КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.А. Турилова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Казань - 2009

Печатается по решению секции научно-методического совета КГУ

В учебном пособии достаточно кратко (но полно) излагаются основные понятия теории функций комплексного переменного в объеме, предусмотренном программой по курсу математического анализа для студентов факультета ВМК.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1. Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + \imath y$, где $x, y \in \mathbb{R}$ (здесь $\imath$ - так называемая *мнимая единица*, $\imath^2 = -1$). При этом $x = \mathrm{Re} z$ - действительная, а $y = \mathrm{Im} z$ - мнимая часть числа z.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + \imath y_1$ и $z_2 = x_2 + \imath y_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Число $\overline{z} = x - \imath y$ называется *сопряженным к* $z = x + \imath y$. Число $\lambda z = (\lambda x) + \imath(\lambda y)$.

Всякое комплексное число $z = x + \imath y$ можно отождествить с точкой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. В этом случае о плоскости $\mathbb{R}^2$ мы будем говорить как о комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Для $z = x + \imath y \neq 0$ можно рассмотреть модуль z $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргумент z $\mathrm{Arg}\ z$ - угол между радиус-вектором точки (x, y) и положительным направлением действительной оси. $\mathrm{Arg}\ z$ определен неоднозначно. Среди множества значений $\mathrm{Arg}\ z$ существует единственный угол $\varphi \in (-\pi; \pi]$. Этот угол будем называть *главным значением аргумента* и обозначать $\arg z$.

Выражение $z = x + \imath y$ - алгебраическая форма комплексного числа.

Величины $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$ можно рассматривать как полярные координаты точки (x, y). Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и

$$z = x + \imath y = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi) -$$

тригонометрическая форма комплексного числа.

Используя формулу Л.Эйлера

$$e^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath\sin\varphi,$$

получаем

$$z = re^{\imath\varphi} -$$

показательная форма комплексного числа.

В этом случае $e^{\imath 0} = 1$, $e^{\imath\varphi} \cdot e^{\imath\psi} = e^{\imath(\varphi+\psi)}$, $e^{\imath(\varphi+2\pi k)} = e^{\imath\varphi}$ $(k \in \mathbb{Z})$, $e^{-\imath\varphi} = \frac{1}{e^{\imath\varphi}}$, $|e^{\imath\varphi}| = 1$.

2. Пусть $z_1 = x_1 + \imath y_1$ и $z_2 = x_2 + \imath y_2$. Рассмотрим следующие операции над комплексными числами z_1 и z_2:

- *сложение*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \imath(y_1 + y_2);$$

- *вычитание*

$$z_1 + z_2 = (x_1 - x_2) + \imath(y_1 - y_2);$$

- *умножение*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \imath y_1) \cdot (x_2 + \imath y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \imath(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

- *деление*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}.$$

Некоторые действия с комплексными числами удобно производить, записав числа в тригонометрической форме. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \imath\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \imath\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \imath\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

(модули комплексных чисел умножаются, а аргументы складываются).

Отсюда легко получить *формулу Муавра* для $z = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)$

- *возведение в степень*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \imath\sin n\varphi).$$

- *извлечение корня*: корнем $n-$ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w, такое что $w^n = z$ (тогда $w = \sqrt[n]{z}$). Если $z = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)$ и $z = w^n$, то

$$r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\theta + \imath\sin n\theta).$$

Следовательно,

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \qquad 0 \le k \le n-1,$$

то есть

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \imath\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad 0 \le k \le n-1.$$

Примеры.

1. Пусть $z = (1 + \sqrt{3}\imath)$. Требуется вычислить z^9.

Представим z в тригонометрической форме: $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg z = \pi/3$, следовательно,

$$z = 2(\cos\pi/3 + \imath\sin\pi/3.$$

Тогда

$$z^9 = 2^9(\cos 3\pi + \imath\sin 3\pi) = -512.$$

2. Пусть $z_1 = 1 + 3\imath$, $z_2 = 2 + \imath$. Требуется вычислить $z_1 : z_2$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+3\imath}{2+\imath} = \frac{(1+3\imath)(2-\imath)}{(2+\imath)(2-\imath)} = \frac{2+6\imath-\imath+3}{4-\imath^2} = \frac{5+5\imath}{5} = 1+\imath.$$

3. Пусть $z = -1$. Требуется вычислить $\sqrt{z}$.

Представим число $z = -1$ в тригонометрической форме: $-1 = 1(\cos\pi + \imath\sin\pi)$. Тогда

$$w_k = \sqrt{z} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + \imath\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right), \qquad 0 \le k \le 1,$$

то есть

$$w_0 = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2}\right) = \imath,\ w_1 = \sqrt{1}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \imath\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\imath.$$

Таким образом над полем комплексных чисел существует два квадратных корня из числа $-1:\ \imath$ и $-\imath$.

§2. КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ КАК МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость. Определим функцию $\rho:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$:

$$\rho(z_1,z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}, \qquad \forall z_1 = x_1 + \imath y_1,\ z_2 = x_2 + \imath y_2.$$

Очевидно, что функция ρ, называемая метрикой в $\mathbb{C}$, обладает $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ следующими свойствами:

1. $\rho(z_1,z_2) \ge 0, \quad \rho(z_1,z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$;

2.$\rho(z_1,z_2) = \rho(z_2,z_1)$;

3.$\rho(z_1,z_2) \le \rho(z_1,z_3) + \rho(z_3,z_2)$.

$\varepsilon-$ *окрестностью* точки z_0 называется множество вида

$$B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho(z,z_0) < \varepsilon\}.$$

Пусть $E \subset \mathbb{C}$. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *предельной точкой множества* E (соответственно, *точкой прикосновения множества* E), если

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad (B_\varepsilon(z_0) \backslash \{z_0\}) \bigcap E \neq \emptyset$$

(соответственно,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad B_\varepsilon(z_0) \bigcap E \neq \emptyset.)$$

Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *ограниченным*, если

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, z \in E \quad (\rho(z, 0) = |z| \leq M).$$

Теорема Больцано-Вейерштрасса. *Всякое бесконечное ограниченное множество в $\mathbb{C}$ имеет хотя бы одну предельную точку.*

§3. КОМПЛЕКСНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Пусть $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ - последовательность комплексных чисел. Число z_0 называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad (|z_n - z_0| < \varepsilon).$$

(Обозначения: $z_0 = \lim\limits_n z_n$ или $z_n \to z_0 \quad (n \to \infty)$.)

2. Предложение. $z_n \to z_0 \Longleftrightarrow x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $(n \to \infty)$.

(*здесь* $z_n = x_n + \imath y_n$, $z_0 = x_0 + \imath y_0$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $z_n \to z_0$. Тогда $|z_n - z_0| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Имеем:

$$0 \leq |x_n - x_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = |z_n - z_0| \to 0.$$

Следовательно, $x_n \to x_0 \quad (n \to \infty)$. Аналогично, $y_n \to y_0 \quad (n \to \infty)$.

Достаточность. Пусть $x_n \to x_0 \quad y_n \to y_0 \quad (n \to \infty)$. Тогда

$$|z_n - z_0|^2 = (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad \star$$

Таким образом, все правила вычисления пределов вещественных последовательностей переносятся на случай комплексных последовательностей.

3. Критерий Коши. *Последовательность $\{z_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, то есть*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad (\rho(z_{n+p}, z_n) = |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon).$$

§4. ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$. Рассмотрим отображение $f : E \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$– функция комплексного переменного. Задание этой функции равносильно заданию двух функций $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. При этом $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$, $\quad f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$ для $z = x + \imath y$.

Функция $f(z)$ называется *однолистной на множестве* E, если

$$\forall\, z_1, z_2 \in E \quad z_1 \neq z_2 \quad \Longrightarrow \quad f(z_1) \neq f(z_2).$$

2. Пусть $f : E \to \mathbb{C} \quad (E \subseteq \mathbb{C}), \quad z_0$– предельная точка множества E. Для любой последовательности $\{z_n\} \subseteq E$ можно рассмотреть последовательность $\{f(z_n)\}$.

Определение. *Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если $f(z_n) \to \alpha$ для любой последовательности $\{z_n\} \subseteq E$, такой что $z_n \to z_0 \quad (z_n \neq z_0)$ или*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in E \quad (0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon).$$

3. Предложение. *Пусть $f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$. Существование $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ равносильно двум предельным соотношениям:*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = a, \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = b;$$

(здесь $z_0 = x_0 + \imath y_0, \quad \alpha = a + \imath b$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то есть

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\, z \in E \quad (0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - \alpha| < \varepsilon).$$

Пусть $z = x + \imath y$ таково, что $|z - z_0| < \delta$. Тогда $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$. В этом случае

$$|u(x,y)-a| = |\mathrm{Re}(f(z)-\alpha)| \le |f(z)-\alpha| < \varepsilon, \quad |v(x,y)-b| = |\mathrm{Im}(f(z)-\alpha)| \le |f(z)-\alpha| < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольно. Тогда

$$\exists\,\delta > 0 \quad \forall (x,y) \quad (0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow |u(x,y)-a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}; \quad |v(x,y)-b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}).$$

В этом случае для $z = x + \imath y$ при $0 < |z - z_0| < \delta$ имеем

$$|f(z) - \alpha| = \sqrt{(u(x,y) - a)^2 + (v(x,y) - b)^2} < \varepsilon. \qquad \star$$

Таким образом, все правила вычисления пределов функций двух переменных переносятся на комплексный случай.

4. Функция $f : E \to \mathbb{C}$ $(E \subseteq C)$ называется *непрерывной в точке* $z_0 \in E$, если для любой последовательности $\{z_n\} \subset E$

$$z_n \to z_0 \Longrightarrow f(z_n) \to f(z_0) \quad (n \to \infty).$$

Если $z_0 \in E$ - предельная точка, то функция f непрерывна в z_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Если z_0- изолированная точка множества E, то всякая функция непрерывна в этой точке.

Непрерывность функции $f(z) = u(x,y)+\imath v(x,y)$ в точке $z_0 = x_0+\imath y_0$ эквивалентна непрерывности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0, y_0).

§5. КРИВЫЕ И ОБЛАСТИ

Отрезок $[\alpha, \beta]$ будем считать ориентированным, если указано, что α - начало, а β - конец отрезка.

Путем в $\mathbb{C}$ называется образ ориентированного отрезка при некотором непрерывном отображении, то есть множество вида

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, z = z(t),\, \alpha \leq t \leq \beta\},$$

где функция $z(t)$ - непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

Одна и та же точка плоскости может изображать несколько точек пути. В этом случае говорят о путях с самопересечениями.

Путь называется *жордановым*, если он не имеет точек самопересечения.

Путь $z(t) = x(t) + \imath y(t)$ называется *гладким*, если $x(t), y(t)$ - непрерывно дифференцируемы и $x'(t) + \imath y'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Множество $E \subseteq \mathbb{C}$ называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывным путем в этой области.

Областью называется открытое связное множество.

Если зафиксировать область $G \subseteq \mathbb{C}$, то все точки комплексной плоскости можно разделить на три группы: собственно точки области, которые иногда называют внутренними (каждая лежит в области вместе с некоторой окрестностью), внешние точки (хотя бы одна из окрестностей таких точек имеет пустое пересечение с областью) и граничные точки (в каждой окрестности таких точек есть точки, входящие в область G, и точки, не входящие в G). Множество граничных точек G называется границей области G (обозначается ∂G).

Связное замкнутое множество называется *континуумом*.

В дальнейшем мы будем рассматривать только области, границы которых являются континуумами. При этом область G называется *односвязной*, если граница области - один континуум. В противном случае область называется многосвязной, а количество континуумов, образующих границу, определяет порядок связности.

Примеры. 1. Круг $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < R\}$ - односвязная область.

2. Кольцо $\{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z - z_0| < R\}$ - двусвязная область.

3. Комплексная плоскость с n "дырками n-связная область.

§6. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА

1. Пусть G - область в $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$, $w = f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$. Функция f называется $\mathbb{R}$-*дифференцируемой в точке* $z_0 = x_0 + \imath y_0 \in G$, если функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных.

2. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-*дифференцируемой в точке* $z_0 \in G$, если существует

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z}.$$

Этот предел называется производной функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

3. Условия Коши-Римана. *Пусть* $f : G \to \mathbb{C}, \quad w = f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$. *Функция* f $\mathbb{C}$-*дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + \imath y_0$ *тогда и только тогда, когда* f $\mathbb{R}$-*дифференцируема в точке* z_0 *и выполнены условия (Коши-Римана)*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + \imath y_0$. Тогда

$$\triangle w = f(z_0 + \triangle z) - f(z_0) = f'(z_0)\triangle z + \alpha(z_0, \triangle z)\triangle z,$$

где $\alpha \to 0$ при $\triangle z \to 0$. Пусть $f'(z_0) = a + \imath b$. Тогда

$$u(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - u(x_0, y_0) + \imath(v(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - v(x_0, y_0)) =$$

$$= (a + \imath b) \cdot (\triangle x + \imath \triangle y) + (\alpha_1 + \imath \alpha_2) \cdot (\triangle x + \imath \triangle y).$$

Приравнивая действительные и мнимые части равенства, получаем:

$$\triangle u(x_0, y_0) = a\triangle x - b\triangle y + \alpha_1 \triangle x - \alpha_2 \triangle y,$$

$$\triangle v(x_0, y_0) = b\triangle x + a\triangle y + \alpha_2 \triangle x + \alpha_1 \triangle y,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$ при $\triangle x, \triangle y \to 0$. Таким образом, функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных, а значит

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0);$$

$$b = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Достаточность. Пусть функции u, v $\mathbb{R}$-дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнены условия Коши-Римана. Пусть $A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$. С учетом условий Коши-Римана,

$$\triangle u(x_0, y_0) = A\triangle x - B\triangle y + \alpha \cdot \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}, \quad \alpha \to 0 \quad \text{при}(x, y) \to (x_0, y_0),$$

$$\triangle v(x_0, y_0) = B\triangle x + A\triangle y + \beta \cdot \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}, \quad \beta \to 0 \quad \text{при}(x, y) \to (x_0, y_0).$$

Тогда

$$\triangle w = \triangle u + \imath\triangle v = A(\triangle x + \imath\triangle y) + B(\imath\triangle x - \triangle y) + (\alpha + \imath\beta) \cdot \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} =$$

$$= (A + \imath B) \cdot (\triangle x + \imath\triangle y) + o(|z|), \quad \text{при}\triangle z \to 0.$$

Следовательно, функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z_0. ⋆

4. Замечания.

1) Имеют место следующие равенства:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + \imath\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \imath\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \imath\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \imath\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2) Проверку условий Коши-Римана можно осуществлять и в полярных координатах. Пусть $z = x + \imath y$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда $z = re^{\imath\varphi}$. Условия Коши-Римана в этом случае имеют вид:

$$r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}.$$

5. Примеры.

1) Пусть $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + \imath \cdot 2xy$. Тогда $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Следовательно, условия Коши-Римана выполнены, а значит функция $\mathbb{C}$-дифференцируема в каждой точке комплексной плоскости.

2) Пусть $f(z) = z^m$, где $m > 2$ - целое. Для $z = re^{\imath\varphi}$ имеем:

$$f(z) = r^m e^{\imath m\varphi} = r^m \cos m\varphi + \imath r^m \sin m\varphi.$$

В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial r} = m \cdot r^{m-1} \cos m\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -m \cdot r^m \sin m\varphi,$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = m \cdot r^{m-1} \sin m\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = m \cdot r^m \cos m\varphi.$$

Следовательно, выполняются условия Коши-Римана в полярных координатах, а значит функция $\mathbb{C}$-дифференцируема в каждой точке комплексной плоскости. При этом $f'(z) = m \cdot z^{m-1}$.

6. Функция $f(z)$, $\mathbb{C}$-дифференцируемая в точке z_0 вместе с каждой точкой некоторой окрестности z_0, называется *голоморфной в точке* z_0. Если функция $f(z)$ голоморфна в каждой точке некоторой области $\mathcal{D}$, то $f(z)$ называется голоморфной в области $\mathcal{D}$.

§7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1. **Степенная функция** $w = z^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Степенная функция определяется формулой $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}$.

Если $z = r \cdot e^{\imath\varphi}$, $w = \rho \cdot e^{\imath\psi}$, то $\rho = r^n$, $\psi = n\varphi$. (Таким образом, рассматриваемое отображение увеличивает в n раз раствор угла с вершиной в начале координат.)

Функция непрерывна во всех точках $z \in \mathbb{C}$. Кроме этого функция аналитична в $\mathbb{C}$ и

$$\frac{dw}{dz} = n \cdot z^{n-1} \neq 0 \quad \forall z \neq 0.$$

Также степенная функция является однозначной, но не является однолистной в $\mathbb{C}$. Действительно, пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ такие, что $|z_1| = |z_2|$, $\arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $z_1^n = z_2^n$.

Для многолистных функций принято выделять области однолистности. Для степенной функции областью однолистности будет любая область, целиком лежащая внутри угла величиной $\frac{2\pi}{n}$ с центром в начале координат. В частности, внутренность любого угла

$$\alpha < \varphi < \alpha + \frac{2\pi}{n},\, \alpha \in \mathbb{R}$$

является областью однолистности степенной функциии отображается с помощью этой функции на всю комплексную плоскость с выброшенным лучом.

Таким образом, с помощью лучей $\varphi = \alpha + \frac{2\pi k}{n}$, $0 \leq k \leq n-1$ всю плоскость z можно разбить на n областей однолистности степенной функции. Пусть $\alpha = 0$. Тогда такими областями являются внутренности углов

$$\frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{2\pi k + 1}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1. \tag{1}$$

Построим геометрический образ такой, что функция $w = z^n$ устанавливает непрерывное биективное соответствие между точками плоскости z и точками этого образа. Рассмотрим первый угол $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$. Он отображается на всю плоскость w с выброшенной положительной полуосью. В нее переходят два луча: $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Чтобы сохранить взаимную однозначность соответствия множества

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \geq 0,\, 0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{n} \right\}$$

и плоскости w, проведем на плоскости w вдоль действительной положительной полуоси разрез и будем считать, что луч $\varphi = 0$ переходит в "верхний берег"разреза, а луч $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ в "нижний берег".

Таким образом мы изготавливаем n экземпляров плоскости w с разрезами вдоль положительной части действительной оси, которые являются образами бесконечных секторов (1). Устанавливаем эти плоскости одна над другой и "склеиваем"с сохранением биективности и непрерывности.

При этом "нижний берег"разреза первого листа "склеиваем"с "верхним берегом"разреза второго, "нижний берег"разреза второго листа с "верхним берегом"разреза третьего и т. д. В последнюю очередь производится склейка "верхнего берега"первого и "нижнего берега"последнего листа. Полученный образ – риманова поверхность функции $w = z^n$.

2. **Функция** $w = \sqrt[n]{z} \quad (n \in \mathbb{N})$

Для числа $z = r \cdot e^{\imath\varphi}$, $z \neq 0$ определены n значений корня n-ой степени из числа z. Рассмотрим

$$f_0(z) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\imath\varphi/n},\ f_k(z) = f_0(z) \cdot e^{2\pi k\imath/n},\ 1 \leq k \leq n-1.$$

Очевидно, что точки $f_k(z)$ по одной расположены в областях $\frac{2\pi k}{n} \leq \varphi < \frac{2\pi k+1}{n}$.

Таким образом, в некоторой односвязной области, не содержащей точку $z = 0$, определены n различных (однозначных) функций, каждая из которых является обратной к функции $w = z^n$. Совокупность этих функций определяет многозначную функцию $w = \sqrt[n]{z}$, однозначными ветвями которой являются $f_k(z), 0 \leq k \leq n-1$.

Фиксируя какое-нибудь исходное значение радикала $f_k(z)$, заставим точку z_0 описать некоторую замкнутую кривую, не заключающую внутри начала координат. В этом случае непрерывно меняющийся аргумент z_0 вернется к прежнему значению,когда точка вновь примет исходное положение. Соответственно и значение $\sqrt[n]{z}$ останется прежним.

Совсем иная картина получится,если точка опишет замкнутую кривую, заключающую внутри начало координат.

Действительно, рассмотрим для примера окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусам r_0: пусть $z_0 = r_0 \cdot e^{\imath\varphi_0}$. Тогда $f_0(z_0) = w_{00} = f_0(r_0 \cdot e^{\imath\varphi_0}) = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{\imath\varphi_0/n}$.

Обойдя окружность, мы попадем в точку $r_0 \cdot e^{\imath(\varphi_0+2\pi)}$. В этом случае $f_0(r_0 \cdot e^{\imath(\varphi_0+2\pi)}) = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{\imath(\varphi_0+2\pi)/n} = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{\imath\varphi_0/n} \cdot e^{2\pi\imath/n} = w_{00} \cdot e^{\imath 2\pi/n} = w_{10}$.

Таким образом, f_0 переводит окружность в дугу $w_{00}w_{10}$. f_1 переводит окружность в дугу $w_{10}w_{20}$ и т. д. И только совокупность всех ветвей переведет окружность в некоторую замкнутую кривую.

Точка, при обходе которой в достаточно малой ее окрестности осуществляется переход от одной ветви многозначной функции к другой, называется точкой ветвления. Если после n-кратного обхода в одном и том же направлении мы возвратимся на начальную ветвь, то такая точка – точка ветвления $n-1$ порядка. В нашем случае $z = 0$ – точка ветвления $n-1$ порядка.

Отметим также, что для $w = \sqrt[n]{z}$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{n} \cdot z^{\frac{1-n}{n}},$$

причем для производной берется та же ветвь, что и для функции.

3. **Показательная функция** $w = e^z$

Показательную функцию определим следующим соотношением:

$$w = e^z = e^{x+\imath y} = e^x \cdot (\cos y + \imath \sin y).$$

Функция является аналитической в $\mathbb{C}$. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(e^x \cdot \cos y)}{\partial x} = e^x \cdot \cos y; \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(e^x \cdot \sin y)}{\partial y} = e^x \cdot \cos y \ \Rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cdot \sin y; \ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \sin y \ \Rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

следовательно, выполнены условия Коши - Римана. При этом

$$\frac{dw}{dz} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Показательная функция обладает следующими свойствами:
а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
б) $e^{z+2\pi k\imath} = e^z, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, то есть показательная функция является периодической с основным периодом $2\pi\imath$.

Областью однолистности функции $w = e^z$ является любая горизонтальная полоса ширины, не превосходящей 2π. Всю комплексную плоскость можно разбить на бесконечное число областей однолистности. В качестве такого разбиения можно взять,например, множества

$$S_k = \Big\{ z \in \mathbb{C} \,\Big|\, 2\pi k \le \operatorname{Im} z \le 2\pi(k+1),\ k \in \mathbb{N} \Big\}$$

(без учета границ). Каждая такая полоса отображается показательной функцией на плоскость с разрезом по положительной действительной полуоси. Таким образом, мы имеем бесконечное количество полос, каждая из которых отображается в плоскость с разрезом. После склейки берегов получаем риманову поверхность, заполненную значениями показательной функции.

4. **Логарифмическая функция** $w = \mathrm{Ln}\ z$

Функция $w = \mathrm{Ln}\ z$, где $z \neq 0$, определяется формулой

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + \imath\,\mathrm{Arg} z = \ln|z| + \imath\,(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

В любой односвязной области, не содержащей точку $z = 0$, можно построить счетное количество однозначных функций, по отношению к которым функция $z \mapsto e^z$ будет обратной. Эти функции и представляют собой однозначные ветви многозначной функции $w = \mathrm{Ln} z$. Главным значением логарифма называют значение,которое получается в (2) при $k = 0$: $\ln z = \ln |z| + \imath \arg z$. Очевидно, что $\mathrm{Ln} z = \ln z + 2\pi k \imath, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2; \qquad \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2.$$

5. **Тригонометрические функции**

Тригонометрические функции можно определить следующим образом:

$$\cos z = \frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath}; \quad \mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Из свойств показательной функции следует, что при $z = x$ значения тригонометрических функций комплексного переменного совпадают со значениями соответствующих функций действительного переменного. Действительно,

$$\frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath} = \frac{e^{0+\imath x} - e^{0-\imath x}}{2\imath} = \frac{e^0 \cdot (\cos x + \imath \sin x) - e^0 \cdot (\cos x - \imath \sin x)}{2\imath} = \frac{2\imath \sin x}{2\imath} = \sin x.$$

Имеют место формулы Эйлера: $e^{\imath z} = \cos z + \imath \sin z, \quad e^{-\imath z} = \cos z - \imath \sin z$. Кроме этого, остаются в силе все формулы,связывающие тригонометрические функции действительного переменного.

6. **Гиперболические функции**

Гиперболические функции определяются равенствами:

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}; \quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sin z = -\imath\, \mathrm{sh}\, \imath z; \quad \mathrm{sh}\, z = -\imath \sin \imath z; \quad \cos z = \mathrm{ch}\, \imath z; \quad \mathrm{ch}\, z = \cos \imath z;$$

$$\mathrm{tg}\, z = -\imath\, \mathrm{th}\, \imath z; \quad \mathrm{th}\, z = -\imath\, \mathrm{tg}\, \imath z; \quad \mathrm{ctg}\, z = \imath\, \mathrm{cth}\, \imath z; \quad \mathrm{cth}\, z = \imath\, \mathrm{ctg}\, \imath z.$$

7. **Обратные тригонометрические функции**

Функции $w = \mathrm{Arcsin} z$, $w = \mathrm{Arccos} z$, $w = \mathrm{Arctg} z$ и $w = \mathrm{Arcctg} z$ определяются как функции, обратные к соответствующим тригонометрическим функциям. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую функцию:

$$\mathrm{Arcsin} z = -\imath\,\mathrm{Ln}(\imath z + \sqrt{1-z^2}); \quad \mathrm{Arccos} z = -\imath\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1});$$

$$\mathrm{Arctg} z = -\frac{\imath}{2}\cdot \mathrm{Ln}\frac{1+\imath z}{1-\imath z}; \quad \mathrm{Arcctg} z = -\frac{\imath}{2}\cdot \mathrm{Ln}\frac{z+\imath}{z-\imath}.$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arctg}\, z$, $\mathrm{arcctg}\, z$ получаются, если взять главные значения соответствующих логарифмических функций.

§8. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ЕГО СВОЙСТВА

1. Пусть задана некоторая фиксированная кусочно-гладкая кривая $\gamma \subset \mathbb{C}$ и на этой кривой определена кусочно -непрерывная функция комплексного переменного

$$f(z) = u(x,y) + \imath\, v(x,y).$$

Рассмотрим разбиение $\gamma: \ a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b$, внутри дуги $z_k\, z_{k+1}$ выберем промежуточные точки ξ_k и рассмотрим суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$.

Интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой γ называется $\lim\limits_{n} S_n$, в предположении $\max\limits_{k} |z_k - z_{k-1}| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Замечание. В наших предположениях относительно функции $f(z)$ и кривой γ интеграл существует.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x,y) + \imath\, v(x,y)$, $\quad z_k = x_k + \imath\, y_k$, $\quad x_k - x_{k-1} = \triangle x_k$, $\quad y_k - y_{k-1} = \triangle y_k$, $\quad \xi_k = \alpha_k + \imath\,\beta_k$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \Big(u(\alpha_k,\beta_k) + \imath\, v(\alpha_k,\beta_k) \Big) (\triangle x_k + \imath\,\triangle y_k) \Big\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ u(\alpha_k,\beta_k)\triangle x_k - v(\alpha_k,\beta_k)\triangle y_k \Big\} + \imath \sum_{k=1}^{n} \Big\{ u(\alpha_k,\beta_k)\triangle y_k + v(\alpha_k,\beta_k)\triangle x_k \Big\}.$$

Каждая из вещественных сумм является интегральной суммой соответствующего криволинейного интеграла второго рода. В наших предположениях на функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и кривую γ интегралы существуют, то есть существует предел последовательности интегральных сумм в правой части равенства. Следовательно, существует

$$\lim_n S_n \quad (\max_k |z_k - z_{k-1}| \to 0, \quad n \to \infty).$$

При этом

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\gamma (u + \imath\, v)(dx + \imath\, dy) = \int\limits_\gamma udx - vdy + \imath \int\limits_\gamma udy + vdx.$$

Таким образом, вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций.⋆

Пример.Вычислить $J = \int\limits_\gamma \mathrm{Im} z dz$, где γ – полуокружность: $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$.

Очевидно, что $\gamma = \begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi; \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le \pi$. Тогда

$$J = \int\limits_\gamma y\,(dx + \imath\, dy) = \int\limits_\gamma ydx + \imath \int\limits_\gamma ydy = -\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi + \imath \int\limits_0^\pi \sin\varphi \cdot \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (\cos 2\varphi - 1)d\varphi + \imath \int\limits_0^\pi \sin\varphi d\sin\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Очевидно, что на интегралы от функций комплексного переменного распространяются свойства криволинейных интегралов.

$$1) \int\limits_\gamma \sum_{i=1}^m c_i f_i(z)dz = \sum_{i=1}^m c_i \int\limits_\gamma f_i(z)dz \qquad \text{(линейность)}.$$

$$2) \int\limits_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^r \int\limits_{\gamma_j} f(z)dz, \quad \text{если}\, \gamma = \bigcup_{j=1}^r \gamma_j \qquad \text{(аддитивность)}.$$

$$3) \int\limits_\gamma f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz \qquad \text{(смена знака)}.$$

$$4) \left|\int\limits_\gamma f(z)dz\right| \le \int\limits_\gamma |f(z)|\; |dz| \le l \cdot \max_{z\in\gamma} |f(z)|\,, \text{ где}\, l\, - \text{длина}\, \gamma.$$

3. Замечание. Иногда нам будет удобно рассматривать следующую разновидность определения интеграла. Предположим, что кусочно-гладкая кривая γ допускает параметризацию $\gamma:\ z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда $z'(t) = x'(t) + \imath y'(t) \neq 0$. Для кусочно-непрерывной функции $f(z)$ $f(z(t)) \cdot z'(t)$ – комплексная функция действительного переменного. Проводя рассуждения, аналогичные построению интеграла Римана в случае действительной функции действительного переменного, можно получить $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t)dt$. Будем считать в этом случае, что

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t)dt.$$

§9. ТЕОРЕМА КОШИ

1. Теорема. *Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $\mathcal{D}$, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру γ, лежащему в $\mathcal{D}$, равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство, считая $f'(z)$ непрерывной.

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma} udx - vdy + \imath \oint\limits_{\gamma} vdx + udy.$$

Для каждого из вещественных криволинейных интегралов справедлива формула Грина, поэтому

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + \imath \int\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy$$

(здесь Ω – часть комплексной плоскости, расположенной внутри γ). Тогда в силу условий Коши-Римана $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$. $\star$

2. Имеет место и другой вариант теоремы Коши, который здесь мы приведем без доказательства.

Теорема. *Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $\mathcal{D}$ и непрерывна в ее замыкании $\overline{\mathcal{D}}$, то интеграл, взятый по границе $\partial\mathcal{D}$ этой области, равен нулю.*

3. Если формулировать теорему Коши для многосвязной области по аналогии с п.1, то она не будет справедливой. Действительно, пусть $\mathcal{D}$ – круговое кольцо: $r_1 < |z - z_0| < r_2$. В качестве замкнутого контура возьмем окружность $\gamma:\ |z - z_0| = R$, $(r_1 < R < r_2)$.

Рассмотрим аналитичную в $\mathcal{D}$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

Тогда $z - z_0 = R \cdot e^{\imath\varphi}$, $\varphi_0 < \varphi \leq \varphi_0 + 2\pi$, $\quad dz = R \cdot e^{\imath\varphi}\imath\, d\varphi$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{R \cdot e^{\imath\varphi}\imath}{R \cdot e^{\imath\varphi}} d\varphi = 2\pi\imath.$$

4. Теорема (для многосвязной области) *Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $\mathcal{D}$ и непрерывна в ее замыкании $\overline{\mathcal{D}}$, то интеграл, взятый по границе $\partial\mathcal{D}$ этой области, равен нулю, если все граничные контуры ориентированы так, что при обходе этой границы точки области $\mathcal{D}$ остаются слева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $\mathcal{D} - n+1$-связная область с заданным обходом границы. Системой разрезов превратим эту область в односвязную $\mathcal{D}^*$, для которой оказывается верной теорема п. 2. При этом

$$\partial\mathcal{D}^* = (\bigcup_{k=0}^{n} \gamma_k) \cup (\bigcup_{k=1}^{n} l_k^+) \cup (\bigcup_{k=1}^{n} l_k^-) = \partial\mathcal{D} \cup (\bigcup_{k=1}^{n} l_k^+) \cup (\bigcup_{k=1}^{n} l_k^-).$$

Тогда

$$0 = \int\limits_{\partial\mathcal{D}^*} f(z)dz = \int\limits_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{l_k^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{l_k^-} f(z)dz = \int\limits_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz. \qquad \star$$

5. Интеграл от аналитической функции в односвязной области не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной и конечной точки кривой. Действительно, пусть точки z_1 и z_2 связаны кривыми γ_1 и γ_2.

Тогда $\oint\limits_{\gamma_1+\gamma_2^-} f(z)dz = 0$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma_2^-} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Таким образом, вместо $\int\limits_\gamma f(z)dz$ в этом случае можно писать $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz$.

Если зафиксировать z_1, а другой конец кривой менять, то получим функцию, зависящую от z:

$$F(z) = \int\limits_{z_1}^{z} f(z)dz.$$

Теорема. *Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $\mathcal{D}$, то $F(z)$ – аналитическая в $\mathcal{D}$ функция, причем $F'(z) = f(z)$.*

Доказательство.

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int\limits_{z_1}^{z+h} f(\xi)dz\xi - \int\limits_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi\right) = \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} f\xi)\xi.$$

Кроме этого,

$$f(z) = f(z)\cdot\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{z}^{z+h} d\xi = \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} f(z)d\xi.$$

Тогда

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\cdot\int\limits_{z}^{z+h} f(\xi)-f(z)d\xi.$$

Так как $f(\xi)$ непрерывна в точке z, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\xi\in\mathcal{D} \quad (|\xi-z|<\delta \Rightarrow |f(\xi)-f(z)|<\varepsilon).$$

Предположим, что $|h|<\delta$. Тогда $|\xi-z|<|h|<\delta \Rightarrow |f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$. В этом случае

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon\cdot\frac{|h|}{|h|} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z). \qquad \star$$

6. Будем называть *первообразной* $f(z)$ любую функцию $\Phi(z)$, такую что $\Phi'(z) = f(z) \quad \forall z\in\mathcal{D}$. В частности, $F(z)$ – первообразная $f(z)$.

Теорема. *Любая первообразная $f(z)$ имеет вид:*

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int\limits_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(z) - F(z) = \Psi(z)$. Тогда $(\Phi(z) - F(z))' = \Psi'(z) = 0$. Если $\Psi(z) = u(x,y) + \imath\, v(x,y)$, то $\Psi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \imath\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \imath\,\frac{\partial u}{\partial y}$. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ в области $\mathcal{D}$. Тогда u, v – постоянные в $\mathcal{D}$ функции, то есть $u(x,y) = u_0$, $v(x,y) = v_0$. В этом случае $\Psi(z) = u_0 + \imath\, v_0 = C$, следовательно, $\Phi(z) - F(z) = C$, то есть $\Phi(z) = F(z) + C$. $\star$

Отметим, что $C = \Phi(z_1)$, то есть

$$\int\limits_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_1),$$

где $\Phi(z)$ – одна из первообразных аналитической функции $f(z)$.

§10. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

1. Теорема. *Если $f(z)$ аналитична в области $\mathcal{D}$ и непрерывна в ее замыкании $\overline{\mathcal{D}}$, то*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{t-z}dt,$$

где $\partial\mathcal{D}$ – граница области $\mathcal{D}$, проходимая так, что область $\mathcal{D}$ остается слева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что порядок связности области $\mathcal{D}$ равен n. Пусть $z \in \mathcal{D}$ – произвольна. Рассмотрим окружность C_r с центром в точке z и радиусом r таким, что $C_r \subset \mathcal{D}$. Положим $U = \{t \in \mathcal{D} \mid |t - z| < r\}$.

Рассмотрим $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \setminus U$. Порядок связности этой области равен $n + 1$. Функция $\frac{f(t)}{t-z}$ как функция t аналитична в $\mathcal{D}$. Контуры, составляющие $\partial\mathcal{D}^*$, ориентированы так, что область остается слева. Тогда по теореме Коши

$$\int\limits_{\partial\mathcal{D}^*} \frac{f(t)}{t-z}dt = 0.$$

Но $\partial\mathcal{D}^* = \partial\mathcal{D} \bigcup C_r^-$ (на окружности положительный обход задается против часовой стрелки). Тогда

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt.$$

Покажем, что $\frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt = f(z)$.

Отметим для начала, что $\int\limits_{C_r} \frac{dt}{t-z}dt = 2\pi\imath$. Кроме этого, в силу непрерывности $f(t)$ в $z \in \mathcal{D}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in \mathcal{D} \quad (|t-z| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(z)| < \varepsilon). \qquad (*)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно. Можно считать, что r изначально выбрано так, что $r < \delta$, где δ из (*). В этом случае $\max\limits_{t \in C_r} |f(t) - f(z)| < \varepsilon$.

Тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt - f(z) \cdot \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{C_r} \frac{dt}{t-z} \right| = \left| \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{C_r} \frac{f(t) - f(z)}{t-z}dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \max_{t \in C_r} \left| \frac{f(t) - f(z)}{t-z} \right| \cdot 2\pi r = \max_{t \in C_r} |f(t) - f(z)| < \varepsilon.$$

$\star$

2. Теорема о среднем. *Пусть* $\mathcal{D} = \Big\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z - z_0| < R \Big\}$ *– внутренность круга с центром в точке* z_0 *и радиусом* R. *Функция* $f(z)$ *аналитична в* $\mathcal{D}$ *и непрерывна в* $\overline{\mathcal{D}}$. *Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f(z_0 + Re^{\imath\theta}) ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, для $t \in C_R \quad t - z_0 = Re^{\imath\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{C_R} \frac{f(t)}{t - z_0}dt = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(t)}{Re^{\imath\theta}} Re^{\imath\theta}\imath \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{\imath\theta}) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{\imath\theta}) R d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f(z_0 + Re^{\imath\theta}) ds.$$

$\star$

§11. ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛЯ И ЛЕММА ШВАРЦА

1. Лемма. *Пусть в некоторой области* $\mathcal{D}$ *задана аналитическая функция* f *и выполняется одно из двух условий:*

(1) $\quad \mathrm{Re}(z)$ *– постоянна в* $\mathcal{D}$,

(2) $\quad |f(z)|$ *– постоянен* в $\mathcal{D}$.

Тогда функция $f(z)$ в $\mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если имеет место (1), то $f(z) = u(x,y) + \imath\, v(x,y)$, причем $\forall x, y \quad u(x,y) = u_0$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. По условиям Коши-Римана $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Следовательно, $\forall x, y \quad v(x,y) = v_0$, поэтому $\forall z \in \mathcal{D} \quad f(z) = u_0 + \imath\, v_0$.

Если имеет место (2), то $|f(z)| = M \neq 0$ (если $M = 0$, то утверждение очевидно). Тогда $\ln f(z) = \ln |f(z)| + \imath \arg f(z) = \ln M + \imath \arg f(z)$. Таким образом, для функции $\ln f(z)$ выполняется условие (1), поэтому $\ln f(z)$ – постоянная функция, а значит постоянна и $f(z)$. $\star$

2. Пусть далее имеется функция $f(z) \neq \mathrm{const}$, аналитичная в $\mathcal{D}$ и непрерывная в $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда $|f(z)|$ – непрерывен в $\overline{\mathcal{D}}$, следовательно, $|f(z)|$ достигает своих экстремальных значений. Какие именно точки могут быть точками максимума $|f(z)|$? Ответ на этот вопрос дает

Теорема [Принцип максимума модуля аналитической функции]. *Пусть* $f(z) \neq \mathrm{const}$ *аналитична в* $\mathcal{D}$ *и непрерывна в* $\overline{\mathcal{D}}$. *Тогда* $|f(z)|$ *достигает максимального значения только на границе множества* $\mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\max\limits_{z \in \mathcal{D}} |f(z)| = M$ достигается во внутренней точке $\mathcal{D}$. Рассмотрим множество

$$E = \left\{ z \in \overline{\mathcal{D}} \,\middle|\, |f(z)| = M \right\}.$$

Очевидно, что $E \neq \mathcal{D}$. Тогда множество E обладает граничными точками, принадлежащими множеству $\mathcal{D}$. Пусть z_0 – одна из таких точек.

Тогда $f(z_0) = M$ в силу непрерывности функции $f(z)$, поскольку в любой окрестности z_0 есть точки из множества E. Построим окружность $C = \{z \in \mathcal{D} \mid |z - z_0| = r\}$, целиком лежащую в $\mathcal{D}$, и такую, что $\exists z_1 \in C$, $z_1 \overline{\in} E$. При этом $|f(z_1)| < M$.

Тогда в силу непрерывности функции $f(z)$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists z \in C \quad (|f(z)| < M - \varepsilon).$$

Обозначим множество таких точек через $C_\varepsilon \subset C$. По теореме о среднем имеем:

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi r} \int\limits_C f(z_0 + re^{\imath\theta}) ds \right| \leq \frac{1}{2\pi r} \left(\left| \int\limits_{C_\varepsilon} f(t) ds \right| + \left| \int\limits_{C \setminus C_\varepsilon} f(t) ds \right| \right).$$

Заметим, что

$$\left| \int\limits_{C_\varepsilon} f(t) ds \right| \leq \max_{t \in C_\varepsilon} |f(t)| \cdot l_\varepsilon < (M - \varepsilon) \cdot l_\varepsilon,$$

$$\left| \int\limits_{C \setminus C_\varepsilon} f(t) ds \right| \leq M \cdot (2\pi r - l_\varepsilon)$$

(здесь l_ε – длина дуги C_ε). Тогда

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi r}\left((M-\varepsilon)\cdot l_\varepsilon + M\cdot 2\pi r - M\cdot l_\varepsilon\right) = M - \frac{\varepsilon\cdot l_\varepsilon}{2\pi r}.$$

Имеем:

$$M = |f(z_0)| < M - \frac{\varepsilon\cdot l_\varepsilon}{2\pi r}.$$

Пришли к противоречию. $\star$

Замечание. Пусть $f(z) \ne \mathrm{const}$ аналитична в $\mathcal{D}$, непрерывна в $\overline{\mathcal{D}}$ и $f(z) \ne 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}$. Тогда $|f(z)|$ достигает минимального значения только на границе множества $\mathcal{D}$.

3. Лемма Шварца. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \le 1$, $\quad f(0) = 0$. Если всюду в круге $|f(z)| \le 1$, то в этом же круге $|f(z)| \le |z|$. Если хотя бы в одной внутренней точке круга $|f(z)| = |z|$, то это равенство верно и во всем круге; при этом $f(z) = z\cdot e^{\imath\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ – постоянная величина.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{если } z \ne 0; \\ f'(0), & \text{если } z = 0. \end{cases}$
$\varphi(z)$ – аналитична в кольце $0 < |z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \le 1$. Тогда $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, следовательно, к этой функции можно применить принцип максимума модуля. Так как на окружности $|z| = 1 \quad |\varphi(z)| = |f(z)| \le 1$, то и всюду в круге $|\varphi(z)| \le 1$, а значит $|f(z)| \le |z|$.

Если теперь в какой-нибудь внутренней точке $|f(z_0)| = |z_0|$, то $|\varphi(z_0)| = 1$. Но тогда по принципу максимума модуля $|\varphi(z)| = 1$ во всех точках круга. Следовательно, $\varphi(z)$ постоянна. Так как $|\varphi(z)| = 1$, то $\varphi(z) = e^{\imath\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ – постоянная величина). Но тогда $f(z) = z\cdot e^{\imath\alpha}$. $\star$

§12. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. НЕРАВЕНСТВА КОШИ

1. *Пусть $f(z)$ аналитична в области $\mathcal{D}$ и непрерывна в $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда в каждой точке $z \in \mathcal{D}$ существует при любом $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(z)$, причем*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства используем метод математической индукции по n.

<u>1 шаг.</u> Так как f аналитична в $\mathcal{D}$, достаточно показать, что

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt.$$

Действительно,

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i h} \left(\int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{t-z-h} dt - \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{t-z} dt \right) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i h} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} f(t) \left(\frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z} \right) dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \right| =$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)} dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)h}{(t-z)^2(t-z-h)} dt \right|.$$

Пусть далее $M = \max |f(z)|$, $d = \min\limits_{z \in \partial\mathcal{D}} |t-z| = \rho(z, \partial\mathcal{D})$, а l - длина $\partial\mathcal{D}$. Выберем h так, что $|h| < \frac{d}{2}$. Тогда

$$|t-z| \geq d, \ |t-z-h| \geq \frac{d}{2}.$$

Имеем:

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \cdot \max_{t \in \partial\mathcal{D}} \frac{|f(t)|}{|t-z|^2 |t-z-h|} \cdot l \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{2M}{d^3} \cdot l = \frac{Ml|h|}{\pi d^3} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Предположим, что равенство верно при любом натуральном $n \leq k-1$.Покажем, что оно верно и для $n = k$.

$$\frac{f^{k-1}(z+h) - f^{k-1}(z)}{h} = \frac{(k-1)!}{2\pi i h} \left(\int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z-h)^k} dt - \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^k} dt \right) =$$

$$= \frac{(k-1)!}{2\pi i h} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} f(t) \left(\frac{1}{(t-z-h)^k} - \frac{1}{(t-z)^k} \right) dt =$$

$$== \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)^k} dt + \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)ho(1)}{(t-z)^k(t-z-h)^k} dt \quad (h \to 0).$$

Тогда

$$f^{(k)}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{k-1}(z+h) - f^{k-1}(z)}{h} = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}} dt. \qquad \star$$

2. Неравенства Коши. *Пусть $f(z)$ аналитична в области $\mathcal{D}$ и непрерывна в $\overline{\mathcal{D}}$. Величины M, d, l таковы, что $|f(z)| \le M \quad (z \in \mathcal{D}), \quad d = \rho(z, \partial\mathcal{D}), \quad l$ - длина $\partial\mathcal{D}$. Тогда для любого натурального k*

$$|f^k(z)| \le \frac{k! \cdot l \cdot M}{2\pi d^{k+1}} \qquad (z \in \mathcal{D}).$$

Если $\mathcal{D} : |z - z_0| < R$, то для любого натурального k

$$|f^k(z_0)| \le \frac{k! \cdot M}{R^k}.$$

3. Теорема Лиувилля. *Если $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$, $|f(z)| \le M \quad (z \in \mathbb{C})$, то $f(z) \equiv Const$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ произвольна. Проведем окружность достаточно большого произвольного радиуса R с центром в точке z_0. Так как $f(z)$ аналитична в круге $|z| < R, \quad |f(z)| \le M$, то $|f'(z_0)| \le \frac{M}{R}$. В силу произвольности R, переходя к пределу при $R \to \infty$, имеем:

$$|f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0).$$

Тогда, в силу произвольности z_0, $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Следовательно, $f(z) \equiv Const.\star$

4. Теорема Мореры. *Если $f(z)$ непрерывна в односвязной области $\mathcal{D}$ и*

$$\int\limits_{\gamma} f(z) dz = 0$$

для любого замкнутого контура $\gamma \subset \mathcal{D}$, то $f(z)$ аналитична в $\mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как интеграл по любому замкнутому контуру $\gamma \subset \mathcal{D}$ равен нулю, то корректно определена функция

$$F(z) = \int\limits_{z_1}^{z} f(t) dt \quad (z \in \mathcal{D}).$$

Повторяя доказательство п. 5 §9, имеем: $F(z)-$ аналитична в $\mathcal{D}$ и $F'(z) = f(z)$. Тогда, в частности, существует $F''(z) = f'(z) \quad (z \in \mathcal{D})$. Следовательно, $f(z)$ аналитична в $\mathcal{D}$. $\star$

§13. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РЯДОМ ТЕЙЛОРА

1. Все определения и понятия, связанные с числовыми и функциональными рядами на числовой прямой $\mathbb{R}$, переносятся на случай комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ и последовательность частных сумм $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится в точке z_0, если существует конечный $\lim\limits_{n} S_n(z_0)$. Если ряд сходится в каждой точке $z \in \mathcal{D}$, то ряд сходится в $\mathcal{D}$.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно в $\mathcal{D}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathcal{D} \quad (|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon).$$

Если все функции $f_k(z)$ непрерывны в $\mathcal{D}$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится в $\mathcal{D}$ равномерно, то сумма ряда $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ непрерывна в $\mathcal{D}$.

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно на контуре γ, все функции $f_k(z)$ непрерывны на γ, то

$$\int\limits_{\gamma} S(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_k(z)dz,$$

причем ряд в правой части сходится равномерно.

2. Пусть $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Тогда для любого натурального n

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} = \sum_{k=0}^{n} q^k + \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Пусть $f(z)$ аналитична в области $\mathcal{D}$, t - переменная точка, пробегающая замкнутый контур $\gamma \subset \mathcal{D}$, z и a лежат внутри γ. Тогда

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}} = \frac{1}{t-a} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^k + \frac{1}{t-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}} \cdot \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1}.$$

Умножая обе части равенства на $\frac{f(t)}{2\pi i}$ и интегрируя вдоль контура γ, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \sum_{k=0}^{n} \frac{f(t) \cdot (z-a)^k}{(t-a)^{k+1}} dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)(t-a)^{n+1}} dt \cdot (z-a)^{n+1}.$$

Тогда

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-z)(t-a)^{n+1}}dt.$$

Нас будет интересовать вопрос: когда $R_n \to 0 \quad (n\to\infty)$, то есть при каких условиях функция $f(z)$ представима своим рядом Тейлора в точке a?

3. *Если $f(z)$ аналитична в круге $|z-a| < R$, то в этом круге она представима рядом Тейлора. Кроме того, ряд сходится равномерно в замкнутом круге $|z-a| \le r$ для любого $r < R$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(z)$ аналитична к круге $|z-a| < R$; $0 < R_1 < R, \quad 0 < k < 1$. Пусть z лежит в круге $|z-a| < kR_1$, γ - окружность $|t-a| = R_1$. Тогда $|t-z| \ge R_1 - kR_1 = (1-k)R_1$. В этом случае

$$|R_n| = \left|\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)}{(t-z)(t-a)^{n+1}}dt\right| \le \frac{k^{n+1}R_1^{n+1}}{2\pi}\cdot\frac{M\cdot 2\pi R_1}{(1-k)R_1^{n+2}} = \frac{k^{n+1}M}{1-k}.$$

(Здесь $M = \max\limits_{|z-a|\le R}|f(z)|$.)

Так как $0 < k < 1$, то R_n равномерно стремится к 0 при $n\to\infty$.

Кроме того, для любого $r < R$ множество $|z-a| \le r$ при подходящем выборе величин R_1 и k можно считать подмножеством круга $|z-a| < kR_1$. Тогда в круге $|z-a| \le r$ имеет место равномерная сходимость.$\star$

4. Теорема Вейерштрасса. *Пусть функции $f_k(z)$ при любом k аналитичны в односвязной области $\mathcal{D}$, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно $\forall\,\overline{\mathcal{D}^*}\subset\mathcal{D}$.*

Тогда (1) *Сумма ряда $S(z)$ аналитична в $\mathcal{D}$;*

(2) *Ряд можно почленно дифференцировать сколь угодно раз и*

$$S^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1). Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно на любом контуре $\gamma\subset\mathcal{D}$, следовательно, ряд можно почленно интегрировать, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\gamma} f_k(z)dz = \int\limits_{\gamma} S(z)dz.$$

Так как при любом k функции $f_k(z)$ аналитичны в $\mathcal{D}$, то по интегральной формуле Коши $\int\limits_\gamma f_k(z)dz = 0$. Следовательно, $\int\limits_\gamma S(z)dz = 0$. Так как $S(z)$ непрерывна, то по теореме Мореры $S(z)$ аналитична в $\mathcal{D}$.

(2). Ряд $S(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ сходится равномерно на $\partial\mathcal{D}^*$. Умножим обе части на

$$\frac{n!}{2\pi i}\cdot\frac{1}{(t-z)^{n+1}} \quad (t\in\partial\mathcal{D}^*,\, z\in\mathcal{D}).$$

Равномерная сходимость при этом не нарушается, следовательно, ряд можно почленно интегрировать:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathcal{D}^*}\frac{f_k(t)}{(t-z)^{n+1}}dt = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathcal{D}^*}\frac{S(t)}{(t-z)^{n+1}}dt.$$

Функции $f_k(t)$, $S(t)$ - аналитичны в $\mathcal{D}^*$ и непрерывны в $\overline{\mathcal{D}^*}$. Тогда по формуле Коши для производных

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)} = S^{(n+1)}(z).$$

$\star$

5. Степенные ряды. Степенным рядом будем называть формальную сумму

$$(*)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Функции $f_k(z) = a_k(z-z_0)^k$ аналитичны в $\mathbb{C}$. Пусть $l = \overline{\lim\limits_k}\sqrt[k]{|a_k|}$.

Если $0 < l < \infty$, то ряд (*) сходится абсолютно в круге $|z-z_0| < \frac{1}{l}$ и расходится на множестве $|z-z_0| > \frac{1}{l}$;

если $l = 0$, то ряд (*) сходится абсолютно во всей комплексной плоскости;

если $l = \infty$, то ряд (*) сходится только в точке $z = z_0$.

Величина $R = \frac{1}{l}$ называется *радиусом сходимости степенного ряда* (*).

Примеры: (1). $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$, $a_k = 1$, $l = 1$, $R = 1$. Ряд сходится в круге $|z| < 1$ и расходится на множестве $|z| > 1$. При этом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.

(2). $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{2^k} = z+z^2+z^4+z^8+z^{16}+\ldots = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, где $a_m = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 2^k, \\ 0, & \text{если } m \neq 2^k. \end{cases}$

В этом случае $R = 1$.

(3). Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ сходится в $\mathbb{C}$.

Предложение 1. *Если ряд* (*) *сходится в точке* $z = z^*$, *то ряд сходится и в любой точке* z *такой, что* $|z - z_0| < |z_* - z_0|$.

Предложение 2. *Если* R *- радиус сходимости степенного ряда* (*), *то ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге* $|z - z_0| \leq r \quad (r < R)$.

Теорема. *Каждый степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы.*

Доказательство. Рассмотрим $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$. Так как $a_k(z - z_0)^k$ аналитичны в $\mathbb{C}$ и ряд сходится равномерно внутри замкнутого круга $|z - z_0| \leq r < R$, то по теореме Вейерштрасса $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$. Тогда ряд можно сколь угодно раз почленно дифференцировать:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1},$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (z - z_0)^{k-2},$$

$$\dots$$

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) a_k (z - z_0)^{k-m}.$$

Положив во всех равенствах $z = z_0$, имеем:

$$a_0 = f(z_0),$$

$$a_1 = f'(z_0),$$

$$2a_2 = f''(z_0),$$

$$\dots$$

$$m(m-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot a_m = f^{(m)}(z_0).$$

Следовательно,

$$a_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) \qquad (m = 0, 1, 2, \dots). \qquad \star$$

6. Теорема единственности аналитической функции. *Пусть* f, g *- аналитические в области* $\mathcal{D}$ *функции и* $f(z) = g(z)$ *для любого* $z \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, *где* $\mathcal{E}$ *имеет в* $\mathcal{D}$ *хотя бы одну предельную точку. Тогда* $f(z) = g(z) \quad \forall\, z \in \mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z_0 - предельная точка множества $\mathcal{E}$, $z_0 \in \mathcal{D}$. Так как f, g аналитичны в $\mathcal{D}$, то существует $\mathcal{U}(z_0)$ - круг с центром в точке z_0 такой, что $\mathcal{U}(z_0) \subset \mathcal{D}$ и

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

$$g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots.$$

Так как z_0 - предельная точка множества $\mathcal{E}$, то существует последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{E}$, $\quad z_0 = \lim\limits_n z_n$. Так как при любом $n \quad z_n \in \mathcal{E}$, то $f(z_n) = g(z_n)$. Тогда

$$(**) \;\; f(z_n) = a_0+a_1(z_n-z_0)+a_2(z_n-z_0)^2+\ldots = b_0+b_1(z_n-z_0)+b_2(z_n-z_0)^2+\ldots = g(z_n).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем: $a_0 = b_0$.

Вычитая из обеих частей равенства (**) a_0 и разделив на $z_n - z_0$, получим:

$$a_1 + a_2(z_n - z_0) + \ldots = b_1 + b_2(z_n - z_0) + \ldots$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем: $a_1 = b_1$. Аналогичным образом получаем: $a_k = b_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Таким образом, в круге $\mathcal{U}(z_0) \qquad f(z) = g(z)$.

Рассмотрим $z_1 \in \mathcal{U}(z_0)$. Очевидно, что $z_1 \in \mathcal{D}, \quad f(z_1) = g(z_1), \quad z_1$ - предельная точка $\mathcal{U}(z_0)$. Тогда $f(z) = g(z)$ в окрестности точки z_1.

Пусть z^* - произвольная точка $\mathcal{D}$. Требуется показать, что $f(z^*) = g(z^*)$. Соединим z_0 и z^* непрерывным путем, лежащим в $\mathcal{D}$. Продолжая описанную выше процедуру, имеем множество окрестностей, покрывающих путь из z_0 в z^*, в каждой из которых $f(z) = g(z)$. Поскольку из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, то, повторяя процедуру конечное число раз, получим требуемое. $\star$

Замечания.

1) Если известны значения аналитической функции на элементах некоторой последовательности, имеющей предел в $\mathcal{D}$, то f однозначно определена в $\mathcal{D}$.

2) Если $f(z) = g(z)$ в произвольно малой окрестности фиксированной точки $z_0 \in \mathcal{D}$, то $f(z) = g(z)$ в $\mathcal{D}$.

§14. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

1. Пусть $f(z)$ - аналитическая в области $\mathcal{D}$ функция. Точка $z_0 \in \mathcal{D}$ называется *нулем аналитической функции* f, если $f(z_0) = 0$.

Множество нулей может быть как конечно, так и бесконечно.

2. Любой нуль аналитической функции - изолированная точка в множестве нулей.

3. *Множество нулей аналитической функции не более чем счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В круге $|z| \le 1$ конечное число нулей. В противном случае по теореме единственности $f(z) \equiv 0$. Также для любого натурального n в кольце $n < |z| \le n+1$ конечное число нулей. Так как счетное объединение конечных множеств не более чем счетно, то получаем требуемое. $\star$

4. Предельные точки множества нулей аналитической функции могут лежать лишь на границе области аналитичности.

5. Пусть z_0 - нуль функции f. Тогда в окрестности $\mathcal{U}(z_0)$ степенной ряд функции f имеет вид: $f(z) = a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$.

Допустим, что $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0, \quad a_m \ne 0$. Тогда $f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots = (z-z_0)^m \cdot (a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \ldots) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{m+k}(z-z_0)^k$ - аналитическая в $\mathcal{U}(z_0)$ функция, причем, $\varphi(z_0) \ne 0 (= a_m)$.

Таким образом, в окрестности $\mathcal{U}(z_0)$ $\quad f(z) = (z-z_0)^m \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая функция, отличная от нуля в точке z_0. При этом число m называют порядком нуля. Другими словами, z_0 является нулем порядка m функции f, если $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \ne 0$.

§15. РЯД ЛОРАНА

1. Рассмотрим формальную сумму

$$(*) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k.$$

Эту сумму будем называть билотерным рядом. Под областью сходимости данного ряда будем понимать пересечение областей сходимости этих рядов. Ряд

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$$

сходится в круге $|z-z_0|<R$.

Для определения области сходимости ряда

$$(2) \qquad \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k$$

положим $z-z_0=\frac{1}{t}$. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k=\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k t^{-k}=\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}t^k.$$

Имеем степенной ряд, который сходится в круге $|t|<\rho$. Таким образом, ряд (2) сходится на множестве $\frac{1}{|z-z_0|}<\rho$, то есть $|z-z_0|>r$, где $r=\frac{1}{\rho}$.

Имеем: ряд (2) сходится во внешности некоторого круга радиуса r с центром в точке z_0.

Возможны следующие варианты:

1. $R\le r$. Ряд (*) не сходится.

2. $r<R$. Ряд (*) сходится в кольце $r<|z-z_0|<R$.

Таким образом, областью сходимости билотерного ряда является кольцо.

В любом кольце, вложенном в кольцо сходимости, ряд сходится равномерно. Тогда по теореме Вейерштрасса сумма билотерного ряда - аналитическая в кольце сходимости функция. Верно и обратное утверждение.

2. *Любая функция, аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$, может быть разложена в сходящийся билотерный ряд, называемый рядом Лорана.*

Доказательство. Пусть r_1 и R_1 таковы, что $r<r_1<R_1<R$. Функция $f(z)$ является аналитической в каждой точке z такой, что $r_1<|z-z_0|<R_1$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_{R_1}\bigcup\mathcal{C}_{r_1}^-}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_{R_1}}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_{r_1}}\frac{f(t)}{t-z}dt=f_1(z)+f_2(z)$$

(здесь $\mathcal{C}_{R_1}$, $\mathcal{C}_{r_1}$ - окружности с центром в точке z_0 и радиусами R_1 и r_1 соответственно).

Рассмотрим $f_1(z)$. Пусть $t\in\mathcal{C}_{R_1}$. Тогда

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}}.$$

Умножая обе части равенства на $\frac{f(t)}{2\pi i}$ и интегрируя вдоль $\mathcal{C}_{R_1}$, имеем

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_{R_1}}\frac{f(t)}{t-z}dt=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(z-z_0)^k,$$

где
$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_{R_1}} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим $f_2(z)$. Пусть $t \in \mathcal{C}_{r_1}$. Тогда
$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t - z_0 - (z - z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t-z_0}{z-z_0}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

Умножая обе части равенства на $\frac{f(t)}{2\pi i}$ и интегрируя вдоль $\mathcal{C}_{r_1}$, имеем
$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_{r_1}} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_{r_1}} \frac{f(t)(t-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} dt = \sum_{k=0}^{\infty} B_k (z-z_0)^{-(k+1)},$$
где
$$B_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_{r_1}} f(t)(t-z_0)^k dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом,
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{(z-z_0)^{k+1}}, \qquad r_1 < |z - z_0| < R_1.$$

Покажем, что существует общая формула для коэффициентов этого билотерного ряда. Пусть $-(k+1) = m$, $k = -m-1$. Тогда
$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k (z-z_0)^{-(k+1)} = \sum_{m=-1}^{-\infty} B_{-m-1} (z-z_0)^m = \sum_{k=-1}^{-\infty} B_{-k-1} (z-z_0)^k.$$
Пусть
$$c_k = \begin{cases} A_k, & \text{если}\, k = 0, 1, \dots, \\ -B_{-k-1}, & \text{если} k = -1, -2, \dots. \end{cases}$$
Тогда
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k,$$
где
$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_\rho} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r_1 \le \rho \le R_1.$$
(В силу теоремы Коши мы можем заменить $\mathcal{C}_{r_1}$ и $\mathcal{C}_{R_1}$ на $\mathcal{C}_\rho$.)

Так как r_1 и R_1 были выбраны произвольно, то полученное представление имеет место в кольце $r < |z - z_0| < R$. $\star$

3. Замечания.

1) Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ называется правильной частью ряда Лорана,

а ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k$ - главной частью ряда Лорана.

2) Если ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ сходится в кольце $r<|z-z_0|<R$, то он является рядом Лорана своей суммы.

3) Разложение в ряд Лорана единственно для данной функции в данном кольце.

4) Для коэффициентов ряда Лорана $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ имеют место следующие неравенства (аналог неравенств Коши): если $f(z)$ ограничена на окружности

$|z-z_0|=R, \quad |f(z)| \le M$, то $|c_k| \le \frac{M}{R^k}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

§16. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

1. Точка z_0 называется *особой точкой* функции f, если в этой точке не выполняется условие аналитичности.

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции f, если существует окрестность $\mathcal{U}(z_0)$ такая, что $\forall\, z \in \check{\mathcal{U}}(z_0)$ (то есть для всех z, таких что $0<|z-z_0|<r$) $f(z)$ - аналитическая.

2. Пусть z_0 -изолированная особая точка функции f. Тогда в кольце $0<|z-z_0|<r \quad f(z)$ - аналитическая, следовательно, представима рядом Лорана:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k.$$

Изолированные особые точки делятся на три группы:

1) z_0 - *устранимая особая точка* функции, если разложение в ряд Лорана не содержит главной части, то есть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k \qquad (0<|z-z_0|<r).$$

2) z_0 - *полюс* (порядка m), если разложение в ряд Лорана содержит конечное число $(m \neq 0)$ отрицательных степеней, то есть

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k.$$

3) z_0 - существенно особая точка, если разложение в ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней, то есть

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

3. Теоремы об устранимых особых точках.

Теорема 1. *Если в некоторой окрестности точки z_0 $|f(z)|$ - ограничен, то z_0 - либо устранимая особая точка, либо точка аналитичности.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & \text{если } z \in \check{\mathcal{U}}(z_0), \\ 0, & \text{если } z = z_0. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)\varphi - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

Следовательно, существует $\varphi'(z_0) = 0$. Таким образом, функция $\varphi(z)$ аналитическая в $\mathcal{U}(z_0)$, поэтому

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \varphi'(z_0)(z - z_0) + \frac{\varphi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = (z - z_0)^2 f(z).$$

Следовательно,

$$(*) \qquad f(z) = \frac{\varphi\prime\prime(z_0)}{2!} + \frac{\varphi\prime\prime\prime(z_0)}{3!}(z - z_0) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z - z_0)^k.$$

Таким образом, в проколотой окрестности $\check{\mathcal{U}}(z_0)$ $f(z)$ представима рядом Лорана, который не содержит главной части. Возможно два варианта:

1) $f(z_0) = \frac{\varphi\prime\prime(z_0)}{2!}$. Тогда (*) - разложение функции в ряд Тейлора, следовательно, f аналитична в точке z_0.

2)$f(z_0) \neq \frac{\varphi\prime\prime(z_0)}{2!}$. Тогда z_0 - устранимая особая точка.

(Заметим, что f может и не быть определена в точке z_0. $\star$

Теорема 2. *Пусть z_0 - изолированная особая точка функции f. z_0 - устранимая особая точка тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.*

Доказательство. Необходимость. Если z_0 - устранимая особая точка, то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит главной части, следовательно, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$ - конечен.

Достаточность. Если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки z_0. Следовательно, $|f(z)|$ также ограничен. Поэтому по теореме 1 z_0 - устранимая особая точка. $\star$

Пример. Пусть $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. При $z \neq 0 \quad f(z)$ аналитическая. При этом

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} z^k.$$

Разложение не содержит главной части. $f(z)$ в точке $z = 0$ не определена, но ее можно доопределить так, чтобы $f(z)$ стала аналитической в $\mathbb{C}$, положив $f(0) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = c_0 = 1$.

4. Теоремы о полюсах.

Теорема 3. *Если $|f(z)|$ не является ограниченным в некоторой окрестности точки $z_0 \quad \mathcal{U}(z_0)$, но $|(z-z_0)^m f(z)|$ - ограничен в $\mathcal{U}(z_0)$, то z_0 - полюс функции $f(z)$.*

Доказательство. В точке $z \in \check{\mathcal{U}}(z_0) \quad (z-z_0)^m f(z)$ аналитична. Тогда по теореме 3 z_0 либо устранимая особая точка, либо точка аналитичности функции $(z-z_0)^m f(z)$, причем

$$(z-z_0)^m f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 \ldots .$$

Тогда

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-z_0)^m} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{c_2}{(z-z_0)^{m-2}} + \ldots .$$

Следовательно, $z = z_0$ - полюс, так как все коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_m$ не могут быть равны нулю в силу неограниченности $|f(z)|$.

Если $c_0 \neq 0$, то m - порядок полюса и $f(z) = (z-z_0)^{-m} \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в $\mathcal{U}(z_0)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$.$\star$

Теорема 4. *Пусть z_0 - изолированная особая точка функции f. z_0 - полюс тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть z_0 - полюс порядка m, то есть в некоторой окрестности $\mathcal{U}(z_0)$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots .$$

Тогда $\varphi(z) = (z-z_0)^m f(z)$ представима в $\mathcal{U}(z_0)$ сходящимся степенным рядом, следовательно, является аналитической. При этом $\varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Тогда

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|\varphi(z)|}{|z-z_0|^m} = \infty.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$. Тогда $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}(z_0)$, причем в $\check{\mathcal{U}}(z_0)$ $\quad f(z)$ - аналитическая. В этом случае для $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ $\quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$, следовательно, z_0 - устранимая особая точка функции g. Положив $g(z_0) = 0$, получим, что $z = z_0$ - изолированный нуль функции $g(z)$. Пусть m - порядок этого нуля. Тогда

$$g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

где φ - аналитическая в $\mathcal{U}(z_0)$ $\quad \varphi(z_0) \neq 0$ в $\check{\mathcal{U}}(z_0)$. В этом случае $\frac{1}{\varphi(z)}$ аналитична в $\mathcal{U}(z_0)$ и

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-m+k}(z - z_0)^k, \qquad c_{-m} = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0.$$

Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad z \in \check{\mathcal{U}}(z_0).$$

Таким образом, z_0 - полюс порядка m. $\star$

Пример. Пусть

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

и $z_1, z_2, \ldots, z_p$ - корни уравнения $Q_m(z) = 0 \quad (p \leq m)$. Точка $z_i \quad (1 \leq i \leq p)$ является полюсом функции f того же порядка, какой имеет z_i как нуль функции Q_m.

5. Теоремы о существенно особых точках.

Исходя из теорем 2 и 4 можно получить следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть z_0 - изолированная особая точка функции f. z_0 - существенно особая точка тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|$ не существует.*

Теорема 6[Сохоцкого]. *Пусть z_0 - существенно особая точка функции f, A - произвольная величина (конечная или равная бесконечности). Тогда существует последовательность $\{z_n\}$ такая, что $\lim\limits_n z_n = z_0, \quad \lim\limits_n f(z_n) = A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$A = \infty$: существование последовательности $\{z_n\}$ такой, что $\lim\limits_n z_n = z_0, \quad \lim\limits_n f(z_n) = \infty$ очевидно, иначе $|f(z)|$ был бы ограничен в $\mathcal{U}(z_0)$, что противоречит тому, что z_0 - существенно особая точка.

$A \neq \infty$. Рассмотрим два случая.

1) В любой окрестности точки z_0 существуют точки z такие, что $f(z) = A$. Тогда существуют точка z_1 такая, что $|z_1 - z_0| < 1, \quad f(z_1) = A$, точка z_2 такая, что

$$|z_2 - z_0| < \frac{1}{2}, \quad f(z_2) = A, \dots,$$

существует точка z_n такая, что $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}, \quad f(z_n) = A$. Имеем последовательность $\{z_n\}$ такую, что $\lim\limits_n z_n = z_0, \quad f(z_n) = A \quad \forall n$.
2) Существует окрестность $\mathcal{U}(z_0)$ такая, что $\forall\, z \in \mathcal{U}(z_0) \quad f(z) \neq A$. Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$.

Точка z_0 не является устранимой особой точкой функции g, иначе $|g(z)|$ был бы ограничен в некоторой окрестности точки z_0, следовательно, ограничен

$$|f(z)| = |A + \frac{1}{g(z)}|,$$

а значит z_0 была бы устранимой особой точкой функции f.

Точка z_0 не является полюсом функции g, иначе $|(z-z_0)^m g(z)|$ был бы ограничен в некоторой окрестности точки z_0, следовательно, ограничен

$$|(z - z_0)^m f(z)| = |A(z - z_0)^m + \frac{(z - z_0)^m}{g(z)}|,$$

а значит z_0 была полюсом функции f.

Таким образом, z_0 - существенно особая точка функции g. Тогда существует последовательность $\{z_n\}$ такая, что $\lim\limits_n z_n = z_0, \quad \lim\limits_n g(z_n) = \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$f(z_n) = A + \frac{1}{g(z_n)}$$

имеем: $\lim\limits_n f(z_n) = A$. $\star$

Список литературы

[1] Волковыский Л.Н., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* М.: Физматлит, 2002.

[2] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Функции комплексного переменного: задачи и примеры с подробными решениями.* М.: Едиториал УРСС, 2003.

[3] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* С.-Пб.: Лань, 2002.

[4] Маркушевич А.И. *Краткий курс теории аналитических функций.* М.: Мир, 2006.

[5] Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* С.-Пб.: Лань, 2004.