Казанский государственный университет

С.Н. Тронин

ВВЕДЕНИЕ В УНИВЕРСАЛЬНУЮ И КАТЕГОРНУЮ АЛГЕБРУ

ЧАСТЬ II

КАЗАНЬ — 2003

Научный редактор: д. ф.-м. н., проф. М.М. Арсланов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данное учебно-методическое пособие представляет собой вторую из четырех запланированных частей, предназначенных для ознакомления студентов третьего-пятого курсов механико-математического факультета с одним из направлений современной алгебры, которое мы называем "универсальной и категорной алгеброй". В этом разделе алгебры изучаются наиболее общие и основные алгебраические понятия, весьма частными случаями которых являются группы, кольца, модули и т.п. Вторая часть ("Универсальная алгебра") содержит основные определения, примеры и некоторые важнейшие теоремы из теории категорий и теории универсальных многоосновных алгебр и их многообразий. Главной целью является подробное доказательство многоосновной версии теоремы Г. Биркгофа, устанавливающей эквивалентность двух способов задания многообразий универсальных алгебр, один из которых является категорным, а другой — классическим, использующим понятие тождества. Попутно доказывается существование и единственность свободных алгебр в любом многообразии. Желательно, чтобы читатель уверенно владел материалом первой части пособия (полугруппы, группы, кольца, модули, прямые суммы и прямые произведения, свободные модули, решетки, и т.п.). Хотя основной материал второй части от первой части и не зависит, но так как он является весьма абстрактным, то для его понимания в любом случае необходима соответствующая предварительная подготовка. Как правило, приводятся полные (хотя и сжатые) доказательства всех формулируемых утверждений, исключая те, где необходимо просто проверить выполнимость определений. Читатель должен рассматривать такие места как упражнения для самостоятельной работы.

Третья часть пособия будет посвящена более детальному введению в теорию категорий. В четвертой части предполагается изложить основные понятия и теоремы алгебраической теории операд.

ЧАСТЬ II. УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

1. Категории и функторы

Определение 1.1. Категорией $\mathfrak{C}$ называется следующий комплекс данных:

1) Класс объектов $\mathrm{Ob}\ \mathfrak{C}$;

2) Для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\ \mathfrak{C}$ задано множество, называемое множеством морфизмов из X в Y, и обозначаемое через $\mathfrak{C}(X,Y)$ (другие обозначения: $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$), а также операция умножения (композиции) морфизмов

$$\mathfrak{C}(Y,Z) \times \mathfrak{C}(X,Y) \longrightarrow \mathfrak{C}(X,Z) \quad ,$$

которая сопоставляет паре морфизмов (f,g) морфизм из X в Z, обозначаемый через fg. Морфизм u из X в Y принято изображать в виде стрелки (часто морфизмы даже называют стрелками):

$$u : X \longrightarrow Y \qquad \text{или} \qquad X \xrightarrow{u} Y,$$

так что умножение (композиция) морфизмов $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ есть морфизм

$$X \xrightarrow{fg} Z.$$

При этом должно выполняться условие ассоциативности: если даны

$$A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D \ ,$$

то $(fg)h = f(gh) : A \longrightarrow D$. Кроме того, для каждого объекта X должен существовать морфизм $1_X \in \mathfrak{C}(X,X)$, такой, что для всех $f \in \mathfrak{C}(A,X)$, $g \in \mathfrak{C}(X,B)$ имеют место равенства $1_X f = f$, $g 1_X = g$. Морфизм 1_X называется тождественным (или единичным) морфизмом объекта X, и обозначается иногда через id_X. Когда из контекста ясно, какой X имеется в виду, будем писать просто 1 или id.

Определение 1.2. Подкатегория $\mathfrak{K}$ категории $\mathfrak{C}$ — это категория, у которой $\mathrm{Ob}\ \mathfrak{K} \subseteq \mathrm{Ob}\ \mathfrak{C}$, для любых объектов X, Y категории $\mathfrak{K}$ имеется включение $\mathfrak{K}(X,Y) \subseteq \mathfrak{C}(X,Y)$, причем единичные морфизмы 1_X в $\mathfrak{K}(X,X) \subseteq \mathfrak{C}(X,X)$ одни и те же, а композиция морфизмов $\mathfrak{K}$ есть ограничение на подмножества композиции морфизмов $\mathfrak{C}$.

Подкатегория $\mathfrak{K}$ называется полной, если для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ включение $\mathfrak{K}(X,Y) \subseteq \mathfrak{C}(X,Y)$ является равенством.

Пример 1.1 . Категория **Set** : объекты — множества, морфизмы — отображения (функции). Композиция морфизмов — то же самое, что композиция (суперпозиция) отображений. Напомним, что по определению, $(fg)(x) = f(g(x))$. Ассоциативность суперпозиции отображений хорошо известна. Роль тождественного морфизма $1_X : X \to X$ играет тождественное отображение, переводящее каждый $x \in X$ в себя, $1_X(x) = x$. Конечные множества и их отображения образуют полную подкатегорию категории **Set** .

Пример 1.2 . Категория $\mathfrak{C}$ с одним объектом X вполне определяется заданием множества морфизмов $P = \mathfrak{C}(X,X)$, единичного морфизма $1 = 1_X \in P$, и композиции, которая сводится к отображению $P \times P \to P$, $(x,y) \mapsto xy$, обладающему свойствами $(xy)z = x(yz)$, $1x = x$, $x1 = x$. Таким образом, задать категорию с одним объектом — это все равно, что задать полугруппу с единицей (моноид) P . Подкатегории категории $\mathfrak{C}$ соответствуют подполугруппам с единицей (т.е. подмоноидам) моноида P .

Пример 1.3 . Пусть L — некоторое частично упорядоченное множество. L превращается в категорию следующим образом. Объекты категории L — это элементы решетки L . Для любых двух объектов $x, y \in L$ определим множество $L(x,y)$, полагая $L(x,y) = \emptyset$, если $x \not\leq y$, и $L(x,y) = \{a_{y,x}\}$ (множество из одного элемента $a_{y,x}$), если $x \leq y$. Тогда при $x \leq y \leq z$ можно естественным образом определить композицию $L(y,z) \times L(x,y) \to L(x,z)$, полагая $a_{z,y}a_{y,x} = a_{z,x}$. Из свойства транзитивности для частичного порядка следует ассоциативность этого умножения. Легко также заметить, что элементы $a_{x,x}$ — это тождественные морфизмы.

Пример 1.4 . Категория $\mathrm{Mod}\text{-}R$ правых модулей над ассоциативным кольцом R определяется следующим образом. Ее объекты — это модули, а морфизмы — гомоморфизмы модулей. Композиция гомоморфизмов определяется как композиция отображений, и является гомоморфизмом. Тождественное отображение модуля есть гомоморфизм. Множество гомоморфизмов из модуля M в модуль N принято обозначать через $\mathrm{Hom}_R(M,N)$, или через $\mathrm{Hom}(M_R, N_R)$ (если надо подчеркнуть, что модули правые). Заметим, что эти множества являются абелевыми группами. Групповые операции определены так: $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$. Нулем в $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ является отображение, переводящие каждый элемент $x \in M$ в $0 \in N$.

Определение 1.3. Категория $\mathfrak{C}$ называется предаддитивной, если каждое множество морфизмов $\mathfrak{C}(X, Y)$ обладает структурой абелевой группы (обычно аддитивно записываемой), причем операция композиции морфизмов является билинейным отображением , то есть $(f_1 \pm f_2)g = f_1 g \pm f_2 g$ и $f(g_1 \pm g_2) = fg_1 \pm fg_2$.

Категория $\mathrm{Mod}\text{-}R$ является предаддитивной. Имеется много других примеров предаддитивных категорий, в том числе обладающих рядом дополнительных важных свойств (аддитивные и абелевы категории). Общую теорию таких категорий можно найти, например, в книгах [1], [2] и [15].

Пример 1.5 . Предаддитивные категории с одним объектом — это, по сути, то же самое, что и ассоциативные кольца с единицей.

Пример 1.6 . Произведением категорий $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ называется категория, обозначаемая через $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$, объектами которой являются всевозможные (упорядоченные) пары объектов (X_1, X_2) , $X_1 \in \mathrm{Ob}\ \mathfrak{C}_1$, $X_2 \in \mathrm{Ob}\ \mathfrak{C}_2$, а морфизмами из (X_1, X_2) в (Y_1, Y_2) — всевозможные пары морфизмов (f_1, f_2) , где $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$ — морфизмы в категории $\mathfrak{C}_i$. Композиция морфизмов определяется покомпонентно: $(f_1, f_2)(g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_2 g_2)$. Легко проверяется ассоциативность, и то, что пара $(1_A, 1_B)$ является единичным морфизмом для объекта (A, B) . Если категории $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ предаддитивны, то $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ также предаддитивна: $(f_1, f_2) \pm (h_1, h_2) = (f_1 \pm h_1, f_2 \pm h_2)$. Аналогичным образом можно определить прямое произведение произвольного семейства категорий.

Пример 1.7 . Для любой категории $\mathfrak{C}$ можно определить *двойственную* к ней категорию $\mathfrak{C}^\circ$ следующим образом. Объекты у $\mathfrak{C}^\circ$ те же, что и у $\mathfrak{C}$, а $\mathfrak{C}^\circ(X, Y) = \mathfrak{C}(Y, X)$. Неформально говоря, стрелки остаются теми же, но их направление меняется на противоположное. Композиция морфизмов в $\mathfrak{C}^\circ$ определяется через композицию в $\mathfrak{C}$. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ — морфизмы $\mathfrak{C}^\circ$. Фактически это морфизмы категории $\mathfrak{C}$ вида $f : Y \to X$, $g : Z \to Y$. Полагаем $g \cdot f = fg$ (справа — композиция в $\mathfrak{C}$, которая считается заданной, слева — определяемая композиция в $\mathfrak{C}^\circ$). Нетрудно проверить, что получилась категория, причем единичные морфизмы в $\mathfrak{C}^\circ$ те же, что и в $\mathfrak{C}$. Если $\mathfrak{C} = L$ — категория из примера 3, то $\mathfrak{C}^\circ$ — категория, соответствующая двойственному частично упорядоченному множеству L°. Категория, двойственная предаддитивной, также будет предаддитивной.

Определение 1.4. Морфизм $f : X \to Y$ категории $\mathfrak{K}$ называется *мономорфизмом*, если для любых $g_1, g_2 : Z \to X$ из $fg_1 = fg_2$ следует $g_1 = g_2$. Морфизм $f : X \to Y$ категории $\mathfrak{K}$ называется *эпиморфизмом*, если для любых $g_1, g_2 : Y \to Z$ из $g_1 f = g_2 f$ следует $g_1 = g_2$. Морфизм f называется *изоморфизмом*, если существует $g : Y \to X$ такой, что $gf = 1_Y$, $fg = 1_X$. Для изоморфизма часто используется обозначение $X \overset{f}{\cong} Y$, или просто $X \cong Y$, если ясно, о каком морфизме идет речь (или же конкретный морфизм не имеет значения).

Легко проверяется, что изоморфизм в любой категории является и мономорфизмом и эпиморфизмом. Точнее, предлагается упражнение: показать, что если даны объекты X, Y, и морфизмы $\vartheta : X \to Y$, $\pi : Y \to X$, такие, что $\pi\vartheta = 1_X$, то ϑ — мономорфизм, а π — эпиморфизм. Композиция изоморфизмов (мономорфизмов, эпиморфизмов) — снова изоморфизм (соответственно — мономорфизм, эпиморфизм). В категориях **Set**, $\mathrm{Mod}\text{-}R$ мономорфизмы — то же самое, что инъективные отображения (или гомомоморфизмы), а эпиморфизмы — то же самое, что и сюръекции. Однако существуют категории, в которых мономорфизмы — не обязательно инъективны, эпиморфизмы не обязательно сюръективны, а инъективный и сюръективный морфизм не обязательно изоморфизм. Так, в категории коммутативных ассоциативных колец с единицей вложение кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является категорным эпиморфизмом, но не сюръекцией, и, несмотря на то, что это мономорфизм, не является изоморфизмом ассоциативных колец.

Определение 1.5. Функтор F из категории $\mathfrak{C}$ в категорию $\mathfrak{K}$ есть следующее семейство отображений:

1) отображение из класса $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ в класс $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, объекту $X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ сопоставляется объект $F(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$;

2) для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ должно быть опре-

делено отображение $F_{X\ Y}\ :\ \mathfrak{C}(X,Y)\ \longrightarrow\ \mathfrak{K}(F(X),F(Y))$, сопоставляющее морфизму $f\ \in\ \mathfrak{C}(X,Y)$ морфизм $F(f)\ \in\ \mathfrak{K}(F(X),F(Y))$. При этом должны быть выполнены условия: $F(fg)\ =\ F(f)F(g)$, $F(1_X)=1_{F(X)}$.

Строго говоря, таким образом задается *ковариантный* функтор. Часто встречаются таже *контравариантные* функторы. В определении контравариантного функтора надо изменить пункт 2) следующим образом:

Для каждой пары объектов $X,Y\ \in \mathrm{Ob}\ \mathfrak{C}$ должно быть определено отображение $F_{X\ Y}: \mathfrak{C}(X,Y)\longrightarrow \mathfrak{K}(F(Y),F(X))$, сопоставляющее морфизму $f\ \in\ \mathfrak{C}(X,Y)$ морфизм $F(f)\ \in\ \mathfrak{K}(F(Y),F(X))$. При этом должны быть выполнены условия: $F(fg)=F(g)F(f)$, $F(1_X)=1_{F(X)}$. Легко заметить, что задать контравариантный функтор из $\mathfrak{C}$ в K — это то же самое, что задать ковариантный функтор из $\mathfrak{C}^{\circ}$ в $\mathfrak{K}$. Как правило, в дальнейшем функтором будет называться ковариантный функтор, контравариантность оговаривается особо.

Для (ковариантного) функтора F из категории $\mathfrak{C}$ в категорию множеств (а также в категории, "похожие " на категорию множеств, например, в категории модулей) имеется полезный способ записи, заключающийся в том, что вместо отображения
$\mathfrak{C}(X,Y)\longrightarrow \mathbf{Set}(F(X),F(Y))$, сопоставляющего морфизму α функцию $F(\alpha)$, можно задать отображение

$$\mathfrak{C}(X,Y)\times F(X)\longrightarrow F(Y),\qquad (\alpha,x)\mapsto F(\alpha)(x)=\alpha x,$$

причем обозначение $\alpha x=F(\alpha)(x)$ позволяет выразить свойства функтора в форме, очень похожей на описание левого действия группы на множестве: $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$, $1_X x=x$. Легко проверяется, что если заданы "действия" вида $(\alpha,x)\mapsto\alpha x$ с указанными выше свойствами, то отображения $F(\alpha):F(X)\to F(Y)$ восстанавливаются по формуле $F(\alpha)(x)=\alpha x$, и, таким образом, снова определен функтор F в форме исходного определения.

В случае контравариантного функтора из $\mathfrak{C}$ в категорию множеств (или похожую на нее) имеется эквивлентная запись, похожая на правое действие группы на множестве:

$$F(Y)\times\mathfrak{C}(X,Y)\longrightarrow F(X),\qquad (y,\alpha)\mapsto F(\alpha)(y)=y\alpha,$$

при этом $y(\alpha\beta)=(y\alpha)\beta$, $y1_Y=y$.

Если даны предаддитивные категории $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{C}$, то функтор $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{K}$ называется *аддитивным*, если для любой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{C}$ соответствующее отображение $\mathfrak{C}(X,Y) \longrightarrow \mathfrak{K}(F(X), F(Y))$ является гомоморфизмом абелевых групп. Это означает, что для любых морфизмов $\alpha, \beta : X \longrightarrow Y$ имеет место равенство $F(\alpha \pm \beta) = F(\alpha) \pm F(\beta)$. Разумеется, $F(0) = 0$.

Рассмотрим несколько примеров функторов.

Пример 1.8 . Пусть $\mathfrak{C}$ — категория с одним объектом X, $\mathfrak{K}$ — категория с одним объектом Y. Как уже известно, категория $\mathfrak{C}$ полностью определяется моноидом $C = \mathfrak{C}(X,X)$, а категория $\mathfrak{K}$ — моноидом $K = \mathfrak{K}(Y,Y)$. Легко убедиться, что задание ковариантного функтора $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{K}$ равносильно заданию гомоморфизма моноидов из C в K. В самом деле, объект X должен отображаться в объект Y (так как других возможностей нет), и тогда функтор полностью определяется отображением $F_{X,X} : \mathfrak{C}(X,X) \longrightarrow \mathfrak{K}(F(X), F(X)) = \mathfrak{K}(Y,Y)$, таким, что $F(\alpha\beta) = F(\alpha)F(\beta)$ и $F(1) = 1$. Если $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{K}$ предаддитивны, то задание аддитивного функтора из $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{K}$ равносильно заданию гомоморфизма ассоциативных колец с единицей из C в K.

Пример 1.9 . Зафиксируем множество A. Для произвольного множества X положим $F_A(X) = A \times X$, а для произвольного отображения $f : X \to Y$ положим $F_A(f) = 1_A \times f : A \times X \to A \times Y$. Напомним, что это отображение переводит (a, x) в $(a, f(x))$ для любых $a \in A$, $x \in X$. Нетрудная проверка показывает, что F_A есть функтор из категории множеств **Set** в **Set**. Точно так же можно определить функтор вида $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, $X \mapsto X \times A$, $f \mapsto f \times 1_A$.

Пример 1.10 . Для любой категории $\mathfrak{K}$ и любого объекта A из $\mathfrak{K}$ определен ковариантный функтор $\mathfrak{K} \to \mathbf{Set}$, отображающий объект X в множество всех морфизмов $\mathfrak{K}(A,X)$ из A в X, а морфизм $f : X \to Y$ в отображение $\mathfrak{K}(A,f) : \mathfrak{K}(A,X) \to \mathfrak{K}(A,Y)$, которое переводит элемент $\varphi \in \mathfrak{K}(A,X)$ (то есть морфизм $A \to X$) в композицию $f\varphi : A \to X \to Y$. Из ассоциативности композиции морфизмов $\mathfrak{K}$ следует, что для $g : Y \to Z$ имеет место равенство $\mathfrak{K}(A,g)\mathfrak{K}(A,f) = \mathfrak{K}(A,gf)$. Таким образом, построенное соответствие является функтором, который будет обозначаться через $\mathfrak{K}(A, \ )$. Подобным же образом строится *контравариантный* функтор

$\mathfrak{K}(\ ,A) : \mathfrak{K} \to \mathbf{Set}$, который отображает объект X в множество морфизмов $\mathfrak{K}(X,A)$, а морфизму $f : X \to Y$ соответствует отображение $\mathfrak{K}(f,A) : \mathfrak{K}(Y,A) \to \mathfrak{K}(X,A)$, переводящее $\varphi : Y \to A$ в композицию $\varphi f : X \to Y \to A$. Если категория $\mathfrak{K}$ предаддитивна, то описанные выше функторы можно считать функторами не в категорию множеств, а в категорию абелевых групп, так как по определению предаддитивности $\mathfrak{K}$ все $\mathfrak{K}(X,A)$, $\mathfrak{K}(A,X)$ — абелевы группы, и отображения (например) $\mathfrak{K}(A,f)$ являются гомоморфизмами абелевых групп: $\mathfrak{K}(A,f)(\varphi' \pm \varphi'') = f(\varphi' \pm \varphi'') = f\varphi' \pm f\varphi'' = \mathfrak{K}(A,f)(\varphi') \pm \mathfrak{K}(A,f)(\varphi'')$. Более того, функторы $\mathfrak{K}(A,\ )$, $\mathfrak{K}(\ ,A)$ являются аддитивными. Например, из $\mathfrak{K}(A,f' \pm f'')(\varphi) = (f' \pm f'')\varphi = f'\varphi \pm f''\varphi = \mathfrak{K}(A,f')(\varphi) \pm \mathfrak{K}(A,f'')(\varphi)$ следует $\mathfrak{K}(A,f' \pm f'') = \mathfrak{K}(A,f') \pm \mathfrak{K}(A,f'')$.

Пример 1.11 . Еще один пример контравариантного функтора — функтор $\mathbf{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ отображающий множество X в $\mathbf{P}(X)$ — множество всех подмножеств X . При этом, если дано отображение $f : X \to Y$, то $\mathbf{P}(f) : \mathbf{P}(Y) \to \mathbf{P}(X)$ сопоставляет подмножеству $Y' \subseteq Y$ подмножество $f^{-1}(Y') \subseteq X$, $f^{-1}(Y') = \{x \in X | f(x) \in Y'\}$. Для того, чтобы показать, что это функтор, необходимо убедиться, что $\mathbf{P}(f)\mathbf{P}(g) = \mathbf{P}(gf)$, что сводится к легкой проверке тождества $(gf)^{-1}(Z') = f^{-1}(g^{-1}(Z'))$.

Пусть даны два функтора $F_1 : \mathfrak{K}_1 \to \mathfrak{K}_2$, $F_2 : \mathfrak{K}_2 \to \mathfrak{K}_3$. Тогда определена их композиция — функтор $F_2F_1 : \mathfrak{K}_1 \to \mathfrak{K}_3$, отображающий объект X в объект $F_2(F_1(X))$, а морфизм $f : X \to Y$ — в морфизм $F_2F_1(f) = F_2(F_1(f)) : F_2(F_1(X)) \to F_2(F_1(Y))$. Свойства функтора следуют прямо из определения. Нетрудно также убедиться, что композиция функторов ассоциативна, так что можно говорить и о категории, объектами которой являются категории, а морфизмами — функторы.

Рассмотрим, однако, другую ситуацию. Пусть $Fun(\mathfrak{K},\mathfrak{C})$ — класс всех функторов из категории $\mathfrak{K}$ в категорию $\mathfrak{C}$. Превратим его в категорию, объекты которой — функторы, а морфизмы (называемые *естественными преобразованиями*, или морфизмами функторов), определяются следующим образом.

Определение 1.6. Пусть даны два функтора $F_1, F_2 : \mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$. Естественное преобразование $\alpha : F_1 \to F_2$ — это следующий набор данных. Для каждого объекта X из $\mathfrak{K}$ должен быть задан морфизм

$\alpha(X) : F_1(X) \to F_2(X)$ категории $\mathfrak{C}$, причем для любого морфизма $f : X \to Y$ в категории $\mathfrak{K}$ должна быть коммутативной следующая диаграмма в категории $\mathfrak{C}$:

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\alpha(X)} & F_2(X) \\ \downarrow F_1(f) & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\alpha(Y)} & F_2(Y) \end{array}$$

Нетрудно проверить, что если $\beta : F_2 \to F_3$ — другое естественное преобразование, то композиция $\beta\alpha$, определяемая по правилу $(\beta\alpha)(X) = \beta(X)\alpha(X)$, становится естественным преобразованием из F_1 в F_3. Ясно, что определенная таким образом композиция естественных преобразований ассоциативна, и что набор единичных морфизмов $1_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ определяет естественное преобразование F в F, обладающее всеми свойствами тождественного морфизма относительно композиции естественных преобразований. Таким образом, $Fun(\mathfrak{K}, \mathfrak{C})$ становится категорией. Рассмотрим два примера естественных преобразований.

Пример 1.12 . (Продолжение примера 9). Пусть F_A и F_B — два функтора, определенные в примере 7, и пусть $t : A \to B$ — любое отображение. Тогда можно определить естественное преобразование $t(X) : F_A(X) \to F_B(X)$, $t(X) = t \times 1_X : A \times X \to B \times X$, $(a, x) \mapsto (t(a), x)$. Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Проверим, что $F_B(f)t(X) = t(Y)F_A(f)$. Это сводится к тождеству $(1_B \times f)(t \times 1_X) = (t \times 1_Y)(1_A \times f) = t \times f$. Элемент $(a, x) \in A \times X$ двумя способами отображается в $(t(a), f(x))$.

Пример 1.13 . (Продолжение примера 10). Рассмотрим два ковариантных функтора $\mathfrak{K}(A, \ )$ и $\mathfrak{K}(B, \ )$, и пусть дан морфизм $t : A \to B$ в категории $\mathfrak{K}$. Тогда можно определить естественное преобразование $t(X) = \mathfrak{K}(t, X) : \mathfrak{K}(B, X) \to \mathfrak{K}(A, X)$. Эти отображения сопоставляют элементу $\varphi \in \mathfrak{K}(B, X)$ элемент $\varphi t \in \mathfrak{K}(A, X)$. Более наглядно: морфизму $\varphi : B \to X$ сопоставлена композиция $A \xrightarrow{t} B \xrightarrow{\varphi} X$. Проверим естественность, то есть что для $f : X \to Y$ имеет место тождество: $\mathfrak{K}(A, f)t(X) = t(Y)\mathfrak{K}(B, f)$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{K}(B, X)$. $\mathfrak{K}(A, f)(t(X)(\varphi)) = \mathfrak{K}(A, f)(\varphi t) = f(\varphi t)$. С другой стороны, $t(Y)(\mathfrak{K}(B, f)(\varphi)) = t(Y)(f\varphi) = (f\varphi)t$. Ввиду ассоциативности композиции морфизмов имеет место равенство. Два отображения,

$\mathfrak{K}(A,f)t(X)$ и $t(Y)\mathfrak{K}(B,f)$, совпадают при любом значении аргумента φ, следовательно, они равны.

Определение 1.7. Пусть даны две категории и два функтора

$$\mathfrak{K} \xrightarrow{F} \mathfrak{C} \xrightarrow{U} \mathfrak{K}$$

Функтор F называется *сопряженным слева* к функтору U (а функтор U — *сопряженным справа* к F), если существует естественное преобразование

$$\eta(X) : X \longrightarrow UF(X) ,$$

такое, что для любого морфизма $\beta : F(A) \longrightarrow B$ в категории $\mathfrak{C}$ существует один и только один морфизм $\alpha : A \to U(B)$, такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta(A)} & UF(A) \\ & \searrow \alpha & \downarrow U(\beta) \\ & & U(B) \end{array}$$

Важное и часто используемое следствие этого определения состоит в том, что если взять $B = F(A)$, и $\alpha = \eta(A)$, то единственным β, для которого $U(\beta)\eta(A) = \eta(A)$, может быть только $1_{F(A)}$.

Следующие два примера предназначены для читателей, знакомых с понятиями полугрупповой и групповой алгебры.

Пример 1.14 . Пусть $\mathfrak{K}$ — категория моноидов и их гомоморфизмов, K — поле (или же коммутативное ассоциативное кольцо с единицей), $\mathfrak{C}$ — категория ассоциативных K - алгебр с единицей. Для моноида M положим $F(M) = K[M]$. Это — полугрупповая алгебра моноида M над кольцом K, являющаяся объектом категории $\mathfrak{C}$. Соответствие $M \mapsto K[M]$ — функтор из категории моноидов $\mathfrak{K}$ в категорию ассоциативных K –алгебр. Правым сопряженным к нему является "забывающий" функтор: если A есть K -алгебра, то $U(A)$ есть множество A, снабженное операцией умножения кольца A, относительно которой оно, как известно, является моноидом.

Пример 1.15 . В случае, если $\mathfrak{K}$ — категория групп, то конструкция функтора U меняется. Справедлива теорема: для любого гомоморфизма f из G в группу обратимых элементов K –алгебры A существует один и только один гомоморфизм K –алгебр из $K[G]$

в A, значения которого на элементах $g \in G \subset K[G]$ совпадают с $f(g)$. Правый сопряженный для функтора взятия групповой алгебры — функтор, сопоставляющий алгебре A группу $U(A)$ обратимых по умножению элементов A.

Важный класс примеров сопряженных функторов будет рассмотрен в последнем параграфе.

Теорема 1.1. *Для данного функтора $U : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{K}$ сопряженный к нему слева функтор $F : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{C}$ определн однозначно с точностью до естественного изоморфизма.*

Доказательство. Пусть имеются два функтора, F_1 и F_2, сопряженные слева к функтору U, и пусть $\eta_i : Id \to UF_i$, $i = 1,2$ — соответствующие естественные преобразования из определения. Возьмем в определении $F = F_1$, $B = F(A)$, $\beta = \eta_2(A)$. Тогда существует единственный морфизм $\varphi(A) : F_1(A) \to F_2(A)$ такой, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} A & \stackrel{\eta_1(A)}{\longrightarrow} & U(F_1(A)) \\ & \searrow \eta_2(A) & \downarrow U(\varphi(A)) \\ & & U(F_2(A))) \end{array}$$

Иными словами, $U(\varphi(A))\eta_1(A) = \eta_2(A)$. Меняя местами F_1 и F_2, из тех же соображений получаем единственный морфизм $\psi(A) : F_2(A) \to F_1(A)$, для которого $U(\psi(A))\eta_2(A) = \eta_1(A)$. Из этого следует, что выполнены равенства $U(\psi(A)\varphi(A))\eta_1(A) = \eta_1(A)$ и $U(\varphi(A)\psi(A))\eta_2(A) = \eta_2(A)$. Но тогда $\psi(A)\varphi(A) = 1_{F_1(A)}$ и $\varphi(A)\psi(A) = 1_{F_2(A)}$. Покажем теперь, что φ и ψ — естественные преобразования. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм категории $\mathfrak{K}$. Рассмотрим диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} X & \stackrel{\eta_1(X)}{\longrightarrow} & UF_1(X) & \stackrel{U(\varphi(X))}{\longrightarrow} & UF_2(X) \\ \downarrow f & & \downarrow UF_1(f) & & \downarrow UF_2(f) \\ Y & \stackrel{\eta_1(Y)}{\longrightarrow} & UF_1(Y) & \stackrel{U(\varphi(Y))}{\longrightarrow} & UF_2(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \stackrel{\eta_2(X)}{\longrightarrow} & UF_2(X) \\ \downarrow f & & \downarrow UF_2(f) \\ Y & \stackrel{\eta_2(Y)}{\longrightarrow} & UF_2(Y) \end{array}$$

Так как η_1 и η_2 — естественные преобразования, то левый квадрат левой диаграммы и правая диаграмма коммутативны. Кроме того, по определению φ, имеют место равенства

$U(\varphi(X))\eta_1(X) = \eta_2(X)$, $U(\varphi(Y))\eta_1(Y) = \eta_2(Y)$.

Проделаем следующие выкладки.
$U(F_2(f)\varphi(X))\eta_1(X) = U(F_2(f))U(\varphi(X))\eta_1(X) =$
$= U(F_2(f))\eta_2(X) = \eta_2(Y)f.$
$U(\varphi(Y)F_1(f))\eta_1(X) = U(\varphi(Y))U(F_1(f))\eta_1(X) =$
$= U(\varphi(Y))\eta_1(Y)f = \eta_2(Y)f.$

Отсюда следует, что $U(F_2(f)\varphi(X))\eta_1(X) = U(\varphi(Y)F_1(f))\eta_1(X)$. Ввиду условия единственности в определении сопряженного функтора получаем равенство $F_2(f)\varphi(X) = \varphi(Y)F_1(f)$, которое и означает, что φ — естественное преобразование. Аналогичным образом доказывается естественность ψ. Теорема доказана.

Определение 1.8. Пусть дана категория $\mathfrak{K}$ и семейство ее объектов X_i, $i \in I$, где I — некоторое множество индексов. *Прямым произведением* семейства X_i в категории $\mathfrak{K}$ называется объект X вместе с семейством морфизмов $p_i : X \to X_i$, $i \in I$, обладающих следующим свойством. Если дан любой объект Y и любое семейство морфизмов $\psi_i : Y \to X_i$, то существует, притом только один, морфизм $\psi : Y \to X$, такой, что для всех $i \in I$ имеет место равенство: $p_i\psi = \psi_i$. Морфизм p_i принято называть проекцией на множитель X_i. Если прямое произведение существует для любого семейства объектов, то говорят, что категория $\mathfrak{K}$ обладает прямыми произведениями.

Прямое произведение семейства X_i принято обозначать так: $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Если множество I конечно, например, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, то употребляется также обозначение $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Прямое произведение (если оно существует) определено с точностью до изоморфизма. Точная формулировка такова. Пусть $(X', \{p'_i\}_{i\in I})$ и $(X'', \{p''_i\}_{i\in I})$ удовлетворяют определению прямого произведения семейства X_i. Тогда существует, притом только один, изоморфизм $\varphi : X' \to X''$, такой, что $p''_i\varphi = p'_i$ для всех $i \in I$. Чтобы убедиться в этом, надо несколько раз применить определение прямого произведения. Сначала в качестве X берется X', в качестве Y — объект X'', а в качестве ψ_i — морфизмы p''_i. Тогда найдется единственный $\psi'' : X'' \to X'$, такой, что для всех $i \in I$ имеют место равенства $p'_i\psi'' = p''_i$. Меняя местами X' и X'', точно так же находим $\psi' : X' \to X''$, такой что $p''_i\psi' = p'_i$ всех $i \in I$. Рассмотрим композицию $\psi''\psi' : X' \to X'$. Тогда $p'_i(\psi''\psi') = (p'_i\psi'')\psi' = p''_i\psi' = p'_i$

для всех $i \in I$. Но согласно определению, *единственным* морфизмом $\xi : X' \to X'$, таким,что $p_i'\xi = p_i'$ для всех i , может быть только морфизм $1_{X'}$: он этому свойству удовлетворяет, а других быть не может. Поэтому $\psi''\psi' = 1_{X'}$, и, аналогично, $\psi'\psi'' = 1_{X''}$. Необходимый нам φ — это ψ'' .

В категориях **Set** и Mod - R категорные прямые произведения всегда существуют, и совпадают с "обычными" декартовыми произведениями. А именно, в качестве $X = \prod_{i\in I} X_i$ берется множество всех семейств $(x_i)_{i\in I}$, где $x_i \in X_i$ для каждого $i \in I$. Если $I = \{1, \ldots, n\}$, то это множество "строк" вида $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in X_i$, $1 \leq i \leq n$. Морфизмы p_i (проекции) действуют так: p_j отображает семейство $(x_i)_{i\in I}$ в элемент x_j , $j \in I$. Если дано множество Y и семейство отображений $\psi_i : Y \to X_i$, то единственным $\psi : Y \to X$, удовлетворяющим условию $p_i\psi = \psi_i$ для всех $i \in I$, будет отображение, переводящее элемент $y \in Y$ в семейство $(\psi_i(y))_{i\in I}$. Это отображение обозначается так: $\psi = (\psi_i)_{i\in I}$, или (ψ_i) , если понятно, о каком множестве индексов идет речь. Если берется прямое произведение модулей, то операции сложения и умножения на элементы кольца в нем определяются "покомпонентно": $(x_i')_{i\in I} \pm (x_i'')_{i\in I} = (x_i' \pm x_i'')_{i\in I}$, $(x_i')_{i\in I}r = (x_i'r)_{i\in I}$. Здесь $x_i', x_i'' \in X_i$, $r \in R$. При этом проекции становятся модульными гомоморфизмами. Описание прямых произведений для произвольных алгебраических систем будет дано в следующем параграфе.

О ЛИТЕРАТУРЕ ПО ТЕОРИИ КАТЕГОРИЙ. В списке литературы в конце учебного пособия теории категорий посвящены специально, или содержат достаточно содержательные категорные разделы книги [1], [2], [4], [11], [13], [15], [16], [20], [21], [22].

2. Многоосновные универсальные алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть S — некоторое множество, элементы которого будем называть сортами, или основами. Категория S - градуированных множеств S - **Sets** устроена следующим образом. Объекты — семейства множеств $\mathbf{X} = \{X_s | s \in S\}$, причем множества X_s предполагаются непересекающимися. Морфизм $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$

— это семейство отображений вида $f_s : X_s \to Y_s$, $s \in S$. Композиция морфизмов $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ и $\mathbf{g} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$ определяется покомпонентно: это семейство $g_s f_s : X_s \to Z_s$ композиций отображений $f_s : X_s \to Y_s$, $g_s : Y_s \to Z_s$. Объекты из S - **Sets** называются также многоосновными (или многосортными) множествами.

Проверка свойств категории для S - **Sets** — это легкое упражнение. В случае, когда S состоит из одного элемента, S -градуированные множества (одноосновные или односортные множества) — это "обычные" множества. В общем случае можно представлять себе S -градуированное множество как своего рода "вектор", компоненты которого снабжены индексами из S . Многие операции над градуированными множествами (например, включение, объединение, пересечение, произведение) производятся покомпонентно. Например, если $\mathbf{X} = \{X_s | s \in S\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_s | s \in S\}$, то $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ будет означать, что $X_s \subseteq Y_s$ для всех $s \in S$. Если имеется семейство $\mathbf{X}_i$, $i \in I$, причем $\mathbf{X}_i = \{(\mathbf{X}_i)_s = X_{i,s} | s \in S\}$ и $\mathbf{X}_i \subseteq \mathbf{Y}$ для всех $i \in I$, то под пересечением $\bigcap\limits_{i \in I} \mathbf{X}_i$ понимается градуированное множество $\{\bigcap\limits_{i \in I} X_{i,s} | s \in S\}$.

Пусть дан морфизм градуированных множеств $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ с компонентами $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$, $s \in S$. Будем называть его инъективным, если для каждого $s \in S$ отображение f_s является инъективным, и сюръективным, если все f_s сюръективны. Под $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ будем понимать градуированное подмножество $\{f_s(X_s) | s \in S\}$ градуированного множества $\mathbf{Y}$. Легко показать, что инъективные морфизмы в S-**Sets** — это в точности категорные мономорфизмы, а сюръективные — это категорные эпиморфизмы.

Условимся, что каждый раз, когда будет появляться градуированное множество, обозначаемое, например, как $\mathbf{X}$ (полужирный шрифт), его компоненты будут обозначаться либо через X_s (та же буква, но шрифт обычный), либо (иногда) через $\mathbf{X}_s$. Если же дан морфизм градуированных множеств $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ (обозначение полужирным шрифтом всегда будет использоваться только для градуированных множеств и морфизмов между ними), то через f_s (та же буква, но шрифт обычный) будут обозначаться его компоненты. Время от времени мы будем использовать для обозначения морфизмов градуированных множеств и не полужирный шрифт, например, $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$. В этом случае компоненты φ будут обозначаться через

$\varphi_s : X_s \longrightarrow Y_s$, $s \in S$. В случае, когда S состоит из одного элемента, будем использоваться обычный (не полужирный) шрифт, и не будем использовать индекс сорта.

Категория S - **Sets** будет также обозначаться через $\mathfrak{S}$.

Определение 2.2. Пусть S^* —множество всех слов, составленных из символов S (включая пустое слово). Иными словами, это свободная полугруппа с базисом S . *Сигнатурой* называется пара $\Sigma = (S, \Omega)$, где Ω определяется так:

$$\Omega = \bigcup_{j \in S, a \in S^*} \Omega_{a,j}.$$

Множества $\Omega_{a,j}$ (некоторые из них могут быть пустыми) обычно предполагаются непересекающимися, хотя в некоторых случаях удобно не накладывать такого ограничения. Если a — пустое слово, вместо $\Omega_{a,j}$ будем писать $\Omega_{\emptyset,j}$.

Определение 2.3. Ω–алгеброй (или алгеброй в сигнатуре $\Sigma = (S, \Omega)$) будет называться S -градуированное множество $\mathbf{A} = \{A_s | s \in S\}$ вместе с семейством отображений вида

$$\omega^{\mathbf{A}} : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \longrightarrow A_j \ ,$$

где $\omega \in \Omega_{a,j}$, $a = s_1 \ldots s_n \in S^*$. Такие отображения называются n–арными операциями (алгебры $\mathbf{A}$). Если слово a пустое (случай $n = 0$), произведение $A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$ считается равным одноэлементному множеству, и тогда отображение $\omega^{\mathbf{A}}$ можно отождествить с его образом — элементом компоненты A_j . Такие отображения (и соответствующие им элементы) называются константами алгебры. (И, таким образом, определено отображение $\Omega_{\emptyset,j} \longrightarrow A_j$, образ которого есть множество констант сорта j алгебры $\mathbf{A}$). Результат действия отображения $\omega^{\mathbf{A}}$ будет записываться следующим образом:

$$\omega^{\mathbf{A}} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \ldots x_n \omega^{\mathbf{A}} = x_1 \ldots x_n \omega \ \ (\text{ где } \ x_1 \in A_{s_1}, \ldots, x_n \in A_{s_n}),$$

В дальнейшем будем писать просто ω , если ясно, о какой алгебре идёт речь. Если ясно, о какой сигнатуре идет речь (или это вообще неважно), Ω–алгебры называются также многоосновными (универсальными) алгебрами, или многосортными алгебрами.

Определение 2.4. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — алгебры одной и той же сигнатуры Ω . Гомоморфизм алгебры $\mathbf{A}$ в алгебру $\mathbf{B}$ — это отображение градуированных множеств $\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, такое, что для каждого символа $\omega \in \Omega_{a,j}$ и для любых $x_1 \in A_{s_1}, \ldots, x_n \in A_{s_n}$ имеет место равенство

$$f_j(x_1 \ldots x_n \omega^{\mathbf{A}}) = f_{s_1}(x_1) \ldots f_{s_n}(x_n) \omega^{\mathbf{B}}.$$

Когда нет опасности запутаться в индексах, они будут опускаться, и тогда предыдущее равенство приобретёт вид:

$$f(x_1 \ldots x_n \omega) = f(x_1) \ldots f(x_n) \omega.$$

Заметим, что однотипные константы при гомоморфизмах переходят друг в друга.

В случае, когда S состоит из одного элемента s (одноосновные, или односортные алгебры), то все слова из S^* имеют вид $s \ldots s$ (n символов), и вместо $\Omega_{s \ldots s, s}$ пишется просто Ω_n, а вместо $\Omega_{\emptyset, s}$ пишется Ω_0.

Лемма 2.1. *Пусть даны гомоморфизмы Ω-алгебр $\mathbf{f} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, и $\mathbf{g} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$. Тогда их композиция $\mathbf{gf} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ также будет гомоморфизмом Ω-алгебр. Композиция гомоморфизмов ассоциативна. Тождественные отображения $\mathbf{1}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ являются гомоморфизмами алгебр.*

Доказательство предоставляется читателю в качестве лёгкого упражнения.

Из этой леммы следует, что Ω-алгебры и их гомоморфизмы образуют категорию, которую мы будем обозначать через $\Omega\text{-}\mathrm{Alg}$. Изучение категорий такого вида и некоторых их подкатегорий — главная цель этого учебного пособия.

Приведем несколько примеров алгебр разных сигнатур.

Пример 2.1. Пусть S состоит из одного элемента, $\Omega_0 = \{\varepsilon\}$, $\Omega_1 = \{\delta\}$, $\Omega_2 = \{\omega\}$. Примерами алгебр такой сигнатуры являются группы. В самом деле, в мультипликативно записываемой группе G имеется единица, которую можно обозначить через ε, операцию взятия обратного элемента можно обозначить как $x \mapsto x\delta = x^{-1}$, а бинарную операцию умножения — как $(x, y) \mapsto xy\omega = x \cdot y$. Отметим, однако, что далеко не все Ω-алгебры (для данной сигнатуры Ω) являются группами.

Пример 2.2. Пусть $S = \{0, 1\}$. Положим $\Omega_{\emptyset,0} = \{\varepsilon\}$, $\Omega_{0,0} = \{\delta\}$, $\Omega_{00,0} = \{\omega\}$, $\Omega_{01,1} = \{\mu\}$. Тогда Ω- алгебра $\mathbf{A}$ имеет две компоненты A_0 и A_1, константу $\varepsilon \in A_0$, 1-арную (унарную) операцию

$\delta : A_0 \longrightarrow A_0$, и две бинарные (2-арные) операции $\omega : A_o \times A_0 \longrightarrow A_0$ и $\mu : A_0 \times A_1 \longrightarrow A_1$. Примером такой алгебры является группа $G = A_0$ вместе с действием этой группы на множестве $X = A_1$, то есть отображением $\mu : G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x = gx\mu$. Операции $\varepsilon, \delta, \omega$ здесь имеют тот же смысл, что и в примере 2.1. Как и в этом примере, далеко не каждая Ω -алгебра представляет из себя группу вместе с действием этой группы на некотором множестве.

Пример 2.3. Снова пусть $S = \{0, 1\}$. Выберем сигнатуру Ω так, чтобы единственным непустым множеством $\Omega_{a,j}$ было $\Omega_{1,0} = \{\sigma, \tau\}$. Тогда Ω -алгебру $\mathbf{G}$ можно описать как пару множеств $\{G_0, G_1\}$ вместе с двумя отображениями $\sigma, \tau : G_1 \longrightarrow G_0$. Можно интерпретировать такие алгебры как ориентированные графы с множеством вершин G_0 и множеством дуг (стрелок) G_1 , причем операция σ ставит в соответствие стелке $u \in G_1$ вершину $u\sigma$, из которой эта стрелка выходит, а операция τ сопоставляет стрелке u вершину $u\tau$, в которую эта стрелка входит. Ясно, что подобным образом можно описать каждый ориентированный граф. Поэтому в данном случае Ω-Alg есть категория всех ориентированных графов и их гомоморфизмов.

Пример 2.4. Пусть $S = \{0, 1, s\}$. Выберем сигнатуру так: $\Omega_{s0,s} = \{\delta\}$, $\Omega_{s0,1} = \{\lambda\}$. Тогда Ω -алгебра $\mathbf{A}$ — это три множества A_0, A_1, A_s вместе с двумя отображениями $\delta : A_s \times A_0 \longrightarrow A_s$, $\lambda : A_s \times A_0 \longrightarrow A_1$. Объекты такого вида называются *автоматами*, A_s называется множеством состояний (или внутренних состояний) автомата, A_0 называется множеством (или алфавитом) входных сигналов автомата, A_1 — множеством (алфавитом) выходных сигналов. Отображение δ называется функцией переходов, отображение λ — функцией выходов. Если к сигнатуре добавлено $\Omega_{\emptyset,s} = \{\varepsilon\}$, то тем самым в Ω -алгебре $\mathbf{A}$ определена константа $\varepsilon \in A_s$, называемая начальным состоянием автомата. Автоматы, в которых заданы начальные состояния, называются инициальными. Теория автоматов — обширная область математики с многочисленными приложениями. Некоторую информацию о ней, а также указания на литературу можно найти в [11], с. 177-178.

Уже по этому краткому набору примеров можно догадаться, что теория многоосновных универсальных алгебр охватывает очень широкий круг математических структур, даже тех, которые на первый взгляд не относятся к алгебре. Приложения теории и дальнейшие конкретные примеры можно найти в книгах [3], [6], [12], [17]. Заметим еще, что даже категории (в случае, когда класс объектов является множеством) можно считать многоосновными универсальными алгебрами.

Продолжим изложение основных понятий теории многоосновных алгебр.

Изоморфизмом алгебр $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется гомоморфизм $\mathbf{h} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, для которого существует такой гомоморфизм $\mathbf{g} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, что $\mathbf{hg} = 1_{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{gh} = 1_{\mathbf{A}}$. В этом случае $\mathbf{g}$ будет также изоморфизмом алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$. Если $\mathbf{h} = \{h_s | h_s : A_s \to B_s, s \in S\}$, то утверждение "$\mathbf{h}$ — изоморфизм" равносильно тому, что $\mathbf{h}$ — гомоморфизм, и все его компоненты h_s являются биекциями. Наличие изоморфизма между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обозначается следующим образом: $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Для данной алгебры $\mathbf{A}$ определим её *подалгебру* $\mathbf{B}$ как подмножество градуированного множества $\mathbf{A}$ (то есть для каждого $s \in S$ имеет место включение $B_s \subseteq A_s$), такое, что для любых $s_1, \ldots, s_n, j \in S$, любого $\omega \in \Omega_{a,j}$, где $a = s_1 \ldots s_n \in S^*$, и произвольных $b_1 \in B_{s_1}, \ldots, b_n \in B_{s_n}$ элемент $b_1 \ldots b_n \omega^{\mathbf{A}}$ содержится в B_j . В частности, все константы алгебры $\mathbf{A}$ содержатся в $\mathbf{B}$. Другими словами это можно описать так: ограничение отображений $\omega^{\mathbf{A}}$ на $\mathbf{B}$ превращает $\mathbf{B}$ в Ω -алгебру, причём отображение включения $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ становится гомоморфизмом Ω -алгебр. Основные свойства подалгебр собраны в следующей лемме.

Лемма 2.2. 1) *Пусть дано произвольное семейство* $\{\mathbf{B}_i\}_{i \in I}$ *подалгебр алгебры* $\mathbf{A}$ *. Тогда их пересечение* $\bigcap\limits_{i \in I} \mathbf{B}_i$ *снова является подалгеброй* $\mathbf{A}$ *. При этом пересечение определяется "покомпонентно" как* S *-градуированное множество,* s *-я компонента которого есть* $\bigcap\limits_{i \in I} B_{i,s}$ *, где* $B_{i,s}$ *есть* s *-я компонента алгебры* $\mathbf{B}_i$ *.*

2) *Для любого градуированного подмножества* $\mathbf{Y}$ *алгебры* $\mathbf{A}$ *существует единственная наименьшая подалгебра* $\langle \mathbf{Y} \rangle$ *, содержащая* $\mathbf{Y}$ *. Это означает, что если есть подалгебра* $\mathbf{B}$ *алгебры* $\mathbf{A}$ *, и* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{B}$ *, то обязательно* $\langle \mathbf{Y} \rangle \subseteq \mathbf{B}$ *.*

3) *Если дан гомоморфизм* Ω *-алгебр* $\mathbf{f} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *, то его образ*

$\mathbf{f}(\mathbf{A})$ *есть подалгебра алгебры* $\mathbf{B}$. *(Напомним, что* s*-я компонента* $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ *есть* $f_s(A_s) \subseteq B_s$*).*

4) *Если даны два гомоморфизм* Ω*-алгебр* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$*, причем* $\mathbf{A} = \langle \mathbf{Y} \rangle$*, и ограничения* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ *на* $\mathbf{Y}$ *совпадают, то* $\mathbf{f} = \mathbf{g}$*.*

Доказательство. Пункты 1) и 3) доказываются легко. Чтобы доказать пункт 2), рассмотрим множество $I = \{\mathbf{C} | \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}, \mathbf{C}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{A}\}$. Множество I непусто, так как $\mathbf{A} \in I$. Положим $\langle \mathbf{Y} \rangle = \bigcap\limits_{\mathbf{C} \in I} \mathbf{C}$. Согласно пункту 1), это подалгебра $\mathbf{A}$. Если $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{B}$, и $\mathbf{B}$ — подалгебра $\mathbf{A}$, то $\mathbf{B} \in I$, и тогда $\langle \mathbf{Y} \rangle = \bigcap\limits_{\mathbf{C} \in I} \mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}$.

Чтобы доказать 4), рассмотрим $\mathbf{C} = \{C_s | s \in S\}$, где $C_s = \{x \in A_s | f_s(x) = g_s(x)\}$. Легко проверяется, что $\mathbf{C}$ — подалгебра алгебры $\mathbf{A}$, причем $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{C}$. Следовательно, $\mathbf{A} = \langle \mathbf{Y} \rangle \subseteq \mathbf{C}$. Отсюда $\mathbf{A} = \mathbf{C}$. Лемма доказана.

Если $\mathbf{A} = \langle \mathbf{Y} \rangle$, то говорят, что алгебра $\mathbf{A}$ порождается множеством $\mathbf{Y}$, или что $\mathbf{Y}$ есть множество образующих (или порождающих) элементов алгебры $\mathbf{A}$.

Лемма 2.3. *В категории* Ω - Alg *существуют произвольные прямые произведения.*

Доказательство. Дадим явную конструкцию прямого произведения семейства Ω-алгебр $\mathbf{A}_i$, $i \in I$. Пусть s-я компонента $\mathbf{A}_i$ есть $A_{i,s}$. Определим $\mathbf{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i$ как S-градуированное множество, s-я компонента которого A_s — это прямое произведение множеств $\prod\limits_{i \in I} A_{i,s}$. Пусть $p_{i,s} : A_s \longrightarrow A_{i,s}$ — проекции на i-й множитель (в категории множеств), $\mathbf{p}_i = \{p_{i,s} | s \in S\}$ — соответствующие морфизмы категории градуированных множеств, то есть $\mathbf{p}_i : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$. Пусть для $\omega \in \Omega_{a,j}$ соответствующая операция в алгебре $\mathbf{A}_i$ есть ω_i. Тогда определим операцию $\omega^{\mathbf{A}} : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_m} \longrightarrow A_j$ следующим образом. Элементы $A_{s_k} = \prod\limits_{i \in I} A_{i,s_k}$ — это семейства $\{a_{i,s_k} | a_{i,s_k} \in A_{i,s_k}, i \in I\}$. Полагаем

$$(\{a_{i,s_1}\}) \ldots (\{a_{i,s_1}\}) \omega^{\mathbf{A}} = \{a_{i,s_1} \ldots a_{i,s_1} \omega_i | i \in I\} \tag{1}$$

Иными словами, операции в алгебре $\mathbf{A}$ определены "покомпонентно". Для констант это определение сводится к тому, что если $m = 0$, $\omega_i \in A_{i,j}$ — константа, соответствующая $\omega \in \Omega_{\emptyset,j}$ в алгебре $\mathbf{A}_i$, то соответствующая константа $\omega^{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}_j$ есть семейство $\{\omega_i | i \in I\}$. Из (1) сразу следует, что морфизмы $\mathbf{p}_i$ становятся гомоморфизмами Ω-алгебр. Пусть дано семейство гомоморфизмов $\mathbf{f}_i : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}_i$, компоненты которых есть отображения $f_{i,s} : B_s \longrightarrow A_{i,s}$. Согласно свойствам прямого произведения в категории "обычных" множеств, для каждого $s \in S$ однозначно определены отображения $f_s : B_s \longrightarrow \prod\limits_{i \in I} A_{i,s}$, такие, что $p_{i,s} f_s = f_{i,s}$ для всех $i \in I$. Тем самым однозначно определено отображение градуированных множеств $\mathbf{f} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, такое, что $\mathbf{p}_i \mathbf{f} = \mathbf{f}_i$ для всех $i \in I$. Остаётся убедиться, что это — гомоморфизм алгебр. Явный вид f_s таков: если $b_s \in B_s$, то $f_s(b_s) = \{f_{i,s}(b_s) | i \in I\}$. Условие, что $\mathbf{f}_i$ — гомоморфизмы, означает, что для любого $\omega \in \Omega_{a,j}$ имеют место равенства $f_{i,j}(b_{s_1} \dots b_{s_m} \omega^{\mathbf{B}}) = f_{i,s_1}(b_{s_1}) \dots f_{i,s_1}(b_{s_1}) \omega_i$. Соединяя это с равенством (1), получим

$$
\begin{aligned}
& f_j(b_{s_1} \dots b_{s_m} \omega^{\mathbf{B}}) = \{f_{i,j}(b_{s_1} \dots b_{s_m} \omega^{\mathbf{B}}) | i \in I\} = \\
& \quad = \{f_{i,s_1}(b_{s_1}) \dots f_{i,s_1}(b_{s_1}) \omega_i | i \in I\} = \\
& \quad = \{f_{i,s_1}(b_{s_1}) | i \in I\} \dots \{f_{i,s_1}(b_{s_1}) | i \in I\} \omega^{\mathbf{A}} = f_{s_1}(b_{s_1}) \dots f_{s_m}(b_{s_m}) \omega^{\mathbf{A}}
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Часто бывает необходимой следующая конструкция. Пусть даны два гомоморфизма $\mathbf{f}_1 : \mathbf{A}_1 \longrightarrow \mathbf{B}_1$, и $\mathbf{f}_1 : \mathbf{A}_1 \longrightarrow \mathbf{B}_1$. Тогда существует единственный гомоморфизм $\mathbf{f} : \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \longrightarrow \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, такой, что коммутативны диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 & \stackrel{\mathbf{f}}{\longrightarrow} & \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \\
\downarrow \mathbf{p}_i & & \downarrow \mathbf{p}_i \\
\mathbf{A}_i & \stackrel{\mathbf{f}_i}{\longrightarrow} & \mathbf{B}_i
\end{array}
$$

Здесь $i = 1, 2$, и через $\mathbf{p}_i$ и слева и справа обозначены проекции на соответствующие множители. Существование такого $\mathbf{f}$ можно чисто формально вывести из определения прямого произведения. Положим $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$, и рассмотрим два гомоморфизма — композиции $\mathbf{A} \stackrel{\mathbf{p}_i}{\longrightarrow} \mathbf{A}_i \stackrel{\mathbf{f}_i}{\longrightarrow} \mathbf{B}_i$. Применяя к этой ситуации определение прямого произведения $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, получаем единственный гомоморфизм

$\mathbf{f} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, обладающий требуемыми свойствами. Читателю предлагается в качестве упражнения проверить, что явный вид гомоморфизма $\mathbf{f} = \{f_s | s \in S\}$ таков. Отображения $f_s : (\mathbf{A}_1)_s \times (\mathbf{A}_2)_s \longrightarrow (\mathbf{B}_1)_s \times (\mathbf{B}_2)_s$ переводят элементы вида (a_1, a_2) в $((f_1)_s(a_1), (f_2)_s(a_2))$. Гомоморфизм $\mathbf{f}$ обозначается через $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$, и называется прямым (или декартовым) произведением гомоморфизмов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$.

Теперь построим по заданному $\mathbf{X} \in \mathfrak{S}$ некоторую Ω -алгебру $\mathbf{F} = Fr(\mathbf{X}) = Fr_\Omega(\mathbf{X})$ с компонентами F_s для всех $s \in S$. Будем называть ее алгеброй (многосортных) Ω -слов с базисом $\mathbf{X}$. Элементами компонент $\mathbf{F}$ — множеств F_s будут некоторые конечные упорядоченные последовательности элементов, взятых из X_t и $\Omega_{a,j}$ (Ω -слова, или слова в алфавите $(\bigcup\limits_{t \in S} X_t) \cup (\bigcup\limits_{a \in S^*, j \in S} \Omega_{a,j})$). Длину слова w (число символов в конечной упорядоченной последовательности w) будем обозначать через $\ell(w)$.

Будем строить множества F_s для всех $s \in S$ одновременно индукцией по длине входящих в них слов. Для каждого $s \in S$ полагаем $X_s \subseteq F_s$, и $\Omega_{\emptyset,s} \subseteq F_s$, то есть переменные и константы — это единственные входящие в F_s слова длины 1. Пусть уже построены все элементы всех F_s с длинами, строго меньшими n . Пусть $\omega \in \Omega_{a,j}$, $a = s_1 \dots s_m$, и пусть $w_1 \in F_{s_1}, \dots, w_m \in F_{s_m}$ — уже построенные элементы с длинами $\ell(w_i) < n$, $1 \le i \le m$. Тогда, по определению, слово $w_1 \dots w_m \omega$ принадлежит F_j и имеет длину $\ell(w_1) + \dots + \ell(w_m) + 1$. Полагаем по определению, что все элементы всех F_s получаются только таким способом.

Определим операции $\omega^{\mathbf{F}} : F_{s_1} \times \dots \times F_{s_m} \to F_j$. Пусть $F_s^{(d)}$ — множество слов из F_s , имеющих длину d , так что $F_s = \bigcup\limits_{d=1}^{\infty} F_s^{(d)}$. Отображения $\omega^{\mathbf{F}}$ достаточно определить на подмножествах $F_{s_1}^{(d_1)} \times \dots \times F_{s_m}^{(d_m)}$. Пусть $w_i \in F_{s_i}^{(d_i)}$, $1 \le i \le m$, тогда определим $w_1 \dots w_m \omega^{\mathbf{F}}$ просто как слово $w_1 \dots w_m \omega$, которое по построению является элементом F_j . Таким образом, определение операций фактически содержится в конструкции алгебры $\mathbf{F}$.

В следующих двух леммах будет предполагаться, что S состоит из одного элемента. В этом случае мы будем иметь дело с одним множеством X , и сигнатурой $\Omega = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Omega_n$. Это упростит рассуждения, а то, что нам будет необходимо в общем случае, можно потом вывести из леммы 2.5. Далее мы будем расматривать произвольные слова в алфавите $X \cup \Omega$ (то есть произвольные конечные последовательности элементов множества $X \cup \Omega$), и установим некоторые условия того, когда такое слово будет Ω -словом. Определим *валентность* $val(w)$ слова w следующим образом. Если $w \in X$, то $val(w) = 1$. Если $w \in \Omega_n$, то $val(w) = 1 - n$. Если $w = c_1 \dots c_N$, то определим $val(w)$ как сумму валентностей всех символов c_i , $1 \le i \le N$. В частности, если $\ell(w) = 1$, то $val(w) = 1$ тогда и только тогда, когда либо $w \in X$, либо $w \in \Omega_0$.

Итак, пусть $w = c_1 c_2 \dots c_N$. Слова $w^{(i)} = c_1 \dots c_i$ будем называть левыми отрезками слова w .

Лемма 2.4. *Слово w можно представить в виде $w = w_1 \dots w_r$, где w_1 , ..., w_r есть Ω -слова, тогда и только тогда, если*

$$val(w^{(k)}) > 0 \text{ для всех левых отрезков } w \text{, и } val(w) = r .$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $w = w_1 \dots w_r$. Проведем индукцию по $\ell(w)$. Если $\ell(w) = 1$, то $r = 1$, и тогда по определению Ω -слова $val(w) = 1$. Пусть $\ell(w) > 1$. Рассмотрим сначала случай $r = 1$. Это значит, что $w = u_1 \dots u_k \omega$, где $\omega \in \Omega_k$, а $u_1, \dots, u_k$ — Ω -слова, $k \ge 1$. Так как длины слов u_i меньше $\ell(w)$, то к словам u_i применимо предположение индукции. Любой левый отрезок слова w можно представить в виде $w^{(m)} = u_1 \dots u_p u_{p+1}^{(q)}$ для некоторых $p \ge 0$, $q \ge 0$ (считаем $u_{p+1}^{(0)}$ пустым словом с нулевой валентностью). Тогда

$$val(w^{(m)}) = \sum_{i=1}^{p} val(u_i) + val(u_{p+1}^{(q)}) \ ,$$

и все слагаемые (кроме, может быть, одного) по предположению индукции положительны. Кроме того, $val(w) = \sum_{i=1}^{k} val(u_i) + val(\omega) = k + 1 - k = 1$. Здесь снова использовано предположение индукции: $val(u_i) = 1$ для всех i .

Пусть $r > 1$. Тогда предположение индукции применимо ко всем подсловам $w_1, \dots, w_r$, и для левых отрезков w имеет место равенство $w^{(m)} = w_1 \dots w_p w_{p+1}^{(q)}$ (для некоторых $p, q \ge 0$). Отсюда снова получаем $val(w^{(m)}) = \sum_{i=1}^{p} val(w_i) + val(w_{p+1}^{(q)})$, и все слагаемые (кроме, может быть, одного) в этой сумме положительны. Для всего w

будем иметь $val(w) = val(w_1) + \ldots + val(w_r)$ и, как уже показано выше, все слагаемые равны единице.

Достаточность. Пусть $w = c_1 \ldots c_N$, $c_i \in X \cup \Omega$, $w^{(m)} = c_1 \ldots c_m$, $val(w^{(m)}) > 0$, $val(w) = r > 0$. Снова проведем индукцию по $\ell(w)$. При $\ell(w) = 1$ из $val(w) > 0$ следует, что $val(w) = 1$, то есть либо $w \in X$, либо $w \in \Omega_1$. В любом случае это Ω-слово. При $\ell(w) > 1$ запишем w в виде $w = w'c$, где $c = c_N$ — последний символ w, $w' = w^{(N-1)}$. Пусть $q = val(w')$. Левые отрезки слова w' являются левыми отрезками слова w, поэтому их валентности положительны, а так как $\ell(w') < \ell(w)$, то к w' применимо предположение индукции, и $w' = w'_1 \ldots w'_q$, где $w'_1, \ldots, w'_q$ являются Ω-словами. Если $c \in X$ или $c \in \Omega_0$, то это также Ω-слово, и $r = val(w) = val(w') + val(c) = q + 1$. Поэтому $w = w'_1 \ldots w'_{r-1} c$ — строка, в записи которой ровно r Ω-слов, что нам и было надо. Пусть теперь $c \in \Omega_n$, $n > 0$. Тогда $r = val(w) = val(w') + val(c) = q + 1 - n$, $n = q - r + 1 > 0$, и слово w можно записать в виде $w = w'_1 \ldots w'_{r-1}(w'_r \ldots w'_q c)$. Положим $w_i = w'_i$ при $1 \le i \le r-1$, и $w_r = w'_r \ldots w'_q c$. Так как $c \in \Omega_{q-r+1}$, то w_r есть Ω-слово. Следовательно, w удалось представить в виде $w = w_1 \ldots w_{r-1} w_r$, где все w_i являются Ω-словами. Лемма доказана.

Лемма 2.5. 1) *Пусть* $w = w'_1 \ldots w'_m = w''_1 \ldots w''_k$, *где* w'_i *и* w''_j *есть* Ω*-слова. Тогда* $m = k$, *и* $w'_1 = w''_1$, $\ldots$ $w'_m = w''_m$. *Иными словами, если существует запись* w *в виде последовательности* Ω*-слов, то она единственна.*

2) *Если* w *есть* Ω*-слово, и* $w = w'_1 \ldots w'_m \omega' = w''_1 \ldots w''_k \omega''$, *где* w'_i *и* w''_j *есть* Ω*-слова,* $\omega' \in \Omega_m$, $\omega'' \in \Omega_k$, *то* $m = k$, $\omega' = \omega''$, $w'_1 = w''_1$, $\ldots$, $w'_m = w''_m$.

Утверждения 1) и 2) справедливы также для многосортных Ω*-слов.*

Доказательство. 1) Из предыдущей леммы сразу следует, что $m = k = val(w)$. Проведем индукцию по $\ell(w)$. В случае $\ell(w) = 1$ все очевидно. При $\ell(w) > 1$ представим w в виде $w = uc$, где c — последний символ в записи w. Тогда $w'_m = u'c$, $w''_m = u''c$, $u = w'_1 \ldots w''_{m-1} u' = w''_1 \ldots w''_{m-1} u''$. Если бы оба слова u', u'' были пустыми, то есть $w'_m = w''_m = c$, то отсюда бы следовало, что

$u = w'_1 \ldots w''_{m-1} = w''_1 \ldots w''_{m-1}$, и к этому слову длины $\ell(w) - 1$ применимо предположение индукции. Допустим, что хотя бы одно из слов u' , u'' непусто, например, непусто u' . Сначала разберем случай $val(c) = 1$. Так как w'_m и w''_m есть Ω -слова, то валентность их левых отрезков u' и u'' должна быть строго положительной, но тогда равенство $1 = val(w'_m) = val(u') + val(c)$ приводит к противоречию. Рассмотрим случай $val(c) = 1 - n$, $n \geq 1$. Из равенств
$val(w) = m = val(w'_1 \ldots w'_{m-1}) + val(u') + val(c) = m - 1 + val(u') + 1 - n$
делаем вывод, что $val(u') = n \geq 1$, и аналогично $val(u'') = n$. Если $(u')^{(j)}$ — левый отрезок u' , то это также левый отрезок Ω -слова w'_m , поэтому $val((u')^{(j)}) > 0$. Это значит, что $u' = u'_1 \ldots u'_n$, где каждое u'_i есть Ω -слово. Аналогичным образом получаем, что $u'' = u''_1 \ldots u''_n$, где каждое u''_i есть Ω -слово. Поэтому равенство $u = w'_1 \ldots w''_{m-1} u' = w''_1 \ldots w''_{m-1} u''$ перепишется виде

$$u = w'_1 \ldots w''_{m-1} u'_1 \ldots u'_n = w''_1 \ldots w''_{m-1} u''_1 \ldots u''_n .$$

К этому слову применимо предположение индукции, так что $w'_1 = w''_1$, ..., $w'_{m-1} = w''_{m-1}$, $u'_1 = u''_1$, ..., $u'_n = u''_n$. Отсюда $u' = u''$, $w'_m = u'c = u''c = w''_m$.

2) Если $w = w'_1 \ldots w'_m \omega' = w''_1 \ldots w''_k \omega''$, то $\omega' = \omega''$ — один и тот же символ из Ω . Отсюда $w'_1 \ldots w'_m = w''_1 \ldots w''_k$, и можно применить первое утверждение леммы.

Теперь можно вернуться к многосортному случаю (произвольное множество S). Пусть $\mathbf{X} = \{X_s | s \in S\}$, $\mathbf{F} = \{F_s | s \in S\}$ — алгебра многосортных Ω -слов. Положим $X = \bigcup_{s \in S} X_s$, $\Omega_n = \bigcup_{s_1, \ldots, s_n, j \in S} \Omega_{s_1 \ldots s_n, j}$, $n \geq 0$. Пусть $\Omega' = \bigcup_{n \geq 0} \Omega_n$. Тогда можно построить алгебру F' односортных Ω' -слов с базисом X . Из построения видно, что $\bigcup_{s \in S} F_s \subseteq F'$, хотя это включение, вообще говоря, не обязано быть равенством. Иными словами, каждое многосортное Ω -слово будет Ω' -словом, и поэтому к нему применимы результаты пунктов 1) и 2) для односортного случая. Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{X}$ — градуированное множество, $\mathbf{F} = Fr_\Omega(\mathbf{X}) = Fr(\mathbf{X})$ — алгебра многосортных Ω -слов. По построению, для каждого $s \in S$ имеется включение $\eta_s = \eta_s(\mathbf{X}) : X_s \subseteq F_s = (\mathbf{F})_s$. Через $\eta = \eta(\mathbf{X})$ будем обозначать соответствующее отображение градуированных множеств $\mathbf{X} \longrightarrow Fr(\mathbf{X})$. Докажем, что выполнено следующее *универ-*

сальное свойство:

Теорема 2.1. *Для любой Ω-алгебры $\mathbf{A}$, и любого морфизма S-градуированных множеств $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ существует один и только один гомоморфизм Ω-алгебр $\mathbf{h} : Fr(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$, такой, что имеет место равенство морфизмов градуированных множеств $\mathbf{f} = \mathbf{h} \cdot \eta(\mathbf{X})$.*

Смысл этого свойства таков: любой гомоморфизм из $Fr(\mathbf{X})$ полностью и однозначно определяется своими значениями на элементах $\mathbf{X}$.

Доказательство. Предварительно индукцией по длине слов покажем, что $\mathbf{F} = \langle \mathbf{X} \rangle$. Для слов единичной длины все просто: $\mathbf{X} \subset \langle \mathbf{X} \rangle$ по определению, а константы содержатся в любой подалгебре. Если для слов длины, меньшей $\ell(w)$, утверждение справедливо (то есть все такие слова содержатся в $\langle \mathbf{X} \rangle$), то представим w в виде $w = w_1 \ldots w_n \omega$, где $w_i \in F_{s_i}$, $\omega \in \Omega_{s_1 \ldots s_n, j}$. Так как длины всех w_i строго меньше $\ell(w)$, то $w_i \in \langle \mathbf{X} \rangle$ по предположению индукции. Но так как $\langle \mathbf{X} \rangle$ — подалгебра, то $w = w_1 \ldots w_n \omega \in \langle \mathbf{X} \rangle$.

Допустим, что $\mathbf{h}$ существует, и докажем его единственность. Пусть имеется ещё один гомоморфизм $\mathbf{g} : Fr(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$, такой, что $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \eta(\mathbf{X})$. Теперь выполнены условия леммы 2.2, пункт 4). Следовательно, $\mathbf{h} = \mathbf{g}$.

Теперь построим $\mathbf{h}$ индукцией по длине Ω-слов. Если $\ell(w) = 1$, то возможны два случая. Если $w \in \Omega_{\emptyset, s}$, то любой гомоморфизм должен отображать константу в соответствующую константу из $\mathbf{A}$, следовательно, значение $\mathbf{h}$ на w однозначно определено. Если же $w \in X_s$, то, по условию, $h_s(w) = f_s(w)$. Теперь допустим, что для всех слов v из всех F_s таких, что $\ell(v) < n$, уже определены значения $h_s(v)$. Рассмотрим произвольное слово $w \in F_j$ длины n. Согласно построению алгебры F при $n > 1$, имеет место равенство $w = w_1 \ldots w_m \omega$, где $w_i \in F_{s_i}$, причем представление w в таком виде, как показано в лемме 2.5, однозначно. Так как $\ell(w_i) < n$ для всех i, то, чтобы строящийся $\mathbf{h}$ был гомоморфизмом, мы должны положить $h_s(w) = h_{s_1}(w_1) \ldots h_{s_m}(w_m) \omega^{\mathbf{A}}$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть $\mathbf{F} = Fr_\Omega(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X} \rangle$, и $\mathbf{A}$ есть Ω-алгебра. Если дан морфизм S-градуированных множеств $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ то для* *соответствующего ему гомоморфизма* Ω *-алгебр* $\mathbf{h} : Fr(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$ *имеет место равенство* $\mathbf{h}(\mathbf{F}) = \langle \mathbf{h}(\mathbf{X}) \rangle$.

Определение 2.5. Алгебра Ω -слов $Fr(\mathbf{X}) = Fr_\Omega(\mathbf{X})$, называется свободной Ω –алгеброй с базисом $\mathbf{X} \in \mathfrak{S}$ (или абсолютно свободной Ω –алгеброй).

Как будет показано в последнем параграфе, свободные алгебры определяются своим универсальным свойством однозначно с точностью до изоморфизма. Поэтому универсальное свойство можно считать определением свободных алгебр.

3. Отношения эквивалентности и конгруэнции

Определение 3.1. Бинарным отношением на множестве X называется произвольное подмножество $R \subseteq X \times X$. Соответствием (из множества X в множество Y) называется подмножество $U \subseteq Y \times X$.

Важными частными случаями соответствий можно считать отображения (функции) из X в Y . Для этого функцию $f : X \to Y$ надо отождествить с её графиком, то есть с множеством $\Gamma(f) = \{(f(x), x) | x \in X\} \subseteq Y \times X$. По аналогии с этим для произвольного соответствия U можно использовать запись $U : X \to Y$. Определим композицию соответствий $U : X \to Y$, $V : Y \to Z$, как подмножество $V \circ U \subseteq Z \times X$, состоящее из всех таких $(z, x) \in Z \times X$, для которых найдется $y \in Y$, такой, что $(y, x) \in U$, и $(z, y) \in V$. В качестве упражнения читатель может проверить, что композиция ассоциативна, то есть для $W : Z \to T$ имеет место равенство $W \circ (V \circ U) = (W \circ V) \circ U$. Таким образом, оперелена категория соответствий Rel , в которой $Rel(X, Y)$ — множество подмножеств $Y \times X$. Читателю стоит проверить, что тождественные морфизмы в этой категории — это так называемые диагонали: $\Delta \subset X \times X$, $\Delta = \{ (x, x) \mid x \in X\}$. Еще одно полезное упражнение: доказать, что если $U = \Gamma(f)$, $V = \Gamma(g)$, то $V \circ U = \Gamma(gf)$. Для данного соответствия $A : X \to Y$ определим соответствие $A^{-1} : Y \to X$ как множество $\{(x, y) | (y, x) \in A$. Это не обратный к A морфизм в категории Rel , просто таково общепринятое обозначение. Над соответствиями, как подмножествами, можно также осуществлять операции объединения и пересечения. Ряд элементарных свойств операций с соответствиями и бинарными отношениями собран в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Во всех случаях, когда определены приведенные в нижеследующем списке операции с соответствиями, имеют место равенства:*

$$
\begin{array}{ll}
(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1} & (\bigcup_{j\in J} A_j)^{-1} = \bigcup_{j\in J} A_j^{-1} \\
\Delta \subseteq A \Longrightarrow A \subseteq A \circ A & (\bigcup_{j\in J} A_j) \circ B = (\bigcup_{j\in J} A_j \circ B) \\
A \circ (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} (A \circ B_j) &
\end{array}
$$

Доказательство. Докажем равенство $(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$. Исходя из смысла этого выражения, полагаем $A \subseteq Z \times Y$, $B \subseteq Y \times X$. Тогда $A \circ B = \{(z,x) \in Z \times X|$ существует $y \in Y,$ такой, что $(z,y) \in A, (y,x) \in B\}$. Отсюда $(A \circ B)^{-1} = \{(x,z) \in X \times Z|$ существует $y \in Y,$ такой, что $(z,y) \in A, (y,x) \in B\}$. С другой стороны, $B^{-1} = \{(x,y) \in X \times Y|(y,x) \in B\}$, $A^{-1} = \{(z,y) \in Z \times Y|(y,z) \in B\}$. Остается применить определение и убедиться, что множества совпадают. Доказательство остальных равенств оставляется читателю в качестве упражнения.

Если дано бинарное отношение $R \subseteq X \times X$, то вместо $(x_1, x_2) \in R$ иногда пишут $x_1 R x_2$, и говорят, что x_1 и x_2 находятся в отношении R.

Определение 3.2. Пусть дано бинарное отношение $R \subseteq X \times X$. Оно называется

рефлексивным, если для всех $x \in X$ имеет место включение $(x,x) \in R$ (иными словами, $\Delta \subseteq R$);

симметричным, из $(x_1, x_2) \in R$ всегда следует $(x_2, x_1) \in R$ (то есть $R = R^{-1}$);

транзитивным, если $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R$ всегда следует $(x,z) \in R$ (это равносильно тому, что $R \circ R \subseteq R$).

Если отношение обладает всеми тремя этими свойствами одновременно, то оно называется отношением эквивалентности. При этом часто используется следующее обозначение: вместо $(x,y) \in R$ пишется $x \sim y$ или $x \sim_R y$. Таким образом, R является отношением эквивалентности тогда и только тогда, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены три свойства: 1) $x \sim_R x$; 2) $x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$; 3) $x \sim_R y, y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z$.

Разбиением множества X называется семейство его непустых подмножеств $\{X_i | i \in I\}$, такое, что $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ для любых $i, j \in I, i \neq j$. Разбиение будет элементом множества $\mathbf{P}(\mathbf{P}(X))$. Это означает, что два разбиения $\{X'_i | i \in I'\}$ и $\{X''_j | j \in I''\}$ считаются равными, если между множествами I' и I'' можно установить такое взаимно-однозначное сооответствие $i \leftrightarrow j$, что $X'_i = X''_j$.

Теорема 3.1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между отношениями эквивалентности на X и разбиениями X . Оно задается следующим образом. Пусть E — отношение эквивалентности. Для каждого $x \in X$ положим $Ex = \{y \in X | y \sim_E x\}$. Тогда множество всех различных подмножеств вида Ex образует разбиение X . Обратно, если дано разбиение $\{X_i | i \in I\}$, то образуем подмножество $X \times X$, состоящее из всех пар (x, y) , таких, что найдется $i \in I$, для которого $x, y \in X_i$. Утверждается, что это — отношение эквивалентности, и описанные соответствия взаимно обратны.*

Доказательство. Пусть дано отношение эквивалентности E . Установим предварительно некоторые свойства множеств вида Ex . Так как $x \sim_E x$, то $x \in Ex$. Отсюда следует, что $X = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} Ex \subseteq X$, а значит, $X = \bigcup\limits_{x \in X} Ex$. Пусть $z \in Ex \cap Ey$. Это значит, что $z \sim x$, $z \sim y$, или $x \sim z$, $z \sim y$, откуда $x \in Ey$ и точно так же $y \in Ex$. Для любого $w \sim x$ теперь будет $w \sim x \sim y$, то есть $Ex \subseteq Ey$, и $Ey \subseteq Ex$. Таким образом, множества вида Ex либо не пересекаются, либо совпадают, причем их объединением является все множество X . Следовательно, они образуют разбиение.

Обратно, пусть дано разбиение, и определено отношение, описанное в формулировке теоремы. Покажем, что это отношение эквивалентности. Будем писать $x \sim y$ вместо утверждения "найдется $i \in I$, для которого $x, y \in X_i$ ". Очевидно, что $x \sim x$, и что отношение симметрично. Пусть $x \sim y$, и $y \sim z$. Это значит, что найдутся такие $i, j \in I$, что $x, y \in X_i$, $y, z \in X_j$. Если $i \neq j$, то по определению разбиения X_i и X_j не пересекаются, и поэтому элемент y не может принадлежать обоим этим множествам. Следовательно, $i = j$, $x, z \in X_i = X_j$, и $x \sim z$.

Остается легкая проверка того, что построенные соответствия между отношениями эквивалентности и разбиениями взаимно обратны. Теорема доказана.

Таким образом, задать разбиение — это все равно, что задать отношение эквивалентности, и наоборот. Элементы разбиения $\{X_i | i \in I\}$ называются *классами эквивалентных элементов* для соответствующего отношения эквивалентности E, а множество $Ex = \{y | y \sim_R x\}$ называется классом элементов, эквивалентных элементу $x \in X$. Из доказательства теоремы следует, что два класса эквивалентных элементов либо совпадают, либо не пересекаются, что $x \in Ex$, и что если $y \in Ex$, то $Ey = Ex$.

Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Рассмотрим множество $E_f \subset X \times X$, состоящее из всех пар (x_1, x_2) таких, что $f(x_1) = f(x_2)$. Легко проверяется, что это отношение эквивалентности, и что его классы эквивалентных элементов — множества $f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$, где $y \in Y$, точнее — те из них, которые не пусты. Проверим, например, что эти множества образуют разбиение. Ясно, что $x \in f^{-1}(f(x))$. Если $y_1 \neq y_2$, то в $f^{-1}(y_1)$ и $f^{-1}(y_1)$ не может быть общих элементов (один и тот же $x \in X$ не может одновременно отображаться и в y_1, и в y_2). Попробуем ответить на вопрос, каждое ли отношение эквивалентности на X можно представить в виде E_f для некоторого $f : X \to Y$. Оказывается, что ответ положительный.

А именно, пусть дано отношение эквивалентности $E \subseteq X \times X$, и пусть Y — множество всех различных классов эквивалентных элементов для E. Рассмотрим отображение $f : X \to Y$, сопоставляя элементу $x \in X$ класс элементов, эквивалентных X, то есть $f(x) = Ex$. Согласно отмеченным выше свойствам классов эквивалентных элементов $f(x) = f(y)$ тогда и только тогда, когда $Ex = Ey$, что равносильно тому, что $x \sim y$. Отметим еще, что отображение f сюръективно.

Для множества классов эквивалентных элементов существует специальное название — *фактормножество* множества X по отношению E, и специальное обозначение — X/E (читается "X по E").

Отображение f, построенное выше, будем называть естественной проекцией X на фактормножество X/E, и обозначать как $\pi : X \longrightarrow X/E$.

Теорема 3.2. *Если дано отношение эквивалентности E на множестве X, и отображения $h : X \longrightarrow Y$ такое, что из $x_1 \sim_E x_2$ следует $h(x_1) = h(x_2)$ (это равносильно тому, что $E \subseteq E_h$), то существует, притом только одно, отображение $g : X/E \longrightarrow Y$, делающее коммутативной следующую диаграмму:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/E \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & Y \end{array}$$

Явный вид отображения g таков: $g(Ex) = h(x)$. Отображение g инъективно тогда и только тогда, если $E = E_h$, и сюръективно тогда и только тогда, если сюръективно h.

Доказательство. Единственность g следует из сюръективности π. Действительно, пусть существуют два отображения g_1 и g_2, таких, что $g_1\pi = h = g_2\pi$. Так как π — сюръекция, то любой $z \in X/E$ можно представить его в виде $z = \pi(x)$. Но тогда $g_1(z) = g_1(\pi(x)) = h(x)$, и точно так же $g_2(z) = h(x)$. Два отображения, значения которых совпадают для каждого аргумента, являются равными.

По условию, все элементы подмножества Ex отображаются с помощью h в один и тот же элемент $h(x)$. В частности, если $Ex' = Ex$, то $h(x') = h(x)$. Поэтому можно корректно определить отображение из X/E в Y, полагая $g(Ex) = h(x)$. Здесь Ex рассматривается уже не как подмножество X, а как *элемент* другого множества — фактормножества X/E. Поскольку $\pi(x) = Ex$ для всех $x \in X$, то $g(\pi(x)) = g(Ex) = h(x)$, и это означает, что $g\pi = h$.

Инъективность g равносильна тому, что $g(z_1) = g(z_2)$ влечет $z_1 = z_2$. Вспоминая, что $z_1 = Ex_1$, $z_2 = Ex_2$, видим, что это эквивалентно тому, что $h(x_1) = h(x_2)$ влечет $Ex_1 = Ex_2$. Иными словами, это означает, что $E_h \subseteq E$. Обратное же включение имеется по условию.

Сюръективность g равносильна тому, что каждый $y \in Y$ имеет вид $y = g(Ex)$ для некоторого $x \in X$. Но на самом деле $g(Ex) =$

$h(x)$, и очевидно, что отображение g сюръективно одновременно с h . Теорема доказана.

Таким образом, если $f : X \longrightarrow Y$ — сюръективное отображение, и E_f — отношение эквивалентности на X , соответствующее этому отображению, то существует единственная биекция $g : X/E_f \longrightarrow Y$, такая , что $g \cdot \pi = f$.

Теперь опишем, как выглядят соответствующие понятия и конструкции для градуированных множеств. Отношением эквивалентности (градуированным, или многоосновным, или многосортным) $\mathbf{E}$ на градуированном множестве $\mathbf{X} = \{X_s | s \in S\}$ будем называть подмножество градуированного множества $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$, то есть семейство $\mathbf{E} = \{E_s | s \in S\}$, где для каждого s подмножество $E_s \subseteq X_s \times X_s$ будет отношением эквивалентности на X_s . Фактормножеством $\mathbf{X/E}$ градуированного множества X по градуированному отношению $\mathbf{E}$ будем называть градуированное множество (семейство множеств) $\{X_s/E_s | s \in S\}$, а естественной проекцией $\pi : \mathbf{X} \to \mathbf{X/E}$ — морфизм градуированных множеств, являющийся семейством естественных проекций $\pi_s : X_s \to X_s/E_s$ по всем $s \in S$. Для каждого морфизма градуированных множеств $\mathbf{h} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ определено отношение эквивалентности $\mathbf{E_h} = \{E_{h_s} | s \in S\}$. Справедлив аналог теоремы 3.2:

Теорема 3.3. *Если дано отношение эквивалентности* $\mathbf{E}$ *на градуированном множестве* $\mathbf{X}$, *и морфизм градуированных множеств* $\mathbf{h} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *такой, что* $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E_h}$, *то существует, притом только один, морфизм* $\mathbf{g} : \mathbf{X/E} \longrightarrow \mathbf{Y}$, *делающий коммутативной следующую диаграмму:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{X/E} \\ & \searrow \mathbf{h} & \downarrow \mathbf{g} \\ & & \mathbf{Y} \end{array}$$

Морфизм $\mathbf{g}$ *инъективен тогда и только тогда, если* $\mathbf{E} = \mathbf{E_h}$, *и сюръективен тогда и только тогда, если сюръективен* $\mathbf{h}$.

Доказательство. Эта теорема является непосредственным следствием предыдущей, так как все участвующие в формулировке объекты, морфизмы и отношения есть *семейства* обычных множеств, отображений и отношений эквивалентности, и все действия с ними (композиции отображений, включения и т.п.) определяются "покомпонентно", то есть по отдельности для каждого сорта — элемента из множества S. Так как для каждой компоненты справедлива теорема 3.2, то необходимый нам результат является следствием определения градуированных множеств, их морфизмов и отношений эквивалентности.

Определение 3.3. Пусть $\mathbf{A} \in \Omega\text{-}\mathrm{Alg}$. Конгруэнцией на алгебре $\mathbf{A}$ называется подалгебра $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, являющаяся, кроме того, (градуированным) отношением эквивалентности.

Это значит, что на каждой компоненте A_s задано отношение эквивалентности (будем обозначать любое из них через $x \sim y$), и совокупность этих отношений обладает следующим свойством: если $x_i, y_i \in A_{s_i}$, $1 \leq i \leq n$, $x_i \sim y_i$ и $\omega \in \Omega_{s_1 \ldots s_n, j}$, то $x_1 \ldots x_n \omega \sim y_1 \ldots y_n \omega$. Тривиальные примеры конгруэнций: когда каждый элемент эквивалентен только себе самому или когда каждый элемент эквивалентен любому другому (того же сорта $s \in S$). Нетривиальные примеры конгруэнций возникают из рассмотрения гомоморфизмов алгебр. Пусть $\mathbf{h} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ — гомоморфизм. Тогда отношение эквивалентности $\mathbf{E_h}$ будет конгруэнцией на $\mathbf{A}$. В самом деле, пусть $x_i, y_i \in A_{s_i}$, при $1 \leq i \leq n$, и $x_i \sim y_i$ для всех i (имеется в виду эквивалентость по $E_{h_{s_i}}$). По определению $\mathbf{E_h}$ это значит, что $h_{s_i}(x_i) = h_{s_i}(y_i)$. Пусть $\omega \in \Omega_{s_1 \ldots s_n, j}$, тогда
$h_j(x_1 \ldots x_n \omega) = h_{s_1}(x_1) \ldots h_{s_n}(x_n)\omega = h_{s_1}(y_1) \ldots h_{s_n}(y_n)\omega = h_j(y_1 \ldots y_n \omega)$.
Это означает, что $x_1 \ldots x_n \omega \sim y_1 \ldots y_n \omega$, что и требовалось доказать. Конгруэнцию $\mathbf{E_h}$ будем называть *ядром гомоморфизма* $\mathbf{h}$ и обозначим через $Ker(\mathbf{h})$. Как показывает следующая теорема, это название (и обозначение) согласуется с тем, которое используется в теории групп.

Теорема 3.4. *Все конгруэнции на группе G можно описать как отношния эквивалентности вида*

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy^{-1} \in N$$

где N — нормальная подгруппа G. Классы эквивалентных элементов для конгруэнций при этом совпадают со смежными классами

Nx по соответствующей конгруэнции нормальной подгруппе N.

Доказательство. Пусть C — конгруэнция на мультипликативно записываемой группе G с единицей 1. Положим $N = \{x \in G | x \sim_C 1\}$. Утверждается, что это нормальная подгруппа. В самом деле, $1 \sim 1$, и если $x \sim 1$, $y \sim 1$, то по определению конгруэнции должно быть $x \cdot y \sim 1 \cdot 1 = 1$. Далее, в определение группы входит унарная операция взятия обратного элемента. По определению конгруэнции, это означает, что из $x \sim y$ следует $x^{-1} \sim y^{-1}$. В частности, если $x \sim 1$, то $x^{-1} \sim 1^{-1} = 1$. Итак, доказано, что N — подгруппа. Пусть $x \in N$, и $g \in G$ — произвольный элемент. Перемножим левые и правые части следующих эквивалентностей: $g \sim g$, $x \sim 1$, $g^{-1} \sim g^{-1}$. По определению конгруэнтности это даст $g \cdot x \cdot g^{-1} \sim g \cdot 1 \cdot g^{-1} = 1$. Следовательно, $gxg^{-1} \in N$, так что N — нормальная подгруппа. Очевидно, что $x \sim y$ в группе для любого $z \in G$ равносильно $xz \sim yz$: чтобы сделать обратный переход, достаточно умножить обе части справа на z^{-1}. Если теперь взять $z = y^{-1}$, то получим требуемое утверждение: $x \sim y$ равносильно $xy^{-1} \sim 1$, то есть $n = xy^{-1} \in N$. При этом $y = n^{-1}x \in Nx$, и обратно, если $y \in Nx$, то $y = zx$, $z \in N$, что равносильно равенству $z^{-1} = xy^{-1}$, то есть $x \sim y$.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Из теории групп хорошо известно, что группа G представляется в виде объединения различных смежных классов Nx, которые не пересекаются, и тем самым образуют разбиение множества G. Соответствующее отношение эквивалентности (это также известный факт) описывается так: $x \sim y$ (т.е. x, y принадлежат одному и тому же смежному классу) тогда и только тогда, когда $xy^{-1} \in N$. Проверим свойство конгруэнтности. Если $x_1 \sim y_1$, $x_2 \sim y_2$, то $x_i y_i^{-1} = z_i \in N$, $i = 1, 2$, и тогда $(x_1x_2)(y_1y_2)^{-1} = x_1(x_2y_2^{-1})y_1^{-1} = x_1z_2y_1^{-1}$. Так как $z_2 \in N$, и N нормальна, то $z_2y_1^{-1} = y_1^{-1}z$ для некоторого $z \in N$. Таким образом, $(x_1x_2)(y_1y_2)^{-1} = x_1y_1^{-1}z = z_1z \in N$. Наконец, если $x \sim y$, то $xy^{-1} \in N$. Воспользуемся следующим свойством нормальных подгрупп: если $ab \in N$, то и $ba = b(ab)b^{-1} \in N$. В нашем случае отсюда следует, что из $xy^{-1} \in N$ следует $y^{-1}x \in N$. Но это означает, что $y^{-1} \sim x^{-1}$. Теорема доказана.

Лемма 3.2. *Пересечение отношений эквивалентности на множестве X (как подмножеств $X \times X$) также является отношением* *эквивалентности. То же самое можно сказать и о пересечении многоосновных отношений эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $\{R_i | R_i \subseteq X \times X, i \in I\}$ — семейство отношений эквивалентности на множестве X. Проверим, что $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ — также отношение эквивалентости. Так как $(x, x) \in R_i$ для любого $x \in X$ и всех $i \in I$, то $(x, x) \in R = \bigcap_{i \in I} R_i$. Если $(x, y) \in R$, то $(x, y) \in R_i$ для всех $i \in I$. Но тогда $(y, x) \in R_i$ для всех i, откуда следует, что (y, x) содержится и в пересечении всех этих множеств, то есть в R. Аналогично, если $(x, y), (y, z) \in R$, то $(x, y), (y, z) \in R_i$ для всех $i \in I$. Так как R_i — отношение эквивалентности, то $(x, z) \in R_i$ для всех $i \in I$. Но это означает, что $(x, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i = R$. Многоосновный случай легко следует из одноосновного. Лемма доказана.

Лемма 3.3. 1) *Пересечение конгруэнций есть конгруэнция.*

2) *Существует конгруэнция $\langle \mathbf{E} \rangle$, порожденная данным отношением $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ (то есть наименьшая по включению конгруэнция, содержащая данное отношение).*

Доказательство. Утверждение 1) есть следствие двух фактов: пересечение подалгебр есть подалгебра и пересечение отношений эквивалентности есть отношение эквивалентности. Оба этих факта были доказаны выше.

Пусть $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Определим $\langle \mathbf{E} \rangle$ как пересечение всех конгруэнций, содержащих $\mathbf{E}$. Уже доказано, что это конгруэнция, содержащая $\mathbf{E}$. Из построения сразу следует, что любая конгруэнция, содержащая отношение $\mathbf{E}$, содержит и конгруэнцию $\langle \mathbf{E} \rangle$. Лемма доказана.

Следствие 3.1. *Множество всех конгруэнций на данной алгебре* $\mathbf{A}$ *, упорядоченное по включению, есть решетка.*

Доказательство. Упорядочение на множестве конгруэнций задается так: $\mathbf{C}_1 \leq \mathbf{C}_2$ тогда и только тогда, если $\mathbf{C}_1 \subseteq \mathbf{C}_2$. Читателю предлагается проверить самостоятельно (это нетрудно), что точная нижняя грань $\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$, а точная верхняя грань — $\mathbf{C}_1 \vee \mathbf{C}_2 = \langle \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2 \rangle$.

Теорема 3.5. *Пусть* $\mathbf{A}$ *есть* Ω*-алгебра, и* $\mathbf{C}$ *— конгруэнция на* $\mathbf{A}$*. Тогда на градуированном фактормножестве* $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ *можно определить структуру* Ω*-алгебры так, что морфизм естественной проекции* $\pi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\mathbf{C}$ *становится сюръективным гомоморфизмом алгебр, таким, что* $\mathbf{C} = Ker(\pi)$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{C} = \{C_s | s \in S\}$, где для каждого $s \in S$ C_s — отношение эквивалентности на множестве A_s. Тогда $\mathbf{A}/\mathbf{C} = \{A_s/C_s | s \in S\}$. Определим на этом градуированном множестве структуру Ω-алгебры следующим образом. Пусть $\omega \in \Omega_{s_1 \dots s_n, j}$, $z_i \in A_{s_i}/C_{s_i}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Можно представить каждый элемент z_i в виде $z_i = C_{s_i} x_i$ для некоторого $x_i \in A_{s_i}$. Тогда полагаем

$$(C_{s_1} x_1) \dots (C_{s_n} x_n) \omega = C_j (x_1 \dots x_n \omega) \ .$$

Чтобы доказать корректность этого определения, надо убедиться, что значение правой части не зависит от выбора элементов $x_1, \dots x_n$ для данных $z_1, \dots, z_n$. Выбор других элементов $x'_1, \dots, x'_n$, таких, что $C_{s_i} x_i = C_{s_i} x'_i$ для всех i, означает, что $x_i \sim x'_i$ (по отношению C_{s_i}). Тогда по определению конгруэнтности $x_1 \dots x_n \omega \sim x'_1 \dots x'_n \omega$, а это значит, что $C_j(x_1 \dots x_n \omega) = C_j(x'_1 \dots x'_n \omega)$. В случае $n = 0$ мы имеем дело с константой, которая по определению равна $\omega^{\mathbf{A}/\mathbf{C}} = C_j \omega^{\mathbf{A}}$.

При таком определении операций на $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ морфизм градуированных множеств $\pi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\mathbf{C}$, компонентами которого являются естественные проекции $\pi_s : A_s \longrightarrow A_s/C_s$, становится гомоморфизмом алгебр. В самом деле, так как $\pi_{s_i}(x_i) = C_{s_i} x_i$, то данное выше определение операций в $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ превращается в равенство

$$h_{s_1}(x_1) \dots h_{s_n}(x_n) \omega = h_j(x_1 \dots x_n \omega),$$

и если $\omega^{\mathbf{A}} \in \Omega_{\emptyset, j}$ (а фактически $\omega^{\mathbf{A}} \in A_j$), то $\omega^{\mathbf{A}/\mathbf{C}} = h_j(\omega^{\mathbf{A}})$. Это и есть свойства, определяющие гомоморфизм алгебр. Очевидно, что он сюръективен, и легко убедиться, что $\mathbf{C} = Ker(\pi)$. Теорема доказана.

Определение 3.4. Построенная в предыдущей теореме алгебра $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ называется *факторалгебой* алгебры $\mathbf{A}$ по конгруэнции $\mathbf{C}$.

Теорема 3.6. (Теорема о гомоморфизме). *Если имеется конгруэнция* $\mathbf{C}$ *на алгебре* $\mathbf{A}$*, и гомоморфизм* $\mathbf{h} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *такой, что*

$\mathbf{C} \subseteq Ker(\mathbf{h})$. *Тогда существует единственный гомоморфизм* $\mathbf{g} : \mathbf{A}/\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$, *такой, что коммутативна диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{A}/\mathbf{C} \\ & \searrow \mathbf{h} & \downarrow \mathbf{g} \\ & & \mathbf{B} \end{array}$$

Гомоморфизм $\mathbf{g}$ *инъективен тогда и только тогда, когда* $\mathbf{C} = Ker(\mathbf{h})$, *и сюръективен тогда и только тогда, когда сюръективен* $\mathbf{h}$.

Доказательство. Ввиду теоремы 3.3 остается только проверить, что $\mathbf{g}$ является гомоморфизмом алгебр. Это легко следует из определений. В самом деле, В самом деле, пусть $z_i = C_{s_i}x_i \in A_{s_i}/C_{s_i}$, $i = 1, \ldots, n$, и $\omega \in \Omega_{s_1 \ldots s_n, j}$. Тогда, используя то, что гомоморфизмом является $\mathbf{h}$, проделаем следующие выкладки:

$$g_j(z_1 \ldots z_n\omega) = h_j(x_1 \ldots x_n\omega) = h_{s_1}(x_1) \ldots h_{s_n}(x_n)\omega = g_{s_1}(z_1) \ldots g_{s_n}(x_n)\omega .$$

Очевидно также, что отображения g_s переводят соответствующие константы друг в друга. Теорема доказана.

Следствие 3.2. (Теорема об изоморфизме). *Пусть дан сюръективный гомоморфизм* Ω *-алгебр* $\mathbf{h} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$. *Тогда* $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}/Ker(\mathbf{h})$.

Следствие 3.3. *Каждая* Ω *-алгебра изоморфна факторалгебре свободной алгебры.*

Доказательство. Выберем в алгебре $\mathbf{A}$ какое-то порождающее ее множество $\mathbf{X}$ (оно может даже совпадать с $\mathbf{A}$). Рассмотрим свободную алгебру $\mathbf{F} = Fr_\Omega(\mathbf{X})$. Включение (т.е. морфизм градуированных множеств) $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}$, как уже было показано выше, однозначно продолжается до гомоморфизма $\mathbf{h} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{A}$, образ которого есть $\langle \mathbf{X} \rangle$, то есть совпадает с $\mathbf{A}$ по выбору $\mathbf{X}$. Следовательно, $\mathbf{h}$ — сюръекция, и по теореме об изоморфизме (предыдущее следствие) отюда следует, что $\mathbf{A} \cong \mathbf{F}/Ker(\mathbf{h})$.

В теореме 4.2 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.4. *Пусть дано семейство гомоморфизмов* Ω *-алгебр* $\mathbf{f}_j : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}_j$, $j \in J$. *Рассмотрим соответствующий гомоморфизм* $\mathbf{f} : \mathbf{B} \longrightarrow \prod\limits_{j\in J} \mathbf{A}_j$ *(такой, что* $\mathbf{p}_j\mathbf{f} = \mathbf{f}_j$ *для всех* $j \in J$ *). Тогда* $Ker(\mathbf{f}) = \bigcap\limits_{j\in J} Ker(\mathbf{f}_j)$

Доказательство. Выберем $s \in S$, и пусть f_s и $(f_j)_s$ — соответствующие компоненты $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}_j$. Если $x \in B_s$, то $f_s(x) = \{(f_j)_s | j \in J\}$. Отсюда следует, что $(f_j)_s(x_1) = (f_j)_s(x_2)$ тогда и только тогда, когда $(f_j)_s(x_1) = (f_j)_s(x_2)$ для каждого $j \in J$. Переходя на язык конгруэнций, это можно сформулировать так: $(x_1, x_2) \in Ker(\mathbf{f})_s$ тогда и только тогда, если $(x_1, x_2) \in Ker(\mathbf{f}_j)_s$ для всех $j \in J$. Эквивалентная форма записи того же самого утверждения: $Ker(\mathbf{f}) = \bigcap\limits_{j\in J} Ker(\mathbf{f}_j)$. Лемма доказана.

Литература по теории отношений и конгруэнций. Отметим книгу [18], специально посвященную различным видам отношений, и книгу [7], в которой подробно описаны свойства конгруэнций для одноосновных алгебр.

4. Тождества и многообразия

На протяжении всего этого раздела мы зафиксируем множество S , категорию S -градуированных множеств $\mathfrak{S}$, сигнатуру Ω и категорию S -градуированных Ω -алгебр. В некоторых конкретных примерах рассматриваются частные случаи, в которых S состоит из одного элемента (т.е. обычные множества).

Определение 4.1. Многообразием S -градуированных Ω -алгебр называется полная подкатегория $\mathfrak{M}$ категории Ω - Alg , обладающая следующими свойствами.

1) Если $\mathbf{A}$ — объект $\mathfrak{M}$, и $\mathbf{B}$ — подалгебра $\mathbf{A}$, то $\mathbf{B}$ — объект категории $\mathfrak{M}$.

2) Если дан сюръективный гомоморфизм Ω -алгебр $\mathbf{f} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, и алгебра $\mathbf{A}$ является объектом категории $\mathfrak{M}$, то и алгебра $\mathbf{B}$ будет объектом этой категории.

3) Если дано семейство алгебр $\{\mathbf{A}_i | i \in I\}$, каждая из которых является объектом $\mathfrak{M}$, то их прямое произведение $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ также будет объектом этой категории.

Отметим следующее свойство многообразий. Если алгебра $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathfrak{M}$, и имеется другая Ω - алгебра $\mathbf{B}$, такая, что $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, то $\mathbf{B}$ также является объектом категории $\mathfrak{M}$. Когда алгебра $\mathbf{A}$ есть объект категории $\mathfrak{M}$, будем обозначать это в виде $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}$.

Многообразиями алгебр являются многие хорошо известные категории: категории полугрупп, групп, ассоциативных колец, алгебр Ли, решеток, булевых алгебр и т.п. Многообразиями являются и категории Alg - Ω при любых S и Ω.

Определение 4.2. Свободной алгеброй многообразия $\mathfrak{M}$ с базисом $\mathbf{X}$ называется алгебра $\mathbf{F} = Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ из этого многообразия, для которой определен морфизм градуированных множеств $\eta = \eta_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{F}$, причем выполнено следующее *универсальное свойство*: для любой другой алгебры из $\mathfrak{M}$ (только из $\mathfrak{M}$, а не из всей категории Ω - Alg) и любого морфизма градуированных множеств $\lambda : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ существует, притом только один, гомоморфизм алгебр $\mathbf{h} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{A}$, для которого имеет место равенство $\mathbf{h}\eta = \lambda$. Иначе это можно выразить, сказав, что должна быть коммутативной следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{F} \\ & \searrow \lambda & \downarrow \mathbf{h} \\ & & \mathbf{A} \end{array}$$

Если многообразие $\mathfrak{M}$ — это вся категория Ω-Alg, то вместо $Fr_{\mathfrak{M}}$ будем писать, как и в параграфе 2, Fr_{Ω}, а вместо $\eta_{\mathfrak{M}}$ — η_{Ω}. Когда из контекста ясно, о каком многообразии идет речь, будем опускать "индексы" и писать просто Fr и η.

Лемма 4.1. *Свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с базисом $\mathbf{X}$ определена с точностью до изоморфизма. Более подробно это можно выразить так. Если даны две алгебры $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и два морфизма градуированных множеств $\eta_i : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{F}_i$, $i = 1, 2$, обладающих одним и тем же универсальным свойством, сформулированным в определении 4.2, то существует, притом только один, изоморфизм алгебр $\mathbf{h} : \mathbf{F}_1 \longrightarrow \mathbf{F}_2$, такой, что $\mathbf{h}\eta_1 = \eta_2$.*

Доказательство. Из определения 4.2 следует, что существуют однозначно определенные гомоморфизмы $\mathbf{h}:\mathbf{F}_1\longrightarrow\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{g}:\mathbf{F}_2\longrightarrow\mathbf{F}_1$, такие, что $\mathbf{h}\eta_1=\eta_2$ и $\mathbf{g}\eta_2=\eta_1$. Рассмотрим композицию гомоморфизмов $\mathbf{g}\cdot\mathbf{h}:\mathbf{F}_1\longrightarrow\mathbf{F}_1$. Легко проверяется, что $\mathbf{g}\cdot\mathbf{h}\cdot\eta_1=\eta_1$. Из определения 4.2 следует, что если некоторый гомоморфизм $\mathbf{f}:\mathbf{F}_1\longrightarrow\mathbf{F}_1$ со свойством $\mathbf{f}\eta_1=\eta_1$ существует, то он является единственным гомоморфизмом с таким свойством. Но один гомоморфизм с таким свойством существует всегда — это тождественный гомоморфизм $id_{\mathbf{F}_1}$. Следовательно, если есть какой-то другой гомоморфизм $\mathbf{g}\cdot\mathbf{h}$ с тем же самым свойством, то он обязан совпадать с единичным. Таким образом, $\mathbf{g}\cdot\mathbf{h}=id_{\mathbf{F}_1}$, и точно такими же рассуждениями доказывается, что $\mathbf{h}\cdot\mathbf{g}=id_{\mathbf{F}_2}$. Лемма доказана.

Если поставить в соответствие алгебре $\mathbf{A}$ из многообразия $\mathfrak{M}$ градуированное *множество* $\mathbf{A}$ (обозначая его через $U_{\mathfrak{M}}(\mathbf{A})$), а гомоморфизму $\mathbf{f}$ *отображение* градуированных множеств $\mathbf{f}$ (обозначаемое через $U_{\mathfrak{M}}(\mathbf{f})$), то получится функтор

$$U_{\mathfrak{M}}\ :\ \mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{S},$$

который называется забывающим функтором. Функтор $U_{\mathfrak{M}}$ есть ограничение функтора $U_{\Omega\text{-Alg}}$ на полную подкатегорию $\mathfrak{M}$ категории $\Omega\text{-Alg}$. До конца доказательства следующей теоремы мы фиксируем многообразие $\mathfrak{M}$ и будем писать вместо $U_{\mathfrak{M}}$ и $Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ просто U и $Fr(\mathbf{X})$. С помощью функтора U можно дать строгую формулировку для неформальных утверждений о том, что задан морфизм градуированных множеств $\mathbf{f}:\mathbf{X}\to\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — это Ω-алгебра. "На самом деле" это означает, что задан морфизм $\mathbf{f}:\mathbf{X}\to U(\mathbf{A})$ категории $\mathfrak{S}$.

Теорема 4.1. *Допустим, что для любого базиса* $\mathbf{X}$ *в многообразии* $\mathfrak{M}$ *существует свободная алгебра* $Fr(\mathbf{X})=Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$. *Тогда соответствие* $\mathbf{X}\mapsto Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ *— это функтор*

$$Fr=Fr_{\mathfrak{M}}:\mathfrak{S}\longrightarrow\mathfrak{M}\ ,$$

сопряженный слева к функтору $U_{\mathfrak{M}}$.

Доказательство. Зафиксируем для каждого градуированного множества $\mathbf{X}$ алгебру $Fr(\mathbf{X})=Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$, удовлетворяющую определению 4.2, и морфизм градуированных множеств $\eta(\mathbf{X})=\eta_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$:

$\mathbf{X} \longrightarrow Fr(\mathbf{X})$. Покажем, что соответствие $\mathbf{X} \mapsto Fr(\mathbf{X})$ определяет функтор из $\mathfrak{S}$ в категорию $\mathfrak{M}$. Необходимо определить действие на морфизмах. Допустим, что дан морфизм градуированных множеств $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$. Тогда пусть $Fr(\mathbf{f})$ есть единственный гомоморфизм алгебр $Fr(\mathbf{X}) \longrightarrow Fr(\mathbf{Y})$, такой, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} Fr(\mathbf{X}) & \overset{Fr(\mathbf{f})}{\longrightarrow} & Fr(\mathbf{Y}) \\ \uparrow \eta(\mathbf{X}) & & \uparrow \eta(\mathbf{Y}) \\ \mathbf{X} & \overset{\mathbf{f}}{\longrightarrow} & \mathbf{Y} \end{array} \tag{1}$$

Чтобы получить эту коммутативную диаграмму из универсального свойства $Fr(\mathbf{X})$, надо взять $\mathbf{A} = Fr(\mathbf{Y})$, и рассмотреть морфизм градуированных множеств $\mathbf{X} \overset{\mathbf{f}}{\longrightarrow} \mathbf{Y} \overset{\eta(\mathbf{Y})}{\longrightarrow} Fr(\mathbf{Y})$. Тогда гомоморфизм $\mathbf{h}$, существование и единственность которого следуют из универсального свойства — это и есть $Fr(\mathbf{f})$. Если $\mathbf{Y} = \mathbf{X}, \mathbf{f} = id_{\mathbf{X}}$, то $Fr(id) = id_{Fr(\mathbf{X})}$, так как тождественный гомоморфизм делает диаграмму (1) коммутативной, а двух гомомоморфизмов с таким свойством быть не может. Если дан морфизм $\mathbf{g} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$, то $\mathbf{h}_1 = Fr(\mathbf{g})Fr(\mathbf{f})$ и $\mathbf{h}_2 = Fr(\mathbf{gf})$ удовлетворяют одному и тому же свойству: $\mathbf{h}_i \cdot \eta(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{Z})\mathbf{gf}$, и поэтому должны быть равными.

Переосмысливая диаграмму (1) как коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U(Fr(\mathbf{X})) & \overset{U(Fr(\mathbf{f}))}{\longrightarrow} & U(Fr(\mathbf{Y})) \\ \uparrow \eta(\mathbf{X}) & & \uparrow \eta(\mathbf{Y}) \\ \mathbf{X} & \overset{\mathbf{f}}{\longrightarrow} & \mathbf{Y} \end{array} \tag{2}$$

делаем вывод, что $\eta(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \longrightarrow U(Fr(\mathbf{X}))$ — естественное преобразование тождественного функтора $Id_{\mathfrak{S}}$ в композицию функторов $U \cdot Fr : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$.

Пусть $\mathbf{A}$ — некоторая Ω -алгебра из $\mathfrak{M}$, и дан морфизм градуированных множеств $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to U(\mathbf{A})$. Это означает, что выполнены условия определения 4.2, и существует, притом только один, гомоморфизм Ω -алгебр $\mathbf{h} : \mathbf{Fr}(\mathbf{X}) \to \mathbf{A}$ такой, что $\mathbf{h}\eta(\mathbf{X}) = \mathbf{f}$. Для категории $\mathfrak{S}$ это означает, что вместо гомоморфизма алгебр надо взять морфизм градуированных множеств $U(\mathbf{h})$, и тогда универсальное свойство превращается в определение сопряженного функтора. Теорема доказана.

Теперь приступим к доказательству того, что свободные алгебры существуют в любом многообразии.

Определение 4.3. Тождеством, выполняющимся в алгебре $\mathbf{A} \in \Omega$-Alg называется пара слов $(t_1, t_2) \in Fr_\Omega(\mathbf{X})_s \times Fr_\Omega(\mathbf{X})_s$ такая, что для любого гомоморфизма $\mathbf{h} : Fr_\Omega(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$ имеет место равенство $h_s(t_1) = h_s(t_2)$.

Очень часто в литературе вместо утверждения "тождество (t_1, t_2)" употребляется выражение "тождество $t_1 = t_2$". Смысл, который вкладывается в такую замену, можно вкратце описать следующим образом. Элементы свободной алгебры t_1 и t_2 можно мыслить как своего рода мономы от переменных (то есть элементов базиса свободной алгебры) $x_1, \ldots, x_n$, что записывается так: $t_k = t_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2$. В запись этих "мономов", кроме переменных, входят символы операций, то есть элементы сигнатуры Ω. Применение к элементам t_k гомоморфизма $\mathbf{h}$, такого, что $h(x_i) = a_i$, $1 \le i \le n$ (для краткости опускаем индексы у h), фактически означает, что в в мономы t_k сделана "подстановка" a_i вместо x_i, и вместо символов операций "подставлены" соответствующие операции в алгебре $\mathbf{A}$, после чего эти операции выполняются в $\mathbf{A}$ над элементами $a_1, \ldots, a_n$, и полученные таким образом элементы $\mathbf{A}$ обозначаются через $t_k(a_1, \ldots, a_n)$, $k = 1, 2$. Из универсального свойства свободной алгебры следует, что в качестве $a_1, \ldots, a_n$ можно брать любые наборы элементов $\mathbf{A}$ (в том числе с повторениями), с единственным ограничением: должно соблюдаться соответствие сортов x_i и a_i. Для каждого набора $a_1, \ldots, a_n$ существует гомоморфизм $\mathbf{h}$, такой, что $h(x_i) = a_i$. Поэтому утверждение " (t_1, t_2) есть тождество, выполняющееся в $\mathbf{A}$ " означает, что каковы бы ни были $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathbf{A}$, в алгебре $\mathbf{A}$ всегда имеет место равенство $t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$. Именно это и имеется в виду, когда утверждается, что $t_1 = t_2$ есть тождество.

Обозначим через $T_\mathbf{A}(\mathbf{X})_s$ множество всех тождеств, соответствующих $s \in S$ и $\mathbf{X} \in \mathfrak{S}$, и через $T_\mathbf{A}(\mathbf{X})$ — градуированное множество $\{T_\mathbf{A}(\mathbf{X})_s | s \in S\}$. Ясно, что $T_\mathbf{A}(\mathbf{X}) \subseteq Fr_\Omega(\mathbf{X}) \times Fr_\Omega(\mathbf{X})$.

Лемма 4.2. *$T_\mathbf{A}(\mathbf{X})$ — конгруэнция.*

Доказательство. Определение $T_\mathbf{A}(\mathbf{X})$ равносильно тому, что

$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = \bigcap\limits_{\mathbf{h}} Ker(\mathbf{h})$, где пересечение берется по всевозможным гомоморфизмам $\mathbf{h} : Fr_\Omega(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$. В предыдущем параграфе уже было показано, что ядро гомоморфизма — конгруэнция, и пересечение конгруэнций — тоже конгруэнция.

Определение 4.4. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие. Положим $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) = \bigcap\limits_{\mathbf{A}\in\mathfrak{M}} T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$. Согласно предыдущей лемме, это пересечение конгруэнций, и следовательно, тоже конгруэнция, которую мы будем называть вербальной конгруэнцией многообразия $\mathfrak{M}$ с базисом $\mathbf{X}$.

Неформально говоря, вербальные конгруэнции состоят из всех тождеств, которые выполняются сразу на всех алгебрах из данного многообразия.

Лемма 4.3. *Сопоставление* $\mathbf{X} \mapsto T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ *— это функтор из* $\mathfrak{S}$ *в категорию* Ω *-алгебр.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм градуированных множеств $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$. Так как Fr_Ω — функтор, определен гомоморфизм алгебр $\mathbf{f} = Fr_\Omega(\varphi) : Fr_\Omega(\mathbf{X}) \longrightarrow Fr_\Omega(\mathbf{Y})$, причем такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Fr_\Omega(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\mathbf{f}} & Fr_\Omega(\mathbf{Y}) \\ \uparrow \eta(\mathbf{X}) & & \uparrow \eta(\mathbf{Y}) \\ \mathbf{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Y} \end{array}$$

Рассмотрим гомоморфизм алгебр

$$\mathbf{f}\times\mathbf{f} : Fr_\Omega(\mathbf{X}) \times Fr_\Omega(\mathbf{X}) \longrightarrow Fr_\Omega(\mathbf{Y}) \times Fr_\Omega(\mathbf{Y}) ,$$

и покажем, что он отображает подалгебру $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ в подалгебру $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y})$. Выберем произвольный $s \in S$, и пусть $(t_1, t_2) \in T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})_s$. Для того, чтобы $(f_s(t_1), f_s(t_2)) \in T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y})_s$, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной алгебры $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}$ и любого гомоморфизма $\mathbf{h} : Fr_\Omega(\mathbf{Y}) \longrightarrow \mathbf{A}$ имело место равенство $h_s(f_s(t_1)) = h_s(f_s(t_2))$. Но так как $\mathbf{hf}$ есть гомоморфизм из $Fr(\mathbf{X})$ в $\mathbf{A}$, то необходимое нам равенство следует из того, что $(t_1, t_2) \in T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})_s$ по определению $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$. Обозначая ограничение гомоморфизма $\mathbf{f}\times\mathbf{f}$ на подалгебру $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$

через $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{f})$, получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Fr_\Omega(\mathbf{X}) \times Fr_\Omega(\mathbf{X}) & \stackrel{\mathbf{f}\times\mathbf{f}}{\longrightarrow} & Fr_\Omega(\mathbf{Y}) \times Fr_\Omega(\mathbf{Y}) \\ \uparrow \subseteq & & \uparrow \subseteq \\ T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) & \stackrel{T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{f})}{\longrightarrow} & T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y}) \end{array} \qquad (3)$$

Отсюда, используя то, что Fr_Ω является функтором, уже легко вывести,что функтором будет и $T_{\mathfrak{M}}$. Лемма доказана.

Описанный в этой лемме функтор будем называть вербальным функтором многообразия $\mathfrak{M}$. Коммутативность диаграммы (3) — его важнейшее свойство. Неформально говоря, оно означает, что подстановка любых "мономов" вместо переменных в тождество снова является тождеством.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие Ω -алгебр. Для любого градуированного множества $\mathbf{X}$ существует свободная алгебра $Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ многообразия $\mathfrak{M}$. При этом*

$$Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) \cong Fr_\Omega(\mathbf{X})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$$

Доказательство. Обозначим для краткости через $\mathbf{F}$ факторалгебру $Fr_\Omega(\mathbf{X})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$, и пусть $\eta : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{F}$ есть композиция отображений

$$\mathbf{X} \stackrel{\eta_\Omega(\mathbf{X})}{\longrightarrow} Fr_\Omega(\mathbf{X}) \stackrel{\pi}{\longrightarrow} Fr_\Omega(\mathbf{X})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) = \mathbf{F} .$$

Проверим универсальное свойство. Рассмотрим любой морфизм градуированных множеств $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{A}$, где $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}$. Существует единственный гомоморфизм $\mathbf{f} : Fr_\Omega(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$ со свойством $\mathbf{f}\eta_\Omega(\mathbf{X}) = \varphi$. По определению $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ будем иметь $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \subseteq Ker(\mathbf{f})$, а так как $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ есть пересечение всех $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ таких, что $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}$, то и $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) \subseteq Ker(\mathbf{f})$. Применяя теорему о гомоморфизме, получим однозначно определенный гомоморфизм $\mathbf{g} : Fr_\Omega(\mathbf{X})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$, такой, что $\mathbf{g}\pi = \varphi$. Отсюда заключаем, что $\mathbf{g}\eta = \mathbf{g}\pi\eta_\Omega(\mathbf{X}) = \mathbf{f}\eta_\Omega(\mathbf{X}) = \varphi$. Пусть существуют два гомоморфизма $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ такие, что $\mathbf{g}_1\eta = \mathbf{g}_\eta = \varphi$. Тогда гомоморфизмы $\mathbf{f}_1 = \mathbf{g}_1\pi$ и $\mathbf{f}_2 = \mathbf{g}_2\pi$ должны быть равными по универсальному свойству свободной алгебры $Fr_\Omega(\mathbf{X})$ (так как $\mathbf{f}_1\eta_\Omega(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_2\eta_\Omega(\mathbf{X}) = \varphi$). Отсюда, ввиду сюръективности π , следует, что $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2$.

Остается показать, что $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим множество J, равномощное множеству всех конгруэнций $\mathbf{C}$ на $Fr_{\Omega}(\mathbf{X})$, таких, что $Fr_{\Omega}(\mathbf{X})/\mathbf{C} \in \mathfrak{M}$. Для $j \in J$ будем обозначать через $\mathbf{C}_j$ соответствующую конгруэнцию, и через $\mathbf{f}_j : Fr_{\Omega}(\mathbf{X}) \longrightarrow Fr_{\Omega}(\mathbf{X})/\mathbf{C}_j = \mathbf{A}_j$ — соответствующую проекцию на факторалгебру. Для любого гомоморфизма $\mathbf{h} : Fr_{\Omega}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{B}$, где $\mathbf{B} \in \mathfrak{M}$, его гомоморфный образ $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ по определению многообразия также является алгеброй из $\mathfrak{M}$, и $Fr_{\Omega}(\mathbf{X})/Ker(\mathbf{h}) \cong \mathbf{A} \in \mathfrak{M}$. Поэтому конгруэнция $Ker(\mathbf{h})$ принадлежит множеству J. (Это доказывает также непустоту множества J, так как гомоморфизмы из $Fr_{\Omega}(\mathbf{X})$ в любую алгебру из $\mathfrak{M}$ всегда существуют.) Пересечение $Ker(\mathbf{h})$ по всем таким $\mathbf{h}$ совпадает с $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$, но это пересечение, как только что выяснилось, совпадает и с $\bigcap\limits_{j \in J} \mathbf{C}_j$. Рассмотрим алгебру $\prod\limits_{j \in J} \mathbf{A}_j$, которая также принадлежит $\mathfrak{M}$. Так как для каждого $j \in J$ имеется гомоморфизм $Fr_{\Omega}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{A}_j$, то существует и гомоморфизм $\mathbf{f} : Fr_{\Omega}(\mathbf{X}) \longrightarrow \prod\limits_{j \in J} \mathbf{A}_j$, такой, что $f_s(w) = \{(f_j)_s(w) | j \in J\}$ для всех $s \in S$. Из доказанной в конце предыдущего параграфа леммы следует, что его ядро есть $\bigcap\limits_{j \in J} Ker(\mathbf{f}_j)$, то есть равно $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$. Снова применяя теорему о гомоморфизме, заключаем, что существует инъективный гомоморфизм

$$\mathbf{g} : Fr_{\Omega}(\mathbf{X})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) \longrightarrow \prod_{j \in J} \mathbf{A}_j .$$

Его образ изоморфен $Fr_{\Omega}(\mathbf{X})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ и является подалгеброй в алгебре $\prod\limits_{j \in J} \mathbf{A}_j$, принадлежащей многообразию $\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что и сама алгебра $\mathbf{F} = Fr_{\Omega}(\mathbf{X})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$ принадлежит многообразию $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Заметим, что в доказательстве используются все три свойства из определения многообразия.

Определение 4.4. Пусть дано некоторое семейство (возможно даже — *класс*, а не множество!) градуированных множеств $\mathbf{Z} = \{\mathbf{Z}_i | i \in I\}$, причем $\mathbf{Z}_i \subseteq Fr_{\Omega}(\mathbf{X}_i) \times Fr_{\Omega}(\mathbf{X}_i)$ для некоторого $\mathbf{X}_i$. Обозначим через $Var(\mathbf{Z})$ полную подкатегорию категории Ω-Alg, объектами которой являются в точности те алгебры (обозначим любую из них через $\mathbf{A}$), которые обладают следующим свойством. Выберем некоторый $i \in I$ и рассмотрим произвольный гомоморфизм

$\mathbf{h} : Fr_\Omega(\mathbf{X}_i) \longrightarrow \mathbf{A}$, компонентами которого являются отображения $h_s : F_s = Fr_\Omega(\mathbf{X}_i)_s \to A_s$. Тогда для любой пары $(z_1, z_2) \in (\mathbf{Z}_i)_s \subseteq F_s \times F_s$ должно выполняться равенство $h_s(z_1) = h_s(z_2)$.

Иными словами, $Var(\mathbf{Z})$ состоит из всех алгебр, на которых выполняются все тождества из заданного фиксированного семейства $\mathbf{Z}$.

Теорема 4.3. $Var(\mathbf{Z})$ — *многообразие.*

Доказательство. Очевидно, что если $\mathbf{A} \in Var(\mathbf{Z})$ (то есть алгебра $\mathbf{A}$ является объектом этой категории), то и для любой подалгебры $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ также $\mathbf{B} \in Var(\mathbf{Z})$. Пусть $\mathbf{f} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ — сюръективный гомоморфизм и $\mathbf{A} \in Var(\mathbf{Z})$. Выберем произвольный гомоморфизм $\mathbf{h} : Fr_\Omega(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{B}$, элементы $s \in S$, $i \in I$ и $(z_1, z_2) \in (\mathbf{Z}_i)_s$. Пусть $\eta_i = \eta(\mathbf{X_i})$. Рассмотрим $\lambda = \mathbf{h}\eta_i : \mathbf{X}_i \longrightarrow \mathbf{B}$. Ввиду сюръективности $\mathbf{f}$ для каждого $t \in S$ и для любого $x \in (\mathbf{X}_i)_t$ найдется $a_x \in A_t$ (напомним, что A_t — это компонента $\mathbf{A}$), такой, что $f_t(a_x) = \lambda_t(x)$. Сопоставляя элементу x элемент a_x , получаем морфизм градуированных множеств $\gamma : \mathbf{X}_i \longrightarrow \mathbf{A}$, такой, что $\mathbf{f}\gamma = \mathbf{h}\eta_i$. По этому морфизму однозначно строится гомоморфизм $\mathbf{g} : Fr_\Omega(\mathbf{X}_i) \longrightarrow \mathbf{A}$, такой, что $\mathbf{g}\eta_i = \gamma$. Тогда $\mathbf{fg}\eta_i = \mathbf{f}\gamma = \mathbf{h}\eta_i$, и из свойства единственности в определении свободной алгебры получаем $\mathbf{fg} = \mathbf{h}$. В частности, $h_s(z_k) = f_s(g_s(z_k))$, $k = 1, 2$. Но по выбору $\mathbf{A}$ как объекта $Var(\mathbf{Z})$ должно быть $g_s(z_1) = g_s(z_2)$. Отсюда $h_s(z_1) = h_s(z_2)$, а это означает, что $\mathbf{B} \in Var(\mathbf{Z})$.

Пусть теперь дано семейство алгебр $\{\mathbf{A}_j | j \in J\}$, каждая алгебра из которого принадлежит $Var(\mathbf{Z})$. Рассмотрим $\mathbf{A} = \prod\limits_{j \in J} \mathbf{A}_j$. Любой гомоморфизм $\mathbf{h} : Fr_\Omega(\mathbf{X}_i) \longrightarrow \mathbf{A}$ однозначно определяет семейство гомоморфизмов $\mathbf{h}_j : Fr_\Omega(\mathbf{X}_i) \longrightarrow \mathbf{A}_j$ по правилу $\mathbf{h}_j = \mathbf{p}_j\mathbf{h}$, где $\mathbf{p}_j : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_j$ — естественные проекции. Если $(z_1, z_2) \in (\mathbf{Z}_i)_s$, то $h_s(z_k)$ есть семейство $\{(\mathbf{h}_j)_s(z_k) | j \in J\}$, $k = 1, 2$. Из условия $\mathbf{A}_j \in Var(\mathbf{Z})$ для всех $j \in J$ следует, что $(\mathbf{h}_j)_s(z_1) = (\mathbf{h}_j)_s(z_2)$ для всех j , а это означает, что $h_s(z_1) = h_s(z_2)$. Поэтому $\mathbf{A} \in Var(\mathbf{Z})$. Теорема доказана.

Пример 4.1. В обозначениях примера 2.1 многообразие групп имеет вид $Var(Z)$, где Z состоит из следующих тождеств: $(x_1x_2\omega)x_3\omega = x_1(x_2x_3\omega)\omega$ (в более привычных обозначениях это $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 =$

$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)\,)$, $x(x\delta)\omega = \varepsilon$, $(x\delta)x\omega = \varepsilon$ (то есть $x \cdot x^{-1} = \varepsilon = 1$, $x^{-1} \cdot x = \varepsilon = 1$).

В традиционных курсах алгебры большинство понятий определяется именно в терминах тождеств, и поэтому все возникающие там многообразия имеют вид $Var(Z)$ для соответствующей сигнатуры и некоторого Z .

Пример 4.2. Действия групп на множествах, описанные как многоосновные алгебры в примере 2.2, описываются как многообразие тождествами из предыдущего примера, к которым добавлены тождества $(g_1 g_2)\omega x\mu = g_1(g_2 x\mu)\mu$ (что в "обычных" обозначениях соответствует $(g_1 \cdot g_2)x = g_1(g_2 x)$), и $\varepsilon x\mu = x$ (то есть $\varepsilon x = x$). Таким образом, категория действий групп на множествах — многообразие вида $Var(\mathbf{Z})$.

Введем следующие соглашения. Пусть $\mathbf{Z} = \{\mathbf{Z}_i | i \in I\}$, $\mathbf{H} = \{\mathbf{H}_j | j \in J\}$. Через $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{H}$ будет обозначаться следующее свойство: $I \subseteq J$, и для каждого $i \in I$ имеет место включение градуированных множеств $\mathbf{Z}_i \subseteq \mathbf{H}_i$. Пусть дано множество семейств градуированных множеств $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{Z}_{i,k} | i \in I_k\}$, $k \in K$. Через $\bigcup_{k \in K} \mathbf{Z}_k$ будет обозначаться семейство градуированных множеств $\{\mathbf{Z}_{i,k} | i \in I_k, k \in K\}$.

Лемма 4.4. 1) *Если* $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{H}$, *то* $Var(\mathbf{H}) \subseteq Var(\mathbf{Z})$.

2) $Var(\bigcup_{k \in K} \mathbf{Z}_k) = \bigcap_{k \in K} Var(\mathbf{Z}_k)$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно, так как для алгебр, в которых выполняются все тождества из $\mathbf{H}$, заведомо выполняются и тождества из меньшего семейства (подсемейства) $\mathbf{Z}$.

Докажем 2). Поскольку $\mathbf{Z}_k \subseteq \bigcup_{q \in K} \mathbf{Z}_q$, то, согласно пункту 1), $Var(\bigcup_{q \in K} \mathbf{Z}_q) \subseteq Var(\mathbf{Z}_k)$, а значит, $Var(\bigcup_{q \in K} \mathbf{Z}_q) \subseteq \bigcap_{k \in K} Var(\mathbf{Z}_k)$. Обратно, пусть $\mathbf{A} \in \bigcap_{k \in K} Var(\mathbf{Z}_k)$. Это значит, что в алгебре $\mathbf{A}$ выполнены все тождества из всех $\mathbf{Z}_k$, $k \in K$. Следовательно, в $\mathbf{A}$ выполнены тождества из $\bigcup_{k \in K} \mathbf{Z}_k$, то есть $\mathbf{A} \in Var(\bigcup_{k \in K} \mathbf{Z}_k)$. Лемма доказана.

Теорема 4.4. (Г. Биркгоф). *Каждое многообразие* $\mathfrak{M}$ *можно представить в виде* $Var(\mathbf{Z})$, *где* $\mathbf{Z}$ *— некоторое множество тождеств. Более точные формулировки — в следующих двух пунктах:*

1) *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— произвольное многообразие. Тогда* $\mathfrak{M} = Var(\bigcup_{\mathbf{X}} T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}))$ *, где объединение берется по всем тем* $\mathbf{X}$ *, в которых все компоненты* X_s *конечны.*

2) *Каждое многообразие* $\mathfrak{M}$ *можно представить в виде* $Var(\mathbf{Z})$ *, где* $\mathbf{Z} \subseteq Fr_\Omega(\mathbf{X}) \times Fr_\Omega(\mathbf{X})$ *, причем каждая компонента* X_s *,* $s \in S$ *, градуированного множества* $\mathbf{X}$ *является счетным множеством. Более точно: имеет место равенство* $\mathfrak{M} = Var(T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}))$ *для описанного выше* $\mathbf{X}$ *.*

Доказательство. 1). Итак, пусть $\mathbf{Z}$ есть объединение всех тех $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$, у которых все X_s конечны. Будем называть такие градуированные множества конечными. Для любой алгебры $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}$ имеет место включение

$$T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) = \bigcap_{\mathbf{B} \in \mathfrak{M}} T_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) \subseteq T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) .$$

По лемме 4.4. 1) имеем включение $Var(T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})) \supseteq Var(T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$, откуда $Var(T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})) \supseteq \mathfrak{M}$, так как $\mathbf{A} \in Var(T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$. Значит,

$$Var(\mathbf{Z}) = Var(\cup T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})) = \cap Var(T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})) \supseteq \mathfrak{M} .$$

Обратно, пусть $\mathbf{A} \in Var(\mathbf{Z})$. Заменяя, если это необходимо, алгебру $\mathbf{A}$ на изоморфную ей, можно представить $\mathbf{A}$ в виде $\mathbf{A} = Fr_\Omega(\mathbf{Y})/\mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ — некоторая конгруэнция. Пусть $\mathbf{h} : Fr_\Omega(\mathbf{Y}) \longrightarrow \mathbf{A}$ — естественная проекция, так что $\mathbf{C} = Ker(\mathbf{h})$. Выберем любой $s \in S$ и расмотрим произвольную пару $(t_1, t_2) \in T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y})_s$. Напомним, что t_1 и t_2 — это слова в алфавите $(\bigcup_{s\in S} Y_s) \cup (\bigcup_{a\in S^*, j\in S} \Omega_{a,j})$, содержащие лишь конечное множество символов из $\bigcup_{s\in S} Y_s$. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ — конечное подмножество, содержащее все такие символы. Очевидно, что $Fr_\Omega(\mathbf{X}) \subseteq Fr_\Omega(\mathbf{Y})$, а из функториальности $T_{\mathfrak{M}}$ следует, что $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) \subseteq T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y})$, причем $(t_1, t_2) \in T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})_s$. Ограничение $\mathbf{h}$ на подалгебру $Fr_\Omega(\mathbf{X})$ есть гомоморфизм из $Fr_\Omega(\mathbf{X})$ в $\mathbf{A}$. Так как $\mathbf{A} \in Var(\mathbf{Z}) = \bigcap_{\mathbf{X}'} Var(T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}'))$, где пересечение берется по всем конечным $\mathbf{X}'$, то $\mathbf{A} \in Var(T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}))$, а это означает, что $h_s(t_1) = h_s(t_2)$. Иными словами, $(t_1, t_2) \in C_s$. Ввиду произвольности (t_1, t_2) отсюда следует, что $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{C} = Ker(\mathbf{h})$. Теперь можно применить теорему о гомоморфизме, согласно которой существует единственный гомоморфизм

$$\mathbf{g} : Fr_\Omega(\mathbf{Y})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y}) = Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y}) \longrightarrow \mathbf{A} ,$$

такой, что $\mathbf{g}\pi = \mathbf{h}$, где $\pi : Fr_\Omega(\mathbf{Y}) \longrightarrow Fr_\Omega(\mathbf{Y})/T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y})$ — естественная проекция. Так как $\mathbf{h}$ выбран сюръективным, то сюръективен и $\mathbf{g}$. Так как $Fr_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y}) \in \mathfrak{M}$, то и алгебра $\mathbf{A}$, как гомоморфный образ алгебры из $\mathfrak{M}$, сама будет принадлежать многообразию $\mathfrak{M}$. Тем самым доказано обратное включение $Var(\mathbf{Z}) \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем пункт 2). Прежде всего, покажем, что если $\mathbf{X}$ таково, что все X_s счетны, то $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) = \bigcup_{\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}} T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}')$, где объединение берется по всем конечным $\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}$. В самом деле, для любого тождества $(t_1, t_2) \in T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})_s$ существует лишь конечное множество символов из $\bigcup_{s \in S} X_s$, входящих в запись слов t_1 и t_2. Это означает, что для некоторого конечного $\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}$ имеет место включение $(t_1, t_2) \in T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}') \subseteq T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X})$. Отсюда $T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}) \subseteq \bigcup_{\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}} T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}')$. Обратное включение очевидно. Далее заметим, что любое конечное $\mathbf{Y}$ изоморфно (как градуированное множество, то есть объект категории $\mathfrak{S}$) некоторому конечному $\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}$. Именно в этом месте мы используем условие счетности всех X_s. Ясно, что многообразие $Var(\bigcup_{\mathbf{Y}} T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y}))$ не изменится, если из объединения исключить изоморфные $\mathbf{Y}$, оставив по одному экземпляру из каждого класса изоморфных градуированных множеств. Таким образом оказывается, что вместо $\bigcup_{\mathbf{Y}} T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{Y})$ можно взять $\bigcup_{\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}} T_{\mathfrak{M}}(\mathbf{X}')$, и тогда утверждение пункта 3) следует из пункта 2). Теорема доказана.

О литературе по теории многообразий алгебр. Большая часть литературы по многообразиям универсальных алгебр посвящена случаю одноосновных алгебр (в наших обозначениях это случай, когда множество S состоит из одного элемента). Это книги [5], [7], [8], [9], [11], [13], [14]. Основные положения теории многоосновных алгебр, по-видимому, впервые появились в статье [19]. На русском языке некоторые сведения по этой теории можно найти в книгах [3], [6], [12], [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.:Мир, 1972. — 259 с.

2. Гельфанд С.И., Манин Ю.И. Методы гомологической алгебры: в 2-х т. Т. 1. Введение в теорию когомологий и производные категории. — М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1988. — 416 с.

3. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. 3-е изд. – Киев.:Наукова думка, 1989. — 376 с.

4. Голдблатт Р. Топосы: категорный анализ логики. — М.: Мир, 1983. — 488 с.

5. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. — М.: Наука,1979. — 320 с.

6. Замулин А.В. Типы данных в языках программирования и базах данных. — Новосибирск: Наука,1987. — 150 с.

7. Кон П. Универсальная алгебра. — М.:Мир, 1968. — 352 с.

8. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. — М.:Наука,1973. — 400 с.

9. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

10. Общая алгебра. Том 1. / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – 592 с.

11. Общая алгебра. Том 2. / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – 480 с.

12. Плоткин Б.И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. — М.: Наука, 1990. — 448 с.

13. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. — М.:Наука,1983. — 272 с.

14. Смирнов Д.М. Многообразия алгебр. — Новосибирск: ВО "Наука", 1992. — 205 с.

15. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Том 1. — М.:Мир,1977. — 688 с.

16. Цаленко М.Ш., Шульгейфер Е.Г. Основы теории категорий. — М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1974. — 256 с.

17. Цаленко М.Ш. Моделирование семантики в базах данных. — М.: Наука,1989. — 288 с.

18. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. — М.:Наука, 1971. — 256 с.

19. Higgins P.J. Algebras with a scheme of operators // Math. Nachr. — 1963. — Bd. 27, №1,2. — S. 115 – 132.

20. MacLane S. Categories for the Working Mathematician. — New York, Springer-Verlag, 1970. — 262 p.

21. Schubert H. Kategorien I. — Berlin, Akademie-Verlag, 1970. — 160 s.

22. Schubert H. Kategorien II. — Berlin, Akademie-Verlag, 1970. — 148 s.