С. П. Гаврилов, А. И. Егоров

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

II. Элементы теории гладких многообразий

Казань 2010

УДК 515.12

Гаврилов С. П., Егоров А. И. Дифференцируемые многообразия и риманова геометрия. II. Элементы теории гладких многообразий (цикл лекций). Казань, 2010, 63 с.

Данный цикл лекций охватывает один из разделов специального курса «Дифференцируемые многообразия и риманова геометрия», читаемого студентам кафедры теории относительности и гравитации физического факультета КГУ.

Несмотря на то, что лекции расчитаны на студентов, изучающих теорию гравитации, они будут полезны и физикам-теоретикам, и студентам-математикам.

Р е ц е н з е н т:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии КГУ Фомин В. И.

Физический факультет Казанского государственного университета, 2010.

Лекция 1

Карты, атласы, гладкая структура на множестве. Связность и размерность многообразий

Идея описания точек евклидова пространства с помощью упорядоченных наборов вещественных чисел, лежащая в основе аналитической геометрии, позволила привлечь к решению геометрических задач мощные методы алгебры. Алгебраизация геометрии сыграла чрезвычайно важную роль в развитии не только геометрии, но и математики в целом. Так возникла теория дифференцируемых (гладких) многообразий как обобщение и глубокое развитие понятий системы координат и поверхности, безотносительно к её расположению в пространстве.

Рассмотрим произвольное множество M (как правило мощности континуума).

1. Карта. Картой на M называется тройка $\tau = (W, \varphi, U)$, где $\varphi : W \to U$ — биекция подмножества $W \subset M$, называемого областью карты, на область $U \subset \mathbb{R}^n$, называемую изображением карты. Отображение φ называют картирующим или системой локальных координат на W. Обратное отображение φ^{-1}: $U \to W$ называют параметризацией карты.

Для любой точки $p \in W$ возникают n отображений

$$\varphi^i : W \to \mathbb{R}^1_{(i)}, \quad \varphi^i(p) = x^i \quad (i = \overline{1, n}),$$

называемых локальными координатами на W.

2. Согласование карт.

Рассмотрим две карты $\tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$ и $\tau_\beta = (W_\beta, \varphi_\beta, U_\beta)$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$ на M таких, что $W_\alpha \cap W_\beta = W_{\alpha\beta} \neq \varnothing$. Обозначим $U_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(W_{\alpha\beta}), U_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(W_{\alpha\beta})$ (рис. 1).

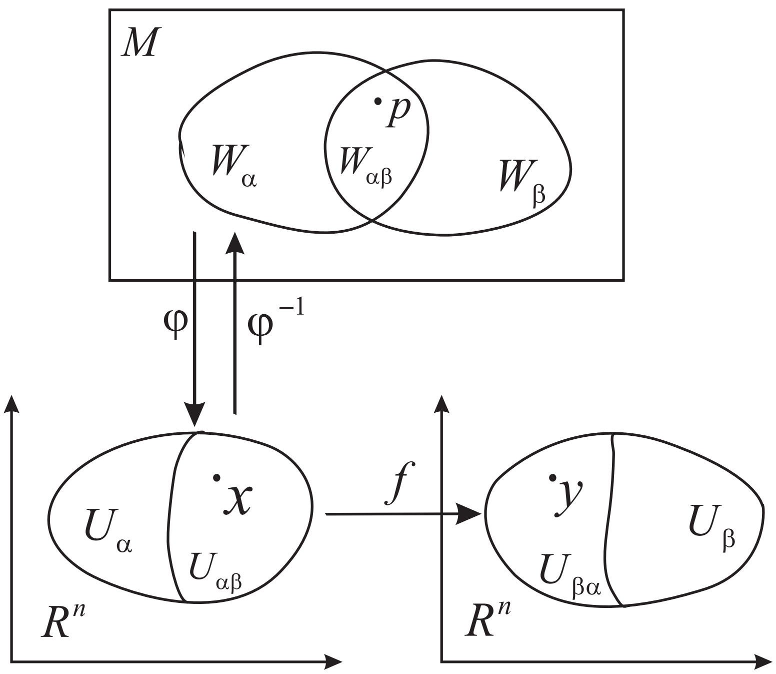


Рис. 1.

Возникающее отображение $f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$ являетя биекцией, а это значит, что существует обратное биективное отображение $f^{-1} : U_{\beta\alpha} \to: U_{\alpha\beta}$. Таким образом, для любой точки $x \in U_{\alpha\beta}, f(x) = y \in U_{\beta\alpha}$ и, в соответствующих базисах, $y^i = f^i(x^j)$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Отображение f называется *отображением перехода* с карты τ_α на карту τ_β или преобразованием координат.

Две карты τ_α и τ_β называются C^r- согласованными если 1) множества $U_{\alpha\beta}$ и $U_{\beta\alpha}$ открыты в $\mathbb{R}^n$; 2) отображение f является диффеоморфизмом класса $C^r(0 \le r \le \infty; \omega)$. При $r = 0$ отображение f считается гомеоморфизмом, а о картах τ_α и τ_β говорят как о топологически согласованных.

Если $r \ge 1$, то можно построить якобиан перехода с карты на карту:

$$J = \det \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \ne 0 \quad (\forall x \in U_{\alpha\beta}).$$

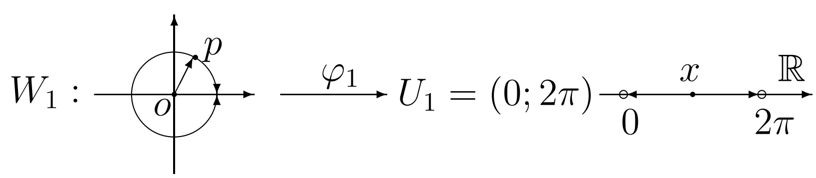
В случае, когда $W_\alpha \cap W_\beta = \varnothing$, карты считаются согласованными в любом классе.

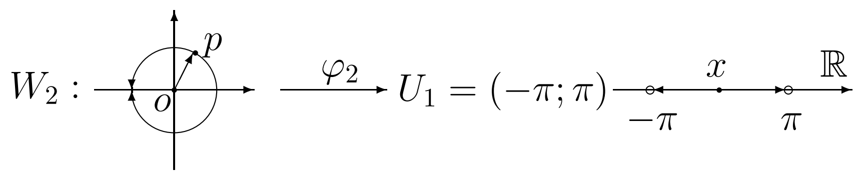
3. Атлас. Набор карт $A = (\tau_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ на множестве M называется атласом класса C^r, если 1) любые две его карты C^r-согласованные, 2) A покрывает всё M, т. е. $M = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$. При $r = 0$ атлас называется топологическим, а при $r \ge 1$ — гладким или дифференцируемым.

Отметим, что атлас класса C^r автоматически является и атласом класса C^s при $0 \le s \le r$.

Примеры.

1) Пусть $M = S^1$ — окружность в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат. Зададим на S^1 атлас, состоящий из двух карт $\tau_1 = (W_1, \varphi_1, U_1)$ и $\tau_2 = (W_2, \varphi_2, U_2)$, следующим образом:





где $x = \varphi_1(p)$, $y = \varphi_2(p)$ — углы между осями Ox и Op. Очевидно, $M = W_1 \cup W_2$, $W_{12} = W_1 \cap W_2$ (рис. 2), $U_{12} =$

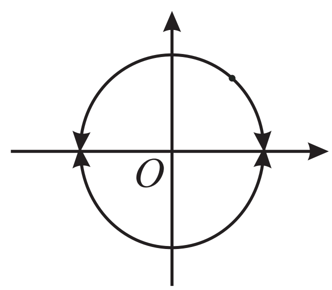


Рис. 2.

$(0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$, $U_{21} = (-\pi, 0) \cup (0; \pi)$. Отображение перехода $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : U_{12} \to U_{21}$ задаётся формулой

$$y = f(x) = \begin{cases} x, x \in (0; \pi); \\ x - 2\pi, x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Обратное отображение

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, y \in (0; \pi); \\ y + 2\pi, y \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Якобиан перехода

$$J = \det \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = 1 \quad (\text{для любой точки } x \in U_{12}).$$

Отображения f и f^{-1} аналитические, так что расматриваемые карты аналитически согласованы и задают аналитический атлас на $M = S^1$.

2) Пусть $M = \mathbb{R}^1$. Зададим на этом множестве две карты следующим образом: $W_1 = \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\varphi_1} U_1 = \mathbb{R}^1$, $x = \varphi_1(p) = p$ для любой точки $p \in W_1$; $W_2 = \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\varphi_2} U_2 = \mathbb{R}^1$, $y = \varphi_2(p) = p^3$, для любой точки $p \in W_2$. Тогда $W_{12} = W_1 \cap W_2 = \mathbb{R}^1$, $U_{12} = \varphi_1(W_1 \cap W_2) = \mathbb{R}^1$, $U_{21} = \varphi_2(W_1 \cap W_2) = \mathbb{R}^1$, а отображение перехода $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : U_{12} \mapsto U_{21}$ имеет вид $y = f(x) = x^3$, $x = f^{-1}(y) = y^{1/3}$.

Так как отображения f и f^{-1} непрерывны, то карты $\tau_1 = (W_1, \varphi_1, U_1)$ и $\tau_2 = (W_2, \varphi_2, U_2)$ C^0-согласованы. Согласовать их гладко невозможно, поскольку отображение $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$ не дифференцируемо в точке $y = 0$.

Замечание. На любом множестве M мощности континума можно всегда ввести атлас состоящий из одной карты $\tau = (W, \varphi, U)$, где $U \in \mathbb{R}^n$ — любое открытое множество с $n \geq 1$, ибо такое подмножество в $\mathbb{R}^n$ имеет мощнось континума и, слеовательно, по теореме Кантора -Бернштейна существует биекция $\varphi : M \to U$ между равномощными множествами.

Очень часто множество M (мощности континума) считают топологическим пространством. При этом в определении карты вносят следующие дополнения.

Тройку $\tau = (W, \varphi, U)$ называют картой, если W — открытое можество в топологическом пространстве M, U — открытое множество в топологическом пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\varphi : W \to U$ — гомеоморфизм.

После этих дополнений можества $W_{\alpha\beta} = W_\alpha \cap W_\beta$, $U_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$, $U_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$ автоматически становятся открытыми, а отображение перехода $f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$ — гомеоморфизмом.

4. Эквивалентность атласов. Рассмотрим на M атлас $A = \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ класса C^r и некоторую карту $\tau = (W, \varphi, U)$, необязательно из A.

Карта τ называется C^r-согласованной с атласом A, если она C^r-согласована с любой картой из A.

Два атласа A и B класса C^r называются C^r-согласованными на M, если любая карта одного атласа C^r-согласована с картами другого.

Атласы A и B класса C^r считаются эквивалентными, если они C^r-согласованы.

Нетрудно проверить, что введёное определение эквивалентности атласов есть истинное отношение эквивалентности на множестве всех C^r-атласов. А это означает, что всё множество таких атласов разбивается на класы эквивалентности.

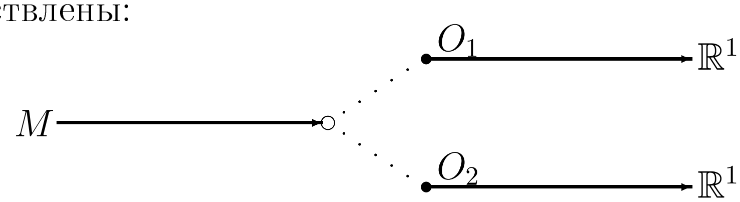
Объединение всех эквивалентных между собой атласов класса C^r является атласом класса C^r, называемым максимальным $\mathscr{A}^r$.

Множество M с заданным на нём масимальным атасом $\mathscr{A}^r$ называется гладким или дифференцируемым многобразием класса C^r (дифференцируемым при $r \geq 0$, гладким при $r = \infty$, топологическим при $r = 0$).

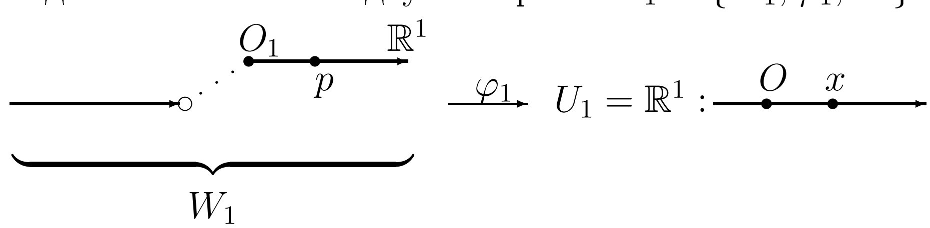
Чтобы избежать "экзотических ситуаций", определение многообразия часто дополняют следующими условиями:

1) Многообразие M должно быть *хаусдорфовым топологическим пространством.*

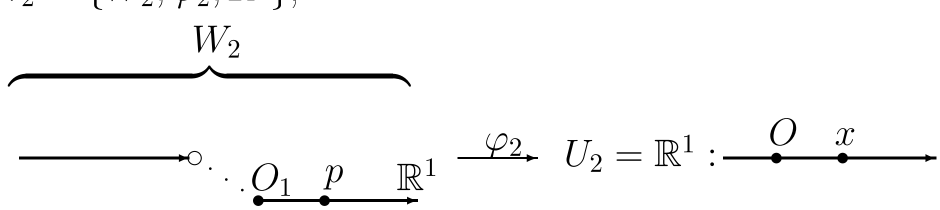
Пример. Пусть M состоит из двух прямых $\mathbb{R}^1_{(1)} = \{x\}$ и $\mathbb{R}^1_{(2)} = \{y\}$, у которых точки с отрицательными координатами отождествлены:



Снабдим множество M двумя картами $\tau_1 = \{W_1, \varphi_1, \mathbb{R}^1\}$



и $\tau_2 = \{W_2, \varphi_2, \mathbb{R}^1\}$,



где $x = \varphi_1(p) = p$, $\varphi_1^{-1}(x) = p$, $y = \varphi_2(p) = p$, $\varphi_2^{-1}(y) = p$ для любой точки p принадлежащей W_1 или W_2 соответственно.

Имеем: $W_{12} = W_1 \cap W_2$ (рис. 3), $U_{12} = \varphi(W_1 \cap W_2) =$

$(-\infty; 0)$, $U_{21} = (-\infty; 0)$.

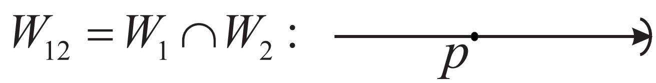


Рис. 3.

Функция перехода с карты на карту имеют вид $x = y$ для любой точки $x \in U_{12}$. Таким образом, карты τ_1 и τ_2 аналитически согласованы и образуют атлас A^w на M. Далее, по атласу A^w строится максимальный атлас $\mathscr{A}^w$ и тем самым, аналитическое многообразие $(M, \mathscr{A}^w)$. Однако, это многообразие не является отделимым, так как точки O_1 и O_2 не имеют непересекающихся окрестностей;

2) *Счётность.* Гладкая структура $\mathscr{A}^r$ содержит некоторый атлас A^r, состоящий из счётного числа карт.

Пример. Пусть $M = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Зададим на М атлас следующим образом: будем считать картой тройку $\tau = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$, где $W_\alpha = \{\alpha\} \times \mathbb{R}^1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1$, отображение $\varphi_\alpha : W_\alpha \mapsto U_\alpha = \mathbb{R}^1$ определим как $\varphi_\alpha(p) = x$, $\forall p = (\alpha, x) \in W_\alpha$. Очевидно, что $M = \uplus_{\alpha \in \mathbb{R}^1} W_\alpha$, $W_\alpha \cap \ W_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и все карты согласоваы в любом классе. Так что $A = \{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^1}$ — "экзотический"атлас на множестве $M = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, не являющийся счетным.

Пример. С помощью стереографической проекции построим атлас из двух карт на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

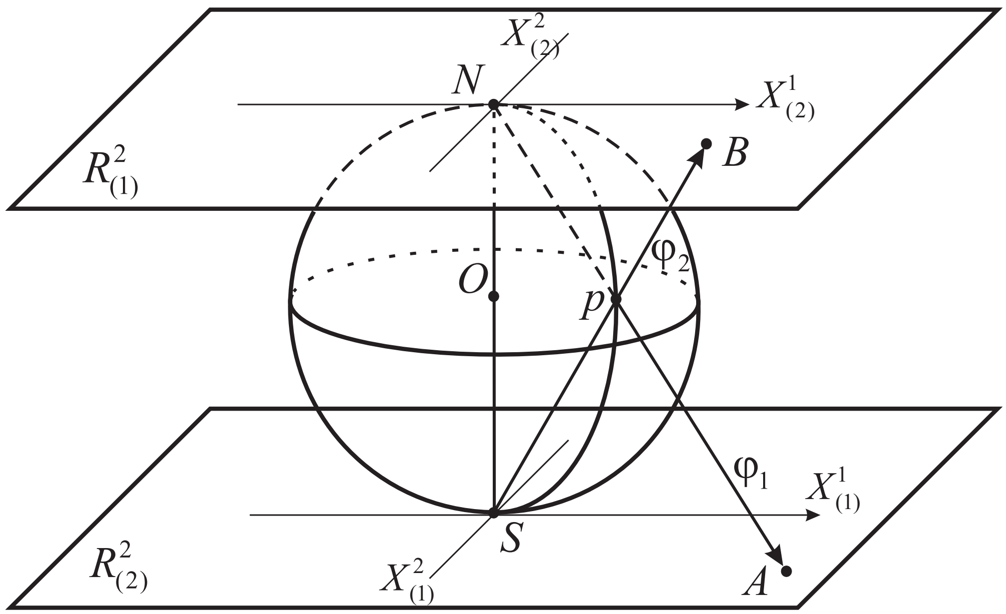


Рис. 4.

Расположим плоскости $\mathbb{R}^2_{(1)}$ и $\mathbb{R}^2_{(2)}$ так, чтоб они касались сферы в полюсах S и N и введём на них декартовы системы координат с соответственно параллельными осями (рис. 4).

Рассмотрим на S^2 две карты $\tau_1 = (W_1, \varphi_1, U_1)$ и $\tau_2 = (W_2, \varphi_2, U_2)$ в которых $W_1 = S^2 \setminus \{N\}$, $\varphi_1(p) = A$, $U_1 = \mathbb{R}^2_{(1)}$; $W_1 = S^2 \setminus \{S\}$, $\varphi_2(p) = B$, $U_2 = \mathbb{R}^2_{(2)}$; $W_{12} = W_1 \cap W_2 = S^2 \setminus \{N, S\}$.

Нетрудно установить, что функции перехода с карты на карту задаются следующим образом:

$$\varphi_{12} : x^1_{(2)} = \frac{4x^1_{(1)}}{(x^1_{(1)})^2 + (x^2_{(1)})^2}, \quad x^2_{(2)} = \frac{4x^2{}_{(1)}}{(x^1_{(1)})^2 + (x^2_{(1)})^2},$$

$$\varphi_{21} : x^1_{(1)} = \frac{4x^1_{(2)}}{(x^1_{(2)})^2 + (x^2_{(2)})^2}, \quad x^2_{(2)} = \frac{4x^2_{(2)}}{(x^1_{(2)})^2 + (x^2_{(2)})^2}.$$

Это — диффеоморфизмы класса C^∞.

Присоединяя к данному атласу весь класс ему эквивалентных, мы получаем на S^2 гладкую структуру $\mathscr{A}^\infty$

Отметим следующий интересный факт.

Теорема. *На гладком многообразии M существует такой атлас карт, в которой область каждой карты диффеоморфна $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Рассмотрим на M некоторый атлас A^r. Покажем, что можно построить такой атлас карт, в котором область каждой карты была бы диффеоморфна открытому шару некоторого радиуса ϵ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $p_0 \in M$ — произвольная точка, принадлежащая карте $\tau = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$ из атласа A^r. Тогда $p_0 \in W_\alpha$, $\varphi_\alpha : W_\alpha \to U_\alpha = \mathbb{R}^n$, $\varphi_\alpha(p_0) = x_0 \in U_\alpha$. Поскольку U_α открыто в $\mathbb{R}^n$, то найдётся такое число r_0, что открытый шар радиуса r_0 с центром в точке x_0 лежит в U_α. Обозначим этот шар $U(x_0, r_0)$, а его прообраз — $\varphi_\alpha^{-1}(U(x_0, r_0)) = W_{p_0} \subset W_\alpha$.

Семейство открытых множеств $\{W_p\}_{p \in M}$ являетя новым атласом карт на M, каждая карта которого диффеоморфна открытому шару в $\mathbb{R}^n$. Чтобы завершить доказательство, покажем, что открытый шар радиуса r_0 диффеоморфен $\mathbb{R}^n$. Достаточно рассмотреть случай r_0=1.

Итак, пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — точка в шаре $U(x_0, 1) : (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 < 1$. Положим

$$y^k = \frac{x^k}{\sqrt{1 - (x^1)^2 - \cdots - (x^n)^2}}, \quad x^k = \frac{y^k}{\sqrt{1 + (y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2}}.$$

Эти функции являются гладкими и осуществляют взаимно однозначное отображение каждого шара $U(x_0, 1)$ на $\mathbb{R}^n$. Ч. т. д.

5. Связность и размерность многообразия. Многообразие M называетя связным, если для любых двух его точек P и Q существует конечная цепочка карт $\{\tau_i\}_{i\in\overline{1,n}} \in A^r$ таких, что $P \in W_1$, $Q \in W_n$ и $W_k \cap W_{k+1} \neq \varnothing$ $(k = \overline{1, n-1})$.

Если многообразие несвязно, то оно естесвенным образом распадается на компоненты связности.

Утверждение. *Пусть M — связное многообразие с атласом карт $\{\tau = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$. Тогда размерности всех линейных пространств в $\mathbb{R}^n$, областями которых являются U_α, одинаковы.*

Доказательство следует из того, что любы две точки многообразия можно соединить цепочками попарно пересекающихся карт, причем для любой пары областей U_i и U_{i+1} диффеоморфизм возможен только при их одинаковой размерности.

Число n, фигурирующее в утверждении, называется размерностью многообразия и обозначается так: $n = \dim M$.

Несвязное многообразие называется n-мерным, если все его компоненты связности имеют размерность n.

Лекция 2

Важнейшие примеры вещественных гладких многообразий. Комплексно аналитические многообразия

1. Гладкость на аффинном пространстве. Пусть A^n — n-мерное аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$. Каждый репер $\{0, e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ в этом пространстве определяет координатную биекцию $\varphi : A_n \to \mathbb{R}^n$, переводящую точку P с радиус-вектором $OP = x^i e_i$ в точку $x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$, а значит, и карту $\tau = (W, \varphi, U)$, где $W = A_n$, $U = \mathbb{R}^n$. Эта карта составляет одноэлементный атлас и задает на A_n некоторую гладкость.

Любой другой репер $\{O, e_{i'}\}_{i'=\overline{1,n}}$ определяет в A_n новую карту $\tau' = (W', \varphi', U')$, где $W' = A_n$, $U' = \mathbb{R}^n$, $\varphi' : A_n \to \mathbb{R}^n$. При этом отображение перехода с карты на карту является аффинным преобразованием $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, а значит, диффеоморфизмом класса C^ω. Таким образом, на A_n строится аналитическая структура.

Поскольку каждое линейное пространство входит как составная часть в A_n, все сказанное выше применимо и к линейным пространствам. Например, к mn-мерному линейному пространству $\mathbb{R}(m, n)$ вещественных прямоуголных матриц $m \times n$.

Чтобы получить карту на $\mathbb{R}(m, n)$, необходимо элементы каждой матрицы из $\mathbb{R}(m, n)$ выписать в строчку в произвольном, но одинаковом для всех матриц порядке. Эту процедуру называют отображением развертки на $\mathbb{R}^{mn}$.

Так возникает nm-мерное гладкое многообразие $\mathbb{R}(m,n)$ класса C^w.

Грппа $GL(n,\mathbb{R})$ выделяется в $\mathbb{R}(n,n) = Mat_n(\mathbb{R})$ условием $\det A \neq 0$, для любой матрицы $A \in GL(n,\mathbb{R})$.

Так как определитель матрицы гладко зависит от её элементов, группа $GL(n,\mathbb{R})$ является гладким подмногообразием многообразия $Mat_n(\mathbb{R})$ с индуцированной гладкостью (подробнее об этом говорится в Лекции 7).

2. Многообразие матриц $\mathbb{R}(m,n;k)$. Рассмотрим множество матриц $\mathbb{R}(m,n)$ ранга k $(0 \leq k \leq min(m,n))$ и снабдим его структурой гладкого многообразия.

Пусть $X \in \mathbb{R}(m,n;k)$. Существуют числовые матрицы $P(m \times m)$ и $Q(n \times n)$, умножение на которые позволяет переставить строки и столбцы матрицы X с тем, чтобы её базисный минор оказался в левом верхнем углу:

$$\widetilde{X} = PXQ = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

где $A(k \times k)$, $\det A \neq 0$, $B(k \times (n-k))$, $C((m-k) \times k)$, $D((m-k) \times (n-k))$.

Рассмотрим множество W, состоящее из матриц вида $\widetilde{X}$.

Так как матрица $\widetilde{X}$ имеет тот же ранг, что и матрица

$$\widetilde{\widetilde{X}} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

то блок $D - CA^{-1}B = 0$ и $D = CA^{-1}B$.

Следовательно, матрица $\widetilde{X}$ однозначно определяетя матрицами A, B, C, причем на матрицы B и C не накладывается никаких ограничений. Это означает, что множество W открыто.

Развертка $\varphi : W \to U_0 \subset \mathbb{R}^N$, $N = k^2 + (m-k)k + k(n-k) = k(m+n-k)$ биективно отображает подмножество W в открытое подмножество $U_0 \subset \mathbb{R}^N$, то есть тройка (W, φ, U_0) является картой на $\mathbb{R}(m, n; k)$.

Обратное отображение $\varphi^{-1} : U_0 \to W$ состоит в восстановлении матриц A, B, C по данной вектор-строке и в заполнении нижнего правого блока в $\widetilde{X}$ матрицей $D = CA^{-1}B$.

Пусть теперь $\alpha\colon \mathbb{R}(m, n; k) \to \mathbb{R}(m, n; k)$ — биективное отображение $R(m, n, k)$ на себя, задающееся некоторой перестановкой строк или столбцов, и пусть $W_\alpha = \alpha(W)$; $\varphi_\alpha = \varphi \circ \alpha^{-1}$. Тогда тройка $(W_\alpha, \varphi_\alpha, U_0)$ также будет картой на $\mathbb{R}(m, n; k)$.

Поскольку каждая $m \times n$ матрица ранга k перестановками строк и слолбцов может быть переведена в матрицу $\widetilde{X}$, множества W_α покрывают все множество $\mathbb{R}(m, n; k)$.

Пусть $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$. Множество $\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) = \alpha^{-1}W_\alpha \cap \alpha^{-1}W_\beta = \alpha^{-1}W_\alpha \cap (\alpha^{-1} \circ \beta) \circ \beta^{-1}W_\beta = W \cap (\alpha^{-1} \circ \beta)W$ состоит из матриц $\widetilde{X}$, которые после перестановки $\alpha^{-1} \circ \beta$ не выходят из W.

Базисный минор, расположенный в левом верхнем углу всех матриц из W, представляет собой некоторую рациональную и, следовательно,непрерывную функцию своих элементов. Поэтому в $U_0 = \varphi(W)$ множество, на котором эта функция отлична от нуля, то есть множество $\varphi(\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)) = \varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$, открыто.

Отображение $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi \circ (\beta^{-1} \circ \alpha) \circ \varphi^{-1} : \varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \to \varphi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$ точку из $\varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \in U_0$, отвечающую матрице $\widetilde{X}$ (а точнее, матрицам A, B, C), переводит сначала в матрицу

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

затем подвергает эту матрицу некоторой перестановке строк и столбцов и, наконец, осуществляет отображение развертки. Это показывает, что отображение $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ задается рациональными функциями координат, которые определены и являются аналитическими на $\varphi(W_\alpha \cap W_\beta)$, то есть любые две карты вида $(W_\alpha, \varphi_\alpha, U_0) C^w$ согласованы. Таким образом, на множестве $\mathbb{R}(m, n; k)$ введена структура аналитического многообразия.

Замечание. При $m = n = k$ атлас составляет одна карта (W, φ, U_0), и это в точности атлас, задающий гладкость на $GL(n)$.

3. Многообразие k-реперов. В линейном пространстве $L_n(\mathbb{R})$ рассмотрим множество k-реперов — упорядоченных совокупностей из k линейно независимых векторов, обозначаемое символом $R(n, k)$ $(1 \le k \le n)$.

Выберем в $L_n(\mathbb{R})$ базис $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$. Тогда для любого k-репера $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ имеет место разложение $\vec{a}_s = \sum\limits_{i=1}^{n} a_s^i \vec{e}_i$ $(s =$

$\overline{1,k}$), которое биективно сопоставляет k-реперу матрицу

$$[a_s^i] = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_k^1 & \dots & a_k^n \end{pmatrix}$$

типа $\mathbb{R}(k,n;k)$. Тем самым, множество $R(n,k)$ снабжается структурой аналитического многообразия размерности $k\,n$.

4. Многообразие Штифеля. Многообразием Штифеля называется множество всех ортонормированных k-реперов в Евклидовом пространстве E_n. Обозначается это многообразие символом $V(n,k)$.

Очевидно, что $V(n,k) \subset R(n,k)$, и выделяется условием $(\vec{a}_p \cdot \vec{a}_q) = \delta_{pq}$ $(p,q = \overline{1,k})$.

Считая базис $\{\vec{e_s}\}_{(s=\overline{1,n})}$ ортонормированным, можно выписать $\frac{k(k+1)}{2}$ независимых соотношений на элементы матрицы $a_s^i : \sum\limits_{i=1}^{n} a_p^i a_q^i = \delta_{pq}$ $(p,q = \overline{1,k})$.

Таким образом, многообразие Штифеля наделяется структурой аналитического подмногообразия многообразия k-реперов. Размерность $V(n,k)$ есть $N = nk - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(2n-k-1)}{2}$ (см. Лекцию 7).

5. Многообразие Грассмана. Многообразием Грассмана ($G(n,k)$) называется савокупность всех k-мерных подпространств линейного пространства $L_n(\mathbb{R})$.

Для построения атласа на $G(n,k)$ введем в $L_n(\mathbb{R})$ скалярное произведение и выберем "стандартный"ортонормированный базис $\{\vec{e}_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

Рассмотрим некоторое k-мерное подпространство $E \subset L_n(\mathbb{R})$. Всегда найдется базисная k-плоскость E_0, натянутая на систему упорядоченых векторов $\{\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_k}\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ такая, что ортогональные проекции векторов $\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_k}$ на E будут линейно независимыми векторами $\vec{e}^{E}_{i_1}, \ldots, \vec{e}^{E}_{i_k}$.

Спроектируем на остальные базисные векторы. При этом возникает разложение $\vec{e}^{E}_{j_s} = \sum\limits_{l=1}^{k} h^l_s \vec{e}^{E}_{j_l}$ $(s = \overline{1, n-k})$.

Этому разложению биективно соответствует $k \times (n-k)$ матрица $[h^l_s] \in \mathbb{R}(k, n-k)$. Вся совокупность E-подпространств, и соответственно, матриц $[h^l_s]$, отвечающих данному набору базисных векторов $\{\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_k}\}$, образует карту. Таких карт будет ровно C^k_n, и как нетрудно показать, эти карты C^ω - согласованы, образуя тем самым атлас A^ω.

6. Комплексно аналитические многообразия. Пусть M — $2n$-мерное гладкое многообразие с атласом A^r карт $\tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$, $U_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n}$, $\alpha \in \Gamma$.

Отождествим $2n$-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с n-мерным комплексным линейным пространством $\mathbb{C}^n$, считая, что комплексные координаты точки $(z^1, \ldots, z^n)$ дают $2n$ вещественных координат, разбитых на две группы следующим образом: $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, $z^k = x^k + iy^k$, $k = \overline{1, n}$. Тогда $2n$ координатных функций $\{\varphi^1_\alpha(p), \ldots, \varphi^n_\alpha(p), \psi^1_\alpha(p), \ldots, \psi^n_\alpha(p)\}$ в карте τ_α превращаются в n комплексных функций $\Phi^j_\alpha = \varphi^j_\alpha + i\psi^j_\alpha$ $(j = \overline{1, n})$, которые называются комплексными координатами точки $p \in M$.

На пересечении карт W_α и W_β мы имели соотношения перехода в виде

$$\begin{cases} x_\alpha^1 = x_\alpha^1(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n, y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_\alpha^n = x_\alpha^n(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n, y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n), \\ y_\alpha^1 = y_\alpha^1(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n, y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_\alpha^n = y_\alpha^n(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n, y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n). \end{cases}$$

Эти функции можно представить как комплекснозначные функции от n независимых комплексных переменных:

$$\begin{cases} z_\alpha^1 = z_\alpha^1(z_\beta^1, \ldots, z_\beta^n), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ z_\alpha^n = z_\alpha^n(z_\beta^1, \ldots, z_\beta^n). \end{cases}$$

В результате мы получили n функций перехода с карты на карту.

Многообразие M с фиксированным атласом карт $\{\tau_\alpha^i\}_{(i=\overline{1,n})}$ называется комплексно аналитическим многообразием, если функции перехода с карты на карту являются комплексно аналитическими функциями.

В качестве примера многообразия, допускающего комплексно аналитическую структуру, рассмотрим сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

В соответствие со стереографической проекцией сферы $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ на плоскость, рассмотрим две карты: $\tau_1 = \{W_1, \varphi_1, U_1\}$, где $W_1 = S^2 \setminus \{N\}$, $U_1 = \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(p) = A$,

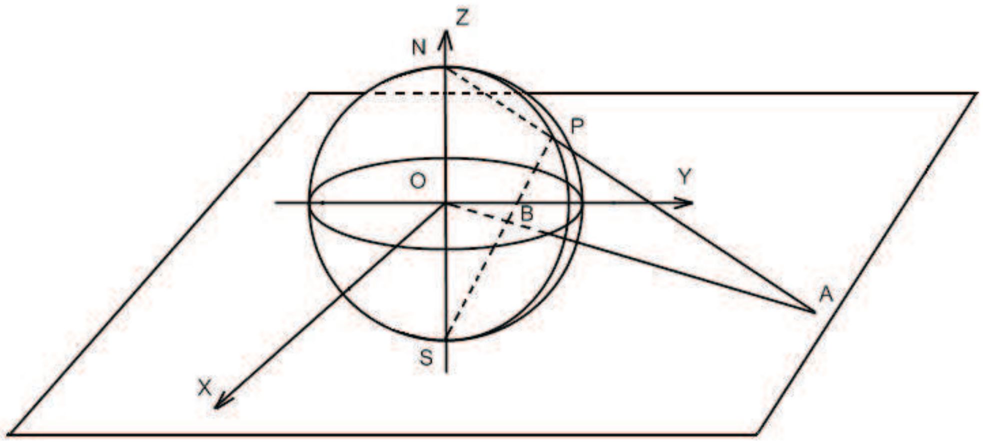


Рис. 1.

и $\tau_2 = \{W_2, \varphi_2, U_2\}$, где $W_2 = S^2 \setminus \{S\}$, $U_2 = \mathbb{R}^2$, $\varphi_2(p) = B$, $W_{12} = S^2 \setminus \{N, S\}$ (рис. 1).

Нетрудно видеть,что

$$\varphi_1(p) = A\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \quad \varphi_2(p) = B\left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right).$$

Введем в карте τ_1 комплексную координату точки $p : V_1 = \frac{x+iy}{1-z}$, а в карте τ_2 — $V_2 = \frac{x-iy}{1+z}$. В пересечении карт $V_1 \cdot V_2 = \frac{x^2+y^2}{1-z^2} = 1$, и, следовательно, $V_1 = \phi(V_2) = \frac{1}{V_2}$ — комплексно-значный переход с карты на карту.

Таким образом, сфера S^2 становится комплексно аналитическим многообразием.

Замечание. Нечетномерные многообразия не могут быть наделены комплексно аналитической структурой. Однако и в четномерных случаях имеются примеры многообразий (проективная плоскость), не допускающих комплексификации.

Лекция 3

Топологическая структура гладких многообразий. Компактность

1. Топология на гладком многообразии. Пусть $(M, \mathscr{A}^r)$ – произвольное гладкое многообразие. Подмножество $G \subset M$ называется открытым в M, если для любой карты $\tau = (W, \varphi, U)$ из максимального атласа $\mathscr{A}^r$ изображение $\varphi(G \cup W)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. В частности, область всякой карты на многообразии есть открытое множество.

Теорема 1 *Множество всех открытых в смысле данного определения подмножеств образуют топологию на M.*

Доказательство. Оно состоит в проверке аксиом топологии.

1)Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ – открыто. Рассмотрим любую карту $\tau = (W, \varphi, u) \in \mathscr{A}^r$ и пересечение $(\bigcup_\alpha G_\alpha) \cap W$. Ясно, что $\varphi((\bigcup_\alpha G_\alpha) \cap W)) = \varphi(\bigcup_\alpha (G_\alpha \cap W)) = \bigcup_\alpha \varphi(G_\alpha \cap W)$ – открыто в $\mathbb{R}^n$, то есть $\bigcup_\alpha G_{\alpha(\alpha\in\Gamma)}$ — открытое множество.

2) Пусть G_1 и G_2 открыты, и пусть $G = G_1 \cap G_2$. Для любой карты $\tau = (W, \varphi, u) \in \mathscr{A}^r$ $\varphi(G \cap W) = \varphi((G_1 \cap W) \cap (G_2 \cap W)) = \varphi_1(G_1 \cap W) \cap \varphi_2(G_2 \cap W)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Здесь мы воспользовались тем, что для биекции φ выполнено $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$.

3)Все множество $M = \bigcup_\alpha W_{\alpha(\alpha\in\Gamma)}$ открыто, так как $\varphi(M \cap W) = \varphi(W)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.

4) Пустое множество $\varnothing$ открыто.

Таким образом, всякое многообразие естественным образом становится топологическим пространством.

А сейчас мы покажем, что для того, чтобы проверить, является ли открытым данное множество $G \subset M$, нет необходимости рассматривать пересечения множества G с картами введенного атласа — вполне достаточно лишь тех карт, которые покрывают G.

Предложение 1. *Пусть* $\{\tau_\beta = (W_\beta, \varphi_\beta, U_\beta)_{\beta\in L\subset\Gamma}\}$ *— такое семейство карт на* M*, что* $G \subset \bigcup_\beta W_\beta$*. Тогда, для того, чтобы множество* G *было открыто в* M*, достаточно, чтобы для любых* β *множества* $\varphi_\beta(G\cap W_\beta)$ *были открыты в* $\mathbb{R}^n$*.*

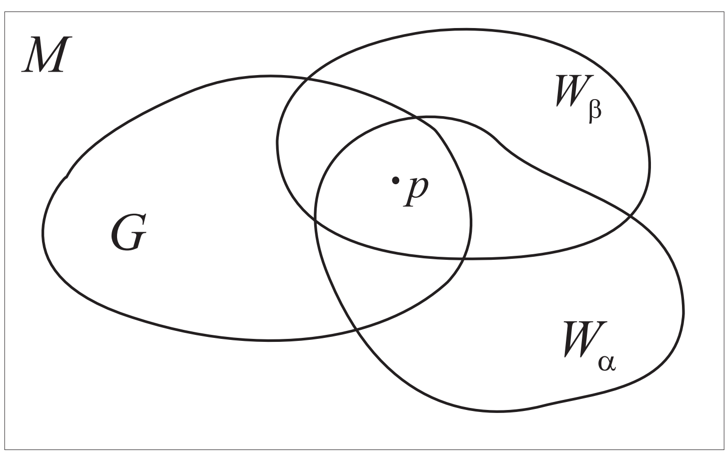


Рис. 1.

Доказательство. Необходимо доказать, что если множество G удовлетворяет условиям *Предложения*, то для любой карты $\tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)_\alpha \in \Gamma$ множество $\varphi_\alpha(G \cap W_\alpha)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, то есть любая его точка x — внутренняя.

Рассмотрим точку $p = \varphi_\alpha^{-1}(x)$. Так как $x \in \varphi_\alpha(G \cap W_\alpha)$ то $p \in G \cap W_\alpha$. Выберем карту τ_β такую, что $p \in W_\beta$. В силу согласованности карт τ_α и τ_β, множества $\varphi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$ и $\varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$ открыты в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, по условию, множество $\varphi_\beta(G \cap W_\beta)$ также открыто. Поэтому открыто и множество $\varphi_\beta(G \cap W_\alpha \cap W_\beta) = \varphi_\beta(G \cap W_\beta) \cap \varphi_\beta(W_\beta \cap W_\alpha)$. С другой стороны, гомеоморфизм $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ переводит это множество во множество $\varphi_\alpha(G \cap W_\beta \cap W_\alpha)$, которое, следовательно,также открыто. Поскольку $x \in \varphi_\alpha(G \cap W_\alpha \cap W_\beta) \subset \varphi_\alpha(G \cap W_\alpha)$, то это доказывает, что точка x является внутренней для $\varphi_\alpha(G \cap W_\alpha)$. Ч.т.п.

Следствие. Для любой карты $\tau = (W, \varphi, U) \in A^r$ многообразия M подмножетсво $H \in W$ открыто тогда и только тогда, когда множество $\varphi(H)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.

Опираясь на *Следствие*, можно сказать, что любая окрестность V точки $p \in W$, содержащаяся в "координатной окрестности" W, также будет "координатной окрестностью"с координатным отображением $\varphi|_V$. Следовательно, любая окрестность G точки p содержит некоторую "координатную окрестность" $G \cap W$. Это означает,что "координатные окрестности" каждой точки многообразия образуют базу ее окрестностей.

Топологическое пространство M называется локально евклидовым, если оно обладает открытым покрытием $\{W_\alpha\}$, каждый элемент которого гомеоморфен некоторому открытому множеству в $\mathbb{R}^n$ (Значит M удовлетворяет первой аксиоме счетности).

Из сказанного выше следует, что любое многообразие является локально евклидовым и как тополгическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Для любого открытого подмножества $G \subset M$ многообразия класса C^r, все карты $\{\tau_\alpha\}$ любого из атласов $\mathscr{A}^r$, для которых $W_\alpha \cap G \neq \varnothing$, порождает индуцированную гладкую структуру на G, превращая, тем самым, G в открытое подмногообразие многообразия M.

Очень часто структуру гладкого многообразия приходится вводить на множестве M, уже являющимся топологическим пространством.

В этом случае предполагается, что гладкая структура должна определять на M имеющуюся топологию, то есть должна быть "согласована"с ней. Для этого необходимо, чтобы атлас, задающий на M гладкую структуру, состоял из карт, области которых были бы заведомо открыты в существующей топологии, а отображения φ были бы гомеоморфизмами. Оказывается, что это условие и достаточно.

Предложение 2. *Пусть* $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *— такой атлас на топологическом пространстве* $M_{\text{топ}}$, *что для любого* α W_α *— от-*

крыты в $M_{\text{ТОП}}$, *а отображения* $\varphi_\alpha : W_\alpha \to U_\alpha$ *являются гомеоморфизмами. Тогда гладкость, определяемая атласом* A^r, *согласована топологией на .*

Доказательство. Согласно *Предложению 1*, множество $G \subset M$, тогда и только тогда открыто в топологии T_A, задаваемой гладкостью, определяемой атласом A^r, когда для любого α множество $\varphi_\alpha(G \cap W_\alpha)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, то есть, поскольку отображения φ_α являются гомеоморфизмами, когда множество $G \cap W_\alpha$ открыто в W_α, а потому — в силу того, что W_α открыто в $M_{\text{ТОП}}$ — и в M.

С другой стороны, если множество $G \subset M$ открыто в $M_{\text{ТОП}}$, то, — поскольку W_α открыто в M, — множество $G \subset W_\alpha$ также открыто в $M_{\text{ТОП}}$, а если все множества $G \cap W\alpha$ открыты в M, то ввиду равенства $G = \cup_\alpha (G \cap W\alpha)$, множество G открыто в M. Следовательно, множества, открытые в топологии T_A, — это в точности множества, открытые в топологии пространства $M_{\text{ТОП}}$. Ч.т.п.

Замечание. Существуют локально евклидовы топологические многообразия ($r = 0$), в которых нельзя ввести структуру гладкого C^r-многообразия с $r > 0$. Такие топологические многообразия называются несглаживаемыми. Необходимые и достаточные условия существования на топологическом многообразии гладкости, согласованной с его топологией, известны, но достаточно сложны.

2. Компактность. Подмножество многообразия М называется компактным, если из всякого покрытия множества G с открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема 2 *Пусть множество F многообразия M является объединением конечного числа подмножеств F_i $(i = \overline{1, m})$, каждое из которых имеет компактное изображение на одной из карт $\tau_i = (W_i, \varphi_i, U_i)$, $F_i \subset W_i$, $\varphi_i(F_i)$ — компактно в $\mathbb{R}^n$. Тогда F — компактно.*

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ — открытое покрытие множества F. Тогда семейство $\varphi_i(G_\alpha \cap W_i)$ при каждом i есть открытое покрытие компакта $\varphi_i(F_i)$. Выбирая из него конечное подпокрытие $G_{k k=\overline{1,p}}$ и заставляя α пробегать соответствующее конечное подмножество значений, мы получим конечное число $\{G_\alpha\}$, покрываюших все F_i. Ч.т.д.

Что касается многообразия в целом, то можно дать следующее определение.

Многообразие M называется компактным, если топологическое пространство $M_{\text{ТОП}}$ компактно. Нетрудно проверить справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. Многообразие $(M, \mathscr{A}^r)$ компактно, если из каждого атласа $A^r \in \mathscr{A}^r$ можно выделить конечный податлас.

Утверждение 2. Многообразие $(M, \mathscr{A}^r)$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда $M_{\text{ТОП}}$ хаусдорфово.

Лекция 4

Прямое произведение гладких многообразий. Ориентируемые многообразия и многообразия с краем

1. Прямое произведение гладких многообразий. Пусть $(M^n, \mathscr{A}^r)$ и $(N^m, \mathscr{B}^r)$ — два гладких многообразия, и пусть $M \times N$ — прямое произведение носителей гладких структур.

Для построения атласа произведения, выберем любую пару карт $\tau = (W, \varphi, U) \in \mathscr{A}^r$ и $\xi = (\Omega, \psi, V) \in \mathscr{B}^r$, и в качестве карты на $M \times N$ рассмотрим тройку $\zeta = (W \times \Omega, \varphi \times \psi, U \times V)$, где отображение $\varphi \times \psi : W \times \Omega \to U \times V$ действует так: $(\varphi \times \psi)(p, q) = (\varphi(p), \psi(q)) \in \mathbb{R}^{n+m}$, при этом $\varphi(p) = x \in \mathbb{R}^n, \psi(q) = y \in \mathbb{R}^m$ для любых точек $p \in W$ и $q \in \Omega$.

Очевидно, что $\varphi \times \psi$ есть биекция между областью $W \times \Omega$ и открытым множеством $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Более того, если карта $\tau = (W, \varphi, U)$ согласована с картой $\tau' = (W', \varphi', U')$, а карта $\xi = (\Omega, \psi, V)$ согласована с картой $\xi' = (\Omega', \psi', V')$, то карта $\zeta = (W \times \Omega, \varphi \times \psi, U \times V)$ согласована с картой $\zeta' = (W' \times \Omega', \varphi' \times \psi', U' \times V')$. Действительно, ясно, что $(W \times \Omega) \cap (W' \times \Omega') = (W \cap W') \times (\Omega \cap \Omega')$ и $(\varphi(W) \times \psi(\Omega)) \cap (\varphi'(W') \times \psi'(\Omega')) = (\varphi(W) \cap \varphi'(W')) \times (\psi(\Omega) \cap \psi'(\Omega'))$.

При этом $((\varphi \times \psi)|_{(W\times\Omega)\cap(W'\times\Omega')}) \circ ((\varphi' \times \psi')|_{(W\times\Omega)\cap(W'\times\Omega')})^{-1} = [(\varphi|_{W\cap W'}) \circ (\varphi'|_{W\cap W'})^{-1}] \times [(\psi|_{\Omega\cap\Omega'}) \circ (\psi'|_{\Omega\cap\Omega'})^{-1}]$.

Для завершения доказательства отметим, что в квадратных скобках записаны диффеоморфизмы, действующие между изображениями карт в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Их прямое произведение есть диффеоморфизм открытых множеств пространства $\mathbb{R}^{n+m}$.

Множество карт $\{\zeta_{\alpha\beta}\} = \{\tau_\alpha \times \xi_\beta\}_{\alpha\in,\beta\in L}$ образуют D^r – атлас на $M \times N$. Все атласы, эквивалентные D^r, образуют максимальный атлас $\mathscr{D}^r$. В результате возникает многообразие $(M^n \times N^m, \mathscr{D}^r)$ размерности $m+n$.

Отметим, что максимальный атлас $\mathscr{D}^r$, вообще говоря, не является “прямым произведением” максимальных атласов $\mathscr{A}^r$ и $\mathscr{B}^r$. Так в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, можно задать атлас как совокупность открытых шаров, каждый из которых не есть прямое произведение двух открытых отрезков из $\mathbb{R}^1$.

2. Ориентируемые многообразия. Многообразие $(M, \mathscr{A}^r)$ называется ориентируемым, если на нем можно ввести такой атлас карт $A^r \in \mathscr{A}^r$, в котором все якобианы перехода с карты на карту в областях их пересечения положительны.

Говорят, что атлас карт, для которого все якобианы перехода положительны, задает на M ориентацию, а сам атлас называется ориентированным.

Два атласа задают одинаковую ориентацию, если их объединение – ориентированный атлас.

Легко видеть, что для любого ориентированного атласа A^r ориентируемого многообразия M, множество $\mathscr{A}^{r+}$ всех карт, положительно согласованных с каждой картой атласа A^r, является ориентированным атласом, содержащим A^r, и притом, максимальным.

Всякий атлас на ориентируемом многообразии можно превратить в ориентированный путем изменения локальных координат в каждой карте. В самом деле, пусть $\{\tau_\alpha(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ — произвольный атлас, состоящий из связных карт. Поскольку M ориентируемо, то на нем существует ориентированный атлас $\{\xi_\beta(y^1_\beta, \ldots, y^n_\beta)\}_{\beta\in L}$. Рассмотрим точку p, принадлежащую пересечению карт τ_α и ξ_β. Если $\det\left(\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right)_p > 0$, то в карте τ_α сохраним систему координат $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$, если же $\det\left(\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right)_p < 0$, то в качестве новой локальной системы в τ_α возьмем $(-x^1_\alpha, x^2_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$, после чего якобиан перехода в точке p становится положительным.

Будем говорить, что отдельная карта задает "положительную" ориентацию на многообразии M. Если якобиан перехода от координат заданной карты к координатам другой карты положителен, то локальные ориентации карт называются согласованными (положительно связанными).

Если на M уже задана ориентация с помощью ориентированного атласа, то локальная ориентация любой другой связной карты из $\mathscr{A}^r$ может быть согласована или не согласована с ориентацией M.

Теорема 1 *На связном ориентируемом многообразии суще-*

ствует ровно две различные ориентации, причем любая карта задает локальную ориентацию, совпадающую с одной из них.

Доказательство. Пусть $\{\tau_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\}_{\alpha\in\Gamma}$ и $\{\xi_\beta(y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n)\}_{\beta\in L}$ — два ориентированных атласа. Если у данной карты ξ_β локальная ориентация совпадает с ориентацией атласа $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, то оба атласа задают одинаковую ориентацию на M. В самом деле, необходимо проверить знак якобиана $\det\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right)$ в любой точке $p \in W_\alpha \cap \Omega_\beta$ для любых двух карт τ_α, ξ_β.

Пусть выбрана точка $p_0 \in W_{\alpha_0} \cap \Omega_{\beta_0}$, в которой якобиан перехода положителен. Соединим точки p_0 и p непрерывной кривой $\varphi : [0; 1] \to M$, $\varphi(0) = p_0$, $\varphi(1) = p$, и покроем эту кривую двумя цепочками карт из атласов τ_α и ξ_β соответственно.

Рассмотрим точную нижнюю грань t^* тех точек из $t \in [0; 1]$, для которых знак якобиана в точках $\varphi(t)$ отрицателен. Очевидно, что $t^* \neq 0$ и $\varphi(t^*) \neq p_0$.

Поскольку точка $\varphi(t^*)$ лежит в пересечении некоторой пары карт τ_γ и ξ_γ, области которых – открытые множества, то в силу того, что якобиан перехода в точке $\varphi(t^*)$ – отличная от нуля функция, найдется точка $\varphi(t')$, $t' < t^*$, в которой якобиан отрицателен. Но этого не может быть, так как t^* – точная нижняя грань в указанном выше смысле. Это противоречие и доказывает теорему.

3. Многообразия с краем. Пусть N — часть многообразия M.

Точка $p \in N \subset M$ называется j-угловой ($j = \overline{1, \dim M}$), если в M существует карта $\tau = (W, \varphi, U)$, в координатах которой $\varphi(N \cap W)$ изображается j–углом в $\mathbb{R}^n$, то есть множеством точек $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \|x\| < 1, x_1 \geq 0, \ldots, x_j \geq 0\}$, причем точка p соответствует началу координат: $p\ (0, 0, \ldots, 0)$.

Многообразием с углами называется многообразие, каждая точка которого является j-угловой ($j \geq 0$). При $j = 0$ точка $p \in M$, но $p \in N$.

Многообразие, точки которого 0-угловые или 1-угловые, называется многообразием с краем. Край —- это множество 1 – угловых точек, которые обозначается символом $\partial\mathbf{M}$.

Теорема 2 *Край ∂M^n – гладкое многообразие размерности $n-1$.*

Доказательство. Выберем в качестве областей карт на $\partial\mathbf{M}^n$ пересечения $\{W_\alpha^*\} = \{\partial M \cap W_\alpha\}_{\alpha \in}$, а в качестве локальных координат на $\varphi|_{W_\alpha^*}$ – координаты $\{x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n, x_\alpha^1 = 0\}$. Функции перехода с карты на карту $\varphi_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta}^*}$ остаются гладкими как ограничения на крае гладких функций $\varphi_{\alpha\beta}$ замены координат на многообразии $\mathbf{M}^n$. Очевидно, $\dim \partial M^n = n - 1$. Ч.т.д.

Пример. Шар $\mathcal{D}^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2 \leq 1$, в $\mathbb{R}^n$является многообразием с краем S^{n-1}.

Теорема 3 *Если многообразие с краем ориентируемо, то и край ориентируем.*

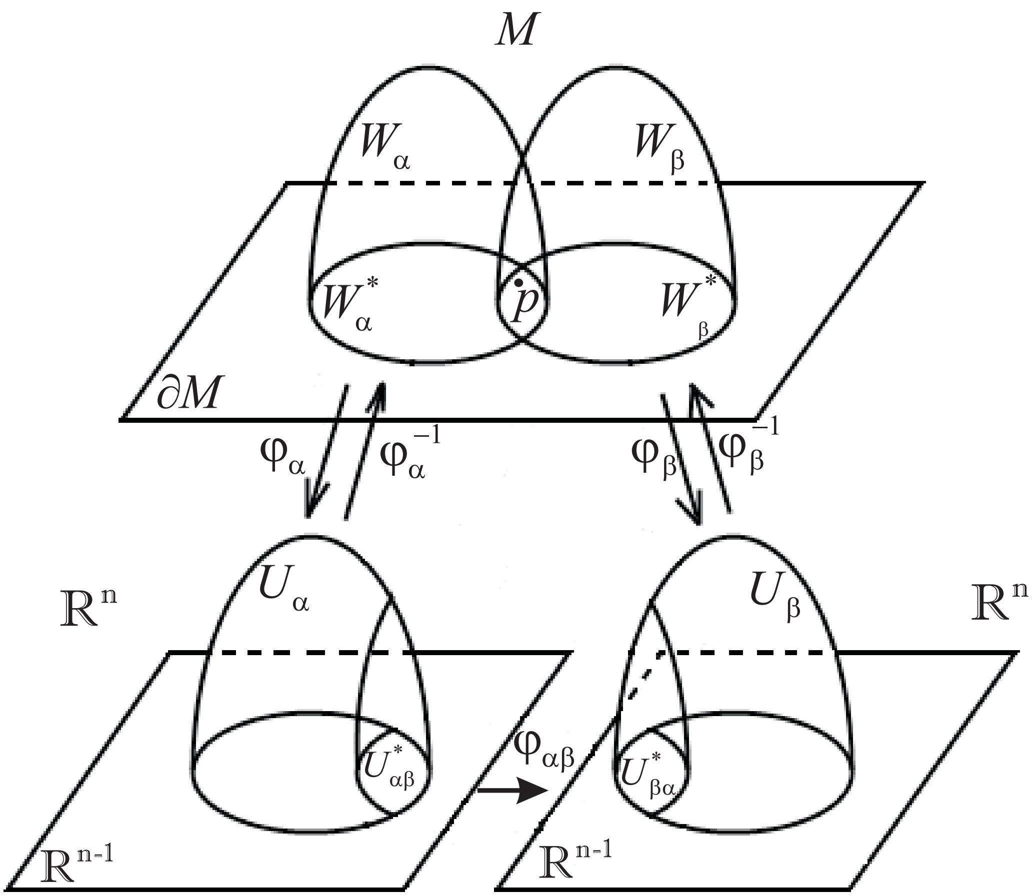


Рис. 1.

Доказательство. Первые координаты в картах τ_α и τ_β неотрицательны (области карт пересекаются с краем).

Поскольку **M** ориентируемо, то мы всегда можем добиться того, что якобиан перехода в пересечении карт будет положителен. Поскольку для пересечения $W_\alpha^* \cap W_\beta^*$ первые координаты $x_\alpha^1 = x_\beta^1 = 0$, то $\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^s}$ для $s = \overline{2,n}$. Поэтому $\det(\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}) = \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} \cdot \det(\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^s}) > 0$ $(k, s = \overline{2,n})$. Но так как $x_\beta^1 > 0$ тогда и только тогда, когда $x^1_\alpha > 0$, то $\left.\frac{\partial x^1_\beta}{\partial x^1_\alpha}\right|_{U^*_{\alpha\beta}} > 0$ и $\det\left.\left(\frac{\partial x^k_\beta}{\partial x^s_\alpha}\right)\right|_{U^*_{\alpha\beta}} > 0$. Ч.т.п.

Пусть M – ориентированное многообразие с краем ∂M и пусть $\{\tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in}$– атлас, задающий ориентацию на M. Тогда ориентация края, задаваемая атласом $\{\tau^*_\beta = (W^*_\beta, \varphi^*_\beta, U^*_\beta)\}_{\beta\in L}$, где $W^*_\beta = W_\beta \cap \partial M$, $\varphi^*_\beta = \varphi_\beta|_{\partial M}$, $U^*_\beta = \varphi^*_\beta(W^*_\beta)$, называется согласованной с ориентацией многообразия M.

При $n = 1$ всякая область $U \subset M$ есть отрезок (на прямой или окружности), а ∂U состоит из его концов.

Ориентация многообразия M задает на этих отрезках направление, и мы введем ориентацию на ∂U, считая, что один конец каждого отрезка имеет знак минус, а другой — знак плюс.

Лекция 5

Гладкие функции на многообразиях. Гладкое разбиение единицы

1. Гладкие функции на многообразиях. Пусть G — открытое множество на многообразии $(M, \mathscr{A}^r)$ и пусть задано отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^1$, называемое функцией на G .

Рассмотрим точку $p_0 \in G$ и карту $\tau = (W, \varphi, U)$, покрыва-

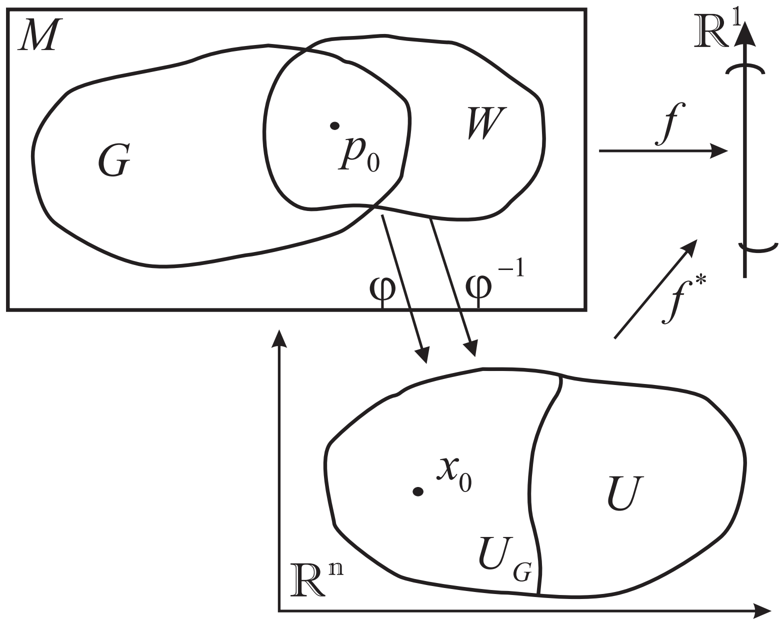


Рис. 1.

ющую эту точку. Так как G и W — открытые множества, то пересечение $G \cup W$ открыто и изображается в $\mathbb{R}^n$ открытым множеством $U_G = \varphi(G \cup W)$, $x_0 = \varphi(p_0)$.

При наличии карты τ, естественным образом возникает представляющая функция $f^* = f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$.

Отображение $f : G \to \mathbb{R}^1$ назывыется гладкой функцией класса $C^s (s \leq r)$ в точке $p_0 \in G$, если для любой карты $\tau \in \mathcal{A}^r$ представляющая функция f^* является функцией класса C^s в точке $x_0 = \varphi(p_0) \in U_G$.

Функция $f : G \to \mathbb{R}^1$ называется гладкой функцией класса C^s в области G, если она гладкая в любой точке $p \in G$.

Теорема 1 *Функция* $f\colon G \to \mathbb{R}^1$ *является гладкой класса*

$C^s (s \leq r)$ в точке $p_0 \in G$ тогда и только тогда, когда для некоторой карты $\tau \in \mathscr{A}^r$ функция f^* является функцией класса C^s в точке $x_0 = \varphi(p_0)$.

Доказательство. Пусть τ — карта из условия *Теоремы.* Рассмотрим карту $\tau' = (W', \varphi', U')$, содержащую точку p_0, в которой представляющая функция имеет вид $f^{*\prime} = f \circ \varphi'^{-1}$. Но $f^{*\prime} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1}) = f^* \circ \psi$, где ψ — отображение перехода с карты τ' на τ класса C^r. Следовательно, функция $f^{*\prime}$ — функция класса C^s в точке p_0. Ч.т.д.

Множество всех гладких функций класса C^s в области G обозначается символом $\mathcal{O}^s(G)$.

Это множество можно наделить структурой линейного пространства: для любых $f, g \in \mathcal{O}^s(G)$ определим линейную комбинацию $\alpha f + \beta g : G \to \mathbb{R}^1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, так, чтобы для любой $p_0 \in G$ $(\alpha f + \beta g)(p_0) = \alpha f(p_0) + \beta g(p_0)$.

Возникшее линейное пространство бесконечномерно.

Далее, множество $\mathcal{O}^s(G)$ наделяется структурой кольца, в котором операция умножения $f \cdot g : G \to \mathbb{R}^1$ определяется следующим образом: $(f \cdot g)(p_0) = f(p_0) g(p_0) \in \mathbb{R}^1$ для любой $p_0 \in G$. Нетрудно проверить, что все аксиомы кольца выполнены. Итак, $\mathcal{O}^s(G)$ — кольцо (локальных) гладких функций класса C^s в области G.

В частности, когда $G = M$, то $\mathcal{O}^s(M)$ называется кольцом глобальных функций.

2. Гладкое разбиение единицы. Семейство $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ гладких неотрицательных функций φ_α: $M \to \mathbb{R}^1$ называется локально конечным, если для любой точки многообразия M существует её окрестность, в которой только конечное число функций из $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ отлично от нуля.

Семейство функций $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ называется гладким разбиением единицы, если $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$ для любой $p \in M$.

Покажем, что гладкое разбиение единицы существует на компактных и паракомпактных многообразиях.

Обозначим символом $\mathbf{C}^\infty$ – пространство гладких функций класса C^∞ на многообразии M, $\mathrm{Sup}_G f$ — точную верхнюю грань функции f на множестве G, $\mathrm{Sup} f(p)$ — носитель функции f, то есть замыкание множества всех точек $p \in M$, в которых $f(p) \neq 0$.

Лемма 1. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — два не пересекающихся подмножества, причём A – замкнуто и ограничено (компактно), B – замкнуто. Тогда на $\mathbb{R}^n$ существует C^∞-функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(x) \equiv 1$ на A и $\varphi(x) = 0$ на B. При этом всюду $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.*

Доказательство. Пусть $0 < a < b$ - два вещественных числа. Рассмотрим на $\mathbb{R}^1$ следующую функцию (рис. 2):

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}) & \text{при } a < x < b, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $f(x)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^1$ клас-

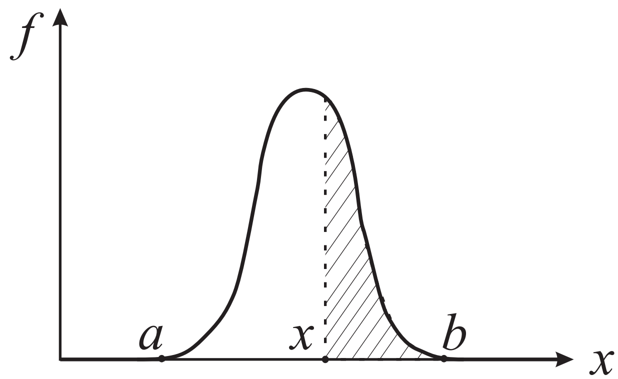


Рис. 2.

са C^∞. Рассмотрим функцию (рис. 3)

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \Big/ \int\limits_a^b f(t)\,dt,$$

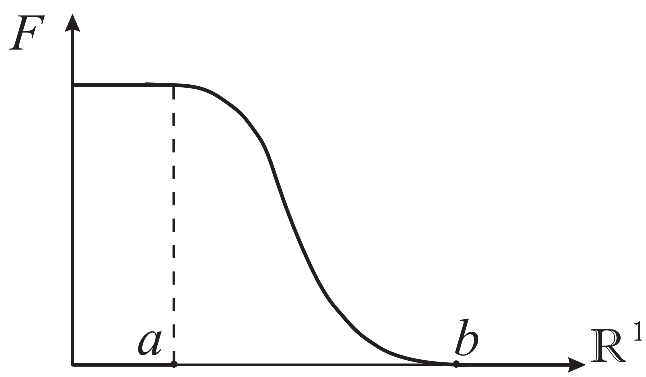


Рис. 3.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geq b, \\ 1 & \text{при } x \leq a, \\ & \text{убывает от 1 до 0 при } a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Очевидно, что и $F(x)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^1$ класса C^∞.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ функцию $\Psi(x)$ (рис. 4), определённую формулой

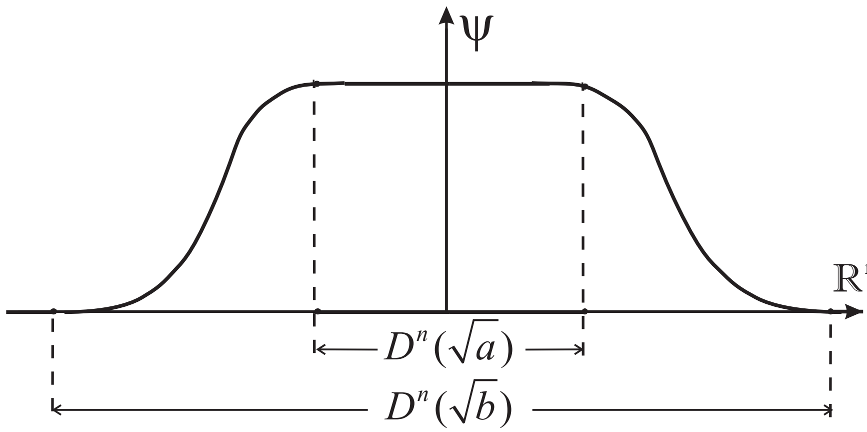


Рис. 4.

$$\Psi(x^1, x^2, ..., x^n) = F((x^1)^2 + ... + (x^n)^2) \ .$$

При этом

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } r^2 \geq b \\ 1 & \text{при } r^2 \leq a \\ & \text{убывает от 1 до 0 при } a \leq r^2 \leq b \ , \end{cases}$$

где $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2$, а гладкость функции $\Psi(x)$ — класса C^∞.

Теперь рассмотрим множества A и B из условия *Леммы*. Так как A компактно, то существует конечный набор сфер S_i^{n-1} $(i = \overline{1, m})$ таких, что соответствующие им открытые шары D_i^n $(\partial \bar{D}_i^n = S_i^{n-1})$ составляют покрытие множества A:

$A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i^n$. Поскольку $A \cap B = \varnothing$ и B — замкнуто, то можно считать, что $D_i^n \cap B = \varnothing$ для любого $i = \overline{1, m}$.

Любую сферу S_i^{n-1} можно уменьшить до сферы ${S'}_i^{n-1} \subset S_i^{n-1}$ так, что набор шаров ${D'}_i^n$ будет вписанным подпокрытием множества A.

Рассмотрим функции $\Psi_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } \overline{D_i^{n\prime}} \\ 0 & \text{вне } D_i^n \end{cases}.$$

Положим $\varphi(x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{m}(1 - \Psi_i(x))$. Ясно, что $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) = 1$ на A и $\varphi(x) = 0$ на B. Ч.т.д.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{C}$ *— компактное подмножество гладкого многообразия* M *; пусть* $\mathbf{C} \subset V$ *где* V *— открыто в* M*. Тогда существует функция* $\varphi(p) \in C^\infty(M)$ *такая, что* $0 \le \varphi(p) \le 1$ *на* M*,* $\varphi(p) = 1$ *на* $\mathbf{C}$ *и* $\varphi(p) = 0$ *вне* V*.*

Доказательство. Эта *Лемма* уже доказана нами для $M = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим общий случай.

Пусть $\tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$ — локальная карта на M, и пусть $S_\alpha \subset W_\alpha$ — компактное подмножество в W_α. Множество $U_\alpha = \varphi_\alpha(W_\alpha)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. В силу *Леммы 1* на этом множестве существует функция $f_\alpha(x)$ такая, что $f_\alpha(x) \equiv 1$ на $\varphi_\alpha(S_\alpha)$, $supp\ f_\alpha(x) \subset \varphi_\alpha(W_\alpha)$, то есть $f_\alpha = 0$ вне U_α.

Рассмотрим функцию $F_\alpha(p)$ на M такую, что

$$F_\alpha(p) = \begin{cases} f_\alpha(\varphi_\alpha(p)) & p \in W_\alpha \\ 0 & p \notin W_\alpha \ . \end{cases}$$

Очевидно, что $F_\alpha \in \mathbf{C}^\infty(M)$, $F_\alpha \equiv 1$ на S_α и $F_\alpha \equiv 0$ вне W_α

Теперь рассмотрим компактное подмножество $\mathbf{C} \subset V$, где V — открыто в M. В силу компактности $\mathbf{C}$, существует конечный набор карт с областями определения $\{W_1, ..., W_N\}$ и компактных множеств $\{S_1, ..., S_N\}$ таких, что $\mathbf{C} \subset \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} S_\alpha$, $S_\alpha \subset W_\alpha$, $\bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \subset V$. Для каждого W_α существует функция $F_\alpha \in C^\infty(M)$ такая, что $F_\alpha \equiv 1$ на S_α и $F_\alpha \equiv 0$ вне W_α.

Рассмотрим функцию $F = 1 - \prod\limits_{\alpha=1}^{N}(1 - F_\alpha)$.Очевидно, что $F(p) \equiv 1$ на $\mathbf{C}$ и $F(p) \equiv 0$ вне $\bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} W_\alpha$. В частности, $F(p) \equiv 0$ вне V. Ч.т.д.

Теорема 2 . *Пусть M— компактное гладкое многообразие ; пусть $\{W_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,N}}$ — произвольное конечное покрытие M координатными областями. Тогда существует набор функций $\varphi_\alpha \in C^\infty(M)$ таких, что 1) Supp $\varphi_\alpha \subset W_\alpha$ для любых α, 2) $0 \leq \varphi_\alpha(p) \leq 1$ для любых $p \in M$, 3) $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$ для любых $p \in M$.*

Доказательство . Рассмотрим покрытие $\{W_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,N}}$. Можно построить вписанное подпокрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,N}}$ такое, что $\overline{V}_\alpha \subset W_\alpha$ (Н.Бурбаки. Общая топология). Для каждой пары (W_α, V_α), согласно *Лемме 2*, существуют функции $\psi_\alpha \in$

$C^\infty(M)$ такие, что $0 \le \psi_\alpha \le 1$ на M, $\psi_\alpha \equiv 1$ на $\overline{V}_\alpha$ и $\psi_\alpha \equiv 0$ вне W_α .

Положим $\psi(p) = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha$. Очевидно, что $\psi(p) \in C^\infty(M)$ и $\psi(p) > 0$ для любой $p \in M$. Пусть $\varphi_\alpha(p) = \psi_\alpha(p)/\psi(p)$. Тогда $1 = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \varphi_\alpha(p)$, и система функций $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,N}}$ удовлетворяет условиям *Теоремы.* Ч.т.д.

Сисмема функций $\{\varphi_\alpha\}$ называется разбиением единицы, подчинённым покрытию $\{W_\alpha\}$.

Замечание. Теорема доказана для компактных многообразий, но она легко обобщается и на паракомпактные хаусдорфовы многообразия.

Доказанная *Теорема* имеет ряд полезных следствий.

Следствие 1. На любом компактном многообразии существует собственно риманова метрика.

Рассмотрим открытое покрытие $\{W_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,N}}$ областями определения карт τ_α многообразия M. В каждой карте зададим метрику $g_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{ij}$. По определению, положим

$$g_{ij}(p) = \sum_{\alpha=1}^{N} g_{ij}^{(\alpha)} \varphi_\alpha(p),$$

где $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы подчиненное покрытию. Гладкость g_{ij} очевидна. Более того, поскольку $\varphi_\alpha(p) \ge 0$ для любой $p \in M$ и так как пространство собственно римановых метрик образует выпуклый конус (то есть если g_1 и g_2 — две собственно римановых метрики и c,d — положительные числа, то $cg_1 + dg_2$— собственно риманова метрика), то определённая нами метрика является собственно римановой.

Следствие 2. На всяком компактном многообразии существует риманава связность. Это вытекает из *Следствия 1.*

Разбиение единицы используется также при доказательстве ряда важных фактов в теории интегрирования на многообразиях.

Лекция 6

Гладкие отображения гладких многообразий. Упрощение представляющих функций отображений с локально постоянным рангом. Погружение, вложение и субмерсия

1. Гладкие отображения гладких многообразий. Рассмотрим два гладких многообразия $(M^n, \mathscr{A}^{r_1})$ и $(N^m, \mathscr{B}^{r_2})$.

Пусть задано непрерывное отображение $F : M \to N$, $F(p_0) = q_0$. В локальных картах $\tau = (W, \varphi, U), \xi = (\Omega, \psi, V)$, содержащих точки p_0 и q_0 соответственно, и удовлетворяющих условию $F(W) \subset \Omega$, возникает отображение $F^* = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$: $U \to V$, $U \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^m$, $F^*(x_0) = y_0$, $x_0 = \varphi(p_0)$, $y_0 = \psi(q_0)$, называемое представляющим.

Отображение F: $M \to N$ называется гладким класса C^s $(0 \leq s \leq r = \min(\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2))$ в точке $p_0 \in M$, если для любой

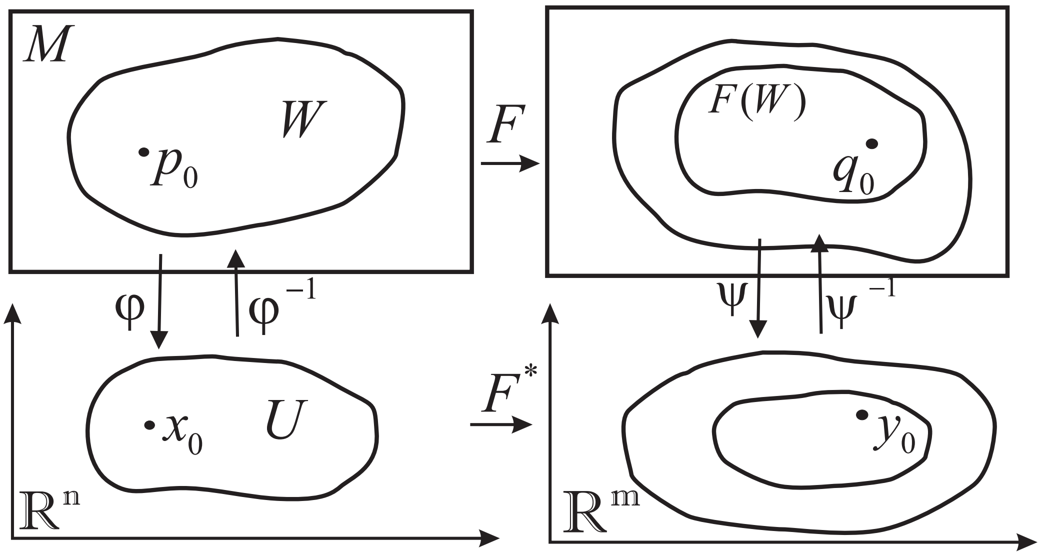


Рис. 1.

пары карт, содержащих точки p_0 и q_0 соответственно, представляющее отображение F^* является отображением класса C^s $(0 \leq s \leq r = \min(\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2))$ в точке $x_0 = \varphi(p_0)$.

Отображение $F : M \to N$ называется гладким класса C^s в области $G \subset M$, если оно является гладким класса C^s в любой точке $p \in G$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 *Если отображение F является гладким класса C^s в точке $p \in M$ в одной паре карт из $\mathscr{A}^{r_1}$ и $\mathscr{B}^{r_2}$, то оно является гладким того же класса в точке p и в любой другой паре карт.*

Доказательство состоит в переходе к новой паре карт и учёте гладкости функций согласования.

Отображение $F : M \to N$ гладких многообразий называется диффеоморфизмом класса C^s, если 1) оно биективно, 2) гладкое класса C^s, 3) обратное отображение $F^{-1} : N \to M$— гладкое класса C^s.

Многообразия M и N диффеоморфны, если существует диффеоморфизм одного на другое.

Теорема 2 *Если M^n и N^n— многообразия класса C^r, и N наделено гладкой структурой, индуцированной гомеоморфизмом F: $M^n \to N^n$, то M и N — C^r-диффеоморфны.*

С точки зрения общей топологии, мы не различаем гомеоморфных пространств. Естественно условиться не различать гомеоморфных многообразий M^n и N^n, где N^n наделено структурой многообразия, индуцированной гомеоморфизмом F: $M^n \to N^n$. Но тогда, согласно *Теореме*, M^n и N^n диффеоморфны.

Нетрудно убедиться, что диффеоморфность многообразий является отношением эквивалентности на множестве всех многообразий.

Вопрос: существует ли гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия? Этот вопрос был решён Дж.Милнором. Он показал, что существуют ровно 28 гладких многообразий ("сферы Милнора", задаваемые в $\mathbb{R}^{10} = \mathbb{C}^5$ уравнениями $z_1^{6k-1} + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0, |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1, k = \overline{1;28}$) гомеоморфных S^7, но не диффеоморфных друг другу. Известно также, что если размерность многообразий меньше 4, то из их гомеоморфности следует диффеоморфность, то есть для таких многообразий топологическая и дифференцируемая классификация совпадают.

2. Ранг гладкого отображения в точке. Рассмотрим два гладких многообразия $(M^n, \mathscr{A}^{r_1})$ и $(N^m, \mathscr{B}^{r_2})$ и пусть F: $M \to N$ — отображение класса C^s $(0 < s \le r = \min(\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2))$.

Выберем точки $p_0 \in M$ и $q_0 = F(p_0) \in N$, принадлежащие областям карт $\tau = (W, \varphi, U) \in \mathscr{A}^{r_1}$ и $\xi = (\Omega, \psi, V) \in \mathscr{B}^{r_2}$ соответственно. Представляющее отображение F^*: $U_{x_0} \to V_{y_0}$, где $x_0 = \varphi(p_0)$, $y = \psi(q_0)$, $F^*(x_0) = y_0$, $U_{x_0} = \varphi(W \cap F^{-1}(\Omega)) \subset \mathbb{R}^n$, $V_{y_0} = \psi(W \cap F(\Omega)) \subset \mathbb{R}^m$, есть отображение класса C^s евклидовых пространств. Для таких отображений вводится понятие матрицы Якоби и её ранга в точке x_0:

$$J_{x_0}(F^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_0}$$

Пусть $\mathrm{rang} J_{x_0}(F^*) = k_0 \le \min(m, n)$.

Рангом отображения F: $M \to N$ в точке p_0 называется ранг матрицы Якоби представляющего отображения F^* в точке $x_0 = \varphi(p_0)$:

$$\mathrm{rang}_{p_0} F = \mathrm{rang} J_{x_0}(F^*).$$

Нетрудно проверить, что определение ранга гладкого отображения в точке корректно, то есть не зависит от выбора карт, покрывающих точки p_0 и q_0.

В силу непрерывности базисного минора матрицы $J_{x_0}(F^*)$ в достаточно малой окрестности точки p_0 имеет место неравенство $\mathrm{rang}_{p_0}F \leq \mathrm{rang}_p F$.

Говорят, что отображение $F : M \to N$ имеет локально постоянный ранг в точке p_0, если существует такая окрестность W_{p_0} точки p_0, что $\mathrm{rang}_{p_0}F = \mathrm{rang}_p F$ для любой $p \in W_{p_0}$.

Когда $\mathrm{rang}_p F = \min(m, n)$ — максимален, точка p называется регулярной точкой отображения F. В случае $\mathrm{rang}_p F < min(m, n)$, точка p— сингулярная точка отображения F.

3. Упрощение представляющих функций гладкого отображения. Рассмотрим гладкое отображение $F : M^n \to N^m$ класса C^{r_1} $(r_1 \leq r_2)$, которое в точке p_0 имеет локально постоянный ранг k_0. Покажем, что за счет выбора подходящих карт на M и N можно максимально упростить представляющее отображение.

Предположим, что в некоторой паре карт, покрывающих точки $p_0 \in M$ и $q_0 = F(p_0) \in N$, представляющее отображение задаётся следующим образом: $y^1 = f^1(x^1, ..., x^n)$, $\dots$, $y^m = f^m(x^1, ..., x^n)$. Считаем, что координаты занумерованы так,что не равный нулю минор порядка k_0 матрицы Якоби расположен в её левом верхнем углу.

Перейдём в новую карту $\tau \to \bar{\tau}$ на M:

$$\bar{x}^1 = f^1(x^1, ..., x^n), \ \dots, \ \bar{x}^{k_0} = f^{k_0}(x^1, ..., x^n),$$
$$\bar{x}^{k_0+1} = x^{k_0+1}, \ \dots, \ \bar{x}^n = x^n.$$

Отображение перехода α: $U_{x_0} \to \bar{U}_{x_0}$ имеет следующую матрицу Якоби:

$$J_{x_0}(\alpha)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k_0}} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k_0+1}} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^{k_0}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^{k_0}}{\partial x^{k_0}} & \frac{\partial f^{k_0}}{\partial x^{k_0+1}} & \dots & \frac{\partial f^{k_0}}{\partial x^n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

причём $\det J_{x_0}(\alpha)\neq 0$. Следовательно, по теореме об обратной функции существует такая окрестность $\hat U_{x_0}\subset U_{x_0}$, что отображение $\hat\alpha=\alpha|_{\hat U_{x_0}}$ будет диффеоморфизмом класса C^{r_1}.

Таким образом, в результате перехода к новой карте на M представляющее отображение $\bar F^*$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &y^1=\bar x^1,\ \dots,\ y^{k_0}=\bar x^{k_0},\\ &y^{k_0+1}=\bar f^{k_0+1}(\bar x^1,...,\bar x^n),\ \dots,\ y^n=\bar f^n(\bar x^1,...,\bar x^n), \end{aligned}$$

с матрицей Якоби

$$J_{\bar x_0}(\overline{F}^*)=\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \bar f^{k_0+1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \bar f^{k_0+1}}{\partial x^{k_0}} & \frac{\partial \bar f^{k_0+1}}{\partial x^{k_0+1}} & \dots & \frac{\partial \bar f^{k_0+1}}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar f^{m}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \bar f^{m}}{\partial x^{k_0}} & \frac{\partial \bar f^{m}}{\partial x^{k_0+1}} & \dots & \frac{\partial \bar f^{m}}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

Поскольку $\mathrm{rang} J_{\bar x_0}(\bar F^*)=k_0$, то $\dfrac{\partial \bar f^i}{\partial \bar x^j}=0$ $(i=\overline{k_0+1,m}; j=\overline{k_0+1,n})$ и $\bar f^i=\bar f^i(\bar x^1,...,\bar x^{k_0})$, $i=\overline{k_0+1,m}$.

Теперь обратимся к многообразию N, на котором выберем новую карту $\xi \to \overline{\xi}$, с отображением перехода $\beta : V_{y_0} \to \overline{V}_{y_0}$, положив $\bar{y}^1 = y^1, \ldots, \bar{y}^{k_0} = y^{k_0}$, $\bar{y}^{k_0+1} = y^{k_0+1} - \bar{f}^{k_0+1}(y^1, ..., y^{k_0})$, $\ldots$, $\bar{y}^m = y^m - \bar{f}^m(y^1, ..., y^{k_0})$. Очевидно,

$$J_{y_0}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{\partial \bar{f}^{k_0+1}}{\partial y^1} & \ldots & -\frac{\partial \bar{f}^{k_0+1}}{\partial y^{k_0}} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial \bar{f}^m}{\partial y^1} & \ldots & -\frac{\partial \bar{f}^m}{\partial y^{k_0}} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

$\det J_{y_0}(\beta) = 1$, поэтому окончательный вид представляющего отображения $\bar{\bar{\bar{F}}}^*$ таков:

$$y^1 = x^1, \quad \ldots, \quad y^{k_0} = x^{k_0}, \quad y^{k_0+1} = 0, \quad \ldots, \quad y^m = 0, \quad (*)$$

где черточки опущены.

Теорема 3 *Если $F : M^n \to N^m$ — гладкое отображение класса $C^{r_1}(r_1 \leq r_2)$ гладких многообразий $(M^n, \mathcal{A}^{r_1})$ и $(N^m, \mathcal{B}^{r_2})$ имеет локально постоянный ранг $k_0 \leq min(n, m)$, то на M и N можно выбрать локальные карты так, что представляющее отображение в них будет иметь вид $(*)$.*

Следствие 1. Если ранг F максимален и $k_0 = m \leq n$, то представляющее отображение записывается следующим образом:

$$y^1 = x^1, \quad \ldots, \quad y^m = x^m.$$

Следствие 2. Если ранг F максимален и $k_0 = n \leq m$, то представляющее отображение имеет вид:

$$y^1 = x^1, \quad \ldots, \quad y^n = x^n, \quad y^{n+1} = 0, \quad \ldots, \quad y^m = 0.$$

4. Некоторые типы гладких отображений. Гладкое отображение $F : M^n \to N^m$ класса C^s $(s \leq \min(r_1, r_2))$ гладких многообразий (M^n, A^{r_1}) и (N^m, B^{r_2}) называется гладким отображением с максимальным глобально постоянным рангом, если $\mathrm{rang}_p F = k$ и $k = \min(n, m)$ в любой точке $p \in M$.

1) Погружение (иммерсия). Если $n \leq m$ и $\mathrm{rang}_p F = n, \forall p \in M$, то отображение F называеться погружением (иммерсией) класса C^s.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^1, N = \mathbb{R}^2$. На M выбирается карта $\tau = (W, \varphi, U)$, где $W = \mathbb{R}^1$, $U = \mathbb{R}^1$, φ: $W \to U$, $\varphi(p) = p$ для любой точки $p \in M$. На N выбирается карта $\xi = (\Omega, \psi, V)$, где $\Omega = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$, $\psi : \Omega \to V$, $\psi(q) = (q)$ для любой точки $q \in N$.

Отображение $F : M \to N$ зададим представляющим отображением $F^* : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ следующим образом. Обозначим локальные координаты на М $x^1 = t$, а на N – $y^1 = x, y^2 = y$. Предположим, что

$$F^* \quad \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$$

Матрица Якоби имеет вид $J_t(F^*) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, причём $\mathrm{rang}_t F =$

$1 = \dim M$ при любом $t \neq 0$. В точке $t = 0$ $\mathrm{rang}_0 F = 0$ (**!**), то есть наше отображение не является погружением.

Пример 2. Выберем в качестве исходных условия *Примера 1*, но видоизменим представляющее отображение:

$$F^* : \quad \begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$$

Матрица Якоби для F^* $J_t(F^*) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix}$ имеет ранг равный 1 при любом $t \in (-\infty, +\infty)$. Это — погружение.

Отметим, что из формулы $y_1 = x_1$, ..., $y_n = x_n$, $y_{n+1} = 0$, ..., $y_m = 0$ следует локальная иньективность погружения.

Любое погружение локально иньективно.

Пример 2 показывает локальную иньективность отображения F, не являющуюся глобальной (точки $t = \pm 1$ имеют один образ).

Рассмотрим иньективное глобальное погружение $F : M \to N$, $F(M) \subset N$, $F_{\text{пр}} : M \to F(M)$ — биекция.

На множестве $F(M)$ можно рассмотреть две топологии: одна переносится отображением F с многообразим , другая индуцируется топологией многообразия N. Эти топологии, вообще говоря, не совпадают.

2. Вложение. Иньективное погружение $F : M \to N$ называется вложением, если отображение $F_{\text{пр}} : M \to F(M)$ есть гомеоморфизм топологического пространства M на топологическое пространство $F(M) \subset N$ с индуцированной топологией.

Пример 3. Выберем исходные данные, как в предыдущих примерах, но представляющее отображение зададим в виде

$$F^* : \quad \begin{cases} x = e^{-bt}\cos at \\ y = e^{-bt}\sin at \end{cases} \quad (a > 0, b > 0).$$

Матрица Якоби

$$J_t(F^*) = \begin{bmatrix} -be^{-bt}\cos at - ae^{-bt}\sin at \\ -be^{-bt}\sin at + ae^{-bt}\cos at \end{bmatrix},$$

$\mathrm{rang} J_t(F^*) = 1$, для любого $t \in (-\infty, +\infty)$.

Это отображение глобально иньективно и в полярных координатах представляет логарифмическую спираль $r = e^{-bt}$. Каждую точку этой кривой можно заключить в некоторую окрестность из $N = \mathbb{R}^2$, так что перенесённая топология совпадает с индуцированной.

Добавим к вышесказанному, что если $F(M)$ замкнуто в $N_{\text{топ}}$, то отображение $F : M \to N$ называется собственным вложением.

3. Субмерсия (наложение). Пусть $n \geq m$. Гладкое отображение $F : M \to N$ класса $C^s (s \leq \min(r_1, r_2))$ называется субмерсией (наложением), если $\mathrm{rang}_p F = m = \dim N$ для любой $p \in M$.

Пример 4. Рассмотрим $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}^1$, карты на которых выбираются аналогично *Примерам 1–3*.

Представляющее отображение зададим так:

$$F^* : z = \operatorname{arctg}(x+y).$$

Матрица Якоби

$$J_t(F^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+(x+y)^2} & \dfrac{1}{1+(x+y)^2} \end{bmatrix}$$

имеет ранг равный 1 для любой точки $p \in M$.

В заключение, приведём без доказательства замечательную *теорему Х. Уитни.*

Теорема 4 *Всякое C^r — многообразие M^n может быть C^r — вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Теореме можно придать другую формулировку: *Всякое многообразие M^n диффеоморфно подмногообразию евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Отсюда следует, что абстрактное понятие многообразия не шире, чем понятие подмногообразия в евклидовых пространствах, и можно было бы ограничиться только их рассмотрением. Однако это не всегда целесообразно. Многие задачи о многообразиях проще решаются без привлечения вложения.

Лекция 7

Подмногообразия гладкого многообразия. Касательный вектор и касательное пространство гладкого многообразия в точке

1. Подмногообразия гладкого многообразия. Подмножество $S \subset M^n$, где $(M^n, \mathscr{A}^r)$ — гладкое многообразие класса C^r, называется гладким подмногообразием размерности k (коразмерности $n-k$), если для любого $p \in S$ на многообразии M существует такая карта $\tau = (W, \varphi, U) \in A^r$, что $\varphi\,(S \cap W)$ есть открытое множество в $R^k \subset R^n$.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что подпространство R^k локально задается уравнениями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$ при выборе стандартного базиса в R^n.

Дифференцируемая структура на S индуцируется структурой объемлющего многообразия. Так картами на S являются тройки $\xi = (\Omega, \psi, V)$, где $\Omega = S \cap W$, $V = \varphi\,(S \cap W)$, $\psi = \varphi\,|_{S \cap W} : \Omega \to V$. Все это можно условно записать так: $\xi = \tau\,|_S$.

Покрыв S картами ξ_β, нетрудно доказать их C^r - согласованность. Совокупность карт $\{\xi_\beta\}_{\beta \in L}$ есть атлас B^r, по которому строится максимальный атлас $\mathscr{B}^r$, так что S становится гладким многообразием $(S, \mathscr{B}^r)$.

Замечание. В литературе можно встретить и такое определение подмногообразия: если множество точек S содержится в многообразии M и включение $i : S \to M$есть дифференцируемое вложение, то S называется гладким подмногообразием многообразия M (здесь S снабжено индуцированной топологией). Иногда при определении подмногообразия требуется лишь, чтобы включение было погружением.

2. Задание подмногообразия с помощью локальных уравнений. Рассмотрим многообразие $(M^n, \mathscr{A}^r)$, содержащее

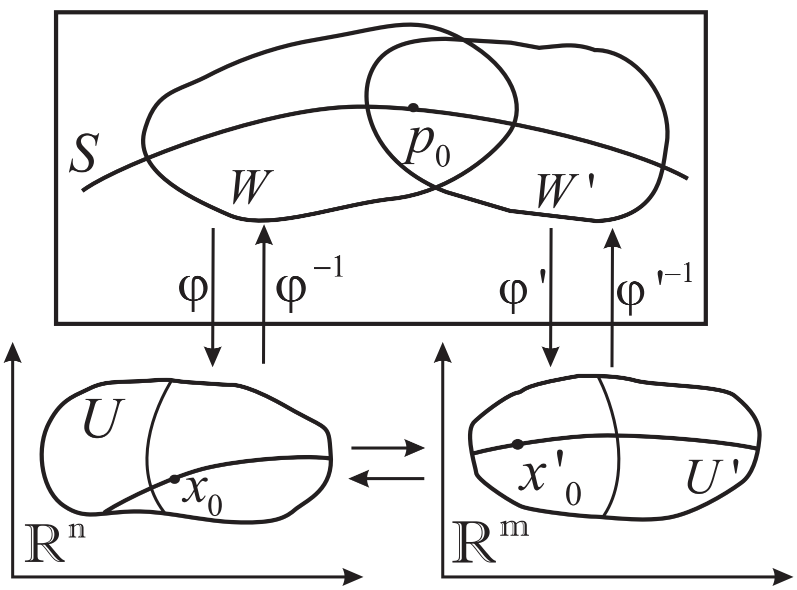


Рис. 1.

подмногообразие S. Пусть точка $p_0 \in S$ лежит в двух картах $\tau = (W, \varphi, U) \in \mathscr{A}^r$ и $\tau' = (W', \varphi', U') \in \mathscr{A}^r$. Отображение перехода $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ в этих картах имеет вид

$$x^1 = f^1(x^{1'}, \dots, x^{n'}), \dots, x^n = f^n(x^{1'}, \dots, x^{n'}).$$

Допустим, что в карте τ, в соответствии с определением, S

задано так:

$$x^{k+1} = \ldots = x^n = 0.$$

Тогда для точки $p_0 \in S$ можно записать:

$$x^1 = f^1(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \ldots, x^k = f^k(x^{1'}, \ldots, x^{n'}),$$

$$0 = f^{k+1}(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \ldots,\ 0 = f^n(x^{1'}, \ldots, x^{n'}).$$

При этом функции $f^{k+1}, \ldots, f^n$ функционально независимы и $\operatorname{rang}\left(\dfrac{\mathrm{D}\,(f^t)}{\mathrm{D}\,(x')}\right) = n - k\ \left(t = \overline{k+1, n}\right)$.

Абстрагируясь от этой конкретной ситуации, можно сказать, что подмногообразие $S \subset M$ размерности k локально может быть задано системой из $n - k$ уравнений с функционально независимыми левыми частями:

$$S^1\,(p) = 0,\ \ \ldots,\ S^{(n-k)}\,(p) = 0\ .$$

Теорема 1 *Для того, чтобы подмножество S гладкого многообразия $(M^n, \mathscr{A}^r)$ $\quad (r \geq 1)$ было гладким подмногообразием класса C^r и коразмерности $l = n - k$, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p \in S$ существовало такое открытое множество $G \subset M$, что*

$$S \cap G = \left\{p \in G\ :\ S^1\,(p) = \ldots = S^l\,(p) = 0\right\},$$

где S^t $(t = \overline{1, n-k})$ — система функций класса C^r и ранга l, определенных на G.

Набор функций S^t $\left(t = \overline{1, n-k}\right)$ называется локальными уравнениями подмногообразия S. Если существует такое открытое множество G, которое содержит S целиком и при этом удовлетворяются все условия *Теоремы*, то $S^t = 0$ $\left(t = \overline{1, n-k}\right)$ называются глобальными уравнениями.

Пример 1. *Пусть* $M = \mathbb{R}^n$, $\tau = (R^n, \varphi, R^n) \in A^\omega$. Зададим функцию $f : M = R^n \to R^1$ следующим образом: для любой точки $p \in R^n$ $f(p) = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - r^2$ $(r > 0)$. Тогда

$$\operatorname{rang}\left(\frac{D(f)}{D(x)}\right) = \begin{cases} 1, & \forall p \subset R^n \backslash \{0\}, \\ 0, & p = 0. \end{cases}$$

Зададим подмножество S так: $S = \{p \in R^n : f(p) = 0\}$. Точка $0 \notin S$, следовательно сфера S^{n-1} является аналитическим подмногообразием многообразия $\mathbb{R}^n$.

Пример 2. Пусть $= R^2, \tau = \left(R^2, \varphi, R^2\right) \in A^\omega$. Рассмотрим функцию $f(p) = (x^1)^2 - (x^2)^2 - r^2$, $r \neq 0$. Ранг матрицы Якоби

$$\operatorname{rang}\left(\frac{D(f)}{D(x)}\right) = \begin{cases} 1, \forall p \in R^2 \backslash \{0\}, \\ 0, p = 0. \end{cases}$$

Точка $p = 0$ не удовлетворяет уравнению $f(p) = 0$, следовательно, подмножество $S = \{p : f(p) = r^2\}$ является аналитическим несвязным многообразием (две ветви гиперболы).

Пример 3. При тех же исходных условиях, рассмотрим функцию $f(p) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. Ранг матрицы Якоби —

$$\operatorname{rang}\left(\frac{D(f)}{D(x)}\right) = \begin{cases} 1, \forall p \in R^2 \backslash \{0\} \\ 0, p = 0 \end{cases}.$$

Точка $p = 0$ удовлетворяет уравнению $f(p) = 0$, поэтому множество точек, удовлетворяющих уравнению $f(p) = 0$, не является подмногообразием. Если же рассмотреть множество

$S = \left\{p : p \in R^2 \backslash \{0\}\right\}$, то уравнение $f(p) = 0$ задает подмногообразие с четырьмя компонентами связности.

3. Касательные векторы и касательное пространство гладкого многообразия. При изучении метрических свойств кривых, поверхностей и областей евклидова пространства важную роль играют инфинитезимальные свойства объектов, то есть такие свойства, которые определяются в очень малой окрестности фиксированной точки путем пренебрежения величинами более высокого порядка малости, чем расстояние до точки.

С подобными ситуациями мы имели дело в математическом анализе.

В теории гладких многообразий также имеют место сюжеты, в которых возникает потребность пренебрежения бесконечно малыми величинами. Это иллюстрируют понятия касательного вектора и касательного пространства.

3.1. Касательный вектор. Пусть M^n- гладкое многообразие класса C^r. Интервал $I = (\alpha, \beta) \in R^1$ также будем рассматривать как гладкое многообразие, покрытое одной картой класса $C^s (s \leq r)$.

Параметризованной кривой класса C^s называется гладкое отображение $g : J \to M$ класса $C^s (0 \leq s \leq r)$.

Будем говорить, что кривая проходит через точку p_0 в "момент" t_0, если $g(t_0) = p_0$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать $t_0 = 0$.

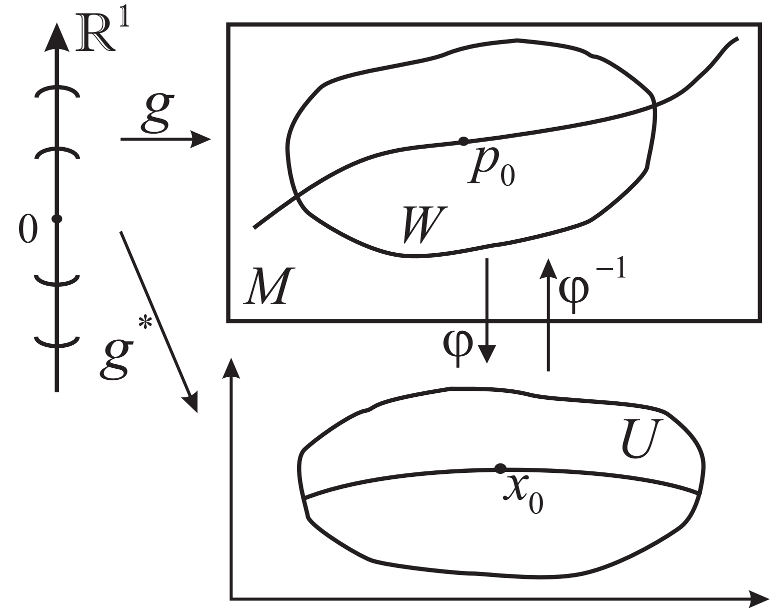


Рис. 2.

Выберем в окрестности точки $p_0 \in M$ карту $\tau = (W, \varphi, U)$. Тогда возникает представляющее отображение $g^* = g \circ \varphi$: $J_W \to U$, где $J_W = g^{-1}(w)$ — открытое множество, так как отображение g^{-1}, как минимум, непрерывно.

Координатные функции $g^{*i} : J_w \to R^1$ $(i = \overline{1, n})$ — функции класса C^s, при написании которых часто символ $*$ опускается: $g^{*i} \equiv g^i, g^i = x^i \circ g$, где $x^i = \varphi^i : W \to R^1$.

Пусть $s \geq 1$. Множество всех кривых класса C^s, проходящих через точку p_0 в "момент" $t_0 = 0$, обозначим символом $\mathscr{K}^s_{p_0}$.

Введем на этом множестве отношение эквивалентности T: кривая g считается эквивалентной кривой h в точке $p_0 = g(0) = h(0)$, если для любой карты $\tau = (W, \varphi, U)$, $p_0 \in W$, имеет место $\left.\dfrac{dg^i}{dt}\right|_0 = \left.\dfrac{dh^i}{dt}\right|_0$.

Нетрудно проверить, что T – истинная эквивалентность (выполнены условия рефлексивности, симметричности и транзитивности).

Класс эквивалентных в точке p_0 кривых называется касательным вектором на многообразии в точке p_0 и обозначается так: $\xi_{p_0} = \{g\}$.

Числа $\xi^i_{x_0} = \left.\dfrac{dg^i}{dt}\right|_{t_0=0}$ называются компонентами (координатами) касательного вектора ξ_{p_0} в данной карте.

Покажем, что эквивалентность кривых в данной точке многообразия не зависит от выбора карты. Для этого рассмотрим переход с карты на карту: $\tau = (W, \varphi, U) \to \tau' = (W', \varphi', U')$, с функциями перехода $f = \varphi' \circ \varphi^{-1} : U \to U'$, или $x^{i'} = f^i(x^\kappa)$ $(i, \kappa = \overline{1, n})$.

Тогда $\left.\dfrac{dg^{i'}}{dt}\right|_0 = \sum\limits_{\kappa=1}^{n} \left.\dfrac{\partial f^i}{\partial x^\kappa}\right|_{x_0} \left.\dfrac{dg^\kappa}{dt}\right|_0$, или $\xi^{i'} = \xi^\kappa A^{i'}_\kappa$, где $A^{i'}_\kappa = \left.\dfrac{\partial x^{i\,\prime}}{\partial x^\kappa}\right|_{x_0}$.

Из равенства $\left.\dfrac{dg^i}{dt}\right|_0 = \left.\dfrac{dh^i}{dt}\right|_0$ следует $\left.\dfrac{dg^{i\,\prime}}{dt}\right|_0 = \left.\dfrac{dh^{i\,\prime}}{dt}\right|_0$, что и доказывает эквивалентность кривых в новой карте. Ч.т.п.

Отметим, что в процессе доказательства мы получили закон преобразования компонент вектора при переходе с карты на карту:

$$\xi^{i'}_{p_0} = A^{i'}_\kappa \xi^\kappa_{p_0} \qquad (i' = \overline{1',\ n'};\ \kappa = \overline{1,\ n}).$$

Здесь $A_{\kappa}^{i'}$ — элементы невырожденной матрицы перехода (матрицы Якоби преобразования координат вектора в точке p_0).

3.2. Касательное пространство. Фактор-множество $\mathscr{K}_p^s/T \stackrel{\text{def}}{=} T_pM$, элементами которого являются классы $\xi_p = \{g\}$ эквивалентных в точке p кривых, называется касательным пространством к многообразию M в точке p.

Введем на T_pM структуру линейного пространства. Фактически любая карта $\tau = (W, \varphi, U) \in A^r$ в окрестности точки p задает отображение $\tau : T_pM \to \mathbb{R}^n$ касательного пространства во множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел, так как каждый вектор ξ_p задается в конкретной карте упорядоченным набором координат: $\tau(\xi_p) = \xi_x^*(\xi^1, ..., \xi^n)$.

Обратно, любому набору чисел $a^*(a^1, ..., a^n) \in \mathbb{R}^n$ можно сопоставить кривую в точке $p:\ \ g^* = \{g^1(t) = a^1 t, ..., g^n(t) = a^n t)$ с касательным вектором $\xi_p = \{g\},\ \xi_p^i = \frac{dg^i}{dt}\Big|_0 = a^i$.

Таким образом, отображение $\tau :\ T_pM \to \mathbb{R}^n$ есть биекция, поэтому линейная структура из $\mathbb{R}^n$ переносится в касательное пространство. При этом

$$\xi_p + \eta_p = \tau^{-1}(\xi_x^* + \eta_x^*) = \tau^{-1}(\tau(\xi_p) + \tau(\eta_p)),$$

$$(\alpha\xi)_p = \tau^{-1}(\alpha\tau(\xi_{p_0}))\ \ \forall\alpha \in R.$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ стандартный базис $e_1^*\ (1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n^*\ (0, \ldots, 0, 1)$. Тогда векторы $\tau^{-1}(e_i^*) = e_{i|p_0}\quad (i = \overline{1, n})$ образуют в $T_{p_0}M$ базис, называемый "натуральным", а разложению $\xi^* = \xi^i e_i^*$ соответствует вектор $\xi_{p_0} = \tau^{-1}(\xi^*) = \xi^i\ e_i\big|_{p_0}$.

Литература

[1] Постников М.М. Гладкие многообразия (семестр III лекций по геометрии). - М.: Наука, 1987.

[2] Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы диффернциальной геометрии и топологии. - М.: Наука, 1987.

[3] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. - М.: Факториал Пресс, 2000.

[4] Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко А.Т. Введение в топологию. - М.: Высшая школа, 1980.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979.

Содержание

Гаврилов Сергей Петрович

Егоров Анатолий Михайлович

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

II. **Теория гладких многообразий**

Учебно-методическое пособие