А. И. Егоров, П. Е. Кашаргин

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

III. Интегрирование внешних дифференциальных форм

Казань 2010

УДК 515.12

Егоров А. И., Кашаргин П. Е. Дифференцируемые многообразия и риманова геометрия. III. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Казань, 2010, 30 с.

Методическое пособие охватывает один из разделов специального курса «Дифференцируемые многообразия и риманова геометрия», читаемого студентам третьего курса, специализирующимся по кафедре теории относительности и гравитации физического факультета КГУ.

Несмотря на то, что пособие расчитано на студентов, изучающих теорию гравитации, они будут полезны и физикам-теоретикам, и студентам-математикам.

Р е ц е н з е н т:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии ТГГПУ, Сушков С. В.

Физический факультет Казанского государственного университета, 2010.

1 Определение касательного вектора к многообразию с помощью операторов локального дифференцирования

Дадим определение касательного вектора, но для этого предварительно докажем следующую *Теорему*.

Теорема 1 *Каждому вектору $\xi_{p_0} \in T_{p_0}M$ можно сопоставить отображение (функционал) $L_{\xi_{p_0}} : \mathscr{O}^S(G) \to R^1$, $p_0 \in G$, такое, что*

1. $L_{\xi_{p_0}}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L_{\xi_{p_0}}(f_1) + \beta L_{\xi_{p_0}}(f_2)$ *для* $\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall f_1, f_2 \in \mathscr{O}^S(G)$ *(свойство линейности);*
2. $L_{\xi_{p_0}}(f_1 f_2) = f_1(p_0) L_{\xi_{p_0}}(f_2) + f_2(p_0) L_{\xi_{p_0}} f_1$ *(правило Лейбница);*
3. *Множество функционалов $L_{\xi_{p_0}}$ считаем снабженным структурой линейного пространства:*

$$L_{\alpha\xi_{p_0} + \beta\eta_{p_0}} = \alpha L_{\xi_{p_0}} + \beta L_{\eta_{p_0}}.$$

Доказательство. Для доказательства *Теоремы* определим функционал $L_{\xi_{p_0}}$ специальным образом:

$$L_{\xi_{p_0}}(f) \overset{def}{=} \frac{d}{dt}(f \circ g)|_{t=0},$$

где $\xi_{p_0} = \{g\}$ — класс эквивалентных в точке $p_0 = g(0)$ кривых класса C^s $(s \geq 1)$, $g : J \to M$, $f : G \to R^1$.

Покажем, что производную по t в определении $L_{\xi_{p_0}}$ можно понимать в обычном смысле. В самом деле, выберем в окрестности точки p_0 карту $\tau = (W, \varphi, U)$. В области $G \cap W$ имеем: $f^* = f \circ \varphi^{-1}$, $g^* = \varphi \circ g$. Тогда $(f \circ g)|_{G \cap W} = f^* \circ g^* : J_{G \cap W} \to R^1$, а это отображение можно дифференцировать по правилам дифференцирования сложных функций. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f^* \circ g^*)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f^*(g^1(t), \ldots, g^n(t))|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f^*}{\partial x^k}|_{x_0} \circ \frac{dx^k}{dt}|_{t=0} = \xi^k_{x_0} \left.\frac{\partial f}{x^k}\right|_{x_0},$$

где $x_0 = \varphi(p_0)$, $g^i = x^i$, $i = \overline{1, n}$.

Отметим, что введенный в рассмотрение функционал называют еще производной по направлению $\overrightarrow{\xi_{x_0}}$.

Очевидно, что все утверждения *Теоремы* для введенного нами функционала выполнены и не зависят от выбора карты. Например, свойство 3):

а) $L_{\alpha\xi_0 + \beta\eta_0}(f) = (\alpha\xi^k_{p_0} + \beta\eta^k_{p_0}) \left.\dfrac{\partial f^*}{x^k}\right|_{x_0} = \alpha L_{\xi_{p_0}}(f) + \beta L_{\eta_{p_0}}(f)$,

б) $L_{\xi_{p_0}} = L_{\eta_{p_0}} \to \xi_{p_0} = \eta_{p_0}$: выбираем функции $f_i \in \mathscr{O}^S(G)$ $(i = \overline{1, n})$ так, чтобы $\xi^k_{p_0} \frac{\partial f^*_i}{\partial x^k} = \eta^k_{p_0} \frac{\partial f^*_i}{\partial x^k}$ и эти n равенств имели бы определитель $|\frac{\partial f^*_i}{\partial x^k}| \neq 0$. Тогда $\xi^k_{p_0} = \eta^k_{p_0}$ и $\xi_{p_0} = \eta_{p_0}$.

Условия а) и б) обеспечивают мономорфность отображения $T_{p_0}M \to \mathscr{L}^S_{p_0}(\mathscr{O}^S(G), \mathbb{R}^1)$, где $\mathscr{L}^S_{p_0}(\mathscr{O}^S(G), \mathbb{R}^1)$ — множество функционалов $L : \mathscr{O}^S(G) \to \mathbb{R}^1$, для которых выполнены только условия 1) и 2). Такие функционалы называются операторами локального дифференцирования.

Очевидно, что операция дифференцирования по направлению является частным случаем локального дифференцирования. Но если проводить рассмотрение в классе функций C^∞, то оказывается, что для каждой операции локального дифференцирования найдется касательный вектор, по направлению которого это дифференцирование и производится. Чтобы доказать это сформулируем следующую *Лемму.*

Лемма. *Всякую гладкую функцию f класса C^∞ в некоторой локальной карте можно представить в виде*

$$f(p) = f(p_0) + \sum_{k=1}^{n}(x^k - x_0^k) \cdot f_k(p)|_{G\cap W},$$

где $x^k : W \to R_k^1$ — локальные координаты, $f_k(p)$ $(k = \overline{1,n})$ — функции класса C^∞ в некоторой окрестности точки $p_0 \in G \cap W$.

Доказательство. Запишем тождество:

$$f(x^1, \ldots, x^n) \equiv f(x_0^1, \ldots, x_0^n) +$$

$$+ \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} f\left(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \ldots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)\right) dt$$

и произведем дифференцирование под знаком интеграла:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(x_0^1, \ldots, x_0^n) +$$

$$+\int\limits_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}\left(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \ldots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)\right)(x^k - x_0^k)dt =$$

$$= f(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \sum_{k=1}^n f_k(x^1, \ldots, x^n)\cdot(x^k - x_0^k),$$

где $f_k(x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^k}\left(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \ldots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)\right)dt$ – функции класса C^∞. Ч.т.п.

Переходя к выше сделанному утверждению, рассмотрим действие оператора локального дифференцирования L на функцию $f(x)$:

$$L(f(x)) = L(f(x_0)) + L\left(\sum_{k=1}^n f_k(x)(x^k - x_0^k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[(x^k - x_0^k)|_{x=x_0}\cdot L(f_k(x)) + f_k(x_0)L(x^k - x_0^k)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^n f_k(x_0)L(x^k) = \sum_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\bigg|_{x_0}.$$

Здесь $L(x^k) = \xi^k$, а из $L(1) = L(1\cdot 1) = 2L(1)$ следует, что $L(f(x_0)) = 0$.

Докажем единственность искомого вектора ξ. Если бы для двух различных векторов ξ и μ имело место $L(f) = \sum\limits_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\Big|_{x_0} = \sum\limits_{k=1}^n \mu^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\Big|_{x_0}$, то положив вектор $\zeta = \xi - \mu \neq 0$, мы получили бы $L(f) = \sum\limits_{k-1}^n \zeta^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\Big|_{x_0} \equiv 0$ для любой функции f класса C^∞. Придавая f по очереди значения $x^1, x^2, \ldots, x^n$, мы получим

$$\zeta^1 = \zeta^2 = \ldots = \zeta^n = 0 \to \zeta = \xi - \mu = 0 \to \xi = \mu.$$

Итак, мы установили биективное соответствие между множеством векторов $T_{p_0}M$ и множеством операторов локального дифференцирования $\mathscr{L}^{\infty}_{p_0}(\mathscr{O}^{\infty}(G), \mathbb{R}^1)$.

Так как для каждой локальной карты в $T_{p_0}M$ существует натуральный базис $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$, то ему биективно соответствует набор операторов $\{L_k = \frac{\partial}{\partial x^k}\}_{k=\overline{1,n}}$, и поэтому любой вектор $\xi \in T_{p_0}M$ формально может быть записан как $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

2 Касательное расслоение

Объединение $\biguplus\limits_{p \in M} T_pM$ всей совокупности касательных пространств называется *касательным расслоением* многообразия M и обозначается TM. Термин "расслоение" говорит о том, что TM состоит из "слоев" — касательных пространств T_pM, для $p \in M$. Касательное расслоение не является векторным пространством, поскольку операция сложения векторов из разных слоев не определена.

Рассмотрим в качестве примера окружность $S^1 \subset R^2$. Очевидно, что две касательные прямые к S^1 в соседних точках пересекаются. Поэтому для того, чтобы изобразить касательное расслоение TS^1 в виде топологического пространства, необходимо перейти в R^3 и "повернуть" касательные к окружности на некоторый угол по отношению к плоскости (x, y), в которой лежит окружность. Теперь касательные не пересекаются и расслоение TS^1 превращается в однополостный гиперболоид (цилиндр).

Итак, пусть M^n — гладкое многообразие класса C^r. Касательное расслоение TM естественным образом наделяется структурой локально тривиального гладкого многообразия класса C^{r-1} следующим образом.

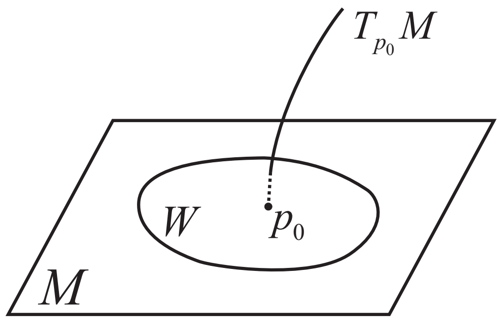

Рис. 1:

Рассмотрим на M карту $\tau = (W, \varphi, U)$. В каждой точке $p_0 \in W$ задано касательное пространство $T_{p_0}M$, все векторы которого относительно τ обладают набором компонент $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$.

Составим тройку $\Theta = (\Omega, \Psi, V)$, где $\Omega = TW = \biguplus\limits_{p_0 \in M} T_{p_0}M$, $V = U \times R^n \subset R^{2n}$, $\Psi : \Omega \to V$, $\Psi(\xi) = (x_0^1, \ldots, x_0^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$, $\forall p_0 \in W$. Таким образом карта для TM индуцируется картой τ на M.

При переходе с τ на τ' естественно возникает переход с Θ на $\Theta' : x^{i'} = f^i(x^k)$, $\xi^{i'} = \xi^k \frac{\partial f^i}{\partial x^k}$, где $\frac{\partial f^i}{\partial x^k}$ – функции класса C^{r-1}, то есть карты Θ и Θ' – C^{r-1}-согласованы.

Общее определение гладкого расслоения – это составной объект, включающий в себя

1) пространство расслоения – гладкое многообразие E;

2) базу расслоения – гладкое многообразие M;

3) проекцию – гладкое отображение $\pi : E \to M$;

4) типовой слой F – гладкое многообразие;

5) структурную группу – группу G гладких преобразований слоя F;

6) структуру расслоения: база M покрыта областями карт $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, над которыми в полные прообразы $\pi^{-1}(W_\alpha)$ введены координаты прямого произведения с помощью диффеоморфизмов $h_\alpha : F \times W_\alpha \to \pi^{-1}(W_\alpha)$ таких, что $(\pi \circ h_\alpha)(y, x) = x$ при $x \in W_\alpha$, $y \in F$.

Преобразования $\lambda_{\alpha\beta} = h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$: $F \times W_{\alpha\beta} \to F \times W_{\alpha\beta}$, $W_{\alpha\beta} = W_\alpha \cap W_\beta$ называют функциями склейки расслоения. Их можно записать в виде $\lambda_{\alpha\beta}(y, x) = \big(T^{\alpha\beta}(x)y, x\big)$. Требуется, чтобы при любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ и $x \in W_{\alpha\beta}$ преобразования $T^{\alpha\beta}(x) : F \to F$ производились элементами группы G. Таким образом функции склейки $\lambda_{\alpha\beta}$ определяют гладкие отображения области $W_{\alpha\beta}$ в группу G:

$$T^{\alpha\beta} : W_{\alpha\beta} \to G, \quad x \to T^{\alpha\beta}(x).$$

Из определения функций $T^{\alpha\beta}(x)$ следует:

$$T^{\alpha\beta} = \big(T^{\beta\alpha}\big)^{-1}, \quad (T^{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}T^{\gamma\alpha})(x) = \mathrm{id_E}$$

для любого $x \in W_{\alpha\beta\gamma} = W_\alpha \cap W_\beta \cap W_\gamma$.

Если вновь обратиться к касательному расслоению, то можно видеть, что в нем типовым слоем является линейное векторное пространство L_n, а структурной группой – группа линейных преобразований $GL(R)$, параметризованных точками базы M.

Сечением гладкого расслоения (E, π, M) называется любое отображение $S : M \to E$ такое, что $\pi \circ S = \mathrm{id_M}$. При этом $S(p) \in \pi^{-1}(p)$ для любой точки $p \in M$.

Векторное поле на многообразии M – это сечение класса C^s $(s \leq r-1)$ касательного расслоения:

$$\xi : M \to TM.$$

Отметим, что для касательного расслоения всегда существует гладкое сечение, называемое нулевым:

$$\mathbf{0} : M \to TM,$$

где $\mathbf{0}(p) = (p; 0_p)$, 0_p – нулевой вектор в T_pM.

Локальным векторным полем класса $C^s(s \leq r-1)$ называется гладкое отображение $\xi : G \to TM$, где G - область в M, $\pi \cdot \xi = \mathrm{id_G}$.

Если рассмотреть локальную карту $\tau = (W, \varphi, U)$, то в пересечении $G \cap W$ локальное векторное поле может быть разложено по векторам натурального репера, состоящего из n векторных полей $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p : G \cap W \to TW$.

3 Дифференциал гладкого отображения гладких многообразий

Пусть $F : M \to N^m$ — гладкое класса C^s отображение гладких многообразий классов C^{r_1} и C^{r_2} соответственно $(1 \le s \le \min(r_1, r_2))$.

Дифференциалом dF_{p_0} отображения F в точке $p_0 \in M$ называется линейное отображение касательного пространства $T_{p_0}M$ в касательное пространство $T_{q_0}N$, где $q_0 = F(p_0)$, определяемое в локальных координатах матрицей Якоби в точке p_0 отображения F. Дифференциал dF_{p_0} часто обозначают символом F_{*p_0}, строится же он следующим образом.

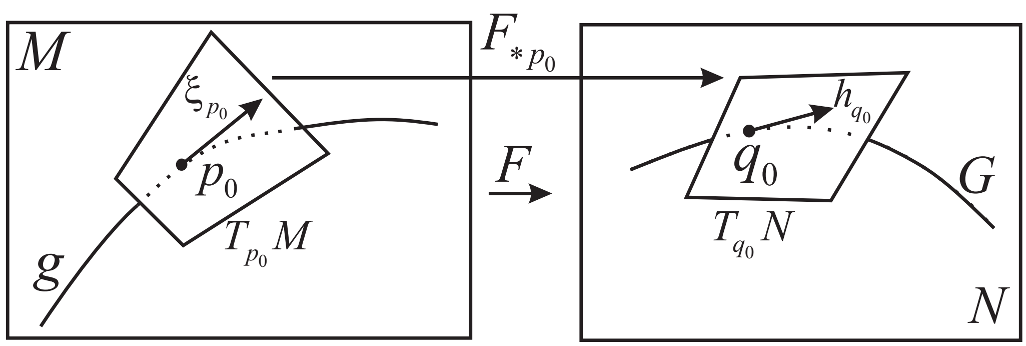

Рис. 2:

Рассмотрим вектор $\xi_{p_0} = \{g\}$, $g : J \to M^n$ – кривая класса C^{r_1}. Тогда $G = F \circ g : J \to N^m$ – кривая класса C^S. При этом $G(0) = F(g(0)) = F(p_0) = q_0$.

Сопоставим класс эквивалентных кривых $\eta_{q_0} = \{G\}$ классу $\xi_{p_0} = \{g\}$. Возникает отображение $\eta_{q_0} = dF_{p_0}(\xi_{p_0})$.

Чтобы доказать линейность этого отображения, выберем пару карт τ и Ω, содержащих точки p_0 и q_0 соответственно. В карте τ имеем:

$$g^i = x^i \circ g : J_W \to R^1_i,$$

а в карте Ω:

$$G^k = y^k \circ G = y^k \circ F \circ g : J_\Omega \to R^1 \;\; (J_\Omega \subset J_W).$$

Координаты касательного вектора ξ_{p_0} суть $\xi^i_{p_0} = \frac{dg^i}{dt}\Big|_{t=0}$, вектора η_{q_0} – $\eta^k = \frac{dG^k}{dt}\Big|_{t=0}$ $(i = \overline{1,n},\; k = \overline{1,m})$

Так как $G^k(t) = F^k(g^1(t), \ldots, g^n(t))$, то $\frac{dG^k}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial F^k}{\partial x^i}\Big|_{x_0} \cdot \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=0}$, или $\eta^k_{q_0} = \frac{\partial F^k}{\partial x^i}\Big|_{p_0} \cdot \xi^i_{p_0}$. Это и есть искомое линейное отображение касательных пространств.

Отображение dF_p задано в каждой точке $p \in M$. Объединяя все отображения dF_p для всех точек $p \in M$, мы получаем *касательное отображение*

$$dF \equiv F_* : TM \to TN.$$

Оно является гладким класса C^{S-1} и в соответствующих локальных картах на TM и TN, порожденных картами τ и Ω, выглядит так:

$$\begin{cases} y^1 = F^1(x^1, \dots, x^n), \\ . \quad . \quad . \quad . \\ y^m = F^m(x^1, \dots, x^n), \\ \eta^1 = \frac{\partial F^1}{\partial x^i}\xi^i, \\ . \quad . \quad . \quad . \\ \eta^m = \frac{\partial F^m}{\partial x^i}\xi^i \qquad (i = \overline{1,n}). \end{cases}$$

4 Кокасательное отображение

В каждой точке многообразия M вместе с касательным пространством T_pM можно рассматривать и кокасательное пространство T_p^*M – n-мерное линейное пространство линейных форм (ковекторов) $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}^1$.

При гладких отображениях многообразий вместе с касательным отображением F_* возникает *кокасательное отображение* $F^* : T^*N \to T^*M$ следующим образом. Каждому ковектору $\Omega_{q_0} \in T_{q_0}^*N$ сопоставляется ковектор $\omega_{p_0} \in T_{p_0}^*M$ такой, что $\omega_{p_0}(\xi_{p_0}) = \Omega_{q_0}(F_{*p_0}(\xi_{p_0}))$. В некоторой паре соответствующих карт имеем: $\omega_i|_{p_0} = \frac{\partial F^k}{\partial x^i}\Big|_{x_0} \Omega_{k|q_0}$ $(i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m})$.

Объединяя все кокасательные отображения $F_{q_0}^*$ для любого $q_0 \in N$, мы получаем кокасательное отображение F^* гладких многообразий.

Напомним, что компоненты ковектора ω_{p_0} получаются как значения формы на векторах натурального базиса: $\omega_i|_{p_0} = \omega(e_i|_{p_0})$.

5 Интегрирование внешних дифференциальных форм (основные определения)

В курсе математического анализа мы встречались с понятием кратного интеграла: если в n-мерном пространстве задана ограниченная область U и функция $f(x_1, \dots, x^n)$ в ней, то определен интеграл функции по области

$$\underset{U}{\int \dots \int} f(x) dx^1 \dots dx^n \equiv \underset{U}{\int \dots \int} f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

При переходе в новую карту с локальными координатами $\{y^k\}_{k=\overline{1,n}}$ интеграл преобразуется следующим образом:

$$\underset{U}{\int \dots \int} f(x) dx^1 \dots dx^n \equiv \underset{V}{\int \dots \int} f\left(x(y)\right) |J| dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n,$$

где $J = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right)$ — якобиан перехода с карты на карту.

Теперь вспомним, что похожая формула встречалась при изучении внешних дифференциальных форм. Так при переходе с карты на карту, форма $T = T_{12\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ преобразуется по закону

$$T_{1'2'\dots n'} = J \cdot T_{12\dots n}.$$

Обобщая, можно сказать, что подинтегральное выражение – внешняя дифференциальная форма. И в n-мерном пространстве для любой ограниченной области U определен интеграла

$$\underset{U}{\int \ldots \int} T.$$

Пример. Если задана риманова метрика (g_{ij}), то ее определитель при переходе в новую карту ведет себя так:

$$g' = J^2 \cdot g \quad \text{и} \quad \sqrt{|g'|} = |J|\sqrt{|g|}.$$

Напомним, что площадь области на поверхности $(n = 2)$ определялась так:

$$\sigma(U) = \iint\limits_U \sqrt{|g|} du dv \quad (u = x^1, v = x^2).$$

Иногда выражение $\sqrt{|g|}\, du\, dv$ называют *мерой* (*элементом объема*) на поверхности и обозначают символом $d\sigma$.

Если мы хотим интегрировать по пространству функцию $\varphi(x)$, то необходимо иметь внешнюю дифференциальную форму – меру; тогда интегралом от $\varphi(x)$ называется, по определению, интеграл от тензора $\varphi(x)T$:

$$\underset{U}{\int \ldots \int} \varphi(x) T \overset{def}{=} \underset{U}{\int \ldots \int} \varphi(x) T_{1 \ldots n}(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

В случае, когда задана риманова метрика, мерой является

$$T = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

В евклидовом пространстве $\sqrt{|g|} = 1$ и $d\sigma = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Полезно напомнить, что при замене координат $x^i = x^i(y^j)$ имеет место следующая формула:

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} J^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k} \quad (dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j),$$

где $J^{(i)}_{(j)}$ – миноры матрицы Якоби.

Замечание. В формуле кратного интеграла присутствует модуль якобиана, от которого можно освободиться, предполагая, что все операции осуществляются на ориентируемом многообразии в положительно ориентированных атласах.

Во втором определении касательного вектора в точке многообразия устанавливается биективное соответствие между векторами $\xi \in T_pM$ $(p \in M)$ и операторами локального дифференцирования в точке p.

Векторам натурального базиса $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ каждой карты на M соответствует совокупность операторов вида $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=\overline{1,n}}$. Но каждому натуральному базису соответствует взаимный (ковекторный) базис $\{e^i\}_{i\in\overline{1,n}}$, которому естественным образом биективно сопоставляется набор дифференциалов $\{dx^i\}_{i=\overline{1,n}}$.

Можно сказать, что символы dx^i — это базисные ковекторы, и любой ковектор может быть разложен по базисным:

$$T = T_i e^i = T_i dx^i \quad (\text{суммирование по } i).$$

В силу этого сопоставления между ковекторами e^i и “дифференциалами” dx^i, ковекторные поля T называются *дифференциальными формами* первой степени (тензоры типа $(1;0)$).

Приведенные выше рассуждения имеют место для векторных и ковекторных полей, рассматриваемых в той или иной карте на многообразии.

Обратимся вновь к интегрированию. Оказывается, выражение $T_i dx^i$ можно проинтегрировать по любой гладкой кривой L: $x^i = x^i(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

Действительно, рассмотрим интеграл вида

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} T_i \frac{dx^i}{d\tau}\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} T_i \xi^i dt,$$

где $\xi^i = \dot{x}^i$ – вектор *скорости.*

Это выражение называется интегралом дифференциальной формы по кривой (в анализе *интеграл II рода*).

Если же вдоль кривой L задана некоторая скалярная функция $f(x(t))$, то на L вводится мера — ее элемент длины $dl = |\dot{x}|dt$ — и интегралом от $f(x(t))$ вдоль L называется выражение

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t)) dl,$$

(в анализе – это *интеграл I рода*).

Отметим, что элемент длины кривой dl — это одномерный вариант общего *элемента объема*

$$d\sigma = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Так что при $n = 1$ имеем: $|g| = |g_{11}|$, $\sqrt{|g_{11}|}\, dt = dl$, где $g_{11} = |\dot{x}^2|$ и $t = x^1$.

Перейдем теперь к обсуждению процесса интегрирования внешних дифференциальных форм типа $(k;0)$ по k-мерным поверхностям в n-мерном пространстве M^n.

Рассмотрим k-мерное подмногообразие $S \in M$ как образ вложения, и пусть в некоторой карте τ поверхность S задана параметрически S: $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$ $(i = \overline{1,n})$.

Внешнюю дифференциальную форму T типа $(k;0)$, заданную в карте τ, рассмотрим на $\tau\big|_S$:

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \ldots dx^{i_k} = \sum_{i_1<\cdots<i_k} J^{i_1\ldots i_k}_{1\ldots k} T_{i_1\ldots i_k}\left(x(z)\right) dz^1 \ldots dz^k,$$

где $dx^i = \sum\limits_{p=1}^{k} \dfrac{\partial x^i}{\partial z^p}\, dz^p$.

Это выражение называется *ограничением* формы на поверхность S. Это уже тензор k-ой валентности в k-мерном подпространстве.

Обычный кратный интеграл от ограничения

$$\underset{U}{\int\cdots\int} \left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} T_{i_1\ldots i_k} J^{i_1\ldots i_k}_{1\ldots k}\right) dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^k$$

кососимметричного тензора $T_{i_1\ldots i_k}$ по области $U \in S$ называется интегралом *II рода от внешней дифференциальной формы* $T_{i_1\ldots i_k}$, заданной в n-мерном пространстве, по области U на поверхности S: $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$ $(i = \overline{1,n})$.

Интеграл от k-формы обладает следующими свойствами:

1. Этот интеграл не меняется при замене внутренних координат поверхности $z^q = z^q(z')$ $(q = \overline{1,k})$. В самом деле, ограничение $\left(\sum\limits_{i_1<\dots<i_k} T_{i_1\dots i_k} J^{i_1\dots i_k}_{1\dots k}\right) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^k$ является тензором k-ой валентности в k-мерном пространстве. Так что при замене переменных $z^q = z^q(z')$ произойдет обычная замена переменных в кратном интеграле по области U в k-ом пространстве.

2. Этот интеграл не меняется при замене координат в объемлющем пространстве $x^i = x^i(x')$. Это следует из того факта, что при замене $x^i = x^i(x')$ имеет место тождество

$$\sum_{i_1<\dots<i_k} T_{i_1\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \equiv \sum_{j'_1<\dots<j'_k} T_{j'_1\dots j'_k} dx^{j'_1} \wedge \dots \wedge dz^{j'_k}.$$

В любом n-мерном пространстве скалярная функция $T(x)$ считается дифференциальной формой валентности нуль.

Нульмерной ориентированной областью мы будем называть набор точек $\{p_\alpha\}$ с приписанными им знаками $\sigma(p_\alpha) = \pm 1$.

По определению, интегралом от нульмерной формы T по нульмерной области U является величина

$$\int\limits_U T = \sum_\alpha T(p_\alpha)\sigma(p_\alpha).$$

Пример. В трехмерном евклидовом пространстве рассмотрим интеграл по поверхности (поток) от внешней дифференциальной формы типа (2;0):

$$\iint\limits_{U\subset S} T_{ij} dx^i dx^j = \iint\limits_U T_{ij}\left(x(z)\right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\, dz^p\right) \wedge \left(\frac{\partial x^j}{\partial z^q}\, dz^q\right) =$$

$$\iint\limits_U \left[\sum_{i<j} T_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^1}\frac{\partial x^j}{\partial z^2} - \frac{\partial x^j}{\partial z^1}\frac{\partial x^i}{\partial z^2}\right)\right] dz^1 \wedge dz^2 \quad (p, q = 1, 2).$$

Обозначим миноры матрицы Якоби, записанные во внутренних скобках, так:

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^1}\frac{\partial x^j}{\partial z^2} - \frac{\partial x^j}{\partial z^1}\frac{\partial x^i}{\partial z^2} = J_{12}^{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\iint\limits_U T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iint\limits_U \left[\sum_{i<j} T_{ij} J_{12}^{ij}\right] dz^1 \wedge dz^2.$$

В декартовых координатах $\{x^1, x^2, x^3\}$ в каждой точке поверхности S: $x^i = x^i(z^1, z^2)$ $(i = \overline{1,3})$ определены базисные касательные векторы

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^1}, \quad \eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^2},$$

векторное произведение которых $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]$ — нормальный вектор поверхности.

Векторное произведение — это, в сущности, тензор $J^{ij} = \xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i$, которому сопоставляется "вектор" $\vec{J}$:

$$J^1 = J^{23}, \quad J^2 = -J^{13}, \quad J^3 = J^{13}.$$

При этом, очевидно, $J^{ij} = J_{12}^{ij}$.

Вектор $\vec{J}$ нормален к S и его длина равна $\sqrt{|g|}$, где $g = \det(g_{pq})$ на поверхности, $g_{pq} = \sum\limits_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial x^j}{\partial z^q}$ $(p, q = 1, 2)$, δ_{ij} – символ Кронекера.

В результате, интеграл по области $U \subset S$ приводится к виду

$$\iint\limits_U T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iint\limits_U \left(\sum_{i<j} T_{ij} J^{ij}_{12} \right) dz^1 \wedge dz^2 =$$

$$= \iint\limits_U (\vec{T}, \vec{J}) dz^1 \wedge dz^2 = \iint\limits_U (\vec{T}, \vec{n}) \sqrt{|g|} dz^1 \wedge dz^2,$$

где $T\ (T_{23}; -T_{13}; T_{12})$, $\vec{n} = \dfrac{\vec{J}}{\sqrt{|g|}}$ – единичный вектор нормали, а $(\vec{T}, \vec{n})$ — скалярное произведение векторов.

Замечание 1. В E_3, ввиду тривиальной связи между векторами и ковекторами, говорят обычно об интегралах от векторного поля $T^\alpha = T_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$:

а) по кривой $\int_L T_\alpha dx^\alpha$,

б) по поверхности $\iint\limits_U (\vec{T}, \vec{n}) \sqrt{|g|} dz^1 \wedge dz^2$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности.

Если кривая L замкнута, то интеграл $\oint\limits_L T_\alpha dx^\alpha$ называется *циркуляцией* поля вдоль кривой.

Если поверхность $S = U$ является границей ограниченной области $f(x, y, z) \leq C$, то интеграл $\oint\limits_U \oint T_{ij} dx^i dx^j$ называется *полным потоком тензорного поля* T_{ij} *через поверхность*, или в евклидовом случае, потоком векторного поля $\vec{T}$ черех эту поверхность.

Замечание 2. Возможно, что поверхность в целом нельзя описать параметрически, если она задана уравнением $F(x^1, x^2, x^3) = C$. Однако это можно сделать около каждой неособой точки. Интеграл не зависит от выбора локальных координат на поверхности, поэтому при его вычислении необходимо разбить поверхность на конечное число кусков так, чтобы каждый кусок по отдельности был представлен параметрически. Полный интеграл будет равен сумме интегралов по кускам.

6 Внешний дифференциал

Для того, чтобы в дальнейшем доказать формулу Стокса, нам необходимо научиться дифференцировать внешние формы. Такая операция разработана и называется внешним дифференциалом внешних дифференциальных форм.

Пусть τ – карта на многообразии M и пусть в ней

$$T = \sum_{i_1 < \dots < i_k} T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_k}.$$

Тогда *внешний дифференциал формы* T задается следующим образом:

$$dT = \sum_{i_0, i_1 < \dots < i_k} \partial_{i_0} T_{i_0, i_1 \dots i_k} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_k}.$$

1) Если $f(x)$ – нуль-форма, то $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$;

2) Если $T_i dx^i$ – 1-форма, то $d\left(T_i dx^i\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_i}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j$;

   Здесь мы полагаем $d(dx^i) \equiv 0$;

3) $d(f(x)T) = df \wedge T + f dT$;

4) Для всех k: $d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0$;

5) $d(dT) \equiv 0$. Действительно,

$$dT = \sum_{i_0, i_1 < \dots < i_k} \partial_{i_0} T_{i_0, i_1 \dots i_k} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_k},$$

$$d(dT) = \sum_{j_0, i_0, i_1 < \dots < i_k} \partial_{j_0 i_0} T_{i_0, i_1 \dots i_k} dx^{j_0} \wedge dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0$$

в силу косой симметрии по dx^{j_0}, dx^{i_0} и равенства вторых смешанных производных $\partial_{j_0 i_0} T_{i_1 \dots i_k}$ при $i_0 \to j_0$.

Пример. Пусть $n = 3$ и $k = 2$.

$$dT = \sum_{i_0, i<j} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^i \wedge dx^j = \frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 +$$

$$+ \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \sum_i \frac{\partial T^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

где $T^1 = T_{23}$, $T^2 = -T_{13}$, $T^3 = T_{12}$.

7 Общая формула Стокса

Из курса математического анализа нам известно о существовании связи между интегралами по поверхности и по ее границе: формула Грина для $n = 2$, $k = 1$, Остроградского-Гаусса для $n = 3$, $k = 3$, Стокса для $n = 3$, $k = 1$.

Рассмотрим общий случай. Пусть на k-мерном подмногообразии задана область U с помощью неравенства $f(z^1, \ldots, z^k) \leq C$ и пусть Γ – граница U, определенная уравнением $f(z^1, \ldots, z^k) = C$, $\dim \Gamma = k - 1$.

Пусть также задано вложение этой области вместе с границей в n-мерное объемлющее многообразие:

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Установим связь между интегралами по области U и по ее границе Γ от всевозможных форм валентности k в n-мерном пространстве.

Рассмотрим простой пример. Пусть $x^i = x^i(t)$ — кривая в пространстве и U — отрезок на ней ($t \in [a; b]$) с граничными точками P и Q. Из анализа известно, что для нульмерной формы f имеет место формула

$$f(Q) - f(P) = \int\limits_U df.$$

Левая часть этой формулы есть интеграл от нульмерной формы по нульмерной области, являющейся границей отрезка U. Здесь мы видим простейшую «формулу Стокса», связывающую интеграл по границе с интегралом по области.

Имеет место следующая *Теорема.*

Теорема 2 *Для любой дифференциальной формы*

$$T = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} T_{i_1 \ldots i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k - 1}$$

с гладкими коэффициентами $T_{i_1\ldots i_{k-1}}$, любой гдадкой поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$ и ограниченной области U на ней с гладкой границей Γ, состоящей из одного куска, имеет место формула

$$\pm\int\limits_{\Gamma} T = \int\limits_{U} dt.$$

Вариант этой формулы для $k = 1$ мы рассмотрели выше.

Двумерный и трехмерный случаи этой формулы были доказаны в соответствующем разделе анализа и носят имена Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса.

Докажем общую формулу Стокса для случая, когда областью интегрирования является k-мерный куб.

Сингулярный куб σ пространства $\mathbb{R}^n$ определяется как гладкое отображение σ: $I^k \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$, где I^k – декартов куб размерности k: $I^k = \{(x^1, \ldots, x^k) \mid 0 \geq x^i \geq 1, i = \overline{1,k}\}$.

Уравнения $x^i = 0$, $x^i = 1$ $(i = \overline{1,k})$ определяют две $k-1$-мерные грани I_i^- и I_i^+. Через ∂I^k обозначим границу куба, т.е. $\partial I^k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \left(I_i^+ \cup I_i^-\right)$.

Пусть φ^{k-1} есть внешняя дифференциальная форма типа $(k-1, 0)$ в $\mathbb{R}^n$ и $d\varphi^{k-1}$ — ее внешний дифференциал.

Теорема 3 *Имеет место равенство*

$$\int\limits_{\sigma(\partial I^k)} \varphi^{k-1} = \int\limits_{\sigma(I^k)} \varphi^k.$$

При этом считаем, что ориентация на границе куба ∂I^k индуцирована естественной ориентацией куба I^k, при чем индуцирование ориентации осуществляется при помощи внешней нормали.

Доказательство. Рассмотрим форму $\omega = \sigma^*(\varphi)$, где $\sigma^*(\varphi)$ — форма, получающаяся заменой переменных в форме φ при помощи отображения σ. Из свойства перестановочности σ^* с операцией d мы имеем $d\omega = d\sigma^*(\varphi) = \sigma^*(d\varphi)$, и, следовательно, требуемое утверждение достаточно доказать в виде:

$$\int\limits_{\partial I^k} \omega = \int\limits_{I^k} d\omega.$$

Пусть $\omega = a_\alpha(x^1, \ldots, x^k) dx^1 \wedge \cdots \wedge d\widehat{x}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx^k$, где $a_\alpha(x)$ — гладкие функции, а дифференциал dx^α пропущен. Тогда имеем

$$d\omega = \sum_\beta \partial_\beta a_\alpha dx^\beta \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge d\widehat{x}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha} d^k x,$$

где $d^k x = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$.

Для простоты рассуждений положим, что функции $a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)$ представлены в виде произведений

$$a_\alpha(x^1, \ldots, x^k) = \prod_{q=1}^{k} b_k^q(x^q).$$

Здесь функции $b_k^q(x^q)$ предполагаются гладкими функциями от одной переменной x^q. Это представление возможно, так как в анализе доказана следующая теорема: любая гладкая функция равномерно аппроксимируется линейными комбинациями произведений гладких функций, зависящих от одной переменной.

Вычислим в явном виде выражение $\int\limits_{I^k} d\omega$:

$$\int\limits_{I^k} d\omega = \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha}\right) d^k x =$$

$$= \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\prod_{q=1}^k b_\alpha^q(x^q)\right)\right) d^k x =$$

$$= \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} b_\alpha^1(x^1) \cdots \frac{\partial b_\alpha^\alpha(x^\alpha)}{\partial x^\alpha} \cdots b_\alpha^k(x^k)\right) d^k x =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} (-1)^{\alpha-1} b_\alpha^1(x^1) \ldots b_\alpha^{\alpha-1}(x^{\alpha-1}) b_\alpha^{\alpha+1}(x^{\alpha+1}) \ldots$$

$$\ldots b_\alpha^k(x^k) \left[(-1)^{\alpha-1} \int \frac{\partial b_\alpha^\alpha(x^\alpha)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha\right] dx^1 \wedge \ldots \wedge d\hat{x}^\alpha \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} b_\alpha^1(x^1) \cdots \hat{b}_\alpha^\alpha(x^\alpha) \cdots b_\alpha^k(x^k) \times$$

$$\times \left[b_\alpha^\alpha(1) - b_\alpha^\alpha(0)\right] dx^1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \big(b_\alpha^1(x^1) \cdots b_\alpha^\alpha(1) \cdots b_\alpha^k(x^k) -$$

$$b_\alpha^1(x^1) \cdots b_\alpha^\alpha(0)\big) \cdots b_\alpha^k(x^k)) dx^1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left[a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)|_{x^\alpha=1} -\right.$$

$$\left. - a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)|_{x^\alpha=0}\right] dx^1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx^k =$$

$$= \int\limits_{\partial I^k} \omega.$$

Ч. т. д.

Список литературы

[1] Постников М.М. Гладкие многообразия (семестр III лекций по геометрии). - М.: Наука, 1987.

[2] Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы диффернциальной геометрии и топологии. - М.: Наука, 1987.

[3] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. - М.: Факториал Пресс, 2000.

[4] Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко А.Т. Введение в топологию. - М.: Высшая школа, 1980.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979.

Содержание

Егоров Анатолий Михайлович

Кашаргин Павел Евгеньевич

Дифференцируемые многообразия и риманова геометрия

III. Интегрирование внешних дифференциальных форм

Учебно-методическое пособие