Казанский государственный университет
им. В.И.Ульянова-Ленина

Физический факультет

А.Б. БАЛАКИН

ВВЕДЕНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКУЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебно - методическое пособие к курсу

Специальная теория относительности

Конспект лекций

Казанский государственный университет
2010

УДК 537.8

Печатается по решению Редакционно - издательского совета
ГОУ ВПО
"Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова - Ленина"
методической комиссии физического факультета
Протокол N 1 от 16 февраля 2010 г.
заседания кафедры теории относительности и гравитации
Протокол N 2 от 12 февраля 2010 г.

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук, проф. ТГГПУ Ю.Г. Игнатьев

А.Б. Балакин
Введение в релятивистскую электродинамику сплошных сред:
Учебно - методическое пособие / А.Б. Балакин. - Казань:
Казанский государственный университет, 2010. - 70 с.

Предназначено для студентов и аспирантов физического факультета
Казанского государственного университета.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Шесть вводных лекций о Релятивистской электродинамике сплошных сред, конспект которых предлагается вниманию читателей, формально входят в программу курса Специальная теория относительности (СТО), предназначенного для студентов физического факультета КГУ. Тематически эти шесть лекций завершают последний раздел курса СТО, который озаглавлен как Релятивистские электродинамические системы и непосредственно следует за лекциям по Релятивистской теории плазмы.

При изучении данного предмета слушатели спецкурса испытывают определенные затруднения с литературой. Дело в том, что имеющиеся в российских библиотеках книги Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [1], Л.И. Седова и А.Г. Цыпкина [2], Л.Т. Чёрного [3], Ж. Можена [4] содержат много полезной информации и конкретных физических сведений из электродинамики сплошных сред, однако, лишь частично затрагивают ковариантные аспекты теории, с которых по замыслу автора должны начинаться вводные лекции по *релятивистской* электродинамике континуума. Монография А.К. Эрингена и Ж.А. Можена [5], на которую в наибольшей степени опирался автор при подготовке лекций, к сожалению, не переведена на русский язык, а её англоязычная версия практически недоступна. Аналогичные проблемы возникают и с недавно изданной монографией Ф.В. Хеля и Ю.Н. Обухова [6]. Поэтому автору показалось разумным изложить математические основы феноменологической релятивистской электродинамики сплошных сред в виде краткого конспекта лекций, сосредоточив особое внимание на *динамических* аспектах теории. Последнее, в частности, означает, что внимание в лекциях сфокусировано на трех моментах. Во-первых, макроскопическая скорость движения электродинамической системы как целого считается произвольной, то есть, все ключевые уравнения, формулировки законов и модельные результаты справедливы для любых скоростей движения системы, в том числе нерелятивистских и ультрарелятивистских. Во-вторых, движение электродинамической системы может характеризоваться наличием ускорения, сдвига, вращения и растяжения поля скорости, и потому важное место в изложении занимает вопрос о том, как неравномерность и неоднородность движения среды сказывается на её электродинамических свойствах. В-третьих, все математические формулировки и утверждения основаны на ковариантном формализме и могут быть использованы как в рамках Общей теории относительности (ОТО), когда неравномерность и неоднородность движения среды вызвана воздействием гравитационного поля (внешнего или собственного), так и в рамках СТО при использовании криволинейных координат, адаптированных к симметрии среды или к заданным граничным условиям.

В последней лекции рассмотрены примеры приложений, причём главное внимание уделено проблеме распространения электромагнитных волн в движущихся средах в приближении геометрической оптики. Исследование иных динамических явлений читатель сможет найти в замечательных книгах [1, 4]. Терминология и обозначения унаследованы из работы [7].

ЛЕКЦИЯ I
НАПРЯЖЁННОСТЬ И ИНДУКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В основу электродинамики заложен постулат о том, что уравнения, описывающие электромагнитное поле в *вакууме*, не должны содержать скорости движения наблюдателя. В релятивистской электродинамике *сплошных сред* (continuum electrodynamics) движение самого континуума, как сложной иерархически устроенной многочастичной системы, становится принципиально важным фактором теории, а четыре-вектор макроскопической скорости движения среды приобретает статус одного из ключевых элементов в электродинамических уравнениях. Для того, чтобы понять, какая часть электродинамики сплошных сред формулируется без использования макроскопической скорости движения среды, а в какой её части эта скорость принципиально необходима, мы начнём изложение с понятия напряжённости электромагнитного поля.

1.1. Потенциал и напряжённость электромагнитного поля: тензорные объекты, не связанные с макроскопической скоростью

При изложении материала мы предполагаем, что читатель знаком с основами тензорного анализа и теорией римановых многообразий. В дальнейшем мы имеем дело с пространственно - временным многообразием, наделённым метрикой g_{ik} и симметричной связностью $\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$, которая согласована с метрикой, то есть, подчиняется условию $\nabla_m g_{ik} = 0$, где ∇_m - ковариантная производная. Помимо двух-индексного тензора Кронекера (Kronecker) δ^i_k мы используем обобщенные (четырёх- и шести-индексные) тензоры Кронекера

$$\delta^{mn}_{ik} \equiv \delta^m_i \delta^n_k - \delta^m_k \delta^n_i \,, \quad \delta^{ikl}_{mns} \equiv \delta^i_m \delta^{kl}_{ns} + \delta^i_n \delta^{kl}_{sm} + \delta^i_s \delta^{kl}_{mn} \,. \tag{1}$$

Все эти геометрические объекты являются ковариантно постоянными, то есть, удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$\nabla_j \delta^m_k = 0 \,, \quad \nabla_j \delta^{mn}_{ik} = 0 \,, \quad \nabla_j \delta^{ikl}_{mns} = 0 \,. \tag{2}$$

Другим геометрическим объектом, важным для дальнейшего изложения, является абсолютно антисимметричный ковариантно постоянный тензор Леви-Чивита, обычно представляемый в контравариантной

$$\epsilon^{ikmn} \equiv \frac{E^{ikmn}}{\sqrt{-g}} \,, \quad \nabla_j \epsilon^{ikmn} = 0 \tag{3}$$

и ковариантной

$$\epsilon_{ikmn} \equiv \sqrt{-g} E_{ikmn} \,, \quad \nabla_j \epsilon_{ikmn} = 0 \tag{4}$$

тензорной записи. g - это определитель метрического тензора; абсолютно антисимметричный символ Леви-Чивита E^{ikmn} принимает значения $+1$, 0 и -1 согласно базовым определениям $E^{0123} = 1 = -E_{0123}$. Полезно иметь в виду следующие соотношения, связывающие тензоры Леви-Чивита и Кронекера:

$$-\epsilon^{ikpq}\epsilon_{mnjq}{=}\delta^{ikp}_{mnj} \,, \quad -\frac{1}{2!}\epsilon^{ikpq}\epsilon_{mnpq}{=}\delta^{ik}_{mn} \,, \quad -\frac{1}{3!}\epsilon^{ikpq}\epsilon_{mkpq}{=}\delta^{i}_{m} \,. \tag{5}$$

Потенциал электромагнитного поля описывается четырёхмерным ковектором A_k, а напряжённость электромагнитного поля - тензором Максвелла F_{ik}:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \,, \tag{6}$$

- антисимметризованной производной этого потенциала. Как и в случае вакуумной электродинамики, величина F_{ik} калибровочно инвариантна: в силу антисимметричности конструкции F_{ik} (6) она не изменится, если к потенциалу A_i добавить четыре-градиент некоторого скаляра

$$A^{'}_i = A_i + \frac{\partial}{\partial x^i}\Psi \quad \to \quad F^{'}_{ik} = F_{ik} \,. \tag{7}$$

В вакуумной электродинамике свободу выбора скаляра Ψ используют, вводя калибровочное условие Лоренца

$$\nabla_k A^k = 0 \,. \tag{8}$$

В электродинамике движущихся сплошных сред вводятся альтернативные калибровочные условия, например, обобщенные калибровки Ландау и Кулона, - они обсуждаются в последней лекции.

С помощью тензора Леви-Чивита определяется операция дуализации. Например, тензор, дуальный тензору Максвелла, определяется следующим образом:

$$F^*_{ik} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ikmn}F^{mn}\,, \tag{9}$$

причём в силу второго из соотношений (5) дважды дуальный тензор Максвелла равен F_{ik} с противоположным знаком

$$F_{ik} = -\left(F^*_{ik}\right)^*\,. \tag{10}$$

Тензор Максвелла и дуальный ему тензор

$$F_{ik} = \delta^{mn}_{ik}\ \nabla_m A_n\,, \quad F^{*ik} = \epsilon^{ikmn}\nabla_m A_n \tag{11}$$

выглядят весьма симметрично, если их выразить через производные от потенциала с помощью тензора Кронекера и Леви-Чивита.

1.2. Потенциал и напряжённость электромагнитного поля: тензорные объекты, ассоциированные с макроскопической скоростью

Четырёхмерные векторы электрического поля E^i и магнитной индукции B^i определены с помощью свёрток с четыре-вектором макроскопической скорости среды U^k, нормированным на единицу:

$$E_i \equiv F_{ik}U^k\,, \quad B_i \equiv F^*_{ik}U^k\,, \quad g_{ik}U^iU^k{=}1\,. \tag{12}$$

Эти четыре-векторы ортогональны скорости в силу антисимметричности тензора Максвелла и дуального ему тензора:

$$E_iU^i = 0 = B_iU^i\,. \tag{13}$$

С помощью четыре-векторов E_i, B_i и U^i тензор Максвелла и дуальный ему однозначно реконструируются

$$F_{ik} = \delta^{mn}_{ik}E_mU_n - \epsilon_{ikmn}B^mU^n\,, \tag{14}$$

$$F^*_{ik} = \delta^{mn}_{ik}B_mU_n + \epsilon_{ikmn}E^mU^n\,. \tag{15}$$

В качестве альтернативы тензорам Леви-Чивита и Кронекера, которые являются геометрическими объектами и не зависят от скорости среды, часто используется пара трёхиндексных тензоров. Первый из них

$$\eta_{ikm} \equiv \epsilon_{ikmn} U^n \quad (\eta_{ikm} U^m = 0) \tag{16}$$

ортогонален четыре-вектору скорости и служит для введения аналога трёхмерного векторного произведения. Второй вспомогательный тензор

$$\zeta_i^{mn} \equiv \delta_{ij}^{mn} U^j \tag{17}$$

обладает следующими свойствами:

$$\zeta_i^{mn} U^i = 0 \,, \quad \zeta_i^{mn} U_n = \Delta_i^m \,, \quad \zeta_m^{mn} = 3U^n \,. \tag{18}$$

Тензор Δ_i^m, определенный по правилу

$$\Delta_i^m = \delta_i^m - U^m U_i \,, \tag{19}$$

называется проектором, поскольку подчиняется требованиям

$$\Delta^{ik} = \Delta^{ki} \,, \quad \Delta^{ik} U_k = 0 \,, \quad \Delta^{ik} \Delta_{jk} = \Delta_j^i \,, \quad \Delta_k^k = 3 \,. \tag{20}$$

Для этих тензоров соотношения (5) дают следующие тождества

$$-\eta^{ikp}\eta_{mnp} = \Delta_m^i \Delta_n^k - \Delta_n^i \Delta_m^k \,, \ -\frac{1}{2}\eta^{ikl}\eta_{mkl} = \Delta_m^i \,, \ \eta_{imn}\zeta_k^{mn} = 0 \,, \tag{21}$$

а тензор Максвелла и дуальный ему тензор принимают максимально компактный и симметричный вид

$$F_{ik} = \zeta_{ik}^m E_m - \eta_{ikm} B^m \,, \quad F_{ik}^* = \zeta_{ik}^m B_m + \eta_{ikm} E^m \,. \tag{22}$$

Ковариантную производную ∇_k, как любой четыре-ковектор, можно разложить на продольную и поперечную составляющие по отношению к четыре-вектору скорости U^i:

$$\nabla_k \equiv U_k \mathcal{D} + \overset{\perp}{\nabla}_k \,, \quad \mathcal{D} \equiv U^m \nabla_m \,, \quad \overset{\perp}{\nabla}_k \equiv \Delta_k^m \nabla_m \,. \tag{23}$$

Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ называется конвективной производной, а $\overset{\perp}{\nabla}_k$ - пространственным градиентом. Такие названия обусловлены следующим фактом: если среда покоится, то $c\mathcal{D}$ совпадает с частной производной по времени, а $\overset{\perp}{\nabla}_k$ сводится к трёхмерному градиенту. Ковариантную производную четыре - вектора скорости можно разложить на неприводимые составляющие:

$$\nabla_i U_k = U_i \mathcal{D} U_k + \overset{\perp}{\nabla}_i U_k = U_i \mathcal{D} U_k + \sigma_{ik} + \omega_{ik} + \frac{1}{3}\Delta_{ik}\Theta \,. \tag{24}$$

Здесь $\mathcal{D}U_k$ - четыре-вектор ускорения, σ_{ik} - симметричный бесследовый тензор сдвига, определенный соотношением

$$\sigma_{ik} \equiv \frac{1}{2}[\overset{\perp}{\nabla}_i U_k + \overset{\perp}{\nabla}_k U_i] - \frac{1}{3}\Delta_{ik}[\nabla_l U^l] \,, \tag{25}$$

ω_{ik} - антисимметричный тензор вращения

$$\omega_{ik} \equiv \frac{1}{2}[\overset{\perp}{\nabla}_i U_k - \overset{\perp}{\nabla}_k U_i] \,, \tag{26}$$

а Θ - скаляр растяжения

$$\Theta \equiv \nabla_l U^l = \overset{\perp}{\nabla}_l U^l \,. \tag{27}$$

Пространственно-подобный четыре-вектор

$$\omega^p \equiv -\eta^{pik}\ \omega_{ik} = -\eta^{pik}\ \overset{\perp}{\nabla}_i U_k \tag{28}$$

ассоциируется с частотой вращения среды, а некоторые из авторов употребляют термин вихрь скорости для обозначения этой векторной величины. Такая терминология основана на том, что в трехмерных обозначениях эта величина $\vec{\omega} = [\vec{\nabla}, \vec{U}]$ пропорциональна ротору (вихрю) скорости. Если движение среды неравномерно или неоднородно, перечисленные выше величины вносят динамический вклад в полевые уравнения электромагнетизма.

1.3. Первая подсистема уравнений электродинамики в движущейся среде

Если частные производные второго порядка потенциала A_k существуют и непрерывны, то согласно (6) выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial x^l}F_{ik} + \frac{\partial}{\partial x^i}F_{kl} + \frac{\partial}{\partial x^k}F_{li} = 0 \,, \tag{29}$$

которое может быть записано в альтернативном ковариантном виде с одним свободным индексом

$$\nabla_k F^{*ik} = 0\,. \tag{30}$$

Убедиться в справедливости последнего можно по следующей схеме: вычислим ковариантную дивергенцию дуального тензора F^{*ik} в форме (11), принимая во внимание свойство (3) тензора Леви - Чивита, свойство коммутатора ковариантных производных

$$(\nabla_k \nabla_m - \nabla_m \nabla_k) A_n = -R^s{}_{nkm} A_s\,, \tag{31}$$

а также алгебраическое свойство тензора Римана $R^s{}_{kmn}$:

$$R^s{}_{nkm} + R^s{}_{mnk} + R^s{}_{kmn} = 0\,. \tag{32}$$

В результате вычислений получим

$$\nabla_k F^{*ik} = \nabla_k \left[\epsilon^{ikmn} \nabla_m A_n\right] = \epsilon^{ikmn} \nabla_k \nabla_m A_n =$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon^{ikmn} R^s{}_{nkm} A_s = -\frac{1}{6} \epsilon^{ikmn} A_s \left[R^s{}_{nkm} + R^s{}_{mnk} + R^s{}_{kmn}\right] = 0. \tag{33}$$

Соотношение (30) представляет собой тождество, если мы рассматриваем его в терминах четыре-вектора потенциала A_k. Однако, будучи представлено в терминах компонент тензора напряжённости F_{mn} или с помощью четыре-векторов электрического поля E^i и магнитной индукции B^k, соотношение (30) предстает перед нами как первая подсистема уравнений Максвелла, которая также допускает разбиение на две подсистемы с помощью проектирования на направление U^i и на ортогональную ему гиперповерхность. Рассмотрим эти уравнения более подробно.

1.3.1. Закон сохранения магнитного потока в движущейся среде

Подставим (15) в (30), свернем полученное уравнение с U_i и представим результат в виде

$$\overset{\perp}{\nabla}_k B^k = \eta^{kmn} E_k \overset{\perp}{\nabla}_m U_n \quad \rightarrow \quad \overset{\perp}{\nabla}_k B^k = -\omega^k E_k\,. \tag{34}$$

Если среда неподвижна, то это уравнение сводится к известному трёхмерному закону сохранения магнитного потока

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0\,. \tag{35}$$

Если среда движется неоднородно, то ненулевой тензор вращения поля скорости ω_{mn} при наличии электрического поля E_k становится источником магнитного потока, регистрируемого прибором, движущимся вместе со средой.

1.3.2. Закон Фарадея в движущейся среде

Если подставить (15) в (30) и свернуть полученное уравнение с проектором, то получим уравнение

$$\mathcal{D}B^i + \eta^{ikm}\overset{\perp}{\nabla}_k E_m =$$
$$2\Delta^i_j E_m \omega^{*jm} - U^i B_k \mathcal{D}U^k + \sigma^{ik}B_k - \omega^{ik}B_k - \frac{2}{3}\Theta B^i\,. \tag{36}$$

Если учесть тот факт, что в неподвижной среде тензор η^{ikm} превращается в трёхиндексный символ Леви-Чивита и определяет векторное произведение в трёхмерном пространстве, а конвективная производная $\mathcal{D}$ сводится к частной производной по времени, очевидно, что классическим аналогом этого уравнения является закон Фарадея

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\vec{E} = 0\,. \tag{37}$$

При движении среды изменение магнитной индукции со временем, регистрируемое прибором, перемещающимся вместе со средой, может быть вызвано ускорением среды, сдвигом и растяжением поля скорости, а также вращением поля скорости при наличии электрического поля.

1.4. Индукция электромагнитного поля в движущейся среде

Для феноменологического описания электромагнитного поля в среде наряду с тензором напряжённости F_{ik} вводится тензор индукции H^{ik}, который антисимметричен, как и тензор Максвелла. В феноменологической электродинамике постулируется, что тензор H^{ik} удовлетворяет уравнению

$$\nabla_k H^{ik} = -\frac{4\pi}{c} I^i \,. \tag{38}$$

Четыре-вектор электрического тока I^i, как и любой вектор, может быть разложен на продольную и поперечную составляющие по отношению к четыре-вектору скорости:

$$I^i = \rho c U^i + J^i \,, \quad \rho \equiv \frac{1}{c} I^i U_i \,, \quad J^i \equiv \Delta^i_k I^k \,, \tag{39}$$

где ρ - это объёмная плотность заряда, а J^i - трёхмерная часть электрического тока.

С помощью тензора индукции по аналогии с формулами (12) определяются четыре-векторы электрической индукции D^i и магнитного поля H^i:

$$D^i \equiv H^{ik} U_k \,, \quad H_i \equiv H^*_{ik} U^k \,. \tag{40}$$

D^i и H^i также ортогональны скорости U^i, а сам тензор индукции и дуальный ему однозначно представляются разложениями

$$H^{ik} = \zeta^{ik}_m D^m - \eta^{ikm} H_m \,, \tag{41}$$

$$H^{*ik} = \zeta^{ik}_m H^m + \eta^{ikm} D_m \,. \tag{42}$$

Аналогично тому, как из уравнения (30) были выведены закон сохранения магнитного потока (34) и закон Фарадея (36) в движущейся среде, получим законы Гаусса и Ампера из уравнения (38).

1.4.1. Закон Гаусса в движущейся среде

Если подставить разложение (41) в уравнения (38) и вычислить проекцию на направление U_i, получим скалярное уравнение

$$\overset{\perp}{\nabla}_k D^k = 4\pi\rho - \eta^{kmn} H_k \overset{\perp}{\nabla}_m U_n \quad \to \quad \overset{\perp}{\nabla}_k D^k = 4\pi\rho + \omega^k H_k \,. \tag{43}$$

Если среда неподвижна, то в трёхмерных обозначениях это уравнение сводится к закону Гаусса

$$\mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho \,. \tag{44}$$

При наличии магнитного поля H^k ненулевой тензор вращения поля скорости ω_{mn} создает источник электрической индукции, эквивалентный заряду, наведённому неоднородностью движения.

1.4.2. Закон Ампера в движущейся среде

Закон Ампера получается аналогично закону Фарадея (36), если использовать уравнение (38) вместо (30):

$$\mathcal{D}D^i - \eta^{ikm}\overset{\perp}{\nabla}_k H_m =$$
$$-2\Delta^i_j H_m \omega^{*jm} - U^i D_k \mathcal{D}U^k + \sigma^{ik}D_k - \omega^{ik}D_k - \frac{2}{3}\Theta D^i - \frac{4\pi}{c}\Delta^i_j I^j \,. \qquad (45)$$

Если среда неподвижна, то в трёхмерной записи эти уравнения сводятся к закону Ампера

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \mathrm{rot}\vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \,. \qquad (46)$$

В движущейся среде изменение электрической индукции со временем может быть вызвано ускорением среды, сдвигом и растяжением поля скорости, а также вращением поля скорости при наличии магнитного поля.

1.4.3. Закон сохранения электрического заряда

Любой антисимметричный тензор $Q^{ik} = -Q^{ki}$ удовлетворяют дифференциальному тождеству

$$\nabla_i \nabla_k Q^{ik} = 0 \,. \qquad (47)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить следующую цепочку равенств, основанную на свойстве (31) тензора Римана и симметричности тензора Риччи:

$$\nabla_i \nabla_k Q^{ik} = \frac{1}{2}\left[\nabla_i \nabla_k - \nabla_k \nabla_i\right] Q^{ik} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[R^i{}_{sik} Q^{sk} + R^k{}_{sik} Q^{is}\right] = R_{sk} Q^{sk} = 0 \,. \qquad (48)$$

Применив тождество (47) к случаю, когда $Q^{ik} = H^{ik}$, получим, что уравнения (38) непротиворечивы, если выполняется закон

$$\nabla_k I^k = 0 \,. \qquad (49)$$

Кроме того, два тождества, получающихся из (47) при $Q^{ik} = H^{ik}$ и $Q^{ik} = F^{*ik}$, сигнализируют о том, что из восьми уравнений (34), (36), (43), (45) только шесть являются независимыми, остальные два могут быть представлены как следствия этих шести. С учётом представления (39) закон (49) можно переписать в виде уравнения баланса

$$c\mathcal{D}\rho + \overset{\perp}{\nabla}_k J^k = J^k \mathcal{D} U_k - c\rho\Theta \,, \tag{50}$$

которое в трёхмерной символике для неподвижной среды выглядит как стандартное уравнение сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{J} = 0 \,. \tag{51}$$

Если среда движется с ускорением или поле скорости обладает ненулевым растяжением, то при наличии тока и/или ненулевой плотности объёмного заряда в уравнении баланса заряда появляется источник.

ЛЕКЦИЯ II
МАТЕРИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Феноменологическая электродинамика сплошных сред базируется на шести независимых дифференциальных уравнениях первого порядка, которые связывают двенадцать искомых функций. В качестве последних могут выступать шесть независимых компонент антисимметричного тензора F_{ik} и шесть компонент тензора H^{ik}. В качестве альтернативы можно использовать по три независимые компоненты пространственно - подобных четыре-векторов E^k, B^k, D^k и H^k (одна из компонент каждого такого четыре-вектора может быть выражена через три независимые в силу его ортогональности четыре-вектору скорости движения среды). В любом случае для того, чтобы феноменологическая электродинамика оказалась самосогласованной теорией, необходимо сформулировать шесть дополнительных условий, связывающих указанные двенадцать искомых величин. В русскоязычной литературе эти условия получили название *материальные* соотношения (уравнения), в англоязычной литературе для этих соотношений используется термин constitutive equations. Материальные соотношения в феноменологической электродинамике призваны связать индукцию и напряжённость поля, причём соотношения $H^{ik} = H^{ik}(F_{mn})$, какими бы они ни были: функциональными или интегро - дифференциальными, - в силу симметрии содержат как раз шесть недостающих уравнений связи.

2.1. Материальные соотношения в линейной электродинамике

В основе простейшей релятивистской версии линейной электродинамики сплошных сред, которая не учитывает реологических свойств среды, свойств памяти и запаздывания отклика, лежит предположение о том, что тензор индукции H^{ik} связан с тензором Максвелла F_{mn} линейным соотношением

$$H^{ik} = \mathcal{H}^{ik} + \mathcal{C}^{ikmn} F_{mn} \,. \tag{52}$$

Тензор $\mathcal{H}^{ik}$ не зависит от напряжённости электромагнитного поля, но может представлять собой функцию температуры среды T и её градиента, Паскалевского давления P, тензора напряжений Π_{ik}, макроскопической скорости движения среды U^i и её производных $\nabla_i U_k$. Этот тензор принято называть тензором спонтанной поляризации - намагниченности, поскольку в формировании индукции данного типа не принимает участие электромагнитное поле.

Материальный тензор $\mathcal{C}^{ikmn}$ отвечает за явления, линейные по напряжённости электромагнитного поля, поэтому у него имеется альтернативное название - тензор линейного отклика среды. Этот четырёхиндексный тензор антисимметричен при перестановке индексов в первой и второй парах и потому может быть алгебраически представлен матрицей $\mathcal{C}^{AB}$, в которой обобщенные индексы A и B принимают шесть значений $01, 02, 03, 12, 13, 23$. Как всякая матрица, $\mathcal{C}^{AB}$ может быть разложена на симметричную и антисимметричную часть, поэтому широко используется следующее представление материального тензора

$$\mathcal{C}^{ikmn} = C^{ikmn} + S^{ikmn} \,. \tag{53}$$

Первая часть разложения симметрична по перестановке пар индексов

$$C^{AB} = C^{BA} \quad \rightarrow \quad C^{ikmn} = C^{mnik} \,, \tag{54}$$

она содержит 21 независимую компоненту из полного числа 36. Вторая часть разложения (53) антисимметрична по перестановке пар индексов

$$S^{AB} = -S^{BA} \quad \rightarrow \quad S^{ikmn} = -S^{mnik} \,, \tag{55}$$

имеет 15 независимых компонент и называется скьюонной (skewon) составляющей материального тензора. В завершении разложения в материальном тензоре $\mathcal{C}^{ikmn}$ следует выделить абсолютно антисимметричную или аксионную (axion) часть $\phi\epsilon^{ikmn}$, пропорциональную тензору Леви-Чивита. Псевдоскалярная величина ϕ, определенная по правилу

$$\phi \equiv -\frac{1}{4!}\epsilon_{ikmn}\mathcal{C}^{ikmn} = -\frac{1}{4!}\epsilon_{ikmn}C^{ikmn} \,, \tag{56}$$

очевидно, не содержит скьюоных компонент материального тензора. Последняя часть разложения материального тензора

$$\tilde{C}^{ikmn} \equiv C^{ikmn} - \phi\epsilon^{ikmn} \,, \tag{57}$$

которую принято называть бесследовой в силу соотношения

$$\epsilon_{ikmn}\tilde{C}^{ikmn} = 0\,, \tag{58}$$

содержит 20 независимых компонент. Неприводимое представление тензора линейного отклика выглядит следующим образом

$$\mathcal{C}^{ikmn} = \tilde{C}^{ikmn} + S^{imnk} + \phi\epsilon^{ikmn}\,. \tag{59}$$

Мы начнём анализ материальных соотношений (52) с изучения алгебраических свойств компонент тензора линейного отклика.

2.1.1. Алгебраическое разложение тензора C^{ikmn}

Симметрия материального тензора C^{ikmn} предсказывает, что его алгебраическое разложение удобно провести с помощью антисимметричных объектов η^{mnq} (16) и ζ^{ik}_p (17). Нам понадобятся для такого разложения тройка пространственно - подобных тензоров, первые два из которых: ε^{pq} и $(\mu^{-1})_{pq}$, - симметричны, а третий: ${\nu_p}^q$, - вообще говоря, несимметричен, причём каждый из этих тензоров ортогонален четыре-вектору скорости:

$$\varepsilon^{im}U_m = 0\,, \quad (\mu^{-1})_{pq}U^q = 0\,, \quad {\nu_p}^m U_m{=}0{=}{\nu_p}^m U^p\,. \tag{60}$$

Тензор линейного отклика представляется следующим образом:

$$2C^{ikmn} = \zeta^{ik}_p\varepsilon^{pq}\zeta^{mn}_q{-}\eta^{ikp}(\mu^{-1})_{pq}\eta^{mnq}{-}\left[\eta^{ikp}\zeta^{mn}_q{+}\zeta^{ik}_q\eta^{mnp}\right]{\nu_p}^q\,. \tag{61}$$

Это разложение непосредственно учитывает антисимметричность тензора C^{ikmn} по перестановке индексов ik и mn, а также симметричность по перестановке пар указанных индексов. Таким образом, для представления 21 компоненты материального тензора C^{ikmn} оказалось достаточным ввести два симметричных тензора (ε^{im} и $(\mu^{-1})_{pq}$), каждый из которых имеет по шесть независимых компонент, и один несимметричный материальный тензор ${\nu_p}^q$, характеризующийся девятью независимыми компонентами.

Очевидно, что три тензора, введенные выше, могут быть получены с помощью следующих проекционных соотношений:

$$\varepsilon^{im} = 2U_kC^{ikmn}U_n\,, \quad \varepsilon^{im} = \varepsilon^{mi}\,, \tag{62}$$

$$(\mu^{-1})_{pq} = -\frac{1}{2}\eta_{pik}C^{ikmn}\eta_{mnq}\,, \quad (\mu^{-1})_{pq} = (\mu^{-1})_{qp}\,, \tag{63}$$

$$\nu_p{}^m = \eta_{pik}\, C^{ikmn}U_n = U_n\, C^{mnik}\eta_{pik}\,. \tag{64}$$

Для того, чтобы придать физический смысл пространственно - подобным материальным тензорам ε^{im}, $(\mu^{-1})_{pq}$ и $\nu_p{}^m$, достаточно выразить четыре-векторы D^i и H^i через E^i и B^i. Чтобы добиться этого, подставим разложение (61) в (52) и, считая, что $\mathcal{H}^{ik} = 0$ и $S^{ikmn} = 0$, вычислим искомые векторы по формулам (40):

$$D^i = \varepsilon^{ik}E_k - \nu_k{}^i\, B^k\,, \tag{65}$$

$$H_i = (\mu^{-1})_{ik}\, B^k + \nu_i{}^k\, E_k\,. \tag{66}$$

Подобные соотношения хорошо известны в классической электродинамике сплошных сред, поэтому тензор ε^{ik} следует считать четырёхмерным аналогом тензора диэлектрической проницаемости среды, тензор $(\mu^{-1})_{ik}$ характеризует магнитную непроницаемость среды. Объект $\nu_i{}^k$ называется тензором магнитоэлектрических коэффициентов, или тензором кросс-эффектов: если он отличен от нуля, то электрическое поле в среде порождает магнитное поле, а магнитная индукция порождает электрическую индукцию [6].

2.1.2. Алгебраическое разложение тензора S^{ikmn}

Скьюонная часть тензора линейного отклика среды также может быть представлена разложением, основанным на использовании тензоров η^{mnq} и ζ^{ik}_p, однако, теперь следует учесть, что данный тензор антисимметричен по отношению к перестановке пар индексов ik и mn. Разложение имеет вид

$$2S^{ikmn} = \zeta^{ik}_p\, \mathcal{U}^{pq}\, \zeta^{mn}_q - \eta^{ikp}\, \mathcal{W}_{pq}\, \eta^{mnq} - \left[\eta^{ikp}\zeta^{mn}_q - \zeta^{ik}_q\eta^{mnp}\right] \mathcal{R}_p{}^q\,. \tag{67}$$

Тензоры $\mathcal{U}^{ik}$ и $\mathcal{W}^{ik}$ антисимметричны, ортогональны U_k:

$$\mathcal{U}^{im} = 2U_k\, S^{ikmn}U_n\,, \quad \mathcal{U}^{im} = -\mathcal{U}^{mi}\,, \quad \mathcal{U}^{ik}U_k = 0\,, \tag{68}$$

$$\mathcal{W}_{pq} = -\frac{1}{2}\eta_{pik}\, S^{ikmn}\eta_{mnq}\,, \quad \mathcal{W}_{pq} = -\mathcal{W}_{qp}\,, \quad \mathcal{W}_{pq}U^p = 0\,, \tag{69}$$

а потому имеют по три независимые компоненты. Тензор $\mathcal{R}_p{}^m$ несимметричен, ортогонален U_m:

$$\mathcal{R}_p{}^m{=}\eta_{pik}S^{ikmn}U_n{=}{-}U_nS^{mnik}\eta_{pik}\,, \quad \mathcal{R}_p{}^mU_m{=}0{=}\mathcal{R}_p{}^mU^p\,, \tag{70}$$

а потому имеет девять независимых компонент. При наличии ненулевой скьюонной части в тензоре линейного отклика соотношения, связывающие четыре-векторы D^i и H^i с E^k и B^k:

$$D^i = \left[\varepsilon^{ik} + \mathcal{U}^{ik}\right] E_k + \left[-\nu_k{}^i + \mathcal{R}_k{}^i\right] B^k\,, \tag{71}$$

$$H_i = \left[(\mu^{-1})_{ik} + \mathcal{W}_{ik}\right] B^k + \left[\nu_i{}^k + \mathcal{R}_i{}^k\right] E_k\,, \tag{72}$$

обобщают материальные уравнения (65), (66).

2.1.3. Аксионная часть тензора линейного отклика

Третья часть разложения (59) представляет собой абсолютно антисимметричную часть тензора линейного отклика. С помощью формулы (56) легко обнаружить, что псевдоскаляр ϕ, отвечающий за аксионную часть тензора $\mathcal{C}^{ikmn}$

$$\phi \equiv -\frac{1}{4!}\epsilon_{ikmn}\mathcal{C}^{ikmn} = -\frac{1}{3!}\nu_k{}^k\,, \tag{73}$$

сводится к следу тензора магнитоэлектрических коэффициентов. Таким образом, отсутствие аксионо-подобных взаимодействий в среде характеризуется соотношением $\nu_k{}^k = 0$, которое называется условием Поста [6].

2.2. Тензор восприимчивости

Тензор поляризации-намагниченности M^{ik} вводится как разность тензора индукции и тензора напряжённости

$$M^{ik} \equiv H^{ik} - F^{ik}\,. \tag{74}$$

Этот тензор обладает той же симметрией при перестановке индексов, что и тензор Максвелла. Разложение тензора поляризации-намагниченности M^{ik} и дуального ему тензора M^{*ik}

$$M^{ik} = \zeta^{ik}_m P^m - \eta^{ikm}M_m\,, \tag{75}$$

$$M^{*ik} = \zeta^{ik}_m M^m + \eta^{ikm} P_m \tag{76}$$

вовлекает в рассмотрение четыре-векторы электрической поляризации P^k и намагниченности M^k, определенные соотношениями

$$P^i \equiv M^{ik} U_k \,, \quad M^i \equiv M^{*ik} U_k \tag{77}$$

по аналогии с четыре-векторами электрического поля и магнитной индукции.

Термин *восприимчивость* употребляется в том случае, когда необходимо связать тензор поляризации - намагниченности M^{ik} и тензор Максвелла F_{mn}. Если речь идет о линейной электродинамике сплошных сред, то

$$M^{ik} = \mathcal{H}^{ik} + \chi^{ikmn} F_{mn} \,, \tag{78}$$

и согласно определению (74) тензор восприимчивости χ^{ikmn} находится как разность

$$\chi^{ikmn} = \mathcal{C}^{ikmn} - \frac{1}{2} \left(g^{im} g^{kn} - g^{in} g^{km} \right) \,. \tag{79}$$

Алгебраическое разложение тензора восприимчивости с точностью до переобозначений сводится к представлению тензора линейного отклика, и повторять эту процедуру нет необходимости.

Если мы имеем дело с *нелинейной* феноменологической электродинамикой сплошных сред без учёта реологических свойств среды, эффектов памяти и запаздывания отклика, то разложение (78) может быть расширено по следующей схеме:

$$M^{ik} = \mathcal{H}^{ik} + F_{mn} \left[\chi^{ikmn}_{(1)} + \chi^{ikmnpq}_{(2)} F_{pq} + \chi^{ikmnpqls}_{(3)} F_{pq} F_{ls} + ... \right] . \tag{80}$$

Так появляются феноменологически введённые тензоры восприимчивости первого $\chi^{ikmn}_{(1)}$, второго $\chi^{ikmnpq}_{(2)}$, третьего $\chi^{ikmnpqls}_{(3)}$ и более высоких порядков. Подставляя в формулу (80) тензор Максвелла (22), представленный с помощью четыре-векторов E^i и B^k, получим разложения четыре-векторов поляризации и намагниченности в следующем виде:

$$P^i = \mathcal{P}^i + E_k \left[\alpha^{ik}_{(\mathrm{P})} + \beta^{ikm}_{(\mathrm{P})} E_m + \hat{\beta}^{ikm}_{(\mathrm{P})} B_m \right] + B_k \left[\tilde{\alpha}^{ik}_{(\mathrm{P})} + \tilde{\beta}^{ikm}_{(\mathrm{P})} B_m \right] + ..., \tag{81}$$

$$M^i = \mathcal{M}^i + B_k\left[\alpha^{ik}_{(\mathrm{M})} + \beta^{ikm}_{(\mathrm{M})} B_m + \hat{\beta}^{ikm}_{(\mathrm{M})} E_m\right] + E_k\left[\tilde{\alpha}^{ik}_{(\mathrm{M})} + \tilde{\beta}^{ikm}_{(\mathrm{M})} E_m\right] \dots \qquad (82)$$

Здесь двухиндексные символы обозначают электрическую, магнитную и кросс - поляризуемости первого порядка, трёхиндексные символы обозначают первые электрическую, магнитную и кросс - *гипер*поляризуемости. Эти названия первоначально появились в нелинейной оптике и были затем введены в электродинамику движущегося континуума. Читателю предлагается самостоятельно найти неприводимые представления тензоров $\chi^{ikmnpq}_{(2)}$, $\chi^{ikmnpqls}_{(3)}$ и связать их с тензорами гиперполяризуемостей.

2.3. Тензор спонтанной поляризации - намагниченности

Тензор спонтанной поляризации - намагниченности не зависит от напряжённости электромагнитного поля, а потому его представление в терминах тензоров ζ^{ik}_j и η^{ikj}

$$\mathcal{H}^{ik} = \zeta^{ik}_j\left[p^j(T - T_0) + d^j{}_{ls}\Pi^{ls}\right] - \eta^{ikj}\left[m_j(T - T_0) + h_{jls}\Pi^{ls}\right] \qquad (83)$$

содержит разность текущей T и критической T_0 температур, а также тензор напряжений Π^{mn} в качестве источника поляризации - намагниченности, наведённых в движущейся среде внутренними процессами термодинамического и эластодинамического типов. Для того, чтобы пояснить смысл тензорных коэффициентов p^j, $d^j{}_{ls}$, m_j и h_{jls}, вычислим вклады $\mathcal{P}^i$ и $\mathcal{M}^i$ в четыре-векторы P^i (81) и M^i (82):

$$\mathcal{P}^i = p^i(T - T_0) + d^i{}_{ls}\Pi^{ls} + \dots, \qquad (84)$$

$$\mathcal{M}_i = m_i(T - T_0) + h_{ils}\Pi^{ls} + \dots. \qquad (85)$$

По аналогии с классической электродинамикой сплошных сред следует считать p^i и m_i четырёхмерными обобщениями пиро - электрических и пиро - магнитных коэффициентов, а $d^i{}_{ls}$ и h_{ils} - обобщениями пьезо - электрических и пьезо - магнитных коэффициентов, соответственно. При феноменологическом подходе пиро- и пьезо- коэффициенты считаются заданными, недостающие элементы теории: температура и напряжения в среде, - находятся, соответственно, из уравнений теплового баланса и термо-вязко-упругости.

2.4. Феноменологическое разложение электрического тока

Согласно формуле (39) составляющая электрического тока I^i, продольная относительно скорости среды, пропорциональна плотности заряда и в дополнительном анализе не нуждается. Поперечная составляющая J^i является предметом для дискуссии при феноменологическом представлении тока. Простейшее трёхмерное представление:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \nu [\vec{E}, \vec{B}] + \mu \vec{\nabla} T + ... \tag{86}$$

характеризует эффекты электрической проводимости в среде (если $\sigma \neq 0$), дрейфовые явления в скрещенных электрическом и магнитном полях (если $\nu \neq 0$), термоэлектрический эффект (если $\mu \neq 0$) и так далее. Очевидно, что разложение

$$J^i = \sigma^{imn} F_{mn} + \nu^{imnpq} F_{mn} F_{pq} + \mu^{im} \nabla_m T + \Omega^{imn} \nabla_m U_n + ... \tag{87}$$

следует считать ковариантным обобщением (86) на случай неоднородного и неравномерного движения среды, содержащей несвязанные электрические заряды. Тензорные величины σ^{imn}, ν^{imnpq}, μ^{im} и Ω^{imn} обязаны подчиняться требованию ортогональности

$$U_i \sigma^{imn} = 0 \,, \quad U_i \nu^{imnpq} = 0 \,, \quad U_i \mu^{im} = 0 \,, \quad U_i \Omega^{imn} = 0 \,. \tag{88}$$

Кроме того, σ^{imn} антисимметричен по второму и третьему индексам, ν^{imnpq} антисимметричен по m и n, по p и q и симметричен по перестановке пар. Эти требования симметрии позволяют однозначно восстановить структуру указанных материальных тензоров, читателю предлагается сделать это самостоятельно.

2.5. Нестационарные материальные соотношения в электродинамике сплошных сред

Функциональная связь (52) между тензором индукции и тензором напряжённости электромагнитного поля физически означает, что отклик среды на внешнее воздействие или на внутреннее возмущение локален в пространстве и во времени. В частности, изменение напряжённости электромагнитного поля мгновенно сказывается на изменении поляризации и намагниченности в среде. Символическим аналогом такой модели могло бы служить сопротивление в электрической цепи, падение напряжения на котором пропорционально току. В реальных средах наблюдается запаздывание отклика, причём характер запаздывания существенно усложняется, если среда движется неравномерно и неоднородно. Для описания явлений, связанных с запаздыванием электромагнитного отклика, существуют модели трёх типов. К первому типу относятся модели, в которых в материальные соотношения вводятся производные по времени от поляризации, намагниченности и/или напряжённости электромагнитного поля. Такая модель могла бы быть символически соотнесена с индуктивностью в электрической цепи, если пользоваться методом аналогий. Модели второго типа содержат интеграл свёртки от напряжённости электромагнитного поля, так что состояние поляризации и намагниченности в данный момент определяется всей предысторией их эволюции. С символической точки зрения такая модель имеет простой аналог - конденсатор. Наконец, комбинированные модели третьего типа связаны с введением в материальные соотношения неких интегро-дифференциальных операторов.

Реализуя программу учёта инерции отклика в уравнениях электродинамики, Клюитенберг (Kluitenberg, 1973) предложил простейшую нестационарную модификацию материальных соотношений, добавив в них производные по времени от векторов поляризации и намагниченности:

$$\tau_{(\mathrm{p})}\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} + \vec{P} = \chi\vec{E} + \dots , \quad \tau_{(\mathrm{m})}\frac{\partial}{\partial t}\vec{M} + \vec{M} = \chi\vec{H} + \dots . \tag{89}$$

Эти соотношения были обобщены тем же автором на случай производных второго, третьего и более высокого порядка. Феноменологические параметры $\tau_{(\mathrm{p})}$ и $\tau_{(\mathrm{m})}$ описывают эффективные времена релаксации поляризации и намагниченности, соответственно. Если предположить, что эти параметры равны нулю, получим стандартные функциональные соотношения. Ковариантное обобщение материальных соотношений Клюитенберга на случай, когда среда неоднородно и неравномерно движется, имеет вид

$$\tau_{(\mathrm{p})}\ \mathcal{D}P^i + P^i = \mathcal{P}^i + \alpha^{ik}_{(\mathrm{E})}E_k + \tilde{\alpha}^{ik}_{(\mathrm{E})}B^k\,, \tag{90}$$

$$\tau_{(\mathrm{m})}\ \mathcal{D}M_i + M_i = \mathcal{M}_i + \alpha^{ik}_{(\mathrm{B})}B^k + \tilde{\alpha}^{ik}_{(\mathrm{B})}B_k\,. \tag{91}$$

В тензорном представлении материальные соотношения, обобщенные на случай среды с нестационарным внутренним состоянием

$$\Gamma^{ikmn}\ \mathcal{D}M_{mn} + M^{ik} = \mathcal{H}^{ik} + \chi^{ikmn}F_{mn} + \Omega^{ikmn}\nabla_m U_n \tag{92}$$

непременно содержат ковариантные производные от скорости U_k. Читателю предоставляется возможность самостоятельно найти тензоры Γ^{ikmn} и Ω^{ikmn}, такие, что при их подстановке уравнение (92) распадается на (90) и (91) в силу соотношений (77), (75) и (76).

Также, как и тензор спонтанной поляризации - намагниченности (83), материальные тензоры χ^{ikmn}, Ω^{ikmn} и Γ^{ikmn} зависят от температуры T, Паскалевского давления P и напряжений в среде Π_{ls}. Например, широко известный электро - стрикционный и магнито - стрикционный эффекты могут быть описаны слагаемым

$$\chi^{ikmn}F_{mn} \quad \to \quad ... + \mathcal{Q}^{iklsmn}\Pi_{ls}F_{mn} + ...\,, \tag{93}$$

линейным по тензору напряжений. Нестационарные материальные соотношения (92) имеют такую же структуру, как и материальные соотношения, определяющие тепловой поток и тензор напряжений в причинной термодинамике (см. [7]). Напомним, что в рамках релятивистской причинной термодинамики (без учёта кросс-эффектов) тепловой поток $I^{(\mathrm{q})}_i$ связан с температурой и скоростью среды соотношением

$$\tau_{(\mathrm{q})}\Delta^k_i \mathcal{D}I^{(\mathrm{q})}_k + I^{(\mathrm{q})}_i + \frac{\tau_{(\mathrm{q})}}{2}I^{(\mathrm{q})}_i\left[\Theta + \mathcal{D}\left(\log\frac{\tau_{(\mathrm{q})}}{\lambda T^2}\right)\right] =$$
$$= \lambda T \Delta^k_i\left(\frac{1}{T}\nabla_k T - \mathcal{D}U_k\right)\,, \tag{94}$$

где параметр $\tau_{(\mathrm{q})}$ играет роль времени релаксации потока тепла, а λ - коэффициента теплопроводности среды. Тензор Π^{ik} обычно представляется суммой сдвигового $\Pi^{ik}_{(0)}$ и объёмного Π напряжений

$$\Pi^{ik} \equiv \Pi^{ik}_{(0)} + \frac{1}{3}\Delta^{ik}\Pi\,, \quad \Pi \equiv g_{ik}\Pi^{ik}\,. \tag{95}$$

В обобщенной модели Ньютона, которая считается наиболее разработанной в рамках релятивистской теории вязко-упругости, объёмные напряжения линейны относительно скаляра сдвига Θ

$$\tau_{(\mathrm{v})}\mathcal{D}\Pi + \Pi + \frac{\tau_{(\mathrm{v})}}{2}\Pi\left[\Theta + \mathcal{D}\left(\log\frac{\tau_{(\mathrm{v})}}{\zeta T}\right)\right] = 3\zeta\Theta\,, \tag{96}$$

где ζ - это коэффициент объёмной вязкости, а $\tau_{(\mathrm{v})}$ - параметр релаксании объёмных напряжений. Аналогично, соотношение

$$\tau_{(\mathrm{sh})}\Delta^i_m\Delta^k_n\ \mathcal{D}\Pi^{mn}_{(0)} + \Pi^{ik}_{(0)} + \frac{\tau_{(\mathrm{sh})}}{2}\Pi^{ik}_{(0)}\left[\Theta + \mathcal{D}\left(\log\frac{\tau_{(\mathrm{sh})}}{\eta T}\right)\right] = \eta\sigma^{ik} \tag{97}$$

устанавливает связь между бесследовой частью тензора напряжений $\Pi^{ik}_{(0)}$ и тензором сдвига σ^{ik} поля скорости. Величина η называется коэффициентом сдвиговой (shear) вязкости, а параметр $\tau_{(\mathrm{sh})}$ - это время релаксации сдвиговых напряжений.

Если состояние среды не только нестационарно, но и неоднородно, то материальные соотношения становятся нелокальными с пространственной точки зрения. Простейшая форма феноменологических материальных соотношений в этом случае

$$\tilde{\Gamma}^{ikmnj}\nabla_j M_{mn} + M^{ik} = \mathcal{H}^{ik} + \chi^{ikmn}F_{mn} +$$

$$+\tilde{\chi}^{ikmnj}\nabla_j F_{mn} + \tilde{\Omega}^{ikmn}\nabla_m U_n \tag{98}$$

предполагает, что оператор ∇_j содержит не только конвективную часть $U_j\mathcal{D}$, но и пространственный градиент $\overset{\perp}{\nabla}_j$. Если тензорный коэффициент $\tilde{\Gamma}^{ikmnj}$ факторизуется, то есть, $\tilde{\Gamma}^{ikmnj}{=}\Gamma^{ikmn}U^j$, а $\tilde{\chi}^{ikmnj}$ обращается в нуль, то (98) превращается в (92).

При наличии кросс-эффектов в движущейся среде материальные соотношения для потока тепла (94) и напряжений (96), (97) следует феноменологически расширить, добавив слагаемые с тензором Максвелла и его конвективной производной. Оставшиеся функции состояния континуума: макроскопическая скорость движения среды U^i и температура T, - находятся из уравнений баланса энергии и импульса, которые обуждаются в следующей лекции.

2.6. Неминимальное расширение материальных соотношений в электродинамике

Все обсуждавшиеся выше ковариантные расширения материальных соотношений содержат производные от метрики не выше первого порядка, например, они содержатся в ковариантных производных от скорости $\nabla_k U_i$ в виде символов Кристоффеля Γ^i_{kl}. Если при конструировании материальных тензоров появляются вторые производные от метрики, которые могут быть собраны в виде ковариантных конструкций: тензора Римана $R^i{}_{kmn}$, тензора Риччи R_{kn} и скалярной кривизны R, - то появляется так называемое неминимальное расширение электродинамики. Для иллюстрации расширения линейной теории наиболее просто ввести так называемый тензор неминимальной восприимчивости вакуума, который согласно общим правилам не содержит ни скорости, ни её производных:

$$\mathcal{R}^{ikmn} \equiv q_1 R g^{ikmn} + q_2 \Re^{ikmn} + q_3 R^{ikmn} \,. \tag{99}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$g^{ikmn} \equiv \frac{1}{2}(g^{im}g^{kn} - g^{in}g^{km}) \,, \tag{100}$$

$$\Re^{ikmn} \equiv \frac{1}{2}(R^{im}g^{kn} - R^{in}g^{km} + R^{kn}g^{im} - R^{km}g^{in}) \,, \tag{101}$$

а феноменологические параметры q_1, q_2 и q_3 с размерностью площади называют константами неминимального взаимодействия. Тензор $\mathcal{R}^{ikmn}$ имеет ту же симметрию при перестановке индексов, что и материальный тензор C^{ikmn}, поэтому в трехпараметрической неминимальной модели вакуумной электродинамики тензор индукции связан с тензором Максвелла соотношением

$$H^{ik} = F^{ik} + \mathcal{R}^{ikmn} F_{mn} \,. \tag{102}$$

Последняя часть в этой формуле ассоциируется с неминимальной поляризацией - намагниченностью вакуума, с помощью этой формулы легко найти в явном виде тензор неминимальной диэлектрической проницаемости вакуума

$$\varepsilon^{im} = \Delta^{im} \left[1 + q_1 R + q_2 R^{pq} U_p U_q\right] +$$

$$+q_2 R_{pq}\Delta^{ip}\Delta^{mq} + 2q_3 R^{ipmq}U_p U_q \,, \qquad (103)$$

тензор неминимальной непроницаемости

$$\left(\mu^{-1}\right)^{im} = \Delta^{im}\left[1{+}q_1 R{+}q_2 R^{pq}U_p U_q\right] -$$

$$-q_2 R_{pq}\Delta^{ip}\Delta^{mq}{-}2q_3^* R^{*ipmq}U_p U_q \qquad (104)$$

и тензор неминимального кросс-эффекта или неминимальные магнито - электрические коэффициенты вакуума

$$\nu^{pm} = q_2\ \eta^{pmk}R_{kl}U^l + 2q_3\ {}^*R^{plmn}U_l U_n \,. \qquad (105)$$

В (103)-(105) для дуальных тензоров введены обозначения

$${}^*R^{plmn} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{plsj}R_{sj}{}^{mn} \,, \quad {}^*R^{*ipmq} \equiv \frac{1}{4}\epsilon^{ipls}R_{lsjn}\epsilon^{jnmq} \,. \qquad (106)$$

При конструировании неминимальной скьюонной и аксионной частей тензора линейного отклика вакуума по аналогии с (99) необходимо использовать псевдо-тензоры ${}^*R^{ikmn}$ и R^{*ikmn}. Например, антисимметричный по парам индексов псевдо-тензор

$$\chi_*^{ikmn} \equiv q_4\left[{}^*R^{ikmn}{-}R^{*ikmn}\right] = \frac{1}{2}q_4\left[\epsilon^{ikpq}R_{pq}{}^{mn}{-}R^{ik}{}_{pq}\epsilon^{mnpq}\right] \qquad (107)$$

может рассматриваться как один из простейших кандидатов при моделировании неминимальной скьюонной восприимчивости.

ЛЕКЦИЯ III
ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ - ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Введение тензора энергии - импульса электромагнитного поля в релятивистской электродинамике континуума до сих пор вызывает дискуссии как конструкционного, так и терминологического характера. Читателю предлагается авторская версия решения этой проблемы. Для того, чтобы понять её суть, начнём изложение с простейшего вакуумного примера, который не вызывает дискуссий.

3.1. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в вакууме

В вакуумной электродинамике роль тензора энергии-импульса электромагнитного поля играет конструкция

$$T^{(0)}_{ik} \equiv \frac{1}{4} g_{ik} F_{mn} F^{mn} - F_{im} F_k{}^m \,, \tag{108}$$

содержащая только метрику и тензор Максвелла. Этот тензор обладает тремя замечательными свойствами. Во-первых, он явно симметричен $T^{(0)}_{ik} = T^{(0)}_{ki}$, во-вторых, его след равен нулю $g^{ik} T^{(0)}_{ik}{=}0$, в-третьих, его ковариантная дивергенция

$$\nabla^k T^{(0)}_{ik} {=} \frac{1}{2} \delta^j_i F^{mn} \left[\nabla_j F_{mn} {+} \nabla_n F_{jm} {+} \nabla_m F_{nj}\right] {+} F_{im} \left[\nabla_k F^{mk}\right] \tag{109}$$

равна нулю, если тензор Максвелла удовлетворяет вакуумным электродинамическим уравнениям (квадратные скобки в (109) обращаются в нуль). В силу этих свойств $T^{(0)}_{ik}$ принято называть каноническим тензором энергии-импульса электромагнитного поля в вакууме. Кроме того, этот тензор может быть получен с помощью вариационной производной классического Лагранжиана электромагнитного поля по метрике пространства-времени:

$$T^{(0)}_{ik} {=} {-}\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \left[\sqrt{-g} L_{(\mathrm{EM})}\right] \,, \quad L_{(\mathrm{EM})} {=} \frac{1}{4} g^{mp} g^{nq} F_{mn} F_{pq} \,. \tag{110}$$

При варьировании по g^{ik} тензор F_{mn} с нижними индексами игнорируется, как объект (6), не содержащий метрики. В этом смысле $T^{(0)}_{ik}$ можно также назвать метрическим или эффективным тензором энергии - импульса в вакууме и использовать как электромагнитный источник гравитационного поля в правой части уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \kappa T^{(0)}_{ik} \,. \qquad (111)$$

Здесь R_{ik} - тензор Риччи, а R - скаляр Риччи, $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$ - постоянная Эйнштейна.

Ситуация существенно усложняется, если речь идет об электромагнитном поле в среде. Из уравнений баланса энергии строится тензор электромагнитного поля $\mathcal{T}^{ik}$, а вариационная процедура дает эффективный тензор энергии-импульса $T^{(\rm eff)}_{ik}$, и для электромагнитного поля в среде эти объекты, вообще говоря, не совпадают.

3.2. Уравнения баланса в электродинамике сплошных сред

Стандартный феноменологический метод конструирования тензора энергии - импульса электромагнитного поля в материальной среде основан на использовании квадратичных следствий из уравнений Максвелла (38). Свёртка (38) с тензором $F^l{}_i$

$$F^l{}_i \nabla_k H^{ik} = -\frac{4\pi}{c} I^i F^l{}_i \qquad (112)$$

может быть с помощью (29) приведена к равенству, содержащему четыре-дивергенцию некоторого тензора

$$\nabla_k \mathcal{T}^{kl} = F^l \,. \qquad (113)$$

Сопряжённая пара: тензор $\mathcal{T}^{kl}$ и четыре-вектор F^l дают, соответственно, тензор энергии-импульса электромагнитного поля и пондеромоторную силу. Выбор пары $\mathcal{T}^{kl}$ и F^l неоднозначен, и нужны дополнительные физические мотивы для того, чтобы зафиксировать один из них. Рассмотрим несколько известных конструкций.

3.2.1. Тензор Минковского (Minkowski)

Если переписать уравнение (112) в виде

$$\nabla_k \left[\frac{1}{4} g^{kl} H_{mn} F^{mn} - H^{km} F_{lm}\right] =$$

$$= \frac{4\pi}{c} I_i F^{il} + \frac{1}{4}\left[F_{mn} \nabla^l H^{mn} - H_{mn} \nabla^l F^{mn}\right] , \tag{114}$$

получим следующую сопряжённую пару величин $\mathcal{T}^{kl}$ и F^l:

$$T^{kl}_{\text{(Minkowski)}} \equiv \frac{1}{4} g^{kl} H_{mn} F^{mn} - H^{km} F^l{}_m , \tag{115}$$

$$F^l_{\text{(Minkowski)}} = \frac{4\pi}{c} I_i F^{il} + \frac{1}{4}\left[F_{mn} \nabla^l M^{mn} - M_{mn} \nabla^l F^{mn}\right] . \tag{116}$$

Здесь введено обозначение $M^{ik} \equiv H^{ik} - F^{ik}$ для поляризации - намагниченности среды. Тензор $\mathcal{T}^{kl}_{\text{(Minkowski)}}$ обладает нулевым следом и не зависит от скорости среды, как и канонический тензор, однако, в отличие от (108), он несимметричен и имеет ненулевую дивергенцию.

3.2.2. Модифицированный тензор Минковского

Грот и Эринген (Grot and Eringen), Израэль (Israel), Можен (Maugin) предложили использовать модифицированную версию сопряжённой пары $\mathcal{T}^{kl}$ и F^l для уравнения баланса (113):

$$\mathcal{T}^{kl}_{\text{(GEIM)}} \equiv \frac{1}{4} g^{kl} F_{mn} F^{mn} - H^{km} F^l{}_m ,$$

$$F^l_{\text{(GEIM)}} = \frac{4\pi}{c} I_m F^{ml} - \frac{1}{2} M^{mn} \nabla^l F_{mn} . \tag{117}$$

Этот тензор энергии-импульса несимметричен, обладает ненулевым следом, ненулевой дивергенцией и только первым слагаемым отличается от (115).

3.2.3. Версия Хеля и Обухова (Hehl and Obukhov)

Хель и Обухов предложили использовать сопряжённую пару

$$\mathcal{T}^{kl}_{\text{(HO)}} \equiv \frac{1}{4} g^{kl} F^{mn} F_{mn} - F^{km} F^l{}_m ,$$

$$F^l_{(\mathrm{HO})} = \frac{4\pi}{c} I_m F^{ml} + F^l{}_m \nabla_k M^{km} \,. \qquad (118)$$

Тензор энергии-импульса совпадает с каноническим, однако, в отличие от вакуумного случая, его дивергенция не равна нулю.

3.2.4. Тензор Абрагама (Abraham)

Абрагам стал первым из исследователей данной проблемы, кто предложил рассматривать тензор энергии-импульса электромагнитного поля в среде как симметричный тензор, явно зависящий от скорости движения среды U^i. Если среда пространственно изотропна и однородна, соответствующий тензор $\mathcal{T}^{ik}_{(\mathrm{Abraham})}$ записывается в виде

$$\mathcal{T}^{ik}_{(\mathrm{Abraham})} \equiv \mathcal{T}^{ik}_{(\mathrm{Minkowski})} + (n^2 - 1)\Omega^i U^k \,, \qquad (119)$$

где n - это показатель преломления среды, а четыре-вектор Ω^i введен с помощью соотношения

$$\Omega^i = U_l (H^{il} U^m + H^{lm} U^i + H^{mi} U^l) F_{ms} U^s \,. \qquad (120)$$

Так как $\Omega^i U_i = 0$ по построению, то тензор $\mathcal{T}^{ik}_{(\mathrm{Abraham})}$ является бесследовым. Читателю предлагается самостоятельно вывести формулу для пондеромоторной силы в этом случае и убедиться, что дивергенция данного тензора отлична от нуля.

3.2.5. Версия де Гроота и Сатторпа (de Groot and Suttorp)

Используя мотивацию, основанную на микроскопических уравнениях электромагнетизма, де Гроот и Сатторп предложили следующий вариант тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}^{kl}_{(\mathrm{dGS})} \equiv \mathcal{T}^{kl}_{(\mathrm{GEIM})} -$$
$$- U^l U^m (F^{kn} M_{nm} - M^{kn} F_{nm}) + U^k U^l U^m U_n F_{ms} M^{sn} \,. \qquad (121)$$

Этот тензор также явно зависит от четыре-вектора скорости среды и является модификацией как тензора Абрагама, так и тензора Грота - Эрингена - Израэля - Можена. Читателю предлагается самостоятельно установить остальные свойства этого тензора.

3.2.6. Симметризованный тензор Минковского

Последняя из версий тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде, приведенная в данном курсе лекций:

$$T_{kl}^{(\mathrm{eff})} \equiv \frac{1}{4} g_{kl} H_{mn} F^{mn} - \frac{1}{2} (H_{km} F_l{}^m + H_{lm} F_k{}^m) \,, \tag{122}$$

- формально может быть получена путем симметризации тензора Минковского (115). Этот симметричный тензор не зависит явно от скорости среды и имеет нулевой след. В символике, использованной для обозначения этого тензора, фигурирует термин *эффективный*, поскольку, как будет показано ниже, именно этот тензор совпадает с тензором, полученным с помощью вариационной производной от Лагранжиана для электромагнитного поля в среде. Пондеромоторная сила для такого случая имеет вид

$$F_l^{(\mathrm{eff})} = \frac{4\pi}{c} I^i F_{il} + \frac{1}{4} \left[F_{mn} \nabla_l M^{mn} - M_{mn} \nabla_l F^{mn} \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \nabla_k \left[M^{km} F_{lm} - F^{km} M_{lm} \right] . \tag{123}$$

Для того, чтобы выяснить, какая из версий построения тензора энергии-импульса является адекватной, сформулирована система тестов [8], основанная на расчете и последующем измерении потока энергии электромагнитного поля в среде. В данном курсе лекций мы обсудим только математические основы этих тестов.

3.3. "DEHB - представление" тензора энергии-импульса электромагнитного поля

Любой из введенных выше тензоров энергии-импульса электромагнитного поля в среде, движущейся с макроскопической скоростью U^i, можно представить с помощью алгебраического разложения

$$\mathcal{T}^{ik} = W U^i U^k + U^i I^k_{(1)} + U^k I^i_{(2)} + \mathcal{P}^{ik} \,. \tag{124}$$

Плотность энергии электромагнитного поля описывается скаляром

$$W \equiv U_i \; \mathcal{T}^{ik} U_k \,. \tag{125}$$

Четыре-векторы $I^k_{(1)}$ и $I^i_{(2)}$ определены соотношениями

$$I^k_{(1)} \equiv U_p \mathcal{T}^{pq} \Delta^k_q \,, \quad I^i_{(2)} \equiv \Delta^i_p \mathcal{T}^{pq} U_q \,, \tag{126}$$

они совпадают, если тензор энергии-импульса симметричен. О физическом смысле этих векторных конструкций до сих ведутся споры. Тензор давлений $\mathcal{P}^{ik}$ задается формулой

$$\mathcal{P}^{ik} = \Delta^i_m \mathcal{T}^{mn} \Delta^k_n \,. \tag{127}$$

Если мы имеем дело с каноническим тензором энергии-импульса (108) или с тензором Хеля-Обухова (118), то плотность энергии выражается только через четыре-векторы E^i и B^k:

$$W = W_{(0)} \equiv -\frac{1}{2} \left(E^m E_m + B^m B_m \right) \,, \tag{128}$$

первый и второй четыре-векторы потока совпадают друг с другом и равны четыре-вектору I^i

$$I^i_{(1)} = I^i_{(2)} = I^i \equiv -\eta^i{}_{mn} E^m B^n \,, \tag{129}$$

тензор давления симметричен

$$\mathcal{P}^{ik} = \frac{1}{2} \Delta^{ik} \left(E^m E_m + B^m B_m \right) - \left(E^i E^k + B^i B^k \right) \,, \tag{130}$$

а его Паскалевская часть

$$\mathcal{P} \equiv -\frac{1}{3} \Delta_{ik} \mathcal{P}^{ik} = -\frac{1}{6} \left(E^m E_m + B^m B_m \right) = \frac{1}{3} W_{(0)} \tag{131}$$

равна одной трети плотности энергии, что характерно для безмассовых физических систем.

Если мы имеем дело не с вакуумом, а с движущейся средой, то, используя определения (12),(40) и разложения (14), (41), легко убедиться, что для тензора Минковского (115), тензора Абрагама (119) и симметризованного тензора Минковского (122) плотность энергии задается общей формулой

$$W = W_{(\mathrm{EM})} \equiv -\frac{1}{2} \left(D^m E_m + H^m B_m \right) \,. \tag{132}$$

В вакууме $W_{(\mathrm{EM})}$ совпадает с $W_{(0)}$. В качестве **упражнения** читателю предлагается найти выражения для плотности энергии для оставшихся конструкций (117) и (121).

Четыре-векторы потока, в отличие от скаляра плотности энергии, существенно отличаются для тензора Минковского (115):

$$I^i_{(1)} = -\eta^{imn} E_m H_n \,, \quad I^i_{(2)} = -\eta^{imn} D_m B_n \,, \tag{133}$$

тензора Абрагама (119):

$$I^i_{(1)} = I^i_{(2)} = -\eta^{imn} E_m H_n \tag{134}$$

и симметризованного тензора Минковского (122):

$$I^i_{(1)} = I^i_{(2)} = I^i_{(\text{eff})} = -\frac{1}{2}\eta^{imn} \left(D_m B_n + E_m H_n\right) \,. \tag{135}$$

Если воспользоваться привычными трёхмерными обозначениями $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ и $\vec{H}$, то вектор потока (134) в модели Абрагама сводится к векторному произведению три-векторов электрического и магнитного полей, совпадая, таким образом, со стандартным три-вектором Умова-Пойнтинга $\vec{S}_{(\text{UP})} \equiv [\vec{E}, \vec{H}]$. Для тензора Минковского первый и второй потоки различны

$$\vec{I}_{(1)} = [\vec{D}, \vec{B}] \,, \quad \vec{I}_{(2)} = [\vec{E}, \vec{H}] \,, \tag{136}$$

а для эффективного тензора энергии-импульса (122) вектор потока состоит из их полусуммы. На указаных отличиях построены тесты на адекватность моделей тензора энергии-импульса электромагнитного поля в движущейся среде, однако, убедительных экспериментальных результатов, отвергающих ту или иную версию, нет [8, 4]. Тензор давления Минковского несимметричен:

$$\mathcal{P}^{ik}_{(\text{Minkowski})} = \frac{1}{2}\Delta^{ik} \left(D^m E_m + B^m H_m\right) - \left(D^i E^k + B^i H^k\right) \,. \tag{137}$$

После симметризации по индексам i и k, эта формула становится справедливой для тензора Абрагама и эффективного тензора:

$$\mathcal{P}^{ik}_{(\text{Abraham})} = \mathcal{P}^{ik}_{(\text{eff})} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{P}^{ik}_{(\text{Minkowski})} + \mathcal{P}^{ki}_{(\text{Minkowski})}\right] \,. \tag{138}$$

В качестве примера реконструкции тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде приведем только одно разложение:

$$T^{(\text{eff})}_{pq} = \left(\frac{1}{2}g_{pq} - U_p U_q\right) \left(D^m E_m + H^m B_m\right) -$$

$$
-\frac{1}{2}\left(D_pE_q + D_qE_p + H_pB_q + H_qB_p\right) -
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(U_p\eta_{qmn} + U_q\eta_{pmn}\right)\left(D^mB^n + E^mH^n\right) \ , \tag{139}
$$

справедливое для эффективного тензора (122). В следующей лекции мы получим этот тензор энергии-импульса в рамках вариационного формализма.

ЛЕКЦИЯ IV
ВАРИАЦИОННЫЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

4.1. Функционал действия и полный Лагранжиан

Мы рассматриваем действие для полной электродинамической системы как функционал от метрического тензора g_{ik} и потенциала электромагнитного поля A_m:

$$S[g_{ik}, A_m] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{4} C^{ikmn} F_{ik} F_{mn} + L_{(\mathrm{m})} \right] . \tag{140}$$

В подынтегральном выражении скаляр $\frac{R}{2\kappa}$ представляет собой Лагранжиан Гильберта-Эйнштейна, описывающего поле тяготения; он зависит только от метрики и её производных. Второе слагаемое в квадратных скобках описывает квадратичный по тензору Максвелла Лагранжиан электромагнитного поля в среде; материальный тензор C^{ikmn} не зависит от потенциала A_i, является функцией от скорости движения среды, а также функцией метрики, однако не содержит производных от метрики. В силу квадратичности по тензору Максвелла это второе слагаемое в функционале действия не может содержать скьюонной составляющей, для которой тензор S^{ikmn} антисимметричен по перестановке пар индексов. В этом смысле Лагранжев подход сужает класс феноменологических моделей сплошных сред. Последний элемент $L_{(\mathrm{m})}$ - это Лагранжиан материи, которая составляет движущуюся электромагнитно активную сплошную среду; мы предполагаем, что он зависит как от потенциала электромагнитного поля, так и от метрики.

4.2. Электродинамические уравнения

Вторая подсистема уравнений электродинамики есть результат варьирования функционала действия (140) по потенциалу электромагнитного поля A_i. Если ввести следующие обозначения:

$$\frac{\delta L_{(\mathrm{m})}}{\delta A_i} \equiv \nabla_k \mathcal{H}^{ik} + \frac{4\pi}{c} I^i \, , \tag{141}$$

$$H^{ik} = \mathcal{H}^{ik} + C^{ikmn} F_{mn} \,, \tag{142}$$

то результат процедуры варьирования принимает вид

$$\nabla_k H^{ik} = -\frac{4\pi}{c} I^i \,. \tag{143}$$

В комплекте с первой подсистемой уравнений

$$\nabla_k F^{*ik} = 0 \tag{144}$$

(143) образует ключевую систему уравнений модели. Стоит обратить внимание на тот факт, что в ряде работ Лагранжиан материи детализируется следующим образом

$$L_{(\mathrm{m})} \to L^{(0)}_{(\mathrm{m})} + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{ik} F_{ik} + \frac{4\pi}{c} I^i A_i \,, \tag{145}$$

где ни первая часть этого Лагранжиана $L^{(0)}_{(\mathrm{m})}$, ни тензор спонтанной поляризации - намагниченности $\mathcal{H}^{ik}$, ни четыре-вектор электрического тока I^i уже не зависят от потенциала электромагнитного поля A_k. Формальная вариация (145) дает тот же результат (142), (143), однако, при такой конкретизации возникают проблемы с варьированием функционала действия по метрике. Для того, чтобы обойти эти проблемы, предпочтительно пользоваться общей конструкцией Лагранжиана материи и иметь в виду определение (141).

4.3. Уравнения гравитационного поля

Уравнения гравитационного поля возникают в результате варьирования функционала действия (140) по метрике:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa \left[T^{(\mathrm{m})}_{ik} + T^{(\mathrm{eff})}_{ik} \right] \,. \tag{146}$$

В данной формуле $T^{(\mathrm{m})}_{ik}$ символизирует тензор энергии-импульса материи; он получен с помощью вариационной производной

$$T^{(\mathrm{m})}_{ik} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \left[\sqrt{-g} L_{(\mathrm{m})} \right] \tag{147}$$

и с помощью четыре-вектора макроскопической скорости среды U^i однозначно представляется в виде разложения

$$T^{(\mathrm{m})}_{ik} = W^{(\mathrm{m})} U_i U_k + I^{(\mathrm{q})}_i U_k + I^{(\mathrm{q})}_k U_i - P^{(\mathrm{m})} \Delta_{ik} + \Pi_{ik} \,, \tag{148}$$

содержащего скаляр плотности энергии $W^{(\mathrm{m})}$, четыре-вектор теплового потока $I^{(\mathrm{q})}_i$, изотропное Паскалевское давление $P^{(\mathrm{m})}$ и тензор неравновесного давления Π_{ik}. Все перечисленные объекты, вообще говоря, зависят от напряжённости электромагнитного поля, и в этом смысле разделение полного тензора энергии - импульса на материальную и полевую часть имеет формальный характер.

Симметричный по определению эффективный тензор энергии - импульса электромагнитного поля в движущейся среде

$$T^{(\mathrm{eff})}_{ik} \equiv -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \left[\sqrt{-g} \ C^{pqmn} F_{pq} F_{mn} \right] \,, \tag{149}$$

квадратичен относительно тензора напряжённости электромагнитного поля и характеризуется нулевым следом:

$$T^{(\mathrm{eff})}_{ik} = \frac{1}{4} g_{ik} C^{pqmn} F_{pq} F_{mn} - \frac{1}{2} (C_i^{\ mpq} F_{km} + C_k^{\ mpq} F_{im}) F_{pq} \,. \tag{150}$$

Рассмотрим процедуру получения этого тензора более подробно.

4.4. Симметризованный тензор Минковского как эффективный тензор энергии-импульса электромагнитного поля в движущейся среде

При нахождении вариационной производной по метрике, которая фигурирует в соотношении (149), необходимо использовать три вспомогательных правила. Первое из них

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \delta \sqrt{-g} = \frac{\delta g}{2g} = -\frac{1}{2} g_{pq} \delta g^{pq} \,, \tag{151}$$

доказывается в курсе тензорного анализа. Второе правило связано с тем, что формула (6) для тензора F_{ik} не содержит метрики, и тензор Максвелла с нижними индексами не варьируется по g^{ik}. Третье правило, на основании которого получается вариация

$$\delta \mathrm{C}^{ikmn} = -\frac{1}{4}\delta g_{pq} \left[g^{ip}C^{qkmn} + g^{iq}C^{pkmn} + g^{kp}C^{iqmn} + g^{kq}C^{ipmn} + \right.$$
$$\left. + g^{mp}C^{ikqn} + g^{iq}C^{ikpn} + g^{np}C^{ikmq} + g^{nq}C^{ikmp} \right] , \qquad (152)$$

требует расширенного комментария. Для материального тензора C^{ikmn} существует тетрадное представление

$$C^{ikmn} = X^i_{(a)} X^k_{(b)} X^m_{(e)} X^n_{(f)} C^{(a)(b)(e)(f)} , \qquad (153)$$

где символом $X^i_{(a)}$ обозначена тетрада - четвёрка четыре-векторов, подчиняющихся условиям ортогональности-нормировки

$$g_{ik} X^i_{(a)} X^k_{(b)} = \eta_{(a)(b)} , \qquad (154)$$

$$\eta^{(a)(b)} X^p_{(a)} X^q_{(b)} = g^{pq} . \qquad (155)$$

Здесь индекс (a) пробегает значения $(0), (1), (2), (3)$, причём нулевой элемент тетрады $X^i_{(0)}$ совпадает с макроскопической скоростью среды U^i. Матрица $\eta_{(a)(b)}$ диагональна с элементами
$(1, -1, -1, -1)$. Поскольку векторы тетрады связаны уравнениями (154), (155), содержащими метрику, при их варьировании получается формула

$$\delta X^i_{(a)} = -\frac{1}{4}\delta g_{pq} \left[X^p_{(a)} g^{iq} + X^q_{(a)} g^{ip} \right] , \qquad (156)$$

которая затем применяется для вычисления вариационной производной от свёртки (153). При выводе этих формул предполагается, что тетрадные компоненты материального тензора $C^{(a)(b)(e)(f)}$ от метрики не зависят. Подставив формулы (156), (153) в (149) мы действительно получим, что эффективный или метрический тензор энергии-импульса электромагнитного поля в среде представляется формулой (150).

4.5. Уравнения баланса

В силу тождества Бианки левая часть уравнений Эйнштейна подчиняется равенству $\nabla^k [R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R] = 0$, поэтому ковариантная дивергенция правой части уравнений (146) равна нулю:

$$\nabla^k \left[T^{(\mathrm{m})}_{ik} + T^{(\mathrm{eff})}_{ik} \right] = 0 . \qquad (157)$$

Это соотношение дает четыре уравнения баланса энергии и импульса. Скалярное уравнение баланса (свёртка (157) с U^i)

$$\mathcal{D}W^{(\mathrm{m})} + [W^{(\mathrm{m})} + P^{(\mathrm{m})}]\Theta =$$

$$= I^{(\mathrm{q})}_k \mathcal{D}U^k - \nabla^k I^{(\mathrm{q})}_k + \Pi^{ik}\nabla_k U_i - U^i F^{(\mathrm{eff})}_i \tag{158}$$

описывает эволюцию плотности энергии, а пондеромоторная сила, определяемая реакцией движущейся среды, задана формулой

$$F^{(\mathrm{eff})}_i \equiv \nabla_k T^{ik}_{(\mathrm{eff})} = \frac{4\pi}{c} I^l F_{li} + \frac{1}{4}\left[F_{mn}\nabla_i H^{mn} - H_{mn}\nabla_i F^{mn}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\nabla_k \left[H^{km}F_{im} - F^{km}H_{im}\right] \tag{159}$$

Оставшиеся три независимые уравнения

$$(W^{(\mathrm{m})} + P^{(\mathrm{m})})\mathcal{D}U_j = \overset{\perp}{\nabla}_j P^{(\mathrm{m})} - I^{(\mathrm{q})}_j \nabla_k U^k - I^{(\mathrm{q})}_k \nabla^k U_j - \Delta^k_j \mathcal{D} I^{(\mathrm{q})}_k +$$

$$+\Pi_{jk}\mathcal{D}U^k - \Delta^l_j \overset{\perp}{\nabla}{}^k \Pi_{lk} - \Delta^l_j F^{(\mathrm{eff})}_l \tag{160}$$

определяют эволюцию четыре-вектора скорости среды U^i. Таким образом электродинамическая модель приобретает статус нелинейной самосогласованной модели, ибо макроскопическая скорость движения среды, свёртки с которой определяют четыре - векторы электрического и магнитного полей, электрической и магнитной индукции, - сама находится из дифференциального уравнения (160), в правую часть которого входят квадратичные комбинации этих векторов.

4.6. О феноменологических материальных уравнениях

Для того, чтобы электродинамическая модель оказалась замкнутой, необходимо конкретизировать следущий набор соотношений.

1. Материальные соотношения, связывающие тензор индукции H^{ik} и тензор напряжённости F_{mn} электромагнитного поля. В обсуждаемой модели эти материальные соотношения линейны и задаются формулой (52); тензорные величины $\mathcal{H}^{ik}$ и C^{ikmn} должны быть явно заданы как функции температуры T, тензора напряжений Π^{mn}, четыре-вектора скорости движения

среды U^i и его ковариантной производной $\nabla_i U_k$ для того, чтобы модель считалась завершённой. Пример явного представления тензора спонтанной поляризации-намагниченности дан формулами (83)-(85); обсуждение примеров, представляющих тензор линейного отклика, планируется в следующей лекции.

2. Материальные соотношения, связывающие вектор электрического тока I^i с тензором напряжённости электромагнитного поля F_{mn}, температурой среды T, четыре-вектором скорости U^k и его ковариантными производными $\nabla_i U_k$; пример такого соотношения дан формулой (87).

3. Уравнение состояния среды, связывающее Паскалевское давление с плотностью энергии среды посредством параметрических соотношений $P^{(\mathrm{m})} = P^{(\mathrm{m})}(N, T)$, $W^{(\mathrm{m})} = W^{(\mathrm{m})}(N, T)$, содержащих плотность числа частиц N и температуру T (см. детали в конспекте [7]).

4. Ковариантное обобщение закона Фурье - Каттанео (Fourrier - Cattaneo), связывающего тепловой поток $I_i^{(\mathrm{q})}$ с четыре-градиентом температуры $\nabla_k T$ и ковариантной производной скорости $\nabla_i U_k$; пример такого закона дан формулой (94).

5. Ковариантное обобщение законов Гука - Ньютона - Максвелла - Кельвина - Фойгта (Hook - Newton - Maxwell - Kelvin - Voigt), связывающих тензор напряжений Π^{ik} с тензором деформаций ϵ_{ik} и/или тензором сдвига σ_{mn}, скаляром растяжения Θ, градиентом температуры и ковариантной производной четыре-вектора скорости среды. Примером таких соотношений могут служить формулы (96), (97).

ЛЕКЦИЯ V
ПРИМЕРЫ МОДЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Если электродинамическая система находится в состоянии покоя, то структура её материальных коэффициентов может быть восстановлена исходя из предполагаемой или обнаруженной пространственной симметрии. Для кристаллических сред такая задача полностью решена, и для всех 32 точечных кристаллографических и 7 предельных групп пространственной симметрии восстановлены матрицы термодинамических свойств, которые приведены, например, в книге [9]. Если среда не является кристаллической (полимеры, вязко-текучие жидкости,...), то строгой классификации не существует и приходится довольствоваться набором модельных систем, в той или иной степени отражающих реальные свойства сред. Возникает вопрос: каким образом константы из матрицы термодинамических свойств, феноменологически реконструированные в данной модели, связаны с материальными тензорами в среде, которая произвольным образом (неоднородно и неравномерно) движется в пространстве?

Мы строим модель на основании анзаца о том, что константы, приведенные в трёхмерной пространственной матрице термодинамических свойств, есть тетрадные компоненты $\mathcal{S}^{(\alpha)(\beta)...}_{(\gamma)(\nu)...}$ соответствующего материального тензора

$$\mathcal{S}^{ik...}_{mn...} = \mathcal{S}^{(\alpha)(\beta)...}_{(\gamma)(\nu)...} X^i_{(\alpha)} X^k_{(\beta)} X^{(\gamma)}_m X^{(\nu)}_n .... \tag{161}$$

Пусть тетрада выбрана так, что $X^i_{(0)} = U^i$ - совпадает с четыре-вектором скорости, а $X^i_{(\alpha)}$ $((\alpha) = (1),(2),(3))$ - это пространственно - подобные четыре - векторы, ортогональные U^i. Соотношения (154) и (155) дают в этом случае

$$X^i_{(\alpha)} X^{(\alpha)}_k = \delta^i_k - X^i_{(0)} X^{(0)}_k = \Delta^i_k \,. \tag{162}$$

Рассмотрим модельные примеры. Простейшая модель - это электромагнитное поле в вакууме, она служит естественным тестом для феноменологической теории. Вторая модель относится к пространственно изотропной среде, а в третьей предполагается, что среда анизотропна, причём в среде имеется одна выделенная ось симметрии, произвольным образом расположенная относительно направления движения среды.

5.1. Вакуум как электродинамическая система

Вакуумная модель характеризуется тем, что все множество отличных от нуля трёхмерных материальных тензоров может быть построено только из тензора Кронекера $\delta^{(\alpha)}_{(\beta)}$ и символа Леви-Чивита $\eta_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$. В частности, симметричные коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости обязаны совпадать с символом Кронекера:

$$\varepsilon^{(\alpha)}_{(\beta)} = \mu^{(\alpha)}_{(\beta)} \equiv \delta^{(\alpha)}_{(\beta)} \,, \tag{163}$$

а магнито-электрические коэффициенты равны нулю. Соответствующие четырёхмерные материальные тензоры совпадают с проектором

$$\varepsilon^i_k = X^i_{(\alpha)} X^\beta_k \; \delta^{(\alpha)}_{(\beta)} = X^i_{(\alpha)} X^{(\alpha)}_k = \Delta^i_k \,, \tag{164}$$

$$(\mu^{-1})^i_k = X^i_{(\alpha)} X^{(\beta)}_k \delta^{(\alpha)}_{(\beta)} = X^i_{(\alpha)} X^{(\alpha)}_k = \Delta^i_k \,. \tag{165}$$

Если подставить (164) и (165) в формулу (61) и воспользоваться тождествами (21), получим вакуумный тензор линейного отклика

$$C^{ikmn}_{(\mathrm{vac})} = \frac{1}{2} \left(g^{im} g^{kn} - g^{in} g^{km} \right) \,. \tag{166}$$

Скьюонная часть вакуумного "материального" тензора по определению равна нулю $S^{ikmn}_{(\mathrm{vac})} \equiv 0$. Аксионная часть формально может быть введена, если положить $\phi = \phi_0 = \mathrm{const}$ в формулах (56), (59). Однако, в уравнения аксионной электродинамики входит исключительно градиент ϕ, постоянный аксионный вклад оказывается ненаблюдаемым, что эквивалентно введению $\phi_0 = 0$ в соотношение (59) [6]. Таким образом, тензор индукции оказывается равным тензору напряжённости

$$H^{ik} = \frac{1}{2} \left(g^{im} g^{kn} - g^{in} g^{km} \right) F_{mn} = \frac{1}{2} \delta^{ik}_{mn} F^{mn} = F^{ik} \,, \tag{167}$$

что и следовало ожидать. Вакуумный тест оказался непротиворечивым: ни четыре-вектор скорости, ни остальные четыре-векторы тетрады не вошли в материальные соотношения.

5.2. Пространственно изотропная среда

Данная модель предполагает, что тетрадные компоненты симметричных трёхмерных тензоров пропорциональны символам Кронекера, а несимметричная матрица магнитоэлектрических коэффициентов, как и в вакууме, равна нулю:

$$\varepsilon^{(\alpha)}_{(\beta)} = \varepsilon\delta^{(\alpha)}_{(\beta)}\,, \quad \mu^{(\alpha)}_{(\beta)} = \mu\delta^{(\alpha)}_{(\beta)}\,, \quad \nu^{(\alpha)}_{\ \ (\beta)} = 0\,. \tag{168}$$

Тензоры диэлектрической проницаемости и магнитной непроницаемости имеют вид

$$\varepsilon^i_k = X^i_{(\alpha)} X^{(\beta)}_k \ \varepsilon\delta^{(\alpha)}_{(\beta)} = \varepsilon\Delta^i_k\,, \quad \nu^i_{\ k} = 0, \quad (\mu^{-1})^{ik} = \frac{1}{\mu}\Delta^{ik}\,. \tag{169}$$

Тогда из (61) появляется известная формула [2]

$$C^{ikmn}_{(\mathrm{isotr})} = \frac{1}{2\mu}\left(g^{im}g^{kn} - g^{in}g^{km}\right) +$$

$$\left(\frac{\varepsilon\mu - 1}{2\mu}\right)\left(g^{im}U^kU^n - g^{in}U^kU^m + g^{kn}U^iU^m - g^{km}U^iU^n\right)\,, \tag{170}$$

явно включающая четыре-вектор скорости движения среды U^i, но не содержащая пространственно - подобных тетрадных векторов $X^i_{(\alpha)}$. Поступая формально, мы могли бы также получить формулу (170) с помощью представления

$$C^{ikmn}_{(\mathrm{isotr})} \equiv \frac{1}{\mu}\Delta^{ikmn} + \varepsilon\left(g^{ikmn} - \Delta^{ikmn}\right)\,, \tag{171}$$

где антисимметричные тензоры

$$g^{ikmn}{=}\frac{1}{2}\left(g^{im}g^{kn}{-}g^{in}g^{km}\right), \quad \Delta^{ikmn}{=}\frac{1}{2}\left(\Delta^{im}\Delta^{kn}{-}\Delta^{in}\Delta^{km}\right) \tag{172}$$

рассматриваются как базисные элементы разложения, а ε и $\frac{1}{\mu}$ - как подобающие феноменологические коэффициенты. Тензор индукции в этом случае связан с четыре-векторами электрического поля и магнитной индукции соотношением

$$H^{ik} = \varepsilon\ \zeta^{ik}_m\ E^m - \frac{1}{\mu}\eta^{ikm}\ B_m\,, \tag{173}$$

прямым следствием которого являются известные равенства

$$D^i = \varepsilon E^i\,, \quad H^i = \frac{1}{\mu}B^i\,. \tag{174}$$

Материальный тензор (170) обладает весьма интересной внутренней структурой. Для того, чтобы её выявить, обозначим с помощью символов g^{*ik} и g^{-1}_{*km} два следующих тензора:

$$g^{*ik} = \frac{1}{n^2}\left[g^{ik} + \left(n^2 - 1\right) U^i U^k\right] \equiv \frac{1}{n^2}\Delta^{ik} + U^i U^k \,, \tag{175}$$

$$g^{-1}_{*km} = n^2 \left[g_{km} + \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) U_k U_m\right] \equiv n^2 \Delta_{km} + U_k U_m \,. \tag{176}$$

Скаляр $n \equiv \sqrt{\varepsilon\mu}$ - это коэффициент преломления среды. Легко проверить, что выполняется соотношение

$$g^{*ik} g^{-1}_{*km} = \delta^i_m \,, \tag{177}$$

иными словами, g^{*ik} - это тензор, обратный к g^{-1}_{*km}. Более того, результат свёртки этих тензоров со скоростью

$$g^{*ik}U_k{=}U^i \,, \quad g^{*ik}U_iU_k{=}1 \,, \quad g^{-1}_{*km}U^m{=}U_k \,, \quad g^{-1}_{*km}U^kU^m{=}1 \tag{178}$$

позволяет утверждать, что четыре-вектор скорости U^i есть собственный вектор, соответствующий единичному собственному значению, как для первого, так и для второго тензора. Как следствие, тензоры g^{*ik} и g^{-1}_{*km} также, как и метрический тензор g^{ik}, нормируют четыре-вектор скорости на единицу. Вновь вернемся к материальному тензору (170) и обнаружим, что в терминах нововведенных тензоров материальный тензор $C^{ikmn}_{(\mathrm{isotr})}$ записывается в симметричной форме

$$C^{ikmn}_{(\mathrm{isotr})} = \frac{n^4}{2\mu}\left(g^{*im}g^{*kn} - g^{*in}g^{*km}\right) \,. \tag{179}$$

Это означает, что материальный тензор пространственно изотропной среды может быть представлен как тензор линейного отклика (квази) вакуума с *ассоциированной* метрикой g^{*ik} и магнитной проницаемостью, равной $\frac{\mu}{n^4}$. Формула (179) помогает понять теорему Фам Мау Кана (Pham Mau Quan, 1957) о том, что лучи света в пространственно изотропной однородной среде, движущейся с макроскопической скоростью U^i в пространстве - времени с метрикой g_{ik}, могут быть представлены с помощью изотропных геодезических линий в Римановом пространстве-времени с ассоциированной метрикой g^{*ik}. Действительно, если формально заменить метрику g^{ik} в вакуумных уравнениях Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}g^{im}g^{kn}F_{mn}] = 0 \tag{180}$$

на ассоциированную метрику g^{*ik}, а детерминант метрики g_{ik} на детерминант метрики g^{-1}_{*ik}:

$$\frac{1}{\sqrt{-g^*}}\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g^*}g^{*im}g^{*kn}F_{mn}] = 0\,, \tag{181}$$

то получим уравнения электродинамики в изотропной среде с материальным тензором (170) и нулевым электрическим током.

5.3. Пространственно анизотропная среда с аксиальной симметрией

Пусть пространственная симметрия среды такова, что существует полярная ось (поворотная ось бесконечного порядка), направленная, например, вдоль оси x^3. Такая симметрия потенциально допускает существование пиро - электрического и пиро - магнитного эффекта, пьезо - электрического и пьезо - магнитного эффекта, а также магнито - электрического эффекта. Векторы, составленные из пиро- электрических и пиро- магнитных коэффициентов, при данной симметрии направлены вдоль оси $0x^3$

$$\mathcal{P}^{(\alpha)} = \mathcal{P}\delta^{(\alpha)}_{(3)}\,, \quad \mathcal{M}^{(\alpha)} = \mathcal{M}\delta^{(\alpha)}_{(3)}\,. \tag{182}$$

Симметричные тензоры второго ранга в тетрадном представлении имеют диагональный вид [9]:

$$\varepsilon^{(\alpha)}_{(\beta)} = \varepsilon_{\perp}\left[\delta^{(\alpha)}_{(\beta)} + \xi\delta^{(\alpha)}_{(3)}\delta^{(3)}_{(\beta)}\right]\,,$$

$$(\mu^{-1})^{(\alpha)}_{(\beta)} = \frac{1}{\mu_{\perp}}\left[\delta^{(\alpha)}_{(\beta)} + \zeta\delta^{(\alpha)}_{(3)}\delta^{(3)}_{(\beta)}\right]\,, \tag{183}$$

где введены упрощающие обозначения

$$\varepsilon_{\perp} \equiv \varepsilon^{(1)}_{(1)} = \varepsilon^{(2)}_{(2)}\,, \quad \varepsilon_{||} \equiv \varepsilon^{(3)}_{(3)}\,, \quad \xi = \frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{||}}{\varepsilon_{\perp}}\,, \tag{184}$$

$$\frac{1}{\mu_{\perp}} \equiv (\mu^{-1})^{(1)}_{(1)} = (\mu^{-1})^{(2)}_{(2)}\,, \quad \frac{1}{\mu_{||}} \equiv (\mu^{-1})^{(3)}_{(3)}\,, \quad \zeta = \frac{\mu_{||} - \mu_{\perp}}{\mu_{||}}\,. \tag{185}$$

Константы ξ и ζ следует рассматривать как параметры анизотропии диэлектрической и магнитной проницаемости. Тензор магнито-электрических коэффициентов в тетрадном представлении

$$\nu^{\ (\beta)}_{(\alpha)} = \nu_{(\mathrm{S})} \left[\delta^{(\beta)}_{(\alpha)} + \omega \delta^{(3)}_{(\alpha)} \delta^{(\beta)}_{(3)}\right] + \nu_{(\mathrm{A})} \left[\delta^{(1)}_{(\alpha)} \delta^{(\beta)}_{(2)} - \delta^{(2)}_{(\alpha)} \delta^{(\beta)}_{(1)}\right]\,, \tag{186}$$

содержит три структурных константы: $\nu_{(\mathrm{S})}$, ω и $\nu_{(\mathrm{A})}$, первые две из которых описывают симметричную часть, а третья - антисимметричную часть матрицы магнито-электрических коэффициентов. Аналогично по таблицам из [9] находятся все ненулевые компоненты тензора пьезо - электрических коэффициентов:

$$d^{(\alpha)(\beta)(\gamma)} = \delta^{(\alpha)}_{(3)} \left[d^{(3)(1)(1)} \delta^{(\beta)}_{(1)} \delta^{(\gamma)}_{(1)} + d^{(3)(2)(3)} \delta^{(\beta)}_{(2)} \delta^{(\gamma)}_{(2)} + d^{(3)(3)(3)} \delta^{(\beta)}_{(3)} \delta^{(\gamma)}_{(3)}\right] +$$
$$+ \delta^{(\gamma)}_{(3)} \left\{d^{(1)(2)(3)} \delta^{(\alpha)(\beta)}_{(1)(2)} + d^{(1)(1)(3)} \left[\delta^{(\alpha)}_{(1)} \delta^{(\beta)}_{(1)} + \delta^{(\alpha)}_{(2)} \delta^{(\beta)}_{(2)}\right]\right\}. \tag{187}$$

Тензор пьезо - магнитных коэффициентов $h^{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ отличается от (187) только обозначениями пяти независимых коэффициентов. Восстанавливая четырёхмерные объекты по их трёхмерным тетрадным проекциям, получим

$$\mathcal{P}^i = \mathcal{P} X^i_{(3)}\,, \quad \mathcal{M}^i = \mathcal{M} X^i_{(3)}\,, \tag{188}$$

$$d^{ikm} = X^i_{(3)} \left[d^{(3)(1)(1)} X^k_{(1)} X^m_{(1)} + d^{(3)(2)(3)} X^k_{(2)} X^m_{(2)} + d^{(3)(3)(3)} X^k_{(3)} X^m_{(3)}\right] +$$
$$+ X^m_{(3)} d^{(1)(2)(3)} \left[X^i_{(1)} X^k_{(2)} - X^i_{(2)} X^k_{(1)}\right] +$$
$$+ X^m_{(3)} d^{(1)(1)(3)} \left[X^i_{(1)} X^k_{(1)} + X^i_{(2)} X^k_{(2)}\right]\,, \tag{189}$$

$$\varepsilon^{ik} = \varepsilon_{\perp} \left[\Delta^{ik} + \xi X^i_{(3)} X^k_{(3)}\right]\,, \quad (\mu^{-1})^{ik} = \frac{1}{\mu_{\perp}} \left[\Delta^{ik} + \zeta X^i_{(3)} X^k_{(3)}\right]\,, \tag{190}$$

$$\nu^{ik} = \nu_{(\mathrm{S})} \left[\Delta^{ik} + \omega X^i_{(3)} X^k_{(3)}\right] + \nu_{(\mathrm{A})} \left[X^i_{(1)} X^k_{(2)} - X^k_{(1)} X^i_{(2)}\right]\,. \tag{191}$$

Построенные тензорные объекты необходимо разместить в формулах (83), (61), и тогда мы получим координатное представление материальных тензоров $\mathcal{H}^{ik}$ и C^{iklm}. Заметим, что в тензоре C^{iklm} можно отделить изотропную часть, не зависящую от пространственно-подобных тетрадных векторов, но включающую четыре-вектор скорости движения среды, от анизотропной части, явно содержащей $X^i_{(\alpha)}$. Важно подчеркнуть, что тетрадные четыре - векторы $X^i_{(\alpha)}$, также как и четыре - вектор скорости U^i, несут в себе и информацию о гравитационном поле и информацию о характере движения среды.

ЛЕКЦИЯ VI
ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМАЛИЗМА ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

6.1. Ассоциированные и оптические метрики

6.1.1. Геометрическая оптика

Метод эйконала [1] дает мощный инструмент для исследования электромагнитных волн в произвольно движущихся средах в случае, когда применимо приближение геометрической оптики, то есть, длина волны электромагнитных волн значительно меньше, чем размер неоднородности в среде. В этом случае принято представлять четыре-вектор потенциала электромагнитного поля как произведение медленно меняющейся амплитуды a_m на экспоненту с быстро меняющейся фазой Φ

$$A_m = a_m e^{i\Phi} \,. \tag{192}$$

Тогда главная часть тензора Максвелла представляется в виде

$$F_{mn} = i(k_m A_n - k_n A_m) \,, \quad k_m \equiv \nabla_m \Phi \,, \tag{193}$$

где четыре-вектор k_m, четыре-градиент фазы, называется волновым четыре-вектором. При отсутствии электрического тока и спонтанной поляризации - намагниченности в среде уравнения Максвелла в приближении геометрической оптики принимают алгебраический вид

$$C^{ilmn} k_l k_m A_n = 0 \,, \tag{194}$$

и мы имеем дело с однородной системой линейных уравнений относительно потенциала A_n. Условие нетривиальной совместности этой системы дает условие на волновой четыре-вектор k^m, известное как дисперсионное соотношение. В силу калибровочной инвариантности тензора Максвелла на потенциал A_n могут быть наложены дополнительные условия, которые облегчают анализ дисперсионных соотношений. Рассмотрим три известных случая, для которых выше мы построили материальный тензор C^{ikmn}.

6.1.2. Электромагнитные волны в вакууме

Воспользуемся соотношением (166) и представим (194) в виде

$$k^i[g^{ln}k_l A_n] - A^i[g^{lm}k_l k_m] = 0\,. \tag{195}$$

В качестве калибровочного условия выберем условие Лоренца

$$\nabla_l A^l = 0 \quad \to \quad g^{ln}k_l A_n = 0\,. \tag{196}$$

Тогда в силу (195) условие нетривиальной совместности полученной системы алгебраических уравнений сводится к требованию

$$g^{lm}k_l k_m = 0 \quad \to g^{lm}\nabla_l \Phi \nabla_m \Phi = 0\,. \tag{197}$$

Последнее равенство называется уравнением эйконала. Первое равенство в (197) означает, что волновой четыре-вектор изотропен с точки зрения метрики пространства - времени. Таким образом, вакуумная метрика, с одной стороны, может быть названа *ассоциированной*, поскольку материальный тензор (166) факторизуется с её помощью, а с другой стороны - *оптической* метрикой, поскольку свет распространяется вдоль геодезических линий в пространстве с такой метрикой.

6.1.3. Электромагнитные волны в пространственно изотропной среде

Решая алгебраическую задачу (194) для случая пространственно изотропной среды, воспользуемся полученным выше представлением (179) для тензора линейного отклика $C^{ikmn}_{(\mathrm{isotr})}$ и с учётом (175) перепишем данную систему в виде

$$g^{*im}k_m[g^{*ln}k_l A_n] - g^{*in}A_n[g^{*lm}k_l k_m] = 0\,. \tag{198}$$

Свернем данное уравнение с четыре-вектором U_i и получим скалярное следствие

$$(U^m k_m)[g^{*ln}k_l A_n] = U^n A_n[g^{*lm}k_l k_m]\,. \tag{199}$$

Затем воспользуемся калибровочным условием

$$U^n A_n = 0\,, \tag{200}$$

которое некоторыми авторами называется условием Ландау, хотя многие считают более привычным термин Кулоновская калибровка. Если принять условие (200), то есть считать, что потенциал электромагнитного поля пространственно - подобен и ортогонален четыре - вектору скорости среды, то из (199) при $U^m k_m \neq 0$ получим калибровочное условие Лоренца

$$g^{*ln} k_l A_n \equiv g^{ln} k_l A_n + (n^2 - 1) U^l U^n k_l A_n = g^{ln} k_l A_n = 0 \,. \tag{201}$$

При такой калибровке система (198) нетривиально совместна, если

$$g^{*lm} k_l k_m = 0 \,, \tag{202}$$

то есть, если волновой четыре-вектор k_m изотропен относительно ассоциированной метрики g^{*lm}. В этом случае ассоциированная метрика становится оптической, а уравнение эйконала имеет вид

$$n^2 (\mathcal{D}\Phi)^2 + g^{lm} \overset{\perp}{\nabla}_l \Phi \overset{\perp}{\nabla}_m \Phi = 0 \,. \tag{203}$$

Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в изотропной движущейся среде удобно записывать с помощью ковариантных величин: частоты и волнового три-вектора, которые определены следующим образом:

$$\Omega \equiv c U^m k_m = c \mathcal{D}\Phi \,, \quad \mathcal{K}_m \equiv \Delta^n_m k_n = \overset{\perp}{\nabla}_m \Phi \,. \tag{204}$$

В этих терминах связь частоты с квадратом волнового три-вектора выглядит классическим образом

$$\Omega^2 = \frac{c^2 \mathcal{K}^2}{n^2} \,, \quad \mathcal{K}^2 \equiv -g^{lm} \mathcal{K}_l \mathcal{K}_m \,. \tag{205}$$

Для того, чтобы найти компоненты потенциала A_m и установить поляризационные свойства электромагнитной волны, необходимо решить совместную систему уравнений

$$U^n A_n = 0 \,, \quad g^{ln} p_l A_n = 0 \,, \quad p_l \equiv \mathcal{K}_l / \mathcal{K} \,, \tag{206}$$

где скорость среды U^n и направление p_l трёхмерного волнового вектора считаются заданными величинами. Как и следовало ожидать, независимо от направления вектора поляризации $e_k \equiv \frac{A_k}{\sqrt{-A_m A^m}}$ и независимо от направления движения среды как целого, электромагнитная волна распространяется с постоянной фазовой скоростью $V_{(\mathrm{ph})} = \Omega/\mathcal{K} = c/n$ (205), если все величины измеряются в системе отсчета, связанной с движущейся средой.

6.1.4. Электромагнитные волны в пространственно анизотропной среде

В покоящихся анизотропных средах обнаружено явление двойного лучепреломления, признаком которого является различие фазовых скоростей у электромагнитных волн с разной поляризацией. В движущейся пространственно анизотропной среде проявление этого эффекта еще более усложняет структуру дисперсионного соотношения. Поэтому для иллюстрации решений данной задачи мы ограничимся случаем, когда тензор магнито - электрических коэффициентов и тензор спонтанной поляризации - намагниченности равны нулю. Обратим внимание на то, что свёртка уравнения (194) с четыре-вектором скорости среды с учётом разложения (61) приводит к соотношению

$$U_i C^{ilmn} k_l k_m A_n = (U^m k_m)[\varepsilon^{ln} k_l A_n] - [\varepsilon^{lm} k_l k_m](U^n A_n) = 0\,. \qquad (207)$$

Если воспользоваться калибровочным условием Ландау $U^n A_n$=0, то для ненулевой частоты ($U^m k_m = \Omega/c \neq 0$) получим обобщенное калибровочное условие

$$\varepsilon^{ln} k_l A_n = 0\,. \qquad (208)$$

Если среда изотропна, то ε^{ln}=$\varepsilon\Delta^{ln}$, поэтому в силу калибровки Ландау (208) сводится к калибровке Лоренца. В анизотропном случае система уравнений (194) приводится к упрощенному виду

$$\left[\varepsilon^{in}(U^m k_m)^2 + \eta^{ilp}\left(\mu^{-1}\right)_{pq}\eta^{mnq} k_l k_m\right] A_n = 0\,. \qquad (209)$$

Читателю рекомендуется в качестве **упражнения** проверить следующее утверждение: условие нетривиальной совместности системы (209) для потенциала A_n, связанного двумя линейными соотношениями $U^n A_n$=0 и

$\varepsilon^{ln}k_l A_n{=}0$, факторизуется и представляется уравнением

$$[g^{ij}_{(1)}\ k_i\ k_j]\cdot[g^{mn}_{(2)}\ k_m\ k_n]=0\,. \tag{210}$$

Символами $g^{ij}_{(1)}$ и $g^{mn}_{(2)}$ обозначены, соответственно, первая и вторая оптические метрики, представленные формулами

$$g^{ij}_{(1)}=\frac{1}{\varepsilon_{||}\mu_{\perp}}\Delta^{ij}+U^iU^j+\frac{1}{\mu_{\perp}}X^i_{(3)}X^j_{(3)}\left(\frac{1}{\varepsilon_{||}}-\frac{1}{\varepsilon_{\perp}}\right)\,, \tag{211}$$

$$g^{mn}_{(2)}=\frac{1}{\varepsilon_{\perp}\mu_{||}}\Delta^{mn}+U^mU^n+\frac{1}{\varepsilon_{\perp}}X^m_{(3)}X^n_{(3)}\left(\frac{1}{\mu_{||}}-\frac{1}{\mu_{\perp}}\right)\,. \tag{212}$$

Четыре-вектор скорости является собственным вектором для обоих тензоров и отвечает единичному собственному значению

$$g^{ij}_{(1)}U_j{=}U^i\,,\quad g^{mn}_{(2)}U_n{=}U^m\,,\quad g^{ij}_{(1)}U_iU_j{=}1\,,\quad g^{mn}_{(2)}U_mU_n{=}1\,. \tag{213}$$

В силу указанных свойств дисперсионные уравнения для волн первого и второго типов, которые получаются обращением в нуль одной из двух квадратных скобок (210), выглядят весьма просто

$$\Omega^2_{(1)}=-c^2g^{ij}_{(1)}\ \mathcal{K}_i\ \mathcal{K}_j\,,\quad \Omega^2_{(2)}=-c^2g^{mn}_{(2)}\ \mathcal{K}_m\ \mathcal{K}_n\,. \tag{214}$$

Отношение квадратов фазовых скоростей соответствующих электромагнитных волн

$$\left[\frac{V^{(1)}_{(\mathrm{ph})}}{V^{(2)}_{(\mathrm{ph})}}\right]^2=\frac{g^{ij}_{(1)}\ \mathcal{K}_i\ \mathcal{K}_j}{g^{mn}_{(2)}\ \mathcal{K}_m\ \mathcal{K}_n}\,, \tag{215}$$

как отношение двух квадратичных форм, не равно единице в общем случае, исключение составляет ситуация, когда электромагнитные волны распространяются вдоль оси симметрии, то есть, $\mathcal{K}^i=\delta^i_3\mathcal{K}$. Если $\varepsilon_{\perp}{=}\varepsilon_{||}\equiv\varepsilon$, а также $\mu_{\perp}{=}\mu_{||}\equiv\mu$, то есть среда изотропна, то первая и вторая оптические метрики совпадают и становятся равными ассоциированной метрике g^{*ij} (175).

6.2. Эффект Френеля - Физо

В 1818 году Френель (Fresnel) теоретически предсказал, а в 1851 году Физо (Fizeau) экспериментально подтвердил существование эффекта изменения скорости распространения света в оптически прозрачной движущейся жидкости с показателем преломления n. Найти фазовую скорость электромагнитной волны, распространяющейся в движущейся пространственно изотропной среде можно следующим образом. Рассмотрим уравнение (202), предположив, что задача решается в плоском пространстве - времени, и перепишем его как квадратное уравнение относительно компоненты k_0 волнового четыре-вектора:

$$(1+\alpha\vec{U}^2)k_0^2 - 2\alpha k_0 U^0(\vec{U},\vec{k}) + \alpha(\vec{U},\vec{k})^2 - \frac{1}{n^2}\vec{k}^2 = 0\,. \tag{216}$$

Здесь введены стандартные обозначения $U^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\vec{U} = \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\vec{v}$ - есть трёхмерная скорость движения среды. Мы используем также параметр $\alpha = 1-\frac{1}{n^2}$, предложенный Френелем для описания коэффициента увлечения света движущейся жидкостью (Френель полагал, что $n^2 > 1$ и $\alpha > 0$). Затем введем указательный вектор $\vec{p} = \vec{k}/k$, где k - модуль этого трёхмерного вектора, частоту $\omega = ck_0$, которую измеряет покоящийся наблюдатель, и наконец, фазовую скорость электромагнитной волны $V_{(\mathrm{ph})} \equiv ck_0/k$. Тогда в силу (216) фазовая скорость световой волны оказывается равной

$$V_{(\mathrm{ph})} = \frac{c}{n}\left\{\frac{\sqrt{1+\alpha[\vec{U}^2-(\vec{U},\vec{p})^2]} + \alpha n U^0(\vec{U},\vec{p})}{(1+\alpha\vec{U}^2)}\right\}. \tag{217}$$

Поперечный эффект Френеля-Физо описывается формулой, квадратичной по скорости

$$V^{(\perp)}_{(\mathrm{ph})} = \frac{c}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha\vec{U}^2}}\,, \quad (\vec{U},\vec{p}) = 0\,. \tag{218}$$

Если среда движется медленно по сравнению со скоростью света, то из (217) следует известная приближенная формула

$$V_{(\mathrm{ph})} \simeq \frac{c}{n} + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)(\vec{v},\vec{p})\,. \tag{219}$$

В гипотетической ситуации, когда трёхмерная скорость движения v среды близка к световой, теоретически возможен случай с нулевой фазовой скоростью. Действительно, если в уравнении (216) положить $k_0 = 0$, то найдем условие "остановки" светового сигнала

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (n^2 - 1)\cos^2\theta}}\,, \tag{220}$$

где θ - это угол между направлением скорости движения среды и направлением распространения света. Такой эффект теоретически возможен при $n^2 > 1$, при этом $v < c$. Наконец, если $0 < n^2 < 1$, то возможна ситуация, когда фазовая скорость обращается в бесконечность. Например, если выполнено условие $v = cn < c$, тогда знаменатель в (218) обращается в нуль. Необходимо отметить, что при этом условии в нуль обращается компонента g^{*00} оптической метрики (175), то есть у оптической метрики появляется особая точка.

6.3. Динамо-оптический эффект

Динамо-оптический эффект (см. [1]) связан с изменением диэлектрической проницаемости среды за счет неоднородности её движения. В рамках феноменологического подхода такую модель можно построить за счет введения тензора сдвига σ_{mn} (25) и скаляра растяжения Θ (27) в тензор диэлектрической проницаемости ε^{ik}:

$$\varepsilon^{ik} = \varepsilon\Delta^{ik} + \lambda_{(1)}\sigma^{ik} + \lambda_{(2)}\Delta^{ik}\Theta\,. \tag{221}$$

Здесь $\lambda_{(1)}$ и $\lambda_{(2)}$ - некие феноменологические константы с размерностью длины. Для простоты мы считаем, что пространство-время плоское, и что влияние динамики среды на магнитную проницаемость заметно слабее, чем на диэлектрическую. Предположим также, что динамическая модель стационарна и имеет аксиальную симметрию, три-вектор скорости движения среды направлен вдоль оси Ox^3, а неоднородность скорости связана с наличием ненулевой производной скорости вдоль той же оси. Тогда тензор сдвига имеет пять ненулевых компонент

$$\sigma_{00} = -\frac{2}{3}\Theta(U^3)^2\,, \quad \sigma_{03} = \frac{2}{3}\Theta U^0 U^3\,, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{1}{3}\Theta\,,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{2}{3}\Theta (U^0)^2 \,, \quad \Theta = \frac{\partial U^3}{\partial x^3} \,. \tag{222}$$

Тетрадные векторы в данной задаче выглядят достаточно просто

$$X^i_{(0)}{=}U^i{=}\delta^i_0 U^0{+}\delta^i_3 U^3 \,, \quad X^i_{(3)}{=}\delta^i_0 U^3{+}\delta^i_3 U^0 \,,$$

$$X^i_{(1)}{=}\delta^i_1 \,, \quad X^i_{(2)}{=}\delta^i_2 \,, \tag{223}$$

и расчет поперечных и продольных компонент полного тензора диэлектрической проницаемости дает следующие величины:

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon + \frac{1}{3}\Theta \left[\lambda_{(1)} - 3\lambda_{(2)}\right] \,,$$

$$\varepsilon_{||} = \varepsilon - \frac{1}{3}\Theta \left[2\lambda_{(1)} + 3\lambda_{(2)}\right] \,, \quad \mu_{\perp} = \mu_{||} = \mu \,. \tag{224}$$

Подставив эти выражения в (211) и (212), мы получим две несовпадающие оптические метрики:

$$g^{ij}_{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_{||}\mu}\Delta^{ij} + U^i U^j + \frac{\lambda_{(1)}\Theta}{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{||}\mu} X^i_{(3)} X^j_{(3)} \,, \tag{225}$$

$$g^{mn}_{(2)} = \frac{1}{\varepsilon_{\perp}\mu}\Delta^{mn} + U^m U^n \,. \tag{226}$$

Очевидно, что неоднородность движения среды индуцирует двойное лучепреломление. Вторая оптическая метрика не содержит тетрадного четыревектора $X^i_{(3)}$, и соответствующая световая волна может быть названа обыкновенной волной с показателем преломления $\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}\mu}$. Дисперсионное уравнение для необыкновенной волны задается первой оптической метрикой. При обращении в нуль скаляра растяжения поля скорости, то есть, при $\Theta = 0$, эффект динамического двойного лучепреломления исчезает, поскольку $\varepsilon_{\perp}{=}\varepsilon_{||}$ и оптические метрики $g^{ij}_{(1)}$ и $g^{ij}_{(2)}$ совпадают.

References

[1] [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982.

[2] [2] Л.И. Седов, А.Г. Цыпкин. *Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма.* М.: Наука, 1983.

[3] [3] Л.Т. Чёрный. *Релятивистские модели сплошных сред.* М.: Наука, 1983.

[4] [4] Ж. Можен. *Механика электромагнитных сплошных сред.* М.: Мир, 1991.

[5] [5] A.C. Eringen and G.A. Maugin. *Electrodynamics of Continua.* Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] [6] F.W. Hehl and Yu.N. Obukhov. *Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[7] [7] А.Б. Балакин. *Релятивистская теория многочастичных систем. Часть II. Релятивистская гидродинамика.* Казань: КГУ, 2003.

[8] [8] I. Brevik. *Physics Reports*, Vol. **52**, P. 133, 1979.

[9] [9] Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. *Основы кристаллофизики.* М.: Наука, 1975.