КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико–математический факультет

Кафедра дифференциальных уравнений

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

(методические указания)

Составители: Киясов С.Н., Обносов Ю.В., Салехов Л.Г.

КАЗАНЬ – 2004

Печатается по решению учебно-методической комиссии
механико-математического факультета КГУ

Цель настоящего пособия – оказание помощи студентам при самостоятельном изучении некоторых вопросов теории функций комплексного переменного. При проработке материала следует учитывать, что большинство задач допускает несколько вариантов решений. Решения и указания, приведенные в задачнике, направляют студентов к цели кратчайшим, по мнению авторов, путем. Последнее, однако, не отрицает наличия более оптимальных и красивых решений. Поэтому авторы рекомендуют сначала подумать над задачей самостоятельно и лишь затем воспользоваться указанием.

Составители –
к.ф.–м.н., доцент С.Н.Киясов, д.ф.–м.н., профессор Ю.В.Обносов, к.ф.–м.н., доцент Л.Г.Салехов,

Научный редактор –
С.Р.Насыров – д.ф.–м.н., профессор

Рецензенты:
И.А.Бикчантаев – д.ф.–м.н., профессор
В.И.Жегалов – д.ф.–м.н., профессор

В настоящем пособии используются следующие обозначения, определения и формулы:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ – множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно;

$:=$ – равно по определению;

$\Rightarrow$ – следует (тогда);

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда, когда;

$\forall$ – для всех;

$\exists$ – существует; $\exists!$ – существует и единственно;

i – мнимая единица, $\mathrm{i}^2 := -1$;

$\mathbb{C} = \{z := x + \mathrm{i}\, y$**, где** $x, y \in \mathbb{R}\}$ – множество комплексных чисел (точек комплексной плоскости), $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;

$\mathbb{R}_x^+(\mathbb{R}_x^-), \mathbb{R}_y^+(\mathbb{R}_y^-)$ – замкнутые (включающие ноль и бесконечность) положительные (отрицательные) полуоси вещественной и мнимой оси соответственно;

$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ – соответственно действительная и мнимая часть z ($z = x + \mathrm{i}\, y$ – декартова или алгебраическая форма комплексного числа);

$\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$ – число, комплексно сопряженное с z;

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа z;

$\Theta = \operatorname{Arg} z = \vartheta + 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z}$ – аргумент z $\quad (z \neq 0)$, где

$\vartheta = \arg z$ – главное значение $\operatorname{Arg} z$, в общем случае величина фиксированная на любом полуоткрытом интервале длины 2π, в частности, на промежутке $(-\pi, \pi]$, в последнем случае

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} z \geq 0, \\ \pi, & \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z \geq 0, \\ -\pi, & \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z < 0; \end{cases}$$

$z_1 := z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2\ (x_k = \operatorname{Re} z_k,\ y_k = \operatorname{Im} z_k) \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$, $\arg z_1 = \arg z_2$, если $z_{1,2} \neq 0$;

$z_1 \pm z_2 := x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}\,(y_1 \pm y_2)$;

$z_1 z_2 := x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}\,(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad \Rightarrow \quad |z|^2 = r^2 = z\overline{z}$;

$z_2/z_1 := z_2 \overline{z_1}/|z_1|^2$ для $\forall z_1 \neq 0$;

(z_1, z_2), $[z_1, z_2]$ – соединяющие точки z_1 и z_2 прямолинейные интервал и сегмент соответственно;

$z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\,\sin\vartheta)$ – тригонометрическая форма комплексного числа;

$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta}$ – показательная форма комплексного числа;
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta} = \cos\vartheta + \mathrm{i}\,\sin\vartheta$ – формула Эйлера;
$(\cos\vartheta + \mathrm{i}\,\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + \mathrm{i}\,\sin n\vartheta$ – формула Муавра;
$z^n := \underbrace{z \cdots z}_{n} = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\vartheta} = r^n(\cos n\vartheta + \mathrm{i}\,\sin n\vartheta), \quad n \in \mathbb{N}$;
$\sqrt[n]{z} := w \Leftrightarrow w^n = z$; $w = w_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\vartheta + 2\pi k)/n}$, $k = \overline{0, n-1}$;

$\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$ – показательная функция,
$\mathrm{e}^{z + 2\pi k\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$;

$\sin z = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z})/(2\mathrm{i}\,)$, $\cos z = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z})/2$, $\operatorname{tg} z = \sin z/\cos z$, $\operatorname{ctg} z = 1/\operatorname{tg} z$ – основные тригонометрические функции;

$\operatorname{sh} z = (\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z})/2$, $\operatorname{ch} z = (\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z})/2$, $\operatorname{th} z = \operatorname{sh} z/\operatorname{ch} z$, $\operatorname{cth} z = 1/\operatorname{th} z$ – основные гиперболические функции;

$\operatorname{Ln} z := w \Leftrightarrow \mathrm{e}^w = z$, $\quad \operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\operatorname{Arg} z$– логарифмическая функция;
$w_0 = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\arg z$ – главное значение логарифма;
$w = w_k = w_0 + 2\pi k\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$ – однозначные ветви логарифма, определенные в плоскости с разрезом, например, по R_x^-;

$z^a := \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z}$, $\quad a^z := \mathrm{e}^{z \operatorname{Ln} a}$, $\quad a \in \mathbb{C}$ – соответственно общая степенная и общая показательная функции;

$\operatorname{Arcsin} z := w \Leftrightarrow \sin w = z$ (аналогично определяются другие обратные тригонометрические и гиперболические функции).

1. Действия над комплексными числами и элементарные функции комплексного переменного

При решении задач этой темы требуется твердое знание определений и формул, помещенных в начале пособия, а также понятий, связанных с геометрической интерпретацией комплексных чисел.

1.1 Представив в показательной форме числа $z_1 = (\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2})/2$ и $z_2 = 1 - \mathrm{i}$, найти $z = z_1/z_2$ и вычислить $\cos(\pi/12)$ и $\sin(\pi/12)$.

1.2 Представить в показательной форме, указав главные значения аргументов, следующие комплексные числа:
1) $(1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha)^{-1}$, если $|\alpha| < \pi$, $\alpha \neq \pm\pi/2$; 2) $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$;
4) $1-(2-\sqrt{3})\mathrm{i}$; 5) $1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ ($|\alpha| < \pi$); 6) $1-\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha$ ($0 < \alpha < 2\pi$);
7) $(1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\alpha})/(1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\beta})$, если $0 < \alpha, \beta < \pi$.

1.3 Представить число $(1 - \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha)/(1 + \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ в декартовой (алгебраической) форме.

1.4 Вычислить:
1) $u = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{13} + (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{13}$, 2) $v = [(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{13} - (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{13}]/\mathrm{i}$.

1.5 1) Доказать тождество $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Выяснить его геометрический смысл. 2) Пусть z_1 и z_2 – корни уравнения $z^2 - 2pz + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{C}$). Доказать, что $|z_1| + |z_2| = |p + \varepsilon| + |p - \varepsilon|$, где ε – любое из значений $\sqrt{q}$.

1.6 Определить геометрическое место точек z, удовлетворяющих уравнению

1) $|z - z_1| = |z + z_1|$; 2) $|z - z_1| = |z - z_2|$.

1.7 Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей четырехугольника пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

1.8 Найти все числа z такие, что $|z| = |z|^{-1} = |1 - z|$.

1.9 Доказать, что если $|z_k| = 1$, $k = 1, 2, 3$, то 1) $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3|$; 2) $(z_1 + z_2)/(1 + z_1z_2) \in \mathrm{R}$.

1.10 Доказать, что комплексное число $z \neq -1$ можно представить в виде $z = (1 + \mathrm{i}\,k)/(1 - \mathrm{i}\,k)$, $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$. Найти k, если $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta}$ ($\vartheta = \arg z$).

1.11 Отрезок $[z_1', z_2']$ получается из отрезка $[z_1, z_2]$ поворотом на угол $2\pi/3$. Найти расстояние между серединами отрезков: 1) $[z_1, z_2]$ и $[z_1', z_2']$; 2) $[z_1, z_1']$ и $[z_2, z_2']$.

1.12 Показать, что $\forall k = \overline{1, n-1}$, $\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_k^j = 0$, где $\varepsilon_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi k/n}$.

1.13 Доказать, что треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, z_3, занумерованными против часовой стрелки (в этом случае говорят, что тройка чисел положительно ориентирована), будет равносторонним $\Leftrightarrow$ $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$, где $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/3}$. Как изменится условие, если тройка чисел z_1, z_2, z_3 ориентирована отрицательно?

1.14 Пусть z_k, $k = 1, 2, 3$ – произвольная положительно ориентированная тройка чисел, $z_k' = z_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/3}$, $k = 1, 2, 3$. Доказать, что треугольник с вершинами в серединах отрезков $[z_1', z_2]$, $[z_2', z_3]$ и $[z_3', z_1]$ равносторонний.

1.15 Доказать аналитически и выяснить геометрический смысл неравенств:

1) $|\,|z_1| - |z_2|\,| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; 2) $|z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \le \sqrt{2}|z|$.

1.16 Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.

1.17 Доказать геометрически неравенства:

1) $|z - |z|\,| \le |z||\arg z|$; 2) $|z_1/|z_1| - z_2/|z_2|\,| \le |\arg z_1 - \arg z_2|$;
3) $|z - 1| \le |\,|z| - 1| + |z|\,|\arg z|$;
4) $|z_1 - z_2| \le |\,|z_1| - |z_2|\,| + |z_1|\,|\arg z_1 - \arg z_2|$.

1.18 Пусть $a_k = z_k/|z_k|$ $(z_k \ne 0)$, $k = \overline{1, n}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. Доказать, что:
1) сумма $S = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z - z_k) \in \mathbb{R}$, не зависит от z и $S < 0$;
2) $\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| \ge \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

1.19 Выяснить, когда уравнение $z^2 + (a + \mathrm{i}\, b)z + c + \mathrm{i}\, d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ имеет: 1) два различных действительных корня; 2) ровно один действительный корень.

1.20 Пусть $z = x + \mathrm{i}\, y$ $\quad (y \ne 0)$ – корень уравнения $z^3 + pz + q = 0$, $(p, q \in \mathbb{R})$. Найти полином, нулем которого будет $x = \mathrm{Re}\, z$.

1.21 Доказать, что произведение расстояний от точки $b \in \mathbb{C}$ до всех корней уравнения $z^n - a^n = 0$, $a \in \mathbb{C}$, равно $|b^n - a^n|$.

1.22 Решить уравнение $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

1.23 Исследовать на разрешимость уравнения: 1) $az + b\overline{z} = c$, если $a, b, c. \in \mathbb{C}$ и $a \ne 0$, $b \ne 0$; 2) $az^2 + bz = a\overline{z}^2 + b\overline{z}$, если $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$.

1.24 Найти все корни уравнений: 1) $(z + \mathrm{i}\,)^n = (z - \mathrm{i}\,)^n$;
2) $(1 + \mathrm{i}\, z)^n/(1 - \mathrm{i}\, z)^n = (1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha)/(1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha)$, $|\alpha| < \pi/2$;
3) $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$;
4) $z^4 = 8a^2 - (1 + a^2)^2 + 4a(1 - a^2)\mathrm{i}\,$, $a \in \mathbb{R}$.

1.25 Найти остаток от деления полинома $P(x) = (\cos\vartheta + x\sin\vartheta)^n$ на $Q(x) = x^2 + 1$ $(n \geq 2)$.

1.26 Вычислить $A_k = \varepsilon_k + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_k^4$ и $B_k = \varepsilon_k^3 + \varepsilon_k^5 + \varepsilon_k^6$, где $\varepsilon_k = \mathrm{e}^{2\pi k\mathrm{i}/7}$, $k = \overline{1, 6}$.

1.27 Пусть $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$. Вычислить суммы $S_k = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^{kj}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.28 Вычислить сумму $S(z) = \sum_{k=0}^{n} (z + \varepsilon^k)^n$, если $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$.

1.29 Линеаризовать выражения (т.е. в данном случае представить в виде линейной комбинации синусов и косинусов кратных углов):
1) $\cos^n\vartheta$; 2) $\sin^n\vartheta$, $n \in \mathbb{N}$.

1.30 Вычислить неопределенные интегралы:
1) $\int \cos^8\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$; 2) $\int \sin^8\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$.

1.31 Найти суммы:

$$1)\quad S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cos k\vartheta, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n-1} a^k \sin k\vartheta, \quad a, \vartheta \in \mathbb{R};$$

$$2)\quad S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos k\vartheta}{(\cos\vartheta)^k}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin k\vartheta}{(\cos\vartheta)^k}, \quad \vartheta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z};$$

$$3)\quad S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^4 k\vartheta, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sin^4 k\vartheta.$$

1.32 Вычислить суммы:

$$1)\quad S_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos k\vartheta, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin k\vartheta;$$

$$2)\quad S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k\cos k\vartheta, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n-1} k\sin k\vartheta.$$

1.33 Найти произведения:

$$1)\quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}; \qquad 2)\quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{2n}; \qquad 3)\quad \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{2n+1}.$$

1.34 Доказать, что:

$$1)\quad \prod_{k=1}^{n-1} \cos\frac{\pi k}{n} = \begin{cases} 0, & n = 2m; \\ 2^{1-n}(-1)^m, & n = 2m+1; \end{cases}$$

$$2) \quad \prod_{k=1, k\neq n}^{2n-1} \cos\frac{\pi k}{2n} = n2^{2(1-n)}.$$

1.35 Вычислить $\prod_{k=1}^{7}\cos(\pi k/15)$.

1.36 Представить $\cos(2n+1)\vartheta$ в виде полинома степени $2n+1$ от $\cos\vartheta$ и вычислить коэффициент a_{2n+1} при старшей степени этого полинома.

1.37 Выразить $\sin(2n+1)\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и на основании полученного представления найти все корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1}x^{n-k} = 0.$$

1.38 При каком значении параметра $a \in \mathbb{C}$ уравнение $\mathrm{Ln}\, z = a$ ($\ln z = a$) имеет 1) вещественный корень; 2) чисто мнимый корень? Найти этот корень (под $\mathrm{Ln}\, z$ понимается произвольно фиксированная ветвь логарифма).

1.39 Как зафиксировать ветвь логарифма в плоскости с разрезом по $\mathbb{R}_x^-$, чтобы уравнение $\ln z = 11\pi\mathrm{i}$ имело решение? Найти это решение. Определить значение выбранной ветви логарифма в точке $z = 1 - \mathrm{i}$.

1.40 Вычислить 1) $\ln(1+\mathrm{i})$ и $\mathrm{Ln}\,(1+\mathrm{i})$; 2) $\ln(-2+3\mathrm{i})$ и $\mathrm{Ln}\,(-2+3\mathrm{i})$; 3) $\ln(-3-2\mathrm{i})$ и $\mathrm{Ln}\,(-3-2\mathrm{i})$.

1.41 1) Показать, что при вещественном a уравнение $\sin z = a$ имеет вещественные корни $\Leftrightarrow |a| \leq 1$; 2) решить уравнение при $|a| > 1$.

1.42 Решить уравнения: 1) $\sin z = \mathrm{i}$; 2) $\cos z = \mathrm{i}$; 3) $\mathrm{tg}\, z = 2\mathrm{i}$.

1.43 Решить уравнения: 1) $z^{\mathrm{i}} = \mathrm{i}^{\mathrm{i}}$; 2) $\mathrm{i}^{z} = 2^{\mathrm{i}}$, определяя их правые части как значения фиксированной ветви общей степенной функции z^{i}.

1.44 Вычислить 1) 1^{i}; 2) $(-1)^{\mathrm{i}}$; 3) $(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$.

1.45 Найти значения 1) $\mathrm{Arccos}\, 2$; 2) $\mathrm{Arccos}(-2)$; 3) $\mathrm{Arcsin}\, 2$; 4)$\mathrm{Arcsin}(-2)$.

1.46 Пусть $t_k(z) = (a_k z + b_k)/(c_k z + d_k)$, $(a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{C},\ a_k d_k - b_k c_k \neq 0, k \in \mathbb{Z})$ – дробно-линейные преобразования. Показать, что если преобразованию $t_k(z), k \in \mathbb{Z}$ поставить в соответствие матрицу

$$T_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix},$$

то

1) обратному преобразованию $t_k^{-1}(z)$ ставится в соответствие обратная матрица T_k^{-1};

2) композиции преобразований $t_k \circ t_l$ будет соответствовать произведение матриц $T_k T_l$.

Ответы, указания и решения

1.1 Решение. $z_1 = \sqrt{2}e^{i\,\pi(2k-1/6)}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\,\pi(2m-1/4)}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow z_1/z_2 = e^{i\,\pi[2(k-m)+1/12]} = \cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)$. С другой стороны, $z_1/z_2 = [\sqrt{6} + \sqrt{2} + i\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})]/4 \Rightarrow \cos(\pi/12) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$, $\sin(\pi/12) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$.

1.2 1) $\cos\alpha\, e^{-i\,\alpha}$ $(|\alpha| < \pi/2)$, $-\cos\alpha\, e^{i\,(\pi-\alpha)}$ $(\pi/2 < \alpha < \pi)$, $-\cos\alpha\, e^{-i\,(\pi+\alpha)}(-\pi < \alpha < -\pi/2)$; 2)$2e^{i\,\pi/3}$; 3) $2\sqrt{2}e^{5i\,\pi/6}$; 4) Используя результат задачи 1.1, получим $(\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{-i\,\pi/12}$; 5) $2\cos(\alpha/2)\, e^{i\,\alpha/2}$;
6) $2\sin(\alpha/2)\, e^{i\,(\alpha-\pi)/2}$; 7) $e^{i\,(\alpha-\beta)}\sin\alpha/\sin\beta$.

1.3 $-i\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)$.

1.4 $u = 2^{13}, \quad v = 2^{13}\sqrt{3}$.
Указание. Представить числа $1 \pm i\sqrt{3}$ в показательной форме.

1.5 Указание. 1) Воспользоваться равенством $|z|^2 = z\overline{z}$. Геометрический смысл – известная теорема геометрии: сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей. 2) 0пределив корни уравнения, возвести обе части доказываемого равенства в квадрат и воспользоваться результатом задачи 1).

1.6 1) Прямая, проходящая через начало координат, перпендикулярная вектору z_1; 2) перпендикуляр к середине отрезка $[z_1, z_2]$.
Указание. Воспользоваться геометрическим смыслом суммы и разности двух векторов.

1.7 Указание. Воспользоваться геометрическим смыслом суммы векторов.

1.8 $z = e^{\pm i\,\pi/3}$. **Решение.** Из условия $|z| = 1/|z| \Rightarrow |z| = 1$. Из равенства $|z| = |z-1| = 1$ вытекает, что треугольник с вершинами в точках 0, 1, z равносторонний (сделать чертеж) $\Rightarrow \arg z = \pm\pi/3$.

1.9 Указание. Учесть, что $\overline{z} = 1/z$ при $|z| = 1$.

1.10 $k = \mathrm{tg}\,(\vartheta/2)$.
Указание. Необходимость проверяется непосредственно: $|z|^2 = z\overline{z} = 1$. Для доказательства достаточности разрешить указанное представление относительно k и воспользоваться указанием к предыдущей задаче.

1.11 1) $\sqrt{3}|z_1 + z_2|/2$; 2)$|z_1 - z_2|/2$.
Указание. Учитывая, что при повороте все точки $z \in [z_1, z_2]$ перейдут

соответственно в точки $ze^{2i\pi/3}$, воспользоваться геометрическим смыслом суммы и разности двух векторов и очевидными, например, из геометрических соображений (сделать чертеж) равенствами $|e^{2i\pi/3}+1|=1$, $|e^{2i\pi/3}-1|=\sqrt{3}$.

1.12 Решение. Учитывая, что ε_k – корень уравнения $z^n = 1$ и переписывая последнее в виде $(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) = 0$, в силу условия $\varepsilon_k \neq 1$, получим требуемое.

1.13 Решение. Необходимость. Пусть треугольник с вершинами в точках z_1,z_2,z_3 равносторонний, тогда $z_3 - z_1 = e^{i\pi/3}(z_2 - z_1)$, откуда в силу равенств $1 - e^{i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$, $-e^{i\pi/3} = \varepsilon^2$ и вытекает доказываемое равенство.

Достаточность. Пусть $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$. В силу 1.12 при $n = 3$ имеем $\varepsilon^2 = -(1+\varepsilon) \Rightarrow z_1 - z_3 = \varepsilon(z_3 - z_2)$, аналогично $z_1 - z_2 = \varepsilon^2(z_2 - z_3)$, так как $\varepsilon = -(1+\varepsilon^2) \Rightarrow |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_2|$.
Если числа z_1, z_2, z_3 ориентированы отрицательно, то в условиях задачи надо заменить ε на $\overline{\varepsilon}$ (учесть, что в этом случае тройка чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_3}$ ориентирована положительно).

1.14 Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

1.15 Указание. 1) Правая часть неравенства может быть доказана на основании следующих тождеств:

$$1 = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2} + \frac{z_2}{z_1+z_2}\right) = \operatorname{Re}\frac{z_1}{z_1+z_2} + \operatorname{Re}\frac{z_2}{z_1+z_2}$$

и очевидного неравенства $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$. Левая часть неравенства – следствие его правой части: $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$, $|z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$, Геометрическое смысл – неравенство треугольника. 2) Левая часть неравенства вытекает из правой части неравенства 1). Правая часть неравенства вытекает из очевидного неравенства $2|z|^2 = 2(|\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2) \geq (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2$.

1.16 Указание. Воспользоваться правой частью неравенства 1) предыдущей задачи, применяя его для параллелограмма, построенного на указанных сторонах как на основаниях.

1.17 Указание. Учесть, что геометрический смысл $|\arg z|$ – длина наименьшей из дуг окружности $|z| = 1$ с концами в точках 1 и $z/|z| = e^{i\arg z}$. Сделать чертеж.

1.18 1) $S = -\sum_{k=1}^{n} |z_k| < 0$. 2) **Указание.** Учитывая, что $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, оценить $|S|$ и воспользоваться результатом 1).

1.19 1) Уравнение имеет два действительных корня при $b = d = 0$ и $a^2 \geq 4c$; 2) один действительный корень, равный $-d/b$ $(b \neq 0)$, когда $d^2 - abd + b^2c = 0$.
Указание. Применить теорему Виета.

1.20 $8x^3 + 2px - q = 0$.
Указание. Подставив $z = x + \mathrm{i}\, y$ в уравнение, приравнять нулю действительную и мнимую части полученного выражения и исключить y.

1.21 Решение. $\prod_{k=1}^{n} |b - z_k| = |\prod_{k=1}^{n}(b - z_k)| = \lim_{z\to b} |\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)| = \lim_{z\to b} |z^n - a^n| = |b^n - a^n|$.

1.22 $z_{1,2} = \pm 1/2$, $z_{3,4} = \pm \mathrm{i}\sqrt{3}/2$. **Решение.** Переписав уравнение в виде $4z^2 + 8z\overline{z} - 3 = 0$, и взяв от обеих частей комплексное сопряжение, получим $z^2 = \overline{z}^2 \quad \Rightarrow$ либо $z = x \in \mathbb{R}$, либо $z = \mathrm{i}\, y, y \in \mathbb{R}$. Подставляя эти значения z в уравнение, найдем $x = \pm 1/2$, $y = \pm\sqrt{3}/2$.

1.23 1) $z = (c\overline{a} - b\overline{c})/(|a|^2 - |b|^2)$, если $|a| \neq |b|$; $z = c(1+2t\mathrm{i}\,)/2a$ $(t \in \mathbb{R})$, если $|a| = |b|$ и $c\overline{a} = b\overline{c}$; нет решений, если $|a| = |b|$, $c\overline{a} \neq b\overline{c}$; 2) $z = t$, $z = -b/2a + \mathrm{i}\, t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1.24 1) $z_k = \operatorname{ctg}(\pi k/n)$, $k = \overline{0, n-1}$; 2) $z_k = \operatorname{tg}[(\alpha + \pi k)/n]$, $k = \overline{0, n-1}$ (записать правую часть уравнения в показательной форме); 3) $z_0 = -1$, $z_k = \mathrm{e}^{2\pi k\mathrm{i}\,/n}$, $k = \overline{1, n-1}$ (представить левую часть уравнения в виде $(z+1)(z^n - 1)/(z-1)$; 4) $[a - 1 + \mathrm{i}\,(a+1)]\mathrm{e}^{\pi k\mathrm{i}\,/2}\sqrt{2}/2$, $k = \overline{0, 3}$ (учесть, что правая часть уравнения представима в виде $-(a + \mathrm{i}\,)^4$).

1.25 $r(x) = \cos n\vartheta + x \sin n\vartheta$.
Указание. Учесть, что остаток $r(x)$ является полиномом степени не выше первой и в нулях полинома $Q(x)$ значения $r(x)$ и $P(x)$ совпадают.

1.26 $A_k = \overline{B_k} = B_{7-k} = \overline{A_{7-k}} = -1 + \sqrt{7}\mathrm{i}\,)/2$, $k = 1, 2, 4$.
Указание. Используя результат задачи 1.12, показать, что $A_k + B_k = -1$, а $A_k B_k = 2$. Следовательно, A_k и B_k - корни уравнения $z^2 + z + 2 = 0$ $(z_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}) \Rightarrow A_k = \overline{B_k}$, $k = \overline{1, 6}$. Из 2π-периодичности функции $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta}$ следуют равенства $A_1 = A_2 = A_4$. Нетрудно видеть, что $A_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{7}$, т.к. очевидно $\operatorname{Im} A_1 = \sin 2\pi/7 + \sin 4\pi/7 - \sin \pi/7 > \sin 4\pi/7 > 0$.

1.27 $S_k = 1$, $k \neq mn$ $(k = mn + s,\ s = \overline{1, n-1})$; $S_{mn} = n + 1, \quad m \in \mathbb{Z}$.
Указание. Воспользоваться результатом задачи 1.12.

1.28 $S(z) = (z + 1)^n + n(z^n + 1)$. **Решение.** $S(z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} C_n^j z^{n-j}\varepsilon^{kj} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j z^{n-j} \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{kj}$. Используя результат предыдущей задачи, получим $S(z) = z^n(n+1) + n + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j z^{n-j} = n(z^n + 1) + \sum_{j=0}^{n} C_n^j z^{n-j} = n(z^n + 1) + (z+1)^n$.

1.29 Ответ

$$\cos^n\vartheta = \begin{cases} 2^{1-n}\sum_{k=0}^{m} C_n^k\cos(n-2k)\vartheta, & n=2m+1,\\ 2^{1-n}\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k\cos(n-2k)\vartheta, & n=2m,\end{cases}$$

$$\sin^n\vartheta = \begin{cases} 2^{1-n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k} C_n^k\sin(n-2k)\vartheta, & n=2m+1,\\ 2^{1-n}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-k} C_n^k\cos(n-2k)\vartheta + 2^{-n}C_n^m, & n=2m.\end{cases}$$

Указание. Воспользоваться определением функций $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ и формулой бинома Ньютона.

1.30 1) $2^{-8}(\frac{1}{8}\sin 8\vartheta + \frac{4}{3}\sin 6\vartheta + 14\sin 4\vartheta + 56\sin 2\vartheta + 35\vartheta) + c$;
2) $2^{-8}(\frac{1}{8}\sin 8\vartheta - \frac{4}{3}\sin 6\vartheta + 14\sin 4\vartheta - 56\sin 2\vartheta + 35\vartheta) + c$.

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

1.31 1) $S_1 = (a^{n+1}\cos(n-1)\vartheta - a^n\cos n\vartheta - a\cos\vartheta + 1)/(a^2 - 2a\cos\vartheta + 1)$;
$S_2 = (a^{n+1}\sin(n-1)\vartheta - a^n\sin n\vartheta + a\sin\vartheta)/(a^2 - 2a\cos\vartheta + 1)$.

Указание. Учесть, что $S_1 + \mathrm{i}\,S_2 = \sum_{k=0}^{n-1}(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta})^k$ -сумма n членов геометрической прогрессии;
2)$S_1 = \sin n\vartheta/[\sin\vartheta\cos^{n-1}\vartheta]$, $S_2 = \operatorname{ctg}\vartheta - \cos n\vartheta/[\sin\vartheta\cos^{n-1}\vartheta]$.

Указание. Применить результат 1) при $a = 1/\cos\vartheta$;
3) $S_{1,2} = (A \pm B)/2$, $A = 3n/4 + \sin 2n\vartheta\cos 2(n-1)\vartheta/4\sin 2\vartheta$, $B = \sin n\vartheta\cos(n-1)\vartheta/\sin\vartheta$.

Указание. Использовать формулы удвоения и результат пункта 1).

1.32 1) $S_1 = (2\cos(\vartheta/2))^n\cos n\vartheta/2$, $S_2 = (2\cos(\vartheta/2))^n\sin(n\vartheta/2)$.

Решение. $S_1 + \mathrm{i}\,S_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\vartheta} = (1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta})^n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\vartheta/2}\cos^n(\vartheta/2) = (2\cos(\vartheta/2))^n(\cos(n\vartheta/2) + \mathrm{i}\,\sin(n\vartheta/2))$. Сравнивая действительные и мнимые части, получаем требуемое;
2) $S_1 = (n\cos(n-1)\vartheta - (n-1)\cos n\vartheta - 1)/[2(1-\cos\vartheta)]$, $S_2 = (n\sin(n-1)\vartheta - (n-1)\sin n\vartheta)/[2(1-\cos\vartheta)]$.

Указание. Учесть, что $S_1 = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\vartheta\right)'$, $S_2 = (-\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\vartheta)'$, и воспользоваться результатом задачи 1.31 1).

1.33 1) $n2^{1-n}$; 2) $\sqrt{n}\,2^{1-n}$; 3) $\sqrt{2n+1}\,2^{-n}$.

Решение. 1) Так как числа $z_k = \mathrm{e}^{2\pi k\mathrm{i}/n}$, $k = \overline{0, n-1}$, образуют полную совокупность нулей уравнения $z^n - 1 = 0$, то $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - z_k) \Rightarrow 1 + z + \cdots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(z - z_k)$. Полагая в последнем равенстве $z = 1$, получим $n = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - \mathrm{e}^{2\pi k\mathrm{i}/n}) = \prod_{k=1}^{n-1}|1 - \mathrm{e}^{2\pi k\mathrm{i}/n}| = \prod_{k=1}^{n-1}|\mathrm{e}^{\pi k\mathrm{i}/n}||\mathrm{e}^{-\pi k\mathrm{i}/n} - \mathrm{e}^{\pi k\mathrm{i}/n}| = \prod_{k=1}^{n-1} 2|\sin(\pi k/n)| = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\pi k/n)$. В случаях 2), 3) применить результат пункта 1) при $n = 2m$, $n = 2m+1$ и равенство $\sin(\pi k/n) = \sin\pi(n-k)/n)$.

1.34 Указание. 1) Положить в равенстве $1+z+\cdots+z^{n-1}=\prod_{k=1}^{n-1}(z-z_k)$, полученном при решении предыдущей задачи, $z=-1$; 2) предварительно доказать справедливость равенства $1+z^2+z^4+\cdots+z^{2(n-1)}=\prod_{k=1}^{2n-1}(z-\mathrm{e}^{\pi k\mathrm{i}/n})$.

1.35 2^{-7}.

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи и равенством $\cos(\pi k/15)=-\cos[(15-k)\pi/15]$.

1.36 $\cos(2n+1)\vartheta=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k}\cos^{2(n-k)+1}\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^k$, $a_{2n+1}=2^{2n}$.

Указание. Применить формулу бинома Ньютона, используя справедливость представления $\cos(2n+1)\vartheta=\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(2n+1)\vartheta}=\mathrm{Re}\,\{(\cos\vartheta+\mathrm{i}\,\sin\vartheta)^{2n+1}\}$ и свойства биномиальных коэффициентов.

1.37 $\sin(2n+1)\alpha=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1}\cos^{2(n-k)}\alpha\sin^{2k+1}\alpha$, $x_k=\mathrm{ctg}^2[\pi k/(2n+1)]$, $k=\overline{1,n}$.

Указание. Воспользовавшись указанием к предыдущей задаче, переписать полученное представление в виде $\sin(2n+1)\alpha=\sin^{2n+1}\alpha\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1}(\mathrm{ctg}^2\alpha)^{n-k}$.

1.38 1) $z=\mathrm{e}^{\alpha}$, при $a=\alpha+2\pi k\mathrm{i}$; $z=-\mathrm{e}^{\alpha}$, при $a=\alpha+\pi(2k+1)\mathrm{i}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ – для ветви логарифма, зафиксированной условием $\mathrm{Ln}\,1=2\pi k\mathrm{i}$, $k\in\mathbb{Z}\,(k=0)$; 2) $z=\pm\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\alpha}$, при $a=\alpha+(2\pi k\pm\pi/2)\mathrm{i}$, $\alpha\in\mathbb{R}\,(k=0)$.

1.39 Ветвь фиксируется условием $\ln 1=\mathrm{i}\,10\pi$, тогда $z=-1$, , $\ln(1-\mathrm{i}\,)=\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\,39\pi/4$.

1.40 1) $\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\,(2\pi k+\pi/4)\,(k=0)$; 2) $\ln\sqrt{13}+\mathrm{i}\,[\pi(2k+1)-\mathrm{arctg}\,(3/2)]$ $(k=0)$; 3) $\ln\sqrt{13}+\mathrm{i}\,[\pi(2k-1)+\mathrm{arctg}\,(2/3)]\,(k=0)$.

1.41 Решение. 1) Необходимость. Пусть $z=x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sin x=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x})/2\mathrm{i}=\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$, $|\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}|\le|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}|=1\Rightarrow\sin x\in\mathbb{R}$, $|\sin x|\le 1$.

Достаточность. В силу определения $\sin z$, рассматриваемое уравнение приводится к виду $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,z}-2a\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-1=0$, откуда $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}=\mathrm{i}\,a\pm\sqrt{1-a^2}$ и следовательно $\mathrm{i}\,z=\mathrm{Ln}\,(\pm\sqrt{1-a^2}+\mathrm{i}\,a):=\mathrm{Ln}\,A$. Так как $a\in\mathbb{R}$ и $|a|\le 1\Rightarrow\sqrt{1-a^2}>0\Rightarrow|A|=1$ и далее можно показать, что множество всех искомых решений может быть записано в форме: $z_k=(-1)^k\mathrm{arctg}\,(a/\sqrt{1-a^2})+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
2) При $|a|>1$ $(a\in\mathbb{R})$, $z_k=\mathrm{sign}\,a\,\pi/2+2\pi k\pm\mathrm{i}\,\ln(a+\sqrt{a^2-1})$, $k\in\mathbb{Z}$ (знак $\pm$ поставлен перед логарифмом в силу равенства $(a+\sqrt{a^2-1})(a-\sqrt{a^2-1})=1$).

1.42 1) $(\pi/2\pm\pi/2)+2\pi k\mp\mathrm{i}\,\ln(\sqrt{2}+1)$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\pi/2+2\pi k\mp\mathrm{i}\,\ln(\sqrt{2}+1)$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $(\pi+2\pi k+\mathrm{i}\,\ln 3)/2$, $k\in\mathbb{Z}$.

1.43 1) $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2\pi m}$, $m\in\mathbb{Z}$. В левой части уравнения фиксируется та ветвь общей степенной функции, значение которой в точке $z = \mathrm{i}$ совпадает со значением правой части; 2) $(\ln 2 + 2\pi m + 2\pi k\mathrm{i}\,)/(\pi/2 + 2\pi k)$, $m, k \in \mathbb{Z}$. Ветви многозначных функций в обеих частях уравнения фиксируются условием $\mathrm{Ln}\, 1 = 2\pi k\mathrm{i}$.

Указание. Воспользоваться определением общей показательной и общей степенной функции. Учесть периодичность показательной функции.

1.44 1) $\mathrm{e}^{-2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\mathrm{e}^{-(\pi+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\sqrt{2}[\cos(\pi/4 - \ln\sqrt{2}) + \mathrm{i}\,\sin(\pi/4 - \ln\sqrt{2})]\mathrm{e}^{\pi/4+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.45 1) $2\pi k \pm \mathrm{i}\,\ln(2+\sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi(2k+1) \pm \mathrm{i}\,\ln(2+\sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi(2k+1/2) \pm \mathrm{i}\,\ln(2+\sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi(2k-1/2) \pm \mathrm{i}\,\ln(2+\sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.46 Указание. 1) Учесть, что $t_k^{-1}(z) = (d_k z - b_k)/(-c_k z + a_k) = (\delta^{-1} d_k z - \delta^{-1} b_k)/(-\delta^{-1} c_k z + \delta^{-1} a_k)$, где $\delta = a_k d_k - b_k c_k$. 2) Провести соответствующие вычисления.

2. Геометрия комплексной плоскости

Путем γ в $(\mathbb{C})$ (в $\overline{\mathbb{C}}$)называется непрерывное отображение $z = z(t)$ отрезка $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$). Точки $a = z(\alpha)$, $b = z(\beta)$ называются концами пути (если $\alpha < \beta$, то a – началом, b – концом). Путь называется замкнутым, если $z(\alpha) = z(\beta)$. Два пути γ_1: $z = z_1(t)$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ и γ_2: $z = z_2(t)$, $t \in [\alpha_2, \beta_2]$ называются эквивалентными, если существует непрерывная возрастающая функция $\tau = \tau(t)$, отображающая $[\alpha_1, \beta_1]$ на $[\alpha_2, \beta_2]$, такая, что $z_1(t) = z_2(\tau(t))$, $\forall t \in [\alpha_1, \beta_1]$.

Кривой называется класс эквивалентных путей, т.е. ориентированный образ отрезка $[\alpha, \beta]$ при каком-либо непрерывном отображении $z = z(t)$ (здесь $z(t)$ определяет произвольный путь из выбранного класса эквивалентности). Непрерывные кривые без точек самопересечения называются простыми или кривыми Жордана.

$\mathrm{int}\,\gamma$ $(\mathrm{out}\,\gamma)$ – внутренность (внешность) простой замкнутой кривой γ.

Областью D в $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$) называется множество точек открытое и связное в $\mathbb{C}$ $(\overline{\mathbb{C}})$. Обход границы $\partial\mathrm{D} = \overline{\mathrm{D}}/\mathrm{D}$ области D, при котором область остается слева, называется положительным.

Тройка чисел $\{z_1, z_2, z_3\}$ называется положительно ориентированной, если они следуют друг за другом в указанном порядке при положительном обходе границы треугольника с вершинами в этих точках.

Для того, чтобы успешно справиться с задачами этого параграфа, необходимо умелое сочетание аналитических методов решения с четким представлением геометрической картины поставленной задачи. Наиболее типичными здесь являются задачи на геометрические места точек (г.м.т.), причем, как раз в этих задачах применение одних лишь аналитических методов может сильно усложнить решение.

2.1 Найти следующие г.м.т. (z_0, a, $b \in \mathbb{C}$):
1) $|z - z_0| = r$; 2) $|z - z_0| > r$; 3) $|z - z_0| \le r$; 4) $r < |z - z_0| < R$;
5) $|z - a| + |z - b| = r$; 6) $\big|\,|z - a| - |z - b|\,\big| = r$.

2.2 Определить при $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}$ пути, заданные следующими отображениями: 1) $z = 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$, $0 \le t < 2\pi$; 2) $z = a\cos t$, $0 \le t \le \pi$; 3) $z = a + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$, $-\infty < t < \infty$; 4) $z = a + (b - a)\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$;
5) $z = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + 1/\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$, $0 \le t < 2\pi$ $(\alpha \ne 0)$; 6) $z = t^n + \mathrm{i}\,/t^n$, $-\infty < t < \infty$ $(n \ne 0)$; 7) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\cos t$, $0 \le t < \pi$; 8) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\sin t$, $0 \le t < \pi$.

2.3 Определить г.м.т. ($a, b \in \mathbb{C}$):
1) $\operatorname{Im}\{(b - \overline{b}z)/(1 - z)\} = 0$ $(\operatorname{Im} b \ne 0)$; 2) $|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\arg a} - |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\arg z} = a - z$.

2.4 Определить г.м.т. ($\alpha \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{C}$):
1) $\arg(z - a) = \alpha$, $(-\pi < \alpha \le \pi)$; 2) $\arg(z - a) = \arg(b - a)$; 3) $\arg(z - a) = \arg(a - b)$; 4) $\arg(z - a) = \arg(z - b)$.

2.5 Определить г.м.т. ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{C}$):
1) $\arg[(z - a)/(z - b)] = \alpha$; 2)$\arg(z - a) - \arg(z - b) = \beta$; 3) $\arg(z + a) = \arg z + \arg a$.

2.6 Определить г.м.т. ($a \in \mathbb{C}$): $2\arg(z + a) = \arg z + \arg a$.

2.7 Доказать, что уравнение $Az\overline{z} + B\overline{z} + \overline{B}z + C = 0$, $A, C \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{C}$; $A > 0$, $|B|^2 - AC > 0$ является уравнением окружности. Найти ее центр z_0 и радиус r.

2.8 Показать, что уравнение $B\overline{z} + \overline{B}z + C = 0$, $C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ $(B \ne 0)$ является уравнением прямой. Начертить эту прямую.

2.9 Записать в комплексной форме уравнение пучка прямых, проходящих через фиксированную точку z_0.

2.10 Определить угол между двумя прямыми, заданными в комплексной форме.

2.11 Получить условие ортогональности и параллельности двух прямых, заданных в комплексной форме.

2.12 Записать уравнение прямой, проходящей через точку z_0 и перпендикулярную прямой $\operatorname{Re}\{\overline{B}z\} + D = 0$.

2.13 Начертить прямую, проходящую через точку i и ортогональную прямой $\mathrm{Re}\,\{(1+\mathrm{i}\,)z\}+1=0$.

2.14 Записать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки z_0, z_1.

2.15 Записать уравнение прямой, проходящей через точку z_0 перпендикулярно радиусу-вектору этой точки.

2.16 Записать уравнение прямой, проходящей через точку z_0, 1) перпендикулярную прямой, соединяющей точки z_1 и z_2; 2) параллельную указанной прямой.

2.17 Записать уравнения прямых, определенных в задаче 1.6.

2.18 Определить г.м.т. пересечения прямых семейства $\mathrm{Re}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}z\}=1$, $0\le\alpha<2\pi$ с соответствующим семейством нормалей (т.е. с пучком прямых с центром в точке $z=0$, ортогональных соответствующим прямым данного семейства).

2.19 Определить г.м.т. пересечения прямых семейства
1) $\mathrm{Re}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}z\}=\cos\alpha$, $0\le\alpha<\pi$; 2)$\mathrm{Re}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}z\}=\sin\alpha$, $0\le\alpha<\pi$
с соответствующим семейством нормалей.

2.20 1) Доказать, что площадь треугольника z_1, z_2, z_3 равна $|\mathrm{Im}\,\{(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_1})\}|/2$. 2) Выяснить геометрический смысл выражения $\mathrm{Im}\,\{(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_3})\}$.

2.21 Определить г.м.т. ($a\in\mathbb{C}$):
1) $|\mathrm{Im}\,\{\overline{a}z\}|=|a||z|$; 2) $\mathrm{Im}\,\{\overline{a}z\}=|a||z|$.

2.22 Доказать, что три попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой $\Leftrightarrow$ выполняется одно из следующих равносильных условий: 1) $\mathrm{Im}\,\{(z_1-z_2)/(z_1-z_3)\}=0$;

$$2)\,\mathrm{Im}\,\{(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_3})\}=0;\quad 3)\begin{vmatrix}1&1&1\\ z_1&z_2&z_3\\ \overline{z_1}&\overline{z_2}&\overline{z_3}\end{vmatrix}=0.$$

2.23 Доказать, что условие параллельности двух прямых, проходящих через точки z_1, z_2 и z_3, z_4 соответственно, равносильно выполнению одного из следующих условий: 1) $\mathrm{Im}\,\{(z_1-z_2)/(z_3-z_4)\}=0$;

$$2)\,\mathrm{Im}\,\{(z_1-z_2)(\overline{z_3}-\overline{z_4})\}=0;\quad 3)\begin{vmatrix}1&1&1\\ z_2-z_3&z_1-z_3&z_1-z_4\\ \overline{z_2}-\overline{z_3}&\overline{z_1}-\overline{z_3}&\overline{z_1}-\overline{z_4}\end{vmatrix}=0.$$

Записать соответствующие условия ортогональности указанных прямых.

2.24 Найти точку пересечения двух прямых, проходящих через точки z_1, z_2 и z_3, z_4 соответственно.

2.25 Найти ортоцентр треугольника с вершинами в точках z_1, z_2 и z_3.

2.26 Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1.

2.27 Определить г.м.т., для которых числа 1) $1,\ z,\ 1+z^2$; 2) $z,\ z^2,\ z^4$ лежат на одной прямой.

2.28 Найти точки пересечения прямой, соединяющей точки $a, b \in \mathbb{C}$ $(a \neq b)$ с линией $|(z-a)/(z-b)| = k$.

2.29 Пусть z_1, z_2 – корни уравнения $z^2 - 2az - 2(1+\mathrm{i}\,) = 0$. При каком значении параметра a прямая, проходящая через эти точки, имеет угловой коэффициент, равный единице?

2.30 Найти прямую, проходящую через точку $a \in \mathbb{C}$, касающуюся окружности $\gamma : |z - z_0| = r$, если 1) $a \in \operatorname{out}\gamma$; 2)$a \in \gamma$.

2.31 Найти центр z_0 окружности, описанной около треугольника с вершинами z_1, z_2, z_3.

2.32 Определить точку z^*, симметричную точке z относительно окружностей из задач **2.1 1** и **2.7**.

2.33 Определить точку z^*, симметричную точке z относительно прямой из задачи **2.8**. Убедиться, что полученное условие симметрии оправдано геометрически.

2.34 Получить условие симметричности двух точек относительно прямой $\mathrm{Im}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}z\}=0$. Выяснить его геометрический смысл.

2.35 Показать, что преобразование $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}z$ равносильно композиции двух симметрий относительно двух прямых, проходящих через начало координат. Найти эти прямые. Выяснить геометрический смысл преобразования.

2.36 Показать, что преобразование $w = kz \quad (k > 0)$ представимо в виде композиции двух симметрий относительно двух окружностей с центром в $z = 0$. Найти эти окружности. Выяснить геометрический смысл преобразования.

2.37 Показать, что преобразование $w = az \quad (a \in \mathbb{C})$ представимо в виде композиции четырех симметрий относительно двух окружностей с центром в $z = 0$ и двух прямых, проходящих через $z = 0$. Выяснить геометрический смысл преобразования.

2.38 Показать, что преобразование $w = z + b \quad (b \in \mathbb{C})$ представимо в виде композиции двух симметрий относительно двух параллельных прямых. Найти эти прямые. Выяснить геометрический смысл преобразования.

2.39 Показать, что преобразование $w = a/z \quad (a \in \mathbb{C})$ представимо в виде композиции двух симметрий относительно окружности с центром в $z = 0$ и прямой, проходящей через $z = 0$. Найти эти окружность и прямую.

2.40 Показать, что произвольное дробно-линейное преобразование $w = (az+b)/(cz+d)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0)$ представимо в виде суперпозиции четного числа преобразований симметрии.

2.41 Доказать, что уравнение $|(z - z_1)/(z - z_2)| = k$ при $k > 0$ и $k \neq 1$ является уравнением окружности, найти ее центр z_0 и радиус r. Показать, что точки z_1 и z_2 симметричны относительно этой окружности. Рассмотреть случай $k = 1$.

2.42 Определить г.м.т. $|(z - 2)/(2z - 1)| \leq 1$.

2.43 Записать уравнение окружности, проходящей через три заданные точки z_1, z_2, z_3.

2.44 Даны две окружности $|z - z_{01}| = r_1$, $|z - z_{02}| = r_2$. $z_{01}, z_{02} \in \mathbb{C}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Найти:

1) условие, при котором окружности пересекаются (касаются);

2) точки пересечения z_1, z_2 данных окружностей;

3) угол α в точках пересечения.

2.45 Найти расстояние от точки z_0 до прямой из задачи 2.8.

2.46 Найти проекцию точки z_0 на прямую из задачи 2.8.

2.47 Определить г.м.т. $|z - a| = |\mathrm{Re}\,(\overline{B}z + C/2)|/|B|$ $(a, B \in \mathbb{C},\ C \in \mathbb{R})$.

2.48 Записать уравнение биссектрисы из вершины z_1 треугольника с вершинами в точках z_1, z_2, z_3.

Ответы, указания и решения

2.1 1) Окружность радиуса r с центром в z_0; 2) внешность этой окружности без границы; 3) замкнутый круг; 4) открытое концентрическое кольцо; 5) эллипс с фокусами a и b; 6) гипербола с фокусами a и b.

Указание. Воспользоваться определением соответствующих кривых второго порядка.

2.2 1) Положительно ориентированная окружность $|z - 1| = 2$;
2) ориентированный отрезок $[a, -a]$; 3) прямая, проходящая через точку

a под углом α с $\mathbb{R}_x^+$ (направление обхода совпадает с направлением вектора $e^{i\alpha}$); 4) ориентированный отрезок $[a, b]$; 5) эллипс с фокусами в точках ± 2 и полуосями $|\alpha \pm 1/\alpha|$, ориентированный положительно при $|\alpha| > 1$ и отрицательно при $0 < |\alpha| < 1$, при $\alpha = \pm 1$ – дважды проходимые отрезки $[-2, 2]$ и $[-2i, 2i]$ соответственно; 6) $n = 2k$ – дважды проходимая ветвь гиперболы $xy = 1$ $(x > 0, y > 0)$, $n = 2k + 1$ – обе ветви гиперболы, проходимые в направлении возрастания x при $n > 0$ и убывания x при $n < 0$; 7) положительно ориентированная окружность $|z - 1/2| = 1/2$; 8) положительно ориентированная окружность $|z - i/2| = 1/2$.

2.3 1) Окружность $|z| = 1$; 2) окружность $|z| = |a|$ и луч $\arg z = \arg a + \pi$.

Указание. 1) Воспользоваться равенством $\operatorname{Im} w = (w - \overline{w})/2i$; 2) записать числа z и a в показательной форме.

2.4 1) Луч, исходящий из точки a под углом α к $\mathbb{R}_x^+$; 2) луч, исходящий из точки a и проходящий через точку b; 3) дополнение луча 2) до прямой; 4) дополнение отрезка $[a, b]$ до прямой.

2.5 1) Та открытая дуга окружности $|z - (a + b \pm i(a - b)\operatorname{ctg} \alpha)/2| = |a - b|/|2 \sin \alpha|$ ("плюс", если $0 < |\alpha| \le \pi/2$, "минус", если $\pi/2 < |\alpha| < \pi$), опирающаяся на точки a и b, для которой ориентация тройки чисел $\{a, z, b\}$ совпадает со знаком α; при $\alpha = \pi$ – интервал (a, b); при $\alpha = 0$ – см. 2.4 4).

Решение. Обозначим через $\gamma(z) = \arg(z - a) - \arg(z - b)$ угол между векторами $z - a$ и $z - b$ $(-2\pi < \gamma(z) < 2\pi)$. Так как $-\pi < \alpha \le \pi$ (см. определение главного значения аргумента), то $\gamma(z) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$ и, следовательно, по условию задачи угол при вершине z треугольника a, z, b постоянен (сделать чертеж). Таким свойством обладает множество точек z, лежащих на дуге окружности, опирающейся на точки a и b с центром в точке z_0, для которой тройка чисел $\{a, z_0, b\}$ ориентирована положительно при $\alpha \in (-\pi, -\pi/2) \cup (0, \pi/2)$ и отрицательно, если $\alpha \in [-\pi/2, 0) \cup [\pi/2, \pi)$, при этом ориентация тройки чисел $\{a, z, b\}$ совпадает со знаком α. Центр и радиус этой окружности определяется из соотношений $a - z_0 = (b - z_0)e^{\pm 2\alpha i}$, $r = |a - z_0|$, где выбор знака указан в ответе. Случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ исследовать самостоятельно.

2) Обозначим через Γ – г.м.т. предыдущей задачи, где $\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}$ $(-\pi < \alpha \le \pi;\ -2\pi < \beta < 2\pi)$, через D – полуполосу, ограниченную лучами $\arg(z-a) = \pi$, $\arg(z-b) = \pi$ и отрезком $[a, b]$. Тогда искомое г.м.т. Γ' можно записать в виде: $\Gamma' = \{\Gamma \cap \operatorname{out} D,\ 0 < |\beta| < \pi;\ \Gamma \cap D,\ \pi < |\beta| < 2\pi\}$;

при $\beta = 0$ – г.м.т. задачи 2.4 4); при $\beta = \pi\,(-\pi)$, $\Gamma' = \{(a, b)$ пусто, если $\operatorname{Im} a < \operatorname{Im} b$; пусто $((a, b))$, если $\operatorname{Im} a > \operatorname{Im} b$; если $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b$, то (a, b) пусто, при $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b$; пусто $((a, b))$, при $\operatorname{Re} a < \operatorname{Re} b\}$.
Указание. Показать, что при $0 < |\beta| < \pi$ из г.м.т. предыдущей задачи исключается множество точек z, для которых $\gamma(z) = \beta \pm 2\pi$ (знак противоположен знаку β), а при $\pi < |\beta| < 2\pi$ – множество точек z, для которых $\gamma(z) = \alpha$.
3) Открытая дуга окружности $|z + \mathrm{i}\,|a|^2/[2\operatorname{Im} a]| = |a|^2/[2|\operatorname{Im} a|]$, опирающаяся на точки $-a$, 0, для которой ориентация тройки чисел $\{-a, z, 0\}$ совпадает со знаком $\arg a$; при $\arg a = \pi$ – интервал $(-a, 0)$; при $\arg a = 0$ – дополнение отрезка $[-a, 0]$ до прямой.
Указание. Переписав условие задачи в виде $\arg(z + a) - \arg z = \arg a$, воспользоваться результатом предыдущей задачи.

2.6 Луч $\arg z = \arg a$ и открытая дуга окружности $|z| = |a|$, соединяющая точки $-a$ и $-|a|$ и содержащая точку a, если $a \neq -|a|$; при $a = -|a|$ $(a < 0)$ – полуокружность $|z| = |a|$, $\operatorname{Im} z > 0$, содержащая точку a.
Указание. Переписав условие задачи в виде $\arg(z + a) - \arg z = \arg a - \arg(z + a)$, заключаем, что либо все точки 0, z, a, $z + a$ лежат на одном луче и, следовательно, $\arg z = \arg a$, либо четырехугольник с вершинами в этих точках – ромб, откуда $|z| = |a|$, т.е. $z = |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$. Полагая $a = |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$, получим $\arg(z + a) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}) = \arg\{2\cos[(\varphi - \alpha)/2]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\varphi+\alpha)/2}\} = (\varphi + \alpha)/2 \Leftrightarrow |\varphi - \alpha| < \pi$. Легко видеть, что в этом и только в этом случае выполняется условие задачи. Из последнего неравенства, учитывая что $-\pi < \varphi \leq \pi$, получим $\alpha - \pi < \varphi < \pi$, если $0 \leq \alpha \leq \pi$ и $-\pi < \varphi < \pi + \alpha$, если $-\pi < \alpha \leq 0$.

2.7 $z_0 = -B/A, \quad r = \sqrt{|B|^2 - AC}/A$.
Решение. Так как $A > 0$, то разделив на A, запишем уравнение в виде

$$(z + B/A)(\overline{z} + \overline{B}/A) = (B\overline{B} - AC)/A^2 \quad \Rightarrow \quad |z + B/A| = \sqrt{|B|^2 - AC}/A.$$

2.8 Прямая проходит через точку $z_0 = -C/(2\overline{B})$ перпендикулярно вектору B.
Решение. Из уравнения $\operatorname{Re}\,\left\{\overline{B}[z + C/(2\overline{B})]\right\} = 0$, эквивалентного исходному, следует $\overline{B}[z + C/(2\overline{B})] = \mathrm{i}\,t|B|^2$ для $\forall t \in \mathbb{R}$ (множитель $|B|^2$ взят для удобства). Таким образом, искомое г.м.т. $z - z_0 = \mathrm{i}\,Bt$ является прямой, поскольку из последнего равенства следует $\operatorname{Arg}(z - z_0) = \operatorname{Arg} B \pm \pi/2$ (см. также задачу 2.2,3).

2.9 $\mathrm{Re}\,\{\overline{B}(z - z_0)\} = 0$, $B \in \mathbb{C}$ (можно считать $|B| = 1$).

2.10 $|\arg(B_2/B_1)|$.

Указание. Достаточно рассмотреть прямые, проходящие через начало координат ($C = 0$), и учесть, что точки $\mathrm{i}\,B_1$ и $\mathrm{i}\,B_2$ принадлежат соответствующим прямым.

2.11 $\mathrm{Re}\,\{B_2/B_1\} = 0$ ($\mathrm{Re}\,\{\overline{B_1}B_2\} = 0$) – условие ортогональности; $\mathrm{Im}\,\{B_2/B_1\} = 0$ ($\mathrm{Im}\,\{\overline{B_1}B_2\} = 0$) – условие параллельности.

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

2.12 $\mathrm{Im}\,\{\overline{B}(z - z_0)\} = 0$.

Указание. Записать условие ортогональности вектора $z - z_0$, где z – произвольная точка искомой прямой, направляющему вектору $\mathrm{i}\,B$ данной прямой.

2.13 Указание. Воспользоваться результатом задач 2.8 и 2.12.

2.14 $\mathrm{Im}\,\{(\overline{z_1} - \overline{z_0})(z - z_0)\} = 0$, или $\mathrm{Im}\,\{(z - z_0)/(z - z_1)\} = 0$.

Указание. Записать условие коллинеарности векторов $z_1 - z_0$ и $z - z_0$, или $z - z_0$ и $z - z_1$, где z – произвольная точка на прямой.

2.15 $\mathrm{Re}\,\{\overline{z_0}(z - z_0)\} = 0$.

2.16 1) $\mathrm{Re}\,\{(\overline{z_2} - \overline{z_1})(z - z_0)\} = 0$; 2) $\mathrm{Im}\,\{(\overline{z_2} - \overline{z_1})(z - z_0)\} = 0$.

2.17 1) $\mathrm{Re}\,\{\overline{z_1}z\} = 0$; 2) $\mathrm{Re}\,\{(\overline{z_2} - \overline{z_1})(2z - (z_1 + z_2))\} = 0$.

2.18 $|z| = 1$. **Решение.** Уравнение нормали к соответствующей прямой указанного семейства имеет вид $\mathrm{Im}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}z\} = 0$ (см. задачу 2.12), поэтому точка их пересечения определяется из соотношения $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}z = 1$, $0 \le \alpha < 2\pi$.

2.19 1) $|z - 1/2| = 1/2$; 2) $|z - \mathrm{i}\,/2| = 1/2$.

Указание. Воспользоваться результатом задач 2.2 7), 2.2 8) и предыдущей задачи.

2.20 1) **Указание.** Записать числа $z_1 - z_2$ и $z_1 - z_3$ в показательной форме; 2) $\mathrm{Im}\,\{(\overline{z_1} - \overline{z_3})(z_1 - z_2)\} = \pm S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $z_1 - z_2$ и $z_1 - z_3$ как на основаниях, причем знак "плюс"или "минус"выбирается в соответствии с тем, является тройка чисел $\{z_1, z_2, z_3\}$ ориентированной положительно или отрицательно соответственно.

2.21 1)$\mathrm{Re}\,\{\overline{a}z\} = 0$; 2) луч на прямой $\mathrm{Re}\,\{\overline{a}z\} = 0$, для которого тройка чисел $\{0, z, a\}$ ориентирована отрицательно.

2.22 Указание. Воспользоваться результатом задачи 2.20.

2.23 Указание. Воспользоваться результатом задачи 2.11.

2.24 $[(z_4 - z_3)\mathrm{Im}\,\{z_1\overline{z_2}\} - (z_2 - z_1)\mathrm{Im}\,\{z_3\overline{z_4}\}]/\mathrm{Im}\,\{(\overline{z_2} - \overline{z_1})(z_4 - z_3)\}$.

Указание. Записав условие принадлежности точек z_0, z_1, z_2 и z_0, z_3, z_4

соответствующим прямым, исключить из полученных соотношений $\overline{z_0}$.

2.25 $\mathrm{i}\,(z_1\mathrm{Re}\,\{\overline{z_1}(z_2-z_3)\}+z_2\mathrm{Re}\,\{\overline{z_2}(z_3-z_1)\}+z_3\mathrm{Re}\,\{\overline{z_3}(z_1-z_2)\})/\mathrm{Im}\,\{\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1\}$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 2.16 1). Проверить, что ответ не изменяется при циклической перестановке вершин треугольника.

2.26 Решение. Обозначим через $z_{ij} = (z_i + z_j)/2$ – середину стороны треугольника, соединяющей вершины z_i и z_j $\quad (z_{ij} = z_{ji},\ i,j = 1,2,3)$, а через w_{ij} – точку пересечения медиан, выходящих из вершин z_i и z_j. Используя результат задачи 2.22, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_{23} & w_{12} \\ \overline{z_1} & \overline{z_{23}} & \overline{w_{12}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 & z_{13} & w_{12} \\ \overline{z_2} & \overline{z_{13}} & \overline{w_{12}} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_i & w_0 & w_{12} \\ \overline{z_i} & \overline{w_0} & \overline{w_{12}} \end{vmatrix} = 0,$$

$i = 1,2$, где $w_0 = (z_1 + z_2 + z_3)/3$ (в определителях к второму столбцу прибавлен первый, домноженный на $1/2$). Последнее условие показывает, что точки z_1, w_0, w_{12} и z_2, w_0, w_{12} соответственно лежат на прямых $\Rightarrow \quad w_0 = w_{12}$. Аналогично показывается, что $w_{12} = w_{13} = w_{23} = w_0$.

Чтобы доказать вторую часть утверждения, достаточно рассмотреть отношение

$$|w_0 - z_1|/|z_{23} - w_0| = 2/1.$$

2.27 1) Прямая $\mathrm{Im}\,z = 0$, окружность $|z-1| = 1$; 2) прямые $\mathrm{Im}\,z = 0$, $\mathrm{Re}\,z = -1/2$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 2.22.

2.28 $z_{12} = (a \pm kb)/(1 \pm k) \quad (k \neq 1), \quad z = (a+b)/2 \quad (k = 1)$.

Указание. Уравнение прямой, проходящей через точки a и b, записать (см. 2.14) в виде $\mathrm{Im}\,\{(z-a)/(z-b)\} = 0 \Rightarrow |(z-a)/(z-b)| = \pm(z-a)/(z-b)$.

2.29 $\beta^2 - \alpha^2 = 2 \quad (a = \alpha + \mathrm{i}\,\beta)$.

Указание. Уравнение искомой прямой l записать в виде $\mathrm{Re}\,\{(1+\mathrm{i}\,)(z-a)\} = 0$ $(a = (z_1+z_2)/2 \in l)$. Исключить z и $\overline{z}$ из этого уравнения, исходного и комплексно сопряженного к исходному.

2.30 1) $\mathrm{Re}\,\{\overline{B}(z-a)\} = 0$, $B = (r \pm \mathrm{i}\,\sqrt{|a-z_0|^2 - r^2})/(\overline{a} - \overline{z_0})$ $(|B| = 1)$.

Решение. Пусть z_1 – точка касания. Тогда уравнение касательной запишется в виде $\mathrm{Re}\,\{(\overline{z_1} - \overline{z_0})(z-a)\} = 0$ (см. 2.16 1)) $\Rightarrow (\overline{z_1} - \overline{z_0})(z_1 - a) + (z_1 - z_0)(\overline{z_1} - \overline{a}) = 0$. Умножая на $(\overline{z_1} - \overline{z_0})(\overline{z_1} - \overline{a})$ обе части последнего равенства и учитывая, что $|z_1 - z_0|^2 = r^2$, $|z_1 - a|^2 = |a - z_0|^2 - r^2$, получим

для определения $\overline{B}=\overline{z_1}-\overline{z_0}$ квадратное уравнение. Нормировать B.
2)$\mathrm{Re}\,\{(\overline{z_0}-\overline{a})(z-a)\}=0$.
Указание. Воспользоваться результатом задачи 2.16 1).

2.31

$$z_0=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad \Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\ z_1&z_2&z_3\\ \overline{z_1}&\overline{z_2}&\overline{z_3}\end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\ z_1&z_2&z_3\\ |z_1|^2&|z_2|^2&|z_3|^2\end{vmatrix}.$$

Решение. Имеем $(z_i-z_0)(\overline{z_i}-\overline{z_0})=r^2$, $i=1,2,3$, где r – радиус окружности. Это приводит нас к линейной системе $\overline{z_i}z_0+z_i\overline{z_0}+r^2-|z_0|^2=|z_i|^2$, $i=1,2,3$ относительно z_0, $\overline{z_0}$, $r^2-|z_0|^2$.

2.32 $z^*=z_0+r^2/(\overline{z}-\overline{z_0})$, $Az^*\overline{z}+\overline{B}z^*+B\overline{z}+C=0$.
Решение. Пусть z^* – точка симметричная точке z относительно окружности $|z-z_0|=r$. Тогда по определению

$$|z^*-z_0||z-z_0|=r^2,\quad \arg(z^*-z_0)=\arg(z-z_0),$$

что равносильно условию $(z^*-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0})=r^2$. Отметим полезное для дальнейшего следствие: $z^*=\infty$ при $z=z_0$. Учитывая, что уравнение окружности из задачи 2.7 может быть записано в виде $(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0})=r^2$, получаем простое правило для нахождения симметричных точек: чтобы определить точку z^*, симметричную точке z относительно окружности, нужно в уравнении окружности, записанном в переменных z и $\overline{z}$, заменить z на z^*.

2.33 $\overline{B}z^*+B\overline{z}+C=0$.
Указание. Уравнение прямой можно рассматривать как частный случай уравнения окружности при $A=0$, поэтому симметричные точки могут быть получены по тому же правилу (см. предыдущую задачу). Убедиться, что $|z^*-w|=|z-w|$ для любой точки w, лежащей на прямой.

2.34 $z^*=\mathrm{e}^{2\alpha\mathrm{i}}\,\overline{z}$ – симметрия относительно действительной оси ($z_1=\overline{z}$) и поворот на угол 2α вокруг начала координат ($z^*=\mathrm{e}^{2\alpha\mathrm{i}}\,z_1$).
Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

2.35 Если $\alpha_2-\alpha_1=\alpha/2$, то прямые $\mathrm{Im}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha_1}z\}=0$, $\mathrm{Im}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha_2}z\}=0$, искомые. Поворот на угол α вокруг начала координат.
Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

2.36 Если $r_2^2/r_1^2=k$, то окружности $|z|=r_1$, $|z|=r_2$ искомые. Растяжение (гомотетия) в k - раз с центром гомотетии в точке $z=0$.

2.37 Если $r_2^2/r_1^2 = |a|$, $2(\alpha_2 - \alpha_1) = \arg a$, то окружности $|z| = r_1$, $|z| = r_2$ и прямые $\mathrm{Im}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha_1} z\} = 0$, $\mathrm{Im}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha_2} z\} = 0$ искомые. Гомотетия с центром в точке $z = 0$ (растяжение в $|a|$) раз и поворот на угол $\arg a$.

2.38 Если $\alpha = \arg b$, $d - c = |b|^2 \quad (d > c)$, то прямые $2\mathrm{Re}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} z\} + d = 0$, $2\mathrm{Re}\,\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} z\} + c = 0$ искомые. Параллельный перенос на вектор b.
Указание. Взяв параллельные прямые в указанной форме, осуществить симметрии относительно этих прямых в порядке их следования.

2.39 $|z| = \sqrt{|a|}$, $\mathrm{Im}\,\{\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\,\arg a)/2} z\} = 0$.
Указание. Воспользоваться результатом задач 2.32, 2.34.

2.40 Указание. Представив дробно-линейное преобразование в виде $w = A + B/(z + C)$, $A, B, C \in \mathbb{C}$, воспользоваться результатом задач 2.37 - 2.39.

2.41 $z_0 = (k^2 z_2 - z_1)/(k^2 - 1)$, $r = k|z_2 - z_1|/|k^2 - 1|$. При $k = 1$ – перпендикуляр к середине отрезка $[z_1, z_2]$.
Указание. Воспользоваться результатом задач 2.7, 2.32, 1.6,2).

2.42 $|z| \geq 1$.
Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

2.43 $|z - z_0| = r$ где,

$$z_0 = \mathrm{i}\,[z_1(|z_3|^2 - |z_2|^2) + z_2(|z_1|^2 - |z_3|^2) + z_3(|z_2|^2 - |z_1|^2)]/2\mathrm{Im}\,\{z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}\},$$

$r = |z_k - z_0|, \forall k = 1, 2, 3$.
Указание. Записав уравнение искомой окружности в комплексной форме: $z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 - r^2 = 0$, положить $z = z_1$, $r^2 = (z_k - z_0)(\overline{z_k} - \overline{z_0})$ при $k = 2$, $k = 3$ соответственно и из полученных равенств исключить $\overline{z_0}$.

2.44 1) Пусть $R = |z_{01} - z_{02}|$, тогда $|r_1 - r_2| < R < r_1 + r_2$ – условие пересечения ($R = r_1 + r_2$ – условие касания).
Указание. Воспользоваться неравенством 1.15,1) (неравенство треугольника).

2) $z_{1,2} = (z_{01} + z_{02})/2 -$
$(z_{01} - z_{02}) \left(r_1^2 - r_2^2 \pm \sqrt{(R^2 - (r_1 - r_2)^2)(R^2 - (r_1 + r_2)^2)} \right) /(2R^2)$.

Указание. Записав уравнения окружностей в комплексной форме (2.7), исключить $\overline{z}$.

3) $\cos\alpha = (R^2 - r_1^2 - r_2^2)/2r_1 r_2$.

Указание. Учитывая ортогональность касательной и радиуса-вектора соответствующей окружности в точке касания, показать, что угол при вершине z_k треугольника $z_{01}z_{02}z_k$, $k = 1, 2$ равен $(\pi - \alpha)$, где α –

искомый угол между касательными в точках касания и воспользоваться теоремой косинусов.

2.45 $|\mathrm{Re}\,(\overline{B}z_0) + C/2|/|B|$.

Указание. Искомое расстояние равно $|z_0 - z_0^*|/2$, где z_0^* – точка, симметричная с z_0 относительно прямой.

2.46 $[\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(\overline{B}z_0) - C/2]/\overline{B}$.

Указание. Проекция точки z_0 на прямую равна $(z_0 + z_0^*)/2$, где z_0^* – точка, симметричная с z_0 относительно прямой.

2.47 Парабола с фокусом a и директрисой $\overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$.

Указание. Смотри определение параболы.

2.48 $\mathrm{Im}\,\{[|z_3 - z_1|(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + |z_2 - z_1|(\overline{z_3} - \overline{z_1})](z - z_1)\} = 0$.

Указание. Воспользоваться результатом задач 2.43, 2.14 и знак соответствующих выражений выбрать согласно 2.20.

3. Конформные отображения

Функция $f(z)$, определенная на множестве $D \in \overline{\mathbb{C}}$, называется однолистной, если $f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2, \forall z_1, z_2 \in D$.

Справедлива следующая теорема существования

Теорема Римана о конформном отображении. *Любые две односвязные области D и D^*, границы которых состоят более чем из одной точки, конформно эквивалентны, т.е. в существует голоморфная и однолистная функция $w = f(z)$, отображающая D на D^*.*

Условиями $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$ при произвольно заданных $z_0 \in D$, $w_0 \in D^*$ и $\alpha \in (-\pi, \pi]$ отображение $f(z)$ определяется единственным образом.

В вопросах конструктивного построения конформного отображения одной области на другую чрезвычайно полезно использовать

Принцип симметрии Римана-Шварца. *Пусть область $D \in \overline{\mathbb{C}}$ ограничена жордановой кривой Γ, в состав которой входит дуга l окружности L или отрезок l прямой L. Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна на $D \cup l$, голоморфна в D, а на l принимает значения, принадлежащие некоторой окружности или прямой Γ. Тогда $f(z)$ продолжается через l в область D^*, симметричную с D относительно L, до функции $F(z)$, голоморфной в области $D \cup l \cup D^*$. Такое продолжение единственно и дается формулой*

$$F(z) = \{\, f(z), \quad z \in D \cup l; \quad f^*(z^*), \quad z \in D^* \,\},$$

где звездочка над аргументом – симметрия относительно L, а над функцией – симметрия относительно Γ.

Чтобы овладеть практикой конформных отображений, следует твердо знать свойства основных элементарных функций: дробно-линейной, показательной, степенной, логарифмической, функции Жуковского и обратной к ней, а также некоторые простейшие отображения, осуществляемые этими функциями (см. например [1], [2], [4]). Кроме того, важно знать и уметь применять основные принципы и понятия теории конформных отображений (принцип соответствия границ, принцип сохранения области, геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции, принцип симметрии и т.д.). При этом рациональная техника конформных отображений состоит, как правило, в умении представить искомое отображение в виде суперпозиции некоторых элементарных – "табличных" отображений (к последним условно можно отнести преобразования, которые будут получены при решении задач 3.1 - 3.13).

При построении отображений методом симметрии обычно непосредственно аналитическое продолжение не осуществляют, а пользуясь фактом его существования и единственности, показывают, что построенная функция определена и в симметричной половине области, а, значит, совпадает со своим аналитическим продолжением.

3.1 Найти целую линейную функцию $w = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, переводящую отрезок $[z_1, z_2]$ в отрезок $[w_1, w_2]$ $(z_i, w_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2)$.

3.2 Записать общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость 1) на себя; 2) на нижнюю полуплоскость.

3.3 Записать дробно-линейное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость 1) на себя; 2) на нижнюю полуплоскость так, чтобы отрезок $[\alpha, \beta]$ $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$ вещественной оси перешел в $\mathbb{R}_x^-$.

3.4 Пусть γ – произвольная прямая или окружность. Найти ее образ при дробно-линейном преобразовании $w = (az + b)/(cz + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.

3.5 Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость на 1) внутренность; 2) внешность единичного круга.

3.6 Выяснить, во что преобразуют отображения а) $w = 1/z$, б) $w =$

$(z-1)/(z+1)$ 1) единичную окружность; 2) вещественную ось; 3) мнимую ось?

3.7 Выяснить, куда переводит отображение $w=(z-a)/(z-b)$ отрезок $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{C}$.

3.8 Определить образ при отображении показательной функцией $w=\mathrm{e}^z$ следующих областей: 1) полоса $0<\operatorname{Im}z<2\pi$; 2) полоса $-\pi<\operatorname{Im}z<\pi$; 3) полоса $0<\operatorname{Im}z<\pi$; 4) полуполоса $0<\operatorname{Im}z<2\pi$, $-\infty<\operatorname{Re}z<0$; 5) полуполоса $0<\operatorname{Im}z<\pi$, $-\infty<\operatorname{Re}z<0$; 6) полуполоса $0<\operatorname{Im}z<\pi$, $0<\operatorname{Re}z<\infty$; 7) прямоугольник $-\pi<\operatorname{Im}z<\pi$, $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$; 8) полоса $h<\operatorname{Im}z<h+2\pi$.

3.9 Найти образ следующих областей при отображении однозначной ветвью функции $w=\operatorname{Ln}z$, определенной одним из условий а) $\operatorname{Ln}1=0$; б) $\operatorname{Ln}1=2\mathrm{i}\pi$ (в случаях 1), 4) значение $\operatorname{Ln}1$ фиксируется на верхнем берегу разреза): 1) плоскость с разрезом по $\mathbb{R}_x^+$; 2) плоскость с разрезом по $\mathbb{R}_x^-$; 3) верхняя полуплоскость; 4) внутренность единичного круга с разрезом по по сегменту $[0,1]$; 5) единичный полукруг $D^+=\{z;\,|z|<1,\,\operatorname{Im}z>0\}$; 6) внешность единичного круга в верхней полуплоскости $D^-=\{z;\,|z|>1,\,\operatorname{Im}z>0\}$; 7) кольцо, образованное концентрическими окружностями с центром в $z=0$ радиусов e^α и e^β $(a<b)$ с разрезом по отрезку $[-\mathrm{e}^\beta,-\mathrm{e}^\alpha]$; 8) плоскость с разрезом по лучу $\arg z=h$ $(-\pi<h\le\pi)$.

3.10 1) Найти функцию, отображающую сектор $0<\arg z<\alpha$ конформно на сектор $0<\arg w<\beta$ $(0<\alpha,\beta\le 2\pi)$; 2) Найти образ сектора $0<\arg z<2\pi/n$ при отображении функцией $w=z^n$, $n\in\mathbb{N}$.

3.11 Выяснить, во что преобразует однозначная ветвь функции $w=\sqrt{z}$: 1) верхнюю полуплоскость; 2) плоскость с разрезом по $\mathbb{R}_x^+$; 3) плоскость с разрезом по $\mathbb{R}_x^-$; 4) внутренность единичного круга с разрезом по сегменту $[0,1]$, если ветвь фиксируется условием а) $w(\mathrm{i})=\sqrt{2}(1+\mathrm{i})/2$; б) $w(\mathrm{i})=-\sqrt{2}(1+\mathrm{i})/2$.

3.12 Выяснить, во что функция Жуковского $w=(z+1/z)/2$ преобразует: 1) внутренность единичного круга; 2) внешность единичного круга; 3) единичный полукруг $D^+=\{z;\,|z|<1,\,\operatorname{Im}z>0\}$; 4) внешность единичного круга в верхней полуплоскости $D^-=\{z;\,|z|>1,\,\operatorname{Im}z>0\}$; 5) внутренность единичного круга, лежащего в нижней полуплоскости $(D^+=\{z;\,|z|<1,\,\operatorname{Im}z<0\})$; 6) внешность единичного круга в нижней полуплоскости $(D^-=\{z;\,|z|>1,\,\operatorname{Im}z<0\})$; 7) верхнюю полуплоскость; 8) нижнюю полуплоскость; 9) пересечение внутренности единичного круга с первым квадрантом $(D^+=\{z;\,|z|<1,\,\operatorname{Im}z>0,\,\operatorname{Re}z>0\})$;

10) часть внешности единичного круга, лежащая в первом квадранте ($D^+ = \{z;\ |z| > 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0,\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$); 11) область $D = \{z;\ 1/2 < |z| < 2,\ \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$.

3.13 Найти образ при отображении однозначной ветвью обратной функции Жуковского $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ следующих областей: 1) плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$; 2) верхнюю полуплоскость; 3) плоскость с разрезами $[-\infty, -1]$, $[1, \infty]$ по вещественной оси, если ветвь фиксируется условием а) $w(\mathrm{i}) = (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$; б) $w(\mathrm{i}) = (1 + \sqrt{2})\mathrm{i}$.

В задачах 3.14 - 3.21 отобразить указанные области на верхнюю полуплоскость.

3.14 Полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ с разрезом $[0, \mathrm{i}\, h]$, $h > 0$.

3.15 Полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ с разрезом по дуге единичной окружности $\{z :\ |z| = 1, 0 < \arg z < \alpha < \pi\}$.

3.16 Полосу $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$ с разрезом $[0, \mathrm{i}\, \pi/2]$.

3.17 Полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ с разрезами по отрезкам $[0, \mathrm{i}\, h_1]$, $[\mathrm{i}\, h_2, \infty]$ на $\mathbb{R}^+_y$ $(0 < h_1 < h_2)$.

3.18 Полуполосу $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$, $-\infty < \mathrm{Re}\, z < 0$.

3.19 Полуполосу $0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi$, $-\infty < \mathrm{Re}\, z < 0$; с разрезом по лучу $\mathrm{Im}\, z = \pi$, $-\infty < \mathrm{Re}\, z \le x_0 < 0$.

3.20 Область, ограниченную окружностями $|z - 1| = 1$, $|z + 1| = 1$ с разрезом $[-\mathrm{i}, \mathrm{i}]$.

3.21 Область между касающимися окружностями $|z - \mathrm{i}/2| = 1/2$, $|z - 3\mathrm{i}/2| = 3/2$ с разрезами $[\mathrm{i}, 3\mathrm{i}/2]$, $[2\mathrm{i}, 3\mathrm{i}]$.

3.22 Отобразить область, заданную неравенствами $|z - \mathrm{i}| < 2$, $|z + \mathrm{i}| < 2$, $\mathrm{Re}\, z > 0$, на полуполосу $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$, $-\infty < \mathrm{Re}\, z < 0$.

3.23 Отобразить область, заданную неравенствами $|z - 1| < \sqrt{2}$, $\mathrm{Re}\, z < 0$, на единичный полукруг в верхней полуплоскости.

Отобразить указанные в задачах 3.24–3.29 области на верхнюю полуплоскость, используя принцип симметрии.

3.24 Верхнюю полуплоскость с разрезами $[0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}]$, $[0, \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}]$.

3.25 Верхнюю полуплоскость с разрезами вдоль отрезка $[\mathrm{i}/2, 2\mathrm{i}]$ и дуге единичной окружности $\{z :\ |z| = 1,\ 0 < \arg z < 3\pi/4\}$.

3.26 Внешность единичного круга в верхней полуплоскости ($D = \{z;\ |z| > 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$) с разрезами по отрезкам $\arg z = \pi/4$, $\arg z = 3\pi/4$, $1 < |z| < \sqrt[4]{2}$.

3.27 Область $D = \{z :\ |z - 1/2| > 1/2,\ |z + 1/2| > 1/2,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ (верхняя полуплоскость с двумя выкинутыми полукругами) с разрезом

$[0, \mathrm{i}\,h]$, $h > 0$.

3.28 Полосу $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$, разрезанную вдоль отрезка $[-\mathrm{i}\,h, \mathrm{i}\,h]$ $(0 < h < \pi)$ и $\mathbb{R}_x^+$.

3.29 Полуполоса $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$, $-\infty < \operatorname{Re} z < 0$ с разрезами $[-\infty, -h_1]$ по $\mathbb{R}_x^-$, $[-h_2 + \mathrm{i}\,\pi/2, \mathrm{i}\,\pi/2]$, $[-h_2 - \mathrm{i}\,\pi/2, -\mathrm{i}\,\pi/2]$ $(h_1 > 0,\ h_2 > 0)$.

Ответы, указания и решения

3.1 $w = w_1 + (z - z_1)(w_2 - w_1)/(z_2 - z_1)$.
Указание. Параметры a, b искомого отображения $w = az + b$ определяются из системы $w_k = az_k + b$, $k = 1, 2$.

3.2 $w = (az + b)/(cz + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 1) $ad - bc > 0$; 2) $ad - bc < 0$.
Решение. В силу принципа соответствия границ искомое конформное преобразование $w = w(z)$ отображает вещественную ось на себя. Выберем на вещественной оси по три различных произвольных точки w_k и z_k, $k = 1, 2, 3$, играющие роль образов и прообразов соответственно $(w(z_k) = w_k)$. На основании свойства инвариантности ангармонического отношения получим

$$\frac{w - w_1}{w - w_2}\,\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\,\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

(если $w_k = \infty$ или $z_j = \infty$, то соответствующая дробь в ангармоническом отношении заменяется единицей). Разрешая выписанное равенство относительно w, получим дробно-линейное преобразование с вещественными коэффициентами a, b, c, d. Верхняя полуплоскость при полученном преобразовании будет переходить в себя или в нижнюю полуплоскость, если соответственно потребовать, чтобы угол поворота $(\arg w'(x))$ в точках вещественной оси был нулевым или равнялся π. Поскольку $w'(x) = (ad - bc)/(cx + d)^2$, то, соответственно, должно быть $ad - bc > 0$ в случае 1) и $ad - bc < 0$ в случае 2).

3.3 1) $w = k(z - \beta)/(z - \alpha)$; 2) $w = k(z - \alpha)(z - \beta)$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.
Решение. Выписанные преобразования переводят вещественную ось на себя с соблюдением указанного в задаче требования: образами точек α или β являются точки 0 или ∞, при этом в силу выбора знака у множителя k множество $\mathbb{R}\backslash[\alpha, \beta]$ переходит в $\mathbb{R}_x^+$ (точка этого множества $z = \infty$ переходит в точку $w = k > 0$). Выбор преобразования определяется соображениями, указанными в задаче 3.2.

3.4 Решение. Первый способ. В силу кругового свойства дробно-линейного преобразования образом γ является прямая, если прообраз

бесконечности – точка $z = -d/c$ лежит на γ, и окружность, если $-d/c \notin \gamma$. Если прямая γ переходит в прямую, то последняя будет проходить через точку $w = a/c$ (образ бесконечности) и для ее построения достаточно найти образ любой точки на γ. Если прямая γ переходит в окружность, то точка $w = a/c$ принадлежит этой окружности, а точка z^*, симметричная с точкой $z = -d/c$ относительно γ, будет являться прообразом центра искомой окружности (см. замечание к решению задачи 2.32). Если окружность γ переходит в прямую, то образ w_1 центра γ будет симметричен с точкой $w = a/c$ относительно искомой прямой и ее уравнение запишется в виде 1.6 2) (см. также 2.41). Наконец, если окружность γ переходит в окружность, то точка, симметричная с $z = -d/c$ относительно γ, перейдет в центр искомой окружности и для ее построения достаточно найти образ любой точки на γ.
Второй способ. Запишем уравнение окружности γ в комплексной форме 2.7 (прямая получается отсюда как частный случай при $A = 0$). Разрешая это уравнение относительно z, получим $z = (-B\overline{z} - C)/(A\overline{z} + \overline{B})$ $(A, C \in \mathbb{R};\ B \in \mathbb{C};\ |B|^2 - AC > 0)$. Таким образом, z связано с $\overline{z}$ на γ посредством дробно-линейного преобразования $l(z)$ $(z = l(\overline{z}))$. Согласно 1.46, $l(z)$ и данному дробно-линейному преобразованию $t(z) = (az + b)/(cz + d)$ можно поставить в соответствие матрицы

$$L = \begin{pmatrix} -B & -C \\ A & \overline{B} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Следуя указанию к задаче 1.46, обратное преобразование $t^{-1}(z)$ возьмем в виде $t^{-1}(z) = (\delta^{-1}dz - \delta^{-1}b)/(-\delta^{-1}cz + \delta^{-1}a)$, $\delta = ad - bc$. Тогда $z = t^{-1}(w)$, $\overline{z} = \overline{t}^{\,-1}(\overline{w})$, где $\overline{t}^{\,-1}(z) = (\overline{\delta}^{\,-1}\overline{d}z - \overline{\delta}^{\,-1}\overline{b})/(-\overline{\delta}^{\,-1}\overline{c}z + \overline{\delta}^{\,-1}\overline{a})$. Подставляя эти равенства в уравнение окружности γ, получим равенство $t^{-1}(w) = l \circ \overline{t}^{\,-1}(\overline{w})$ или $w = t \circ l \circ \overline{t}^{\,-1}(\overline{w})$, которое является уравнение искомой окружности (прямой). Полученной композиции дробно-линейных преобразований будет соответствовать матрица $W = TL\overline{T}^{\,-1}$, элементы которой определяют коэффициенты $A_1, C_1 \in \mathbb{R}$; $B_1 \in \mathbb{C}$ этого уравнения, согласно указанному выше соответствию. Записать значения этих коэффициентов.

3.5 1) $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a)/(z - \overline{a})$; 2) $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \overline{a})/(z - a)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} a > 0$.
Решение. Пусть $z = a$ – произвольная точка верхней полуплоскости, тогда преобразования $w = k(z-a)/(z-\overline{a})$ и $w = k(z-\overline{a})(z-a)$ переведут

вещественную ось в окружность с центром в начале координат и радиуса $|k|$ (см. задачу 3.4) $\Rightarrow |k| = 1$ т.е. $k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Выбор преобразования определяется принадлежностью образа точки $z = a$ внутренности или внешности круга.

3.6 а) 1) единичная окружность (верхняя полуокружность переходит в нижнюю и наоборот); 2) вещественная ось (полуоси остаются на месте); 3) мнимая ось ($\mathbb{R}_y^+$ и $\mathbb{R}_y^-$ меняются местами); б) 1) мнимая ось (верхняя полуокружность переходит в $\mathbb{R}_y^+$, нижняя – в $\mathbb{R}_y^-$; 2) вещественная ось (отрезок $[-1, 1]$ переходит в $\mathbb{R}_x^-$, а дополнение этого отрезка до вещественной оси – в $\mathbb{R}_x^+$ 3) единичная окружность ($\mathbb{R}_y^+$ переходит в верхнюю полуокружность, $\mathbb{R}_y^-$ – в нижнюю).

Указание. Наряду с общей схемой, изложенной в решении задачи 3.4, здесь удобнее воспользоваться свойством сохранения углов при конформном преобразовании. Так, для того, чтобы выяснить, в какую прямую перейдет единичная окружность при преобразовании б) ($z = -1$ лежит на окружности), достаточно заметить, что вещественная ось остается на месте, поэтому искомая прямая должна быть ортогональна вещественной оси и проходить через начало координат ($z = 1$ переходит в $w = 0$).

3.7 $\mathbb{R}_x^-$.

Указание. Найти образ середины отрезка $[a, b]$.

3.8 Области из условия задачи 3.9, а) соответственно.

Указание. По определению $w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} \Rightarrow |w| = \mathrm{e}^x$, $\operatorname{Arg} w = y$.

3.9 а) Области из условия задачи 3.8 соответственно; б) те же области, но сдвинутые вдоль мнимой оси на 2π.

Указание. $w = \operatorname{Ln} z \Rightarrow \operatorname{Re} w = \ln |z|$, $\operatorname{Im} w = \operatorname{Arg} z$.

3.10 1) Однозначная ветвь функции $w = z^{\beta/\alpha}$, $w(1) = 1$; 2) Плоскость с разрезом по $\mathbb{R}_x^+$.

Указание. $w = z^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R} \Rightarrow |w| = |z|^\gamma$, $\operatorname{Arg} w = \gamma \arg z + 2\pi k\gamma$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.11 а) 1) Первый квадрант; 2) верхняя полуплоскость; 3) правая полуплоскость; 4) единичный полукруг в верхней полуплоскости; б) 1) третий квадрант; 2) нижняя полуплоскость; 3) левая полуплоскость; 4) единичный полукруг в нижней полуплоскости.

3.12 1) $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$; 2) $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$; 3) нижняя полуплоскость; 4) верхняя полуплоскость; 5) верхняя полуплоскость; 6) нижняя полуплоскость; 7) плоскость с разрезами вдоль пары лучей на вещественной оси: $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, -1] \cup [1, \infty]$; 8) $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, -1] \cup [1, \infty]$; 9) третий квадрант; 10) первый квадрант; 11) содержащая начало координат область, ограниченная

эллипсом $16u^2/25 + 16v^2/9 = 1$ и ветвями гиперболы $u^2 - v^2 = 1/2$.
Указание. $w = (z + 1/z)/2 \Rightarrow u = \operatorname{Re} w = (r + 1/r)\cos\varphi/2$, $v = \operatorname{Im} w = (r - 1/r)\sin\varphi/2$, $(r = |z|$, $\varphi = \arg z)$.

3.13 а) 1) Внутренность единичного круга; 2) внутренность единичного круга в нижней полуплоскости; 3) нижняя полуплоскость; б) 1) внешность единичного круга; 2) внешность единичного круга в верхней полуплоскости; 3) верхняя полуплоскость.

3.14 $(z^2 + h^2)^{1/2}$.
Указание. Совершить последовательно 3.10,2) $(n = 2)$; 2.38 $(b = h^2)$; 3.11,а).

3.15 $\left\{[(z-1)/(z+1)]^2 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)\right\}^{1/2}$.
Указание. Совершить преобразования 3.6,б); 3.14 $(h = \operatorname{tg}\alpha/2)$.

3.16 $[\operatorname{th}^2(z/2) + 1]^{1/2}$.
Указание. Совершить преобразования 3.8; 3.15 $(\alpha = \pi/2)$.

3.17 $[(z^2 + h_2^2)/(z^2 + h_1^2)]^{1/2}$.
Указание. Совершить преобразования 3.10,2) $(n = 2)$; 3.7 $(a = -h_2^2$, $b = -h_1^2)$; 3.11,а).

3.18 $-\operatorname{ch} z$.
Указание. Совершить преобразования 3.8; 3.12; 2.35 $(\alpha = \pi)$.

3.19 $[(\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} x_0)/(\operatorname{ch} z + 1)]^{1/2}$.
Указание. Совершить последовательно преобразования 3.8; 3.12; 3.7 $(a = -\operatorname{ch} x_0$, $b = -1$; 3.11 а).

3.20 $\left[(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/z} - \mathrm{e}^{-2\pi})/(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/z} - \mathrm{e}^{2\pi})\right]^{1/2}$.
Указание. Совершить последовательно преобразования 3.6,а); 2.37 $(a = 2\mathrm{i}\,\pi)$; 3.8; 3.7 $(a = \mathrm{e}^{-2\pi}$, $\quad b = \mathrm{e}^{2\pi})$; 3.11,а).

3.21 $\left[2\operatorname{sh}(3\pi/2z)/(2\operatorname{sh}(3\pi/2z) + \mathrm{i}\sqrt{2})\right]^{1/2}$.
Указание. Совершить преобразования 3.6,а); 2.38 $(b = \mathrm{i}\,)$; 2.36 $(k = 3\pi/2)$; 3.8; 3.12; 3.7 $(a = 0$, $b = -\sqrt{2}/2)$; 3.11,а).

3.22 $1,5\operatorname{Ln}\left[(z - \sqrt{3})/(z + \sqrt{3})\right] + \mathrm{i}\,\pi$.
Указание. Совершить последовательно преобразования 3.7 $(a{=}\sqrt{3}$, $b{=}-\sqrt{3})$; 2.35 $(\alpha{=}-2\pi/3)$; 3.10 1) $(\alpha{=}2\pi/3$, $\beta{=}\pi)$; 3.9 а).

3.23 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}(\zeta(z) - a)/(\zeta(z) - \overline{a})$, где $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} a > 0$, а $\zeta(z) = [z - \mathrm{i}\,)/(z + \mathrm{i}\,)]^4$
Указание. Совершить преобразования 3.7, где положить $a = \mathrm{i}\,$, $b = -\mathrm{i}\,$; 3.10,2) $(n = 4)$; 3.5,1).

3.24 $w(z) = [(z^4 + 1)^{1/2} + 1]^{1/2}$, где ветвь внутреннего радикала фиксируется равной единице в точке $z = 0 \in \mathbb{R}_x^+ \cap [0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}]$, а внешний при

этом фиксируется условием $w(0)=\sqrt{2}$.
Решение. Проведем вспомогательный разрез по $\mathbb{R}_y^+$ и рассмотрим симметричную половину области – первый квадрант с разрезом по отрезку $[0,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}]$. Чтобы воспользоваться принципом симметрии, мы должны отобразить эту область на первый квадрант так, чтобы вспомогательный разрез проходил по $\mathbb{R}_y^+$ (в данном случае остался на месте). Осуществляя последовательно преобразования 3.10,2) $(n=2)$; 3.14 $(h=1)$, отобразим нашу область на верхнюю полуплоскость, причем образом вспомогательного разреза будет луч $[-\infty,-1]\in\mathbb{R}_x^-$. Совершая еще два преобразования: 2.38 $(b=1)$; 3.11 а), получим $w(z)=[(z^4+1)^{1/2}+1]^{1/2}$. Эта функция, фиксированная указанным выше образом, совпадает со своим аналитическим продолжением через $\mathbb{R}_y^+$ и осуществляет нужное отображение.

3.25 $w(z)=\left[\dfrac{(4z^4+17z^2+4)^{1/2}-5z}{(4z^4+17z^2+4)^{1/2}-\sqrt{17}z}\right]^{1/2}$, где ветвь внутреннего радикала фиксирована условием его равенства -5 при $z=1$, а внешнего - условием $w(1)>0$.
Решение. Проведем вспомогательный разрез по дуге единичной окружности, соединяющей точки $z=\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,\pi/4}$ и $z=-1$. Этот разрез разобьет нашу область на две области, симметричные относительно единичной окружности. Теперь достаточно отобразить одну из симметричных половин на первый квадрант так, чтобы вспомогательный разрез перешел в $\mathbb{R}_y^+$. Рассмотрим, например, внутренность единичного полукруга в верхней полуплоскости с разрезом по отрезку $[\mathrm{i}/2,\mathrm{i}]$. Осуществляя последовательно преобразования 3.12; 2.35 $(\alpha=\pi)$; 3.14 $(h=3/4)$; 3.3,1) $(\alpha=\sqrt{17}/4,\ \beta=5/4)$; 3.11,а), получаем искомую функцию, которая вместе со своим аналитическим продолжением $(-\overline{w(1/\overline{z})}\equiv w(z))$ через $\mathbb{R}_y^+$, осуществляет нужное отображение.

3.26 $w(z)=\sqrt{\sqrt{2z^8+5z^4+2}+6z^2}/(2z)$, где ветви обоих радикалов (внутреннего и внешнего) фиксируются условием равенства их трем при $z=1$.
Указание. Провести вспомогательный разрез по лучу $[\mathrm{i}\,,\infty]\in\mathbb{R}_y^+$. Показать, что правая симметричная половина исходной области последовательными преобразованиями 3.10,2) $(n=4)$; 3.12 переводится в плоскость с разрезом по лучу $[-5/4,+\infty)\in\mathbb{R}$ при этом образом луча $[\mathrm{i}\,,\infty]$ будет луч $[1,+\infty)\in\mathbb{R}$ на нижнем берегу разреза. Последующие шаги провести самостоятельно.

3.27 $w(z)=[(\cos(\pi/z)-\operatorname{ch}(\pi/h))/(\cos(\pi/z)-1)]^{1/2}$, где ветвь фиксируется условием $w(1) > 0$.

Указание. Провести вспомогательный разрез $[\mathrm{i}\,h, \infty]$ по $\mathbb{R}^+_y$, и для правой симметричной половины области осуществить последовательно преобразования 3.6,а); 2.37 ($a = \mathrm{i}\,\pi$); 3.8,6); 3.12,4); 3.3,1) ($\alpha = 1$, $\beta = \operatorname{ch}\pi/h$); 3.11,1).

3.28 $w(z) = \left[\dfrac{(\operatorname{th}^2(z/2) + \operatorname{tg}^2(h/2))^{1/2} + \operatorname{tg}(h/2)}{(\operatorname{th}^2(z/2) + \operatorname{tg}^2(h/2))^{1/2} + 1/\cos(h/2)}\right]^{1/2}$, где ветвь внутреннего радикала фиксируется равной $\operatorname{tg}(h/2)$ в точке $z = 0$ на правом берегу разреза , а внешний – условием $w(0) > 0$.

Указание. Провести вспомогательный разрез по $\mathbb{R}$ и для верхней симметричной половины области осуществить последовательно преобразования 3.8; 3.15 ($\alpha = h$); 3.3 1) ($\alpha = -1/\cos h/2$, $\beta = -\operatorname{tg} h/2$); 3.11 а).

3.29 $w(z) = \left[\dfrac{(\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 h_2)^{1/2} + \operatorname{ch} h_2}{(\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 h_2)^{1/2} + (\operatorname{ch}^2 h_1 + \operatorname{sh}^2 h_2)^{1/2}}\right]^{1/2}$.

Указание. Провести вспомогательный разрез по отрезку $[-h_1, 0]$ и для верхней симметричной половины области осуществить последовательно преобразования 3.8; 3.12; 2.35 ($\alpha = \pi$); 3.14 ($h = \operatorname{sh} h_2$); 3.3,1) ($\alpha = -(\operatorname{ch}^2 h_1 + \operatorname{sh}^2 h_2)^{1/2}$, $\beta = -\operatorname{ch} h_2$); 3.11,а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. ч.I. М.: Наука, 1985. 336 с.

2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.

3. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 471 с.

4. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

5. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1973. 387 с.

6. Волковыский Л.И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970. 319 с.

Содержание

Для заметок