t = \sqrt{\frac{x-a}{-2a}};\quad t = \operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{x+a}{-2a}} =$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{-2a}} + \sqrt{\frac{x+a}{-2a}+1}\right) =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}}{\sqrt{2a}} = \ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}) - \ln\sqrt{2a},$$

и, окончательно, для $x < -a$:

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = -\sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}) + C.$$

Итог:

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \begin{cases} \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}) + C, \\ \text{если } x \geq a; \\ -\sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}) + C, \\ \text{если } x < -a. \end{cases}$$

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

Предположим, для определенности, что $b > a$.

Очевидно, что подынтегральная функция определена лишь в следующих случаях:

$$\begin{cases} x+a>0, \\ x+b>0; \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x+a<0, \\ x+b<0. \end{cases}$$

Рассмотрим первую ситуацию: $x+a>0$ и $x+b>0$. Положим $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t,\ t\in(0;+\infty)$. Тогда

$$x+b=x+a+(b-a)=(b-a)\operatorname{sh}^2 t+(b-a)=(b-a)\big(\operatorname{sh}^2 t+1\big)=$$

$$=(b-a)\operatorname{ch}^2 t; \quad dx=2(b-a)\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t dt;$$

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)|\operatorname{sh} t|\cdot|\operatorname{ch} t|=(b-a)\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t.$$

Для интеграла получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\int dt=2t+\tilde{C}.$$

Выразим t через x:

$$\operatorname{sh} t=\sqrt{\frac{x+a}{b-a}},$$

$$t=\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}=\ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}+\sqrt{\frac{x+a}{b-a}+1}\right)=$$

$$=\ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}+\sqrt{\frac{x+b}{b-a}}\right)=\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})-\ln\sqrt{b-a}.$$

Таким образом, при $x+a>0,\ x+b>0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C.$$

Во втором случае $(x+a<0,\ x+b<0)$ положим

$$x+b=-(b-a)\operatorname{sh}^2 t,\ t\in(0;+\infty).$$

Проделав аналогичные выкладки (предлагаем это сделать читателю), получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = -2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})+C.$$

5.6. **Общие замечания относительно использования метода замены переменного.**

Заканчивая рассмотрение метода замены переменного, отметим, что Ваше умение отыскивать удобную подстановку (выбирать удобный новый аргумент) зависит, прежде всего, от *Вашего* опыта, т.е. от количества решенных лично Вами примеров. Надеемся, что Вы заметили следующее.

(1) В интегралах вида

$$\int g(x^2)x dx = \frac{1}{2}\int g(x^2)d(x^2)$$

естественна замена $u = x^2$.

(2) В интегралах вида

$$\int g(\sin x)\,\cos x dx,\ \int g(\cos x)\,\sin x dx,\ \int g(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x}$$

удобна замена (соответственно):

$$u = \sin x,\ u = \cos x,\ u = \operatorname{tg} x.$$

(3) В интегралах вида

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{d\big(f(x)\big)}{f(x)}$$

замена аргумента $u = f(x)$ сразу приводит к ответу:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C.$$

(4) Интегрировать выражения, содержащие радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, можно с помощью подстановок

$$x = a\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ \text{при этом}\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t;$$

или

$$x = a\cos t, \quad t \in [o; \pi], \quad \text{при этом } \sqrt{a^2 - x^2} = a\sin t.$$

(5) Если подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2 - a^2}$, удобно использовать подстановки

$$x = a\operatorname{ch} t, \quad t \in [0; +\infty) \text{ для } x > a;$$

$$x = -a\operatorname{ch} t, \quad t \in [0; +\infty) \text{ для } x < -a.$$

При этом $\sqrt{x^2 - a^2} = a\operatorname{sh} t$.

(6) Если подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2 + a^2}$, удобно использование подстановки $x = a\operatorname{sh} t$.
При этом $\sqrt{x^2 + a^2} = a\operatorname{ch} t$.
В этом же случае можно положить

$$x = a\operatorname{tg} t, \ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{тогда } \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

В качестве упражнения предлагаем читателю самостоятельно выявить еще несколько характерных ситуаций (т.е. конкретизировать вид подынтегрального выражения и указать удобную для этого случая замену переменного).

5.7. **Применение метода интегрирования по частям.**

Перейдем к рассмотрению следующего метода — метода интегрирования по частям.

Напомним суть метода: если u и v — непрерывно дифференцируемые функции от x, то

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Таким образом, при интегрировании по частям нахождение $\int u dv$ сводится к вычислению другого интеграла — $\int v du$. Очевидно, что использование данного метода удобно тогда, когда последний интеграл проще (или не сложнее) исходного.

Первый, и определяющий, шаг при применении данного метода — выбор u и dv. Как правило, за u выбирается функция, которая при дифференцировании «упрощается», а за dv — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден. Заметим, что далее, при использовании метода интегрирования по частям, в записи $v = \int dv$ под $\int dv$ понимается *одна из первообразных.*

Отметим, что метод интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем метод замены переменной, но есть целые классы интегралов, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям. Например,

- для интегралов вида

  $$\int P(x)\, e^{ax}\, dx, \quad \int P(x) \sin ax\, dx, \quad \int P(x) \cos ax\, dx,$$

  где $P(x)$ — многочлен, за u следует принять $P(x)$, а за dv — соответственно выражения

  $$e^{ax}\, dx, \quad \sin ax\, dx, \quad \cos ax\, dx;$$

- для интегралов вида

  $$\int P(x) \ln^m x\, dx \ (m \in \mathbf{N}), \quad \int P(x) \arcsin x\, dx,$$

  $$\int P(x) \arccos x\, dx, \quad \int P(x) \operatorname{arctg} x\, dx$$

  за u принимаем соответственно функции

  $$\ln^m x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x,$$

  а за dv — выражение $P(x)\, dx$.

Иногда, применяя метод интегрирования по частям, удается получить нетривиальное уравнение для исходного интеграла.

Решение задач начнем с одной из самых простых.

1791. $\int \ln x dx$.

Сделаем выбор: $\begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix}$. Получим:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

1793. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

Возведя в квадрат числитель и знаменатель дроби, «разбиваем» подынтегральное выражение на u и dv:

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx=\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx=\begin{vmatrix}u=\ln^2 x, & du=2\ln x\frac{dx}{x},\\ dv=\frac{dx}{x^2}, & v=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int\ln x\frac{dx}{x^2}=\begin{vmatrix}u=\ln x, & du=\frac{dx}{x},\\ dv=\frac{dx}{x^2}, & v=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\end{vmatrix}=$$

(для вычисления второго слагаемого также применяем метод интегрирования по частям)

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\left(-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}\right)=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\frac{\ln x}{x}-2\cdot\frac{1}{x}+C=$$

$$=-\frac{1}{x}\big(\ln^2 x+2\ln x+2\big)+C.$$

1797. $\int x^3\,e^{-x^2}dx$.

Предварительно введем новый аргумент $t=x^2$:

$$\int x^3\,e^{-x^2}dx=\int x^2\,e^{-x^2}xdx=\frac{1}{2}\int t\,e^{-t}\,dt=$$

$$=\begin{vmatrix}u=t, & du=dt,\\ dv=e^{-t}\,dt, & v=\int e^{-t}\,dt=-e^{-t}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(-t\,e^{-t}+\int e^{-t}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-t\,e^{-t}-e^{-t}\right)+C=-\frac{1}{2}(t+1)\,e^{-t}+C=-\frac{1}{2}(x^2+1)\,e^{-x^2}+C.$$

1799. $\int x^2\sin 2xdx$.

При решении данной задачи продемонстрируем использование *приема занесения v под знак дифференциала*. Имеем:

$$\int x^2\sin 2xdx=\int x^2\,d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int\underbrace{x^2}_{u}d(\underbrace{\cos 2x}_{v})=$$

$$=-\frac{1}{2}\Big(x^2\cos 2x-\int\underbrace{\cos 2x}_{v}d(\underbrace{x^2}_{u})\Big)=-\frac{1}{2}\Big(x^2\cos 2x-$$

$$-2\int x\cos 2xdx\Big)=-\frac{1}{2}\Big(x^2\cos 2x-\int xd(\sin 2x)\Big)=$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(x^2\cos 2x - x\sin 2x + \int \sin 2x dx\Big) = -\frac{1}{2}\Big(x^2\cos 2x -$$

$$-x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\Big) + C = \frac{1}{4}(1-2x^2)\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C.$$

1802. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, & v = x \end{matrix}\right| = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = \left|\begin{matrix} u = \arcsin x, & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{dx}{x^2}, & v = -\frac{1}{x} \end{matrix}\right| = -\frac{\arcsin x}{x} +$$

$$+\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной:

$$\sqrt{1-x^2} = t, \quad x^2 = 1-t^2, \quad xdx = -tdt.$$

Получим:

$$\int \frac{xdx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{tdt}{(1-t^2)\,t} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\big(1+\sqrt{1-x^2}\big)^2}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}\right| +$$

$$+C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{1-(1-x^2)}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2 + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{\arcsin x}{x} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

1810. $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx$.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx = -\int \ln(\operatorname{tg} x)\, d(\cos x) = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) +$$

$$+\int \cos x d\ln(\operatorname{tg} x) = \left[d\ln(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\sin x\cos x}\right] =$$

$$= -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{dx}{\sin x} = (\text{воспользуемся результатом}$$

$$\text{задачи 1703}) = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$.

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int x \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int x d\left(\frac{-1}{1+x^2}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = d\left(\frac{-1}{1+x^2}\right), & v = -\frac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

Разобьем интеграл на два слагаемых:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx\right) = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} -$$

$$-\frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{(a^2+x^2)^2} =$$

(последний интеграл вычисляется аналогично интегралу задачи 1816, рекомендуем читателю проделать все выкладки самостоятельно)

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2}\cdot\frac{1}{a^2+x^2} - \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} +$$

$$+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}+C.$$

1818. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Заметим, что проще всего, на наш взгляд, вычислить данный интеграл с помощью тригонометрической подстановки — $x=a\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, например.

Покажем, тем не менее, как в данном случае «работает» метод интегрирования по частям. Итак,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{a^2-x^2}, & du=-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=x\sqrt{a^2-x^2}+$$

$$+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{(-x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

Соединив начало и конец «цепочки» равенств, получим:

$$(1)\qquad \underbrace{\int\sqrt{a^2-x^2}dx}_{I}=x\sqrt{a^2-x^2}-\underbrace{\int\sqrt{a^2-x^2}dx}_{I}+a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

Таким образом, интегрируя по частям, мы получили линейное уравнение на искомый интеграл I. Решив это уравнение, получаем ответ:

$$(2)\qquad I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Вопросы читателю. Почему в равенстве (2) появилась константа C, и почему она отсутствует в равенстве (1)?

1824. $\int\frac{x\,e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

Введем новый аргумент:

$$\operatorname{arctg}x=y,\ x=\operatorname{tg}y,\ dx=\frac{dy}{\cos^2 y},\ \left[y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Заметим, что ограничения на изменение y следуют из определения арктангенса. Получаем:

$$\int \frac{x\, e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{\operatorname{tg} y\, e^y}{(1+\operatorname{tg}^2 y)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{\operatorname{tg} y \cos^3 y\, e^y\, dy}{\cos^2 y} =$$

$$= \int e^y \sin y dy.$$

Интегрируя дважды по частям, получим уравнение на последний интеграл:

$$\int e^y \sin y dy = \begin{vmatrix} u = e^y, & du = e^y\, dy \\ dv = \sin y dy, & v = -\cos y \end{vmatrix} = -e^y \cos y +$$

$$+ \int e^y \cos y dy = \begin{vmatrix} u = e^y, & du = e^y\, dy \\ dv = \cos y dy, & v = \sin y \end{vmatrix} = -e^y \cos y +$$

$$+ e^y \sin y - \int e^y \sin y dy.$$

Замыкаем «цепочку» равенств:

$$\int e^y \sin y dy = e^y(\sin y - \cos y) - \int e^y \sin y dy,$$

и получаем, что

$$\int e^y \sin y dy = \frac{e^y}{2}(\sin y - \cos y) + C = \frac{e^y}{2}(\operatorname{tg} y - 1)\cos y + C =$$

$$= \frac{e^y}{2}(\operatorname{tg} y - 1)\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} + C = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2}(x-1)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

1828. $\int e^{ax} \cos bx dx$.

Этот интеграл также можно вычислить с помощью двукратного интегрирования по частям.

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b}\int \underbrace{e^{ax}}_{u} d(\underbrace{\sin bx}_{v}) = \frac{1}{b}\Big(e^{ax} \sin bx -$$

$$- \int \sin bx d(e^{ax})\Big) = \frac{1}{b}e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bx dx =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\int \underbrace{e^{ax}}_{u} d(\underbrace{\cos bx}_{v}) = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx +$$

$$+\frac{a}{b^2}\left(e^{ax}\cos bx - a\int e^{ax}\cos bx dx\right) = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx +$$

$$+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\underbrace{\int e^{ax}\cos bx dx}_{I_1} = \underbrace{\int e^{ax}\cos bx dx}_{I_1}.$$

Получили линейное уравнение на I_1:

$$\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I_1 = I_1,$$

решив которое, имеем:

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C.$$

Задача
1829. $\int e^{ax}\sin bx dx$
решается аналогичным образом.
Предлагаем читателю справиться с ней самостоятельно.
Мы же приведем еще один способ вычисления интегралов задач **1828** и **1829**, основанный на использовании комплексных чисел.
Введем обозначения:

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx, \quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx.$$

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I = \int e^{(a+ib)x}dx = \int e^{ax}\, e^{ibx}\, dx = \int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)dx =$$

$$= \int e^{ax}\cos bx dx + i\int e^{ax}\sin bx dx = I_1 + i\, I_2$$

(напомним, что i — мнимая единица, $i^2 = -1$).
Таким образом: $I_1 = \operatorname{Re} I$ (вещественная часть I), $I_2 = \operatorname{Im}\ I$

(мнимая часть I).
Вычислим I.

$$\int e^{(a+ib)x}dx = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} + C = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}e^{(a+ib)x} + C =$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} + C = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + C =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos bx + i\sin bx) + C = I.$$

Выделяем вещественную и мнимую часть I и приравниваем к I_1 и I_2 соответственно:

$$\operatorname{Re} I = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C = I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx,$$

$$\operatorname{Im} I = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C = I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx.$$

В дальнейшем Вам не один раз придется пользоваться этими результатами. Выделим их:

$$\boxed{\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C,}$$

$$\boxed{\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C.}$$

И, заканчивая работать с методом интегрирования по частям, получим с его помощью рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Итак,

$$I_n = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2+a^2)^n}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} \ - \int x d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int x\frac{xdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} +$$

$$+2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}}_{I_n} -$$

$$-2na^2\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}}_{I_{n+1}}.$$

Получили, что

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,I_n - 2na^2\,I_{n+1},$$

откуда следует, что

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\,I_n.$$

Полученное соотношение, позволяющее по известному I_n найти I_{n+1}, называется *рекуррентным соотношением* или *рекуррентной формулой*.

Интеграл I_1 вычисляется непосредственно:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

Значения I_n для $n > 1$ находим последовательно с помощью рекуррентной формулы, например:

$$I_2 = I_{1+1} = [n=1] = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\,I_1.$$

Таким образом,

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

$$I_3 = I_{2+1} = [n=2] = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\,I_2 = \ldots\ .$$

5.8. **Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен.**

К ним относят интегралы вида

$$(1)\ \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx; \quad (2)\ \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

$$(3)\ \int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx;$$

$$(4)\ \int \frac{dx}{(x-\gamma)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\ (m=1,2).$$

Для вычисления первых трех интегралов нужно выделить из квадратного трехчлена ax^2+bx+c полный квадрат:

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2+q;$$

сделать замену переменного: $x+p=z$ и воспользоваться табличными интегралами XV–XXII.

При вычислении интеграла

$$\int \frac{dx}{(x-\gamma)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

предварительно делается замена $\frac{1}{x-\gamma} = z$ (ее можно осуществить в два этапа: $x-\gamma=t$; $\frac{1}{t}=z$) и только затем выделяется полный квадрат.

Продемонстрируем это на примерах.

1840. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$.

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+x+1 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Введя новое переменное $u = x+\frac{1}{2}$, получим:

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \int \frac{u+\frac{1}{2}}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,du =$$

$$= \int \frac{udu}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \text{(используем табличные}$$

интегралы XVI, XVII) $= \frac{1}{2}\ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1843. $\int \frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}$.

Имеем:

$$\int \frac{x^5dx}{x^6-x^3-2} = \int \frac{x^3\cdot x^2dx}{(x^3)^2-x^3-2} = \left[u = x^3\right] = \frac{1}{3}\int \frac{udu}{u^2-u-2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{udu}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}du = \left[u-\frac{1}{2} = z\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{zdz}{z^2-\frac{9}{4}} + \frac{1}{6}\int \frac{dz}{z^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{6}\ln\left|z^2-\frac{9}{4}\right| + \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\ln\left|\frac{z-\frac{3}{2}}{z+\frac{3}{2}}\right| +$$

$$+C = \frac{1}{18}\ln\left|\frac{\left(z-\frac{3}{2}\right)^3\left(z+\frac{3}{2}\right)^3\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z+\frac{3}{2}\right)}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{18}\ln\left|\left(z-\frac{3}{2}\right)^4\left(z+\frac{3}{2}\right)^2\right| + C = \frac{1}{9}\ln\left|\left(z-\frac{3}{2}\right)^2\left(z+\frac{3}{2}\right)\right| + C =$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|(x^3-2)^2(x^3+1)\right| + C.$$

Замечание. Интеграл $\int \frac{udu}{u^2-u-2}$ можно вычислить и по-другому — раскладывая дробь $\frac{u}{u^2-u-2}$ на простейшие. Подробно об этом методе будет рассказано в разделе, посвященном интегрированию рациональных функций.

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$.

Квадратный трехчлен в знаменателе получим, перейдя к новому аргументу $\operatorname{tg} x = u$. Действительно:

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 5} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$= \Big[\operatorname{tg} x = u\Big] = \int \frac{1}{3u^2 - 8u + 5} du.$$

Выделим полный квадрат:

$$3u^2 - 8u + 5 = 3\Big(u^2 - \frac{8}{3}u + \frac{5}{3}\Big) = 3\Big(u^2 - 2\cdot u\cdot\frac{4}{3} + \underbrace{\frac{16}{9} - \frac{16}{9}}_{0} + \frac{5}{3}\Big) =$$
$$= 3\left(\Big(u - \frac{4}{3}\Big)^2 - \frac{16}{9} + \frac{15}{9}\right) = 3\left(\Big(u - \frac{4}{3}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{3}\Big)^2\right).$$

Продолжаем интегрировать:

$$\int \frac{1}{3u^2 - 8u + 5} du = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\left(u - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\ln\left|\frac{u - \frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{u - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u - \frac{5}{3}}{u - 1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - \frac{5}{3}}{\operatorname{tg} x - 1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x}\right| + \tilde{C},$$
$$(\tilde{C} = C - \frac{1}{2}\ln 3).$$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:

$$1 - 2x - x^2 = 2 - (1 + 2x + x^2) = 2 - (x+1)^2.$$

Получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - (x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C,$$

(при вычислении был использован табличный интеграл XIX).

В следующей задаче предлагается доказательство более общего результата.

1850. Доказать, что если $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right) + C \text{ при } a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

Доказательство.

1. Рассмотрим случай $a > 0$. Преобразуем радикал:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{\sqrt{a}dx}{\sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4}}} =$$

(используем табличный интеграл XVIII)

$$= \frac{\sqrt{a}}{a} \ln \left| ax + \frac{b}{2} + \sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax + b}{2} + \sqrt{a^2x^2 + abx + ac} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C \text{ (что и требовалось доказать).}$$

2. Рассмотрим случай $a < 0$. Преобразуем радикал:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{\frac{1}{-a}(-a^2x^2 - abx - ac)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \sqrt{-\left(\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}-\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Очевидно, что эта ситуация возможна лишь при условии $b^2-4ac>0$. Интегрируем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\sqrt{-a}dx}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}-\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2}}=$$

(используем табличный интеграл XIX)

$$=\frac{\sqrt{-a}}{a}\arcsin\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}}}+C=\left[a=-(-a)=-\sqrt{(-a)^2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}}}+C=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}+C \quad \text{(что и требовалось доказать).}$$

Таким образом, согласно доказанному результату, при вычислении интегралов вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно получить, в зависимости от знака a, либо арксинус, либо логарифм с соответствующими аргументами и множителями.

Замечание. При работе с конкретным интегралом указанного вида мы все же не рекомендуем сразу пользоваться доказанной в задаче формулой, а советуем каждый раз полностью делать соответствующие выкладки (выделение полного квадрата, замена переменного, сведение к табличному интегралу). Только так Вы сможете приобрести и закрепить умение интегрировать выражения, содержащие квадратный трехчлен. А общую формулу можно, в случае необходимости, использовать для проверки результата.

1852. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

Как и раньше, первый шаг — выделение полного квадрата в

x^2+x+1:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Следующий шаг — замена переменного: $x+\frac{1}{2}=z$. Получаем:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\int\frac{z+\frac{1}{2}}{\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}}dz=\int\frac{zdz}{\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}}=$$

(используем табличные интегралы XX и XVIII)

$$=\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\ln\left|z+\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\right|+C=\sqrt{x^2+x+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

1855. $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$.

Очевидно, что к интегралу, содержащему квадратный трехчлен, нас приведет замена переменного $x^2=u$:

$$\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx=\int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2-(x^2)^2}}xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2-(x^2)^2}}d(x^2)=\frac{1}{2}\int\frac{1+u}{\sqrt{1+u-u^2}}du.$$

Выделяем полный квадрат в подкоренном выражении:

$$1+u-u^2=-(u^2-u)+1=-(u^2-2\cdot u\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+1=-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4};$$

вводим новое переменное: $u - \frac{1}{2} = z$.
Продолжаем интегрировать:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1+u}{\sqrt{1+u-u^2}}du = \frac{1}{2}\int \frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}}d\left(u-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{z+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}}dz = \frac{1}{2}\int \frac{zdz}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}}dz + \frac{3}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - z^2}} =$$

(используем табличные интегралы XX и XIX)

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}-z^2} + \frac{3}{4}\arcsin\frac{z}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}} + C.$$

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.
Это интеграл вида (4), который, как известно, сводится к одному из интегралов вида (1)–(3) предварительной заменой переменного $\frac{1}{x} = z$. Действительно:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sgn} x}\int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$= \left[\frac{1}{x} = z\right] = -\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\underbrace{\int \frac{dz}{\sqrt{1+z+z^2}}}_{\text{интеграл вида (2)}} = -\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\ln\left|z+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sgn} x} \ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sgn} x} \ln\left|\frac{x+2}{2x} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|}\right| + C = I.$$

При $x > 0$:

$$I = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + \tilde{C}, \quad (\tilde{C} = C + \ln 2).$$

При $x < 0$:

$$I = \ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{(x+2-2\sqrt{x^2+x+1})(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}{2x(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{(x+2)^2 - 4(x^2+x+1)}{2x(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{-3x^2}{2x(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}\right| +$$

$$+ \tilde{C} = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + \tilde{C}, \quad \left(\tilde{C} = C + \ln\frac{3}{2}\right).$$

Таким образом, вне зависимости от знака x, получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Сделаем замену переменного: $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Получим:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{(t-1)^2+1}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-2t+2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t|t|\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}} = -\frac{1}{\operatorname{sgn} t}\int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}} = \left[\frac{1}{t}=z\right] =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\int \frac{dz}{\sqrt{1-2z+2z^2}} = -\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-z+\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} z}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} z}\ln\left|z-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} z}\ln\left|\frac{2z-1+\sqrt{2(2z^2-2z+1)}}{2}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} t}\ln\left|\frac{\frac{2}{t}-1+\sqrt{2\left(\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t}+1\right)}}{2}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} t}\ln\left|\frac{2-t+\operatorname{sgn} t\sqrt{2(2-2t+t^2)}}{2t}\right| + C = I.$$

При $t>0$ получаем:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2-t+\sqrt{2(2-2t+t^2)}}{2t}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 - x + \sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + \tilde{C} \quad (\tilde{C} = C + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2).$$

Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть случай $t < 0$ и убедиться в том, что и при этом условии результат получается тем же. Таким образом, получаем:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 - x + \sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C.$$

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

Это интеграл четвертого типа, соответствующий случаю $m = 2$. Шаг первый — замена $x + 2 = t,\ x = t - 2,\ dx = dt$. Получаем:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{(t-2)^2+2(t-2)-5}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-2t-5}}.$$

Шаг второй — замена $\frac{1}{t} = z$:

$$\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-2t-5}} = \int \frac{dt}{t^2|t|\sqrt{1-\frac{2}{t}-\frac{5}{t^2}}} = \frac{1}{\operatorname{sgn} t} \int \frac{\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{1-\frac{2}{t}-\frac{5}{t^2}}} =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sgn} t} \int \frac{\frac{1}{t}\, d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{t}-\frac{5}{t^2}}} = -\frac{1}{\operatorname{sgn} z} \int \frac{zdz}{\sqrt{1-2z-5z^2}}.$$

Шаг третий — выделение полного квадрата в подкоренном выражении:

$$1 - 2z - 5z^2 = 1 - 5\left(z^2 + \frac{2}{5}z\right) = 1 - 5\left(z^2 + 2\cdot z\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2}\right) =$$

$$= 1 - 5\left(z + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} - 5\left(z + \frac{1}{5}\right)^2.$$

Продолжаем интегрировать:

$$-\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\int\frac{zdz}{\sqrt{1-2z-5z^2}}=-\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\int\frac{\left(z+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{6}{5}-5\left(z+\frac{1}{5}\right)^2}}d\left(z+\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\left[z+\frac{1}{5}=u\right]=-\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\int\frac{u-\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{6}{5}-5u^2}}du=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}\operatorname{sgn}\left(u-\frac{1}{5}\right)}\int\frac{u-\frac{1}{5}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right)^2-u^2}}du=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}\operatorname{sgn}\left(u-\frac{1}{5}\right)}\left\{\int\frac{udu}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right)^2-u^2}}-\frac{1}{5}\int\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right)^2-u^2}}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}\operatorname{sgn}\left(u-\frac{1}{5}\right)}\left\{-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right)^2-u^2}-\frac{1}{5}\arcsin\frac{u}{\frac{\sqrt{6}}{5}}\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sgn}\left(u-\frac{1}{5}\right)}\left\{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{6}{5}-5u^2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5u}{\sqrt{6}}\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sgn} z}\left\{\frac{1}{5}\sqrt{1-2z-5z^2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5z+1}{\sqrt{6}}\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sgn} t}\left\{\frac{1}{5}\sqrt{1-\frac{2}{t}-\frac{5}{t^2}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{\frac{5}{t}+1}{\sqrt{6}}\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sgn} t}\left\{\frac{1}{5}\frac{\sqrt{t^2-2t-5}}{|t|}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5+t}{\sqrt{6}\,t}\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{\sqrt{t^2-2t-5}}{t}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5+t}{\sqrt{6}\,|t|}+C=$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}\,|x+2|} + C.$$

1862. $\int\sqrt{2+x+x^2}dx.$

Выделяем полный квадрат в подкоренном выражении:

$$2+x+x^2 = \Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{7}{4}$$

и делаем замену переменного: $x+\frac{1}{2}=z$. Имеем:

$$\int\sqrt{2+x+x^2}dx = \int\sqrt{\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{7}{4}}\,d\Big(x+\frac{1}{2}\Big) =$$

$$= \underbrace{\int\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}dz}_{\text{табл. интеграл XXII}} = \frac{z}{2}\sqrt{z^2+\frac{7}{4}} + \frac{7}{8}\ln\left|z+\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}\right| + C =$$

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{2+x+x^2}\right| + C =$$

$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{2+x+x^2}\right| + C.$$

1864. $\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

Разбивая интеграл на два слагаемых:

$$\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx = \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} - \int\frac{1-x}{\sqrt{1+x-x^2}}dx,$$

получаем интегралы вида (4) и (2) соответственно, вычисление которых подробно рассмотрено выше. Предлагаем читателю самостоятельно продолжить интегрирование и получить следующий результат:

$$\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}} -$$

$$-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + C.$$

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$.
Заметив, что
$$\frac{dx}{x} = \frac{xdx}{x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{d(x^2)}{x^2},$$
получим:
$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{(x^2)^2+1}}d(x^2) = \left[x^2 = t\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{t\sqrt{t^2+1}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}.$$
И вновь получаем интегралы, аналоги которых детально рассматривались выше. Завершение вычислений предлагается читателю. Итог:
$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C.$$

6. Задачи для самостоятельной работы

1. $\displaystyle\int (2-3\sqrt{x})^2 dx.$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right) dx.$

3. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right) dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{(1+x)^3}{x^2} dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{4-x^2}{3+x^2} dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2-3)} dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}.$

9. $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+3}.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-7}.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}}.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-7}}.$

16. $\displaystyle\int (5^x-2^x)^2\, dx.$

17. $\displaystyle\int \frac{2^{2x-1}-3^{2x+3}}{6^{2x}} dx.$

18. $\displaystyle\int 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x dx.$

19. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} dx.$

20. $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

22. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

23. $\displaystyle\int (2\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x) dx.$

24. $\displaystyle\int \operatorname{th}^2 x dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+3}.$

26. $\displaystyle\int \frac{2+x}{1+x} dx.$

27. $\displaystyle\int (2x+5)^{17} dx.$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-3x)^{30}}.$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$.

30. $\displaystyle\int x(x-2)^5 dx$.

31. $\displaystyle\int (x+2)\sqrt{x-2}dx$.

32. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+1}dx$.

33. $\displaystyle\int (2x+3)^2(1-x)^8 dx$.

34. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{x^2-4}$.

35. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

36. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-10}}dx$.

37. $\displaystyle\int \frac{1-4x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$.

38. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}dx$.

39. $\displaystyle\int \frac{x dx}{1+x^4}$.

40. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{x^6-5}$.

41. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^5 x}dx$.

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}$.

43. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}dx$.

44. $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x}dx$.

45. $\displaystyle\int \sin 5x\, dx$.

46. $\displaystyle\int \cos\frac{x}{7}dx$.

47. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\, dx$.

48. $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin x}$.

49. $\displaystyle\int (\sin x+2\cos x)^2 dx$.

50. $\displaystyle\int e^x\cos e^x\, dx$.

51. $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos^2 x}$.

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 7x}$.

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 8x}$.

54. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin 3x}dx$.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

56. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

57. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

58. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x\, dx}{\sqrt{3-\sin^4 x}}$.

59. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcctg} 3x}{1+9x^2}dx.$

60. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx.$

61. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

62. $\displaystyle\int \frac{x+\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

63. $\displaystyle\int \frac{x+\arccos^{\frac{3}{2}} x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

64. $\displaystyle\int (\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x)^2 dx.$

65. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$

66. $\displaystyle\int x \sin x\, dx.$

67. $\displaystyle\int x \cos^2 x\, dx.$

68. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx.$

69. $\displaystyle\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x}dx.$

70. $\displaystyle\int \ln^2 x\, dx.$

71. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$

72. $\displaystyle\int x^2 \ln(1+x)\, dx.$

73. $\displaystyle\int x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx.$

74. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+3}\, dx.$

75. $\displaystyle\int \arccos x\, dx.$

76. $\displaystyle\int x \arcsin x\, dx.$

77. $\displaystyle\int \frac{3+2x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\, dx.$

78. $\displaystyle\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx.$

79. $\displaystyle\int \cos^2(\ln x) dx.$

80. $\displaystyle\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}dx.$

81. $\displaystyle\int x \arccos \frac{1}{x} dx.$

82. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}dx.$

83. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^5 x\, dx.$

84. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\, dx.$

85. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx$

86. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\, dx.$

87. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

88. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^2+a^2)^2}dx.$

89. $\int 5^{\sqrt{x}}dx.$

90. $\int x\cos\sqrt{x}\,dx.$

91. $\int \frac{1-2x}{2x^2-4x-6}dx.$

92. $\int \frac{7-3x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

93. $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}dx.$

94. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-4\sin x+\cos^2 x}}.$

95. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{4x^2-10x+7}}.$

96. $\int (x+2)\sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

97. $\int \frac{x^3+x}{x^4-x^2-1}dx.$

98. $\int \frac{x-x^3}{\sqrt{1+x^2+x^4}}dx.$

99. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4-x^2+5}.$

100. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

101. $\int \frac{(x+1)^2}{x\sqrt{1+3x+x^2}}dx.$

102. $\int (x^3+x)\sqrt{1+x^4}\,dx.$

103. $\int \sqrt{\cos 2x}\cos x dx.$

104. $\int \sqrt{\cos 2x}\sin x dx.$

7. Ответы

В приведенных ниже ответах ради краткости аддитивная постоянная C опущена.
1. $4x-8x^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{2}x^2$. 2. $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}}$. 3. $\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}$. 4. $-\frac{1}{x}+$ $+3\ln|x|+3x+\frac{x^2}{2}$. 5. $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. 6. $-x+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. 7. $\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x$. 8. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. 9. $\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{1}{x}$. 10. $\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$. 11. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}x$. 12. $\frac{1}{2\sqrt{21}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{7}}{\sqrt{3}x+\sqrt{7}}\right|$. 13. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$. 14. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+5}|$. 15. $\frac{1}{\sqrt{3}}\times$ $\times\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-7}|$. 16. $\frac{25^x}{\ln 25}-\frac{2\cdot 10^x}{\ln 10}+\frac{4^x}{\ln 4}$. 17. $-\frac{1}{2\ln 9}\left(\frac{1}{9}\right)^x+$ $+\frac{27}{\ln 4}\left(\frac{1}{4}\right)^x$. 18. $\frac{30^x}{\ln 30}$. 19. $\frac{e^{2x}}{2}+e^x+x$. 20. $\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{2}$. 21. $\operatorname{tg}x-$ $-\operatorname{ctg}x$. 22. $-x-\operatorname{ctg}x$. 23. $2\operatorname{sh}x-3\operatorname{ch}x$. 24. $-\operatorname{th}x+x$. 25. $\frac{1}{2}\times$

$\times \ln|2x+3|$. 26. $x+\ln|1+x|$. 27. $\frac{1}{36}(2x+5)^{18}$. 28. $\frac{1}{87}\times$ $\times(1-3x)^{-29}$. 29. $-\sqrt{1-2x}$. 30. $\frac{1}{7}(x-2)^7+\frac{1}{3}(x-2)^6$. 31. $\frac{2}{5}\times$ $\times(x-2)^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}$. 32. $\frac{(x+1)^2}{2}-2x+2\ln|1+x|$. 33. $-\frac{4}{11}\times$ $\times(1-x)^{11}+2(1-x)^{10}-\frac{25}{9}(1-x)^9$. 34. $\frac{x^2}{2}+2\ln|x^2-4|$. 35. $3\sqrt{x^2+4}-\ln|x+\sqrt{x^2+4}|$. 36. $\sqrt{x^2-10}+2\ln|x+\sqrt{x^2-10}|$. 37. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x\sqrt{2}+2\sqrt{1-2x^2}$. 38. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$. 39. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$. 40. $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3-\sqrt{5}}{x^3+\sqrt{5}}\right|$. 41. $-\frac{1}{4\ln^4 x}$. 42. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{\sqrt{2}}$. 43. $\frac{3}{5}\ln^{\frac{5}{3}} x$. 44. $-e^x-2\ln|e^x-1|$. 45. $-\frac{1}{5}\cos 5x$. 46. $7\sin\frac{1}{7}x$. 47. $2\sin\sqrt{x}$. 48. $\ln|1+\sin x|$. 49. $\frac{5}{2}x-\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x$. 50. $\sin e^x$. 51. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right|$. 52. $-\frac{1}{7}\operatorname{ctg} 7x$. 53. $\frac{1}{8}\operatorname{tg} 8x$. 54. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|$. 55. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. 56. $\ln|1+\operatorname{tg} x|$. 57. $-\operatorname{ctg} x+\ln|1+$ $+\operatorname{ctg} x|$. 58. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin^2 x}{\sqrt{3}}$. 59. $-\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}^2 3x$. 60. $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)+$ $+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}} 2x$. 61. $\frac{1}{2}(\arcsin^2 x+\arccos^2 x)$. 62. $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+$ $+\frac{1}{8}\arcsin^4 2x$. 63. $-\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{5}\arccos^{\frac{5}{2}} x$. 64. $\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x-\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x$. 65. $-2\operatorname{cth} 2x$. 66. $-x\cos x+\sin x$. 67. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x$. 68. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|$. 69. $\frac{x}{\cos x}-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 70. $x\ln^2 x-$ $-2x\ln x+2x$. 71. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$. 72. $\frac{x^3}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{3}x+$ $+\frac{1}{3}\ln(1+x)$. 73. $\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|1+x|$. 74. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+3}+$ $+\frac{3}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+3}|$. 75. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$. 76. $\frac{x^2}{2}\arcsin x-$ $-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$. 77. $2x\operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$. 78. $\frac{\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}$. 79. $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}$. 80. $\operatorname{tg} x\times$ $\times\ln\cos x+\operatorname{tg} x-x$. 81. $\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\operatorname{sgn} x\sqrt{x^2-1}$. 82. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 83. $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\sin x|$. 84. $\frac{x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{4}-$ $-\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$. 85. $-\frac{x}{4}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+$ $+\frac{a^2}{8}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}$. 86. $\frac{x}{4}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\times$ $\times\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$. 87. $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}$. 88. $x+\frac{a^2x}{2(a^2+x^2)}-$ $-\frac{3a}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. 89. $\frac{2}{\ln 5}\left(\sqrt{x}\cdot 5^{\sqrt{x}}-\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}\right)$. 90. $2(3x-6)\cos\sqrt{x}+$

$+2(x\sqrt{x}-6\sqrt{x})\sin\sqrt{x}$. 91. $-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-3|-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|$. 92. $-3\sqrt{x^2+x+1}+\frac{17}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$. 93. $\sqrt{e^{2x}+e^x+1}+$ $+\frac{5}{2}\ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$. 94. $\arcsin\frac{\sin x+2}{\sqrt{6}}$. 95. $-1\times$ $\times\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{4x^2-10x+7}}{x-1}\right|$. 96. $\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}+$ $+\frac{9}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$. 97. $\frac{1}{4}\ln|-1-x^2+x^4|+\frac{3}{4\sqrt{5}}\times$ $\times\ln\left|\frac{2x^2-1-\sqrt{5}}{2x^2-1+\sqrt{5}}\right|$. 98. $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2+x^4}+\frac{3}{4}\ln\left|x^2+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\sqrt{1+x^2+x^4}\right|$. 99. $\frac{1}{4}\ln|x^4-x^2+5|+\frac{1}{2\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{19}}$. 100. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+x^2+2\sqrt{1+x^2+x^4}}{2x^2}\right|$. 101. $\sqrt{x^2+3x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+3x+1}\right|-\ln\left|\frac{2+3x+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x}\right|$. 102. $\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}x^2\times$ $\times\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{4}\ln|x^2+\sqrt{1+x^4}|$. 103. $\frac{1}{2}\sin x\sqrt{\cos 2x}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arcsin(\sqrt{2}\times$ $\times\sin x)$. 104. $-\frac{1}{2}\cos x\sqrt{\cos 2x}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|$.

8. Приложение. Соотношения между гиперболическими функциями

1. Определение синуса и косинуса гиперболических.

$$\operatorname{ch} a=\frac{e^a+e^{-a}}{2},\qquad \operatorname{sh} a=\frac{e^a-e^{-a}}{2}.$$

2. Соотношения между гиперболическими функциями одного и того же аргумента.

$$\operatorname{ch}^2 a-\operatorname{sh}^2 a=1;$$

$$\operatorname{th} a=\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a},\qquad \operatorname{cth} a=\frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a}\ (a\neq 0);$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 a}=1-\operatorname{th}^2 a,\qquad \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a}=\operatorname{cth}^2 a-1\ (a\neq 0).$$

3. Формулы сложения аргументов.

$$\operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b;$$
$$\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b;$$
$$\operatorname{th}(a \pm b) = \frac{\operatorname{th} a \pm \operatorname{th} b}{1 \pm \operatorname{th} a \operatorname{th} b};$$
$$\operatorname{cth}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cth} a \operatorname{cth} b \pm 1}{\operatorname{cth} b \pm \operatorname{cth} a}.$$

4. Формулы двойного аргумента.

$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a; \qquad \operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a;$$
$$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}; \qquad \operatorname{cth} 2a = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 a}{2 \operatorname{cth} a}.$$

5. Формулы сложения одноименных гиперболических функций.

$$\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{ch} \frac{a+b}{2} \operatorname{ch} \frac{a-b}{2};$$
$$\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a+b}{2} \operatorname{sh} \frac{a-b}{2};$$
$$\operatorname{sh} a + \operatorname{sh} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a+b}{2} \operatorname{ch} \frac{a-b}{2};$$
$$\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a-b}{2} \operatorname{ch} \frac{a+b}{2};$$
$$\operatorname{th} a \pm \operatorname{th} b = \frac{\operatorname{sh}(a \pm b)}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b}; \quad \operatorname{cth} a \pm \operatorname{cth} b = \frac{\operatorname{sh}(b \mp a)}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}.$$

6. Формулы преобразования произведения в сумму.

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\Big];$$
$$\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\Big];$$
$$\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\Big].$$

7. Формулы понижения степени.

$$\operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2}; \quad \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}.$$

8. Выражение обратных гиперболических функций через логарифмы.

$$\operatorname{Arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1});$$
$$\operatorname{Arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1});$$
$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}; \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Список литературы

[1] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и втузов. — М.: Высш. шк., 1981, т.1 — 687 с.: ил.

[2] *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн.1.
Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов /И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, В.А.Садовничий. Под редакцией В.А.Садовничего — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 2002. — 725 с.: ил.

[3] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов /Б.П.Демидович. — М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2003. — 558 с.: ил.

Содержание

Кропотова Татьяна Владимировна,
Подольский Вениамин Григорьевич

Интегрирование функций одного переменного:

примеры и задачи

часть 1

Подписано в печать 12.07.2004. Форм. 60× 84 1/16. Гарнитура "Таймс".
Печать офсетная. Печ. л. 8.63. Тираж 250. Заказ 201
Лаборатория оперативной полиграфии КГУ
420045, Казань, Кр. Позиция, 2а
Тел. 72-22-54