КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р. Н. Гумеров

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ - 2007

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико-математического факультета КГУ

Гумеров Р.Н.

Элементы общей топологии. Учебно-методическое пособие. — Казань: Казанский государственный университет, 2007. — 90 с.

В основу книги положены лекции специального курса по общей топологии, неоднократно читавшегося автором студентам механико-математического факультета Казанского университета, специализирующимся по функциональному анализу. Книга может быть рекомендована студентам и аспирантам физико-математических специальностей университетов.

Предисловие

В книге изложен материал семестрового спецкурса, неоднократно читавшегося автором для студентов механико-математического факультета Казанского государственного университета, специализировавшихся по функциональному анализу.

Предполагается, что читатель знаком с начальными понятиями, фактами и обозначениями канторовской теории множеств. Термины "набор", "совокупность", "множество" и "класс" для нас равнозначны. Набор множеств часто называется семейством множеств.

Книга делится на разделы, в которых двойной нумерацией, например, 10.16, выделены пункты, которые представляют собой определения, теоремы, утверждения, следствия, упражнения, примеры и замечания. Ссылаясь, скажем, на теорему 10.16 (соответственно на пример 2.2.3), мы имеем в виду пункт 10.16 в 10-м разделе (соответственно пример 3 пункта 2.2). В предметном указателе используются ссылки на пункты и разделы. Знак := означает равенство по определению.

Автор благодарен В.Е. Фомину и А.Н. Шерстневу, сделавшим ряд ценных предложений по усовершенствованию книги. Автор также благодарен Д.Х. Муштари, который прочитал рукопись и сделал ценные замечания.

0. Сведения из теории множеств

В данном разделе мы приводим некоторые необходимые понятия и факты, которые широко используются в математических рассуждениях.

Начнем с аксиомы, которая, в частности, доставляет метод построения множеств из уже имеющихся.

0.1. Аксиома выбора. *Для любого семейства попарно непересекающихся непустых множеств существует множество, содержащее ровно по одному элементу из каждого множества этого семейства.*

Доказательства целого ряда математических фактов используют эту аксиому. Среди них, в частности, стандартное доказательство эквивалентности двух определений (по Коши и по Гейне) непрерывности числовой функции в точке [1, с.74]. Интересное обсуждение аксиомы выбора содержится, например, в [7]. Эта аксиома допускает различные эквивалентные формулировки. В дальнейшем мы укажем некоторые из них.

0.2. Определения. Пусть Λ — произвольное непустое множество. *Индексированным семейством* $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ множеств A_λ называется функция, ставящая в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ множество A_λ. Часто используется обозначение $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. При этом Λ называется *множеством индексов.*

Произвольное непустое семейство множеств можно рассматривать как индексированное. Действительно, для этого достаточно взять каждый элемент семейства в качестве его собственного индекса.

Несколько слов об обозначениях. Семейства множеств будут обозначаться буквами $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ Семейство всех подмножеств данного множества X будет обозначаться через $\mathcal{P}(X)$. Заметим, что множество $\mathcal{P}(\varnothing)$ всех подмножеств пустого множества $\varnothing$ само является непустым множеством, а именно, оно состоит из единственного элемента — множества $\varnothing$. Функция f из множества X в множество Y, ставящая в соответствие произвольному элементу $x \in X$ некоторый элемент $y \in Y$, обозначается следующим образом:

$$f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto y.$$

Объединение и пересечение семейства множеств $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ обозначаются соответственно

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \quad \text{и} \quad \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

Укажем формулировку аксиомы выбора, которая удобна в техническом отношении.

0.3. Аксиома выбора для индексированных семейств.

Для каждого семейства $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *непустых множеств существует такая функция*

$$f : \Lambda \longrightarrow \bigcup \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\},$$

что $f(\lambda) \in A_\lambda$ *для любого* $\lambda \in \Lambda$.

Упомянутая в аксиоме функция называется *функцией выбора* для семейства $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

В следующей формулировке аксиомы выбора будет использоваться понятие декартова произведения.

0.4. Определение. *Декартовым произведением* $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ семейства множеств $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ называется множество всех таких функций $f : \Lambda \longrightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, что $f(\lambda) \in A_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$.

Для $f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ элемент $f(\lambda) \in A_\lambda$ называется λ–й *координатой* f. Элемент произведения $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, λ–я координата которого есть элемент $a_\lambda \in A_\lambda$, обозначается символами $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ или $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Таким образом, мы можем написать

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid \forall\lambda \in \Lambda : a_\lambda \in A_\lambda\}.$$

Для индекса $\mu \in \Lambda$ функция $p_\mu : \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow A_\mu : (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \longmapsto a_\mu$ называется *проекцией* декартова произведения $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ на μ–е координатное множество A_μ.

Отметим, что между множеством $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, где $\Lambda = \{1, 2, \ldots , n\}$ — конечное множество индексов, и произведением $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, которое определяется как набор всех упорядоченных строк $(a_1, a_2, \ldots , a_n)$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots , a_n \in A_n$, очевидным образом строится биекция. Поэтому мы отождествляем эти множества, то есть рассматриваем их как одно и то же множество.

Предположим, что для некоторого множества A и для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ имеем равенство $A = A_\lambda$. Тогда декартово произведение $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ представляет собой множество всех функций из Λ в A и обозначается A^Λ. Как обычно, для произвольного n из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ через $\mathbb{R}^n$ обозначается декартово произведение n экземпляров множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Теперь сформулируем аксиому выбора в терминах декартовых произведений множеств.

0.5. Аксиома выбора для декартовых произведений.
Пусть $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *— семейство непустых множеств. Тогда декартово произведение* $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ *не является пустым множеством.*

Для того, чтобы сформулировать другие утверждения, эквивалентные аксиоме выбора, нам понадобится понятие порядка на множестве, которое важно само по себе.

Сначала напомним, что *бинарное отношение* на множестве A — это некоторое подмножество R декартова произведения $A \times A$. Вместо $(a, b) \in R$ часто пишут aRb. Мы будем использовать символы $\prec, <, \leqslant$, а не букву R как знак отношения. Например, мы пишем $a \prec b$ (и $b \succ a$) вместо aRb. При этом отношение $a \prec b$ обычно выражают словами "*a предшествует b*".

0.6. Определения. Бинарное отношение $\prec$ на множестве A называется *отношением порядка* (или просто *порядком*), если это отношение обладает следующими свойствами:

1) (рефлексивность) $a \prec a$ для всех $a \in A$;
2) (антисимметричность) $a \prec b$ и $b \prec a \Rightarrow a = b$ для всех $a, b \in A$;
3) (транзитивность) $a \prec b$ и $b \prec c \Rightarrow a \prec c$ для всех $a, b, c \in A$.

Множество A с заданным на нём порядком $\prec$ называют *упорядоченным* (или *частично упорядоченным*). Говорят также, что отношение $\prec$ *упорядочивает* множество A. Два элемента a, b упорядоченного множества *сравнимы*, если $a \prec b$ или $b \prec a$. Отметим, что в определении порядка не требуется, чтобы любые два элемента множества были сравнимы. Добавляя это требование, мы получаем определение *линейного* (или *совершенного*) порядка. Множество с линейным порядком называется *линейно упорядоченным* (или *совершенно упорядоченным*).

Заданный на множестве порядок естественным образом порождает порядок на каждом его подмножестве. При этом порядок подмножества может оказаться линейным; в этом случае подмножество называется *цепью*. Очевидно, что всякое подмножество линейно упорядоченного множества является цепью.

Напомним также, что бинарное отношение $\prec$ на множестве A называется *симметричным*, если $a \prec b \Rightarrow b \prec a$ для всех $a, b \in A$. Если такое отношение, вдобавок, рефлексивно и транзитивно, то оно называется *отношением эквивалентности* на множестве A. Как известно, всякое отношение эквивалентности на множестве A определяет разбиение A на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности этого отношения. И обратно, если множество A разбито в объединение непересекающихся подмножеств, то бинарное отношение "лежать в одном подмножестве" является отношением эквивалентности на множестве A.

0.7. Примеры порядков. 1) Числовые множества (т.е. подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$) с естественным порядком. Очевидно, они линейно упорядочены. 2) Любое множество можно сделать упорядоченным, объявив, что любой его элемент предшествует только самому себе. Такой порядок называется *дискретным.* 3) Множество всех подмножеств $\mathcal{P}(X)$ заданного множества X упорядочивается отношениями включения, либо обратного включения, то есть:

$$(Y \prec Z) := (Y \subset Z), \quad \text{либо} \quad (Y \prec Z) := (Z \subset Y).$$

4) На множестве букв русского алфавита по традиции определен *алфавитный* порядок: а$\prec$ б $\prec \ldots \prec$ я. 5) На множестве слов русского языка определен так называемый *лексикографический* порядок, принятый в словарях. Его можно задать так: $v \prec w$, если либо слово v является началом слова w (например, такт $\prec$ тактика), либо ни одно из этих слов не является началом другого, и первая по порядку буква слова v, в которой v и w отличаютя, предшествует в алфавитном порядке соответствующей букве слова w. Конечно же, алфавитный и лексикографический порядки линейны. 6) Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ упорядочено отношением $(z = x + iy \prec w = u + iv) := (x \leqslant u \quad \text{и} \quad y \leqslant v)$, где $\leqslant$ — естественный порядок на множестве $\mathbb{R}$. Этот порядок не линеен. Подмножество $\{z \in \mathbb{C} : z = x + ix, x \in \mathbb{R}\}$ является цепью.

0.8. Определения. Пусть $(A, \prec)$ — упорядоченное множество и B — непустое подмножество A. Элемент $a \in A$ называется *мажорантой* множества B, если $b \prec a$ для любого $b \in B$. Элемент множества A называется *максимальным*, если он не предшествует никакому другому элементу в A. Элемент множества A называется *наибольшим*, если каждый элемент множества A предшествует ему. Элемент некоторого множества называется *наименьшим*, если он предшествует всем элементам этого множества. Множество A называется *вполне упорядоченным*, а порядок — *вполне упорядочением*, если каждое непустое подмножество множества A обладает наименьшим элементом.

Ясно, что во множестве с дискретным порядком каждый элемент является максимальным. Множество натуральных чисел с естественным порядком вполне упорядочено, а множество действительных чисел с естественным порядком — нет.

0.9. Упражнения. 1) Наибольший элемент всегда максимален, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно. 2) Вполне упорядоченное множество линейно упорядочено. 3) Вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент. 4) Вполне упорядоченное множество может как иметь, так и не иметь наибольший элемент.

0.10. Лемма Цорна. *Пусть A — непустое упорядоченное множество, такое, что всякая его цепь обладает мажорантой в A. Тогда в A существует (хотя бы один) максимальный элемент.*

0.11. Теорема Цермело. *Всякое множество может быть вполне упорядочено.*

Отметим, что в последнем утверждении речь идет лишь о существовании указанного порядка и ничего не говорится о его явном построении. Уже на множестве $\mathbb{R}$ такого конкретного порядка указать не удаётся.

Известно, что аксиома выбора, лемма Цорна и теорема Цермело являются эквивалентными высказываниями. Доказательство этого факта см., например, в [6].

Читатель, по-видимому, уже "исполнял ритуальный танец вокруг леммы Цорна" при доказательстве существования базиса Гамеля или при доказательстве леммы Крулля.

Теорема Цермело позволяет расширить границы применения доказательств по индукции, а именно, эта теорема является фундаментом доказательств по так называемой трансфинитной индукции. Принцип трансфинитной индукции, который обобщает хорошо известный принцип математической индукции, заключается в следующем.

Пусть X — некоторое непустое множество и пусть каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое утверждение $P(x)$. Мы хотим доказать, что все эти утверждения верны. В случае счётного множества X для этого можно использовать принцип математической индукции. В случае произвольного X теорема Цермело позволяет сначала вполне упорядочить это множество, а потом воспользоваться следующим принципом.

0.12. Теорема (принцип доказательства по трансфинитной индукции). *Пусть $(X, \prec)$ — вполне упорядоченное множество, 0 — наименьший элемент этого множества, и пусть каждому элементу $x \in X$ соответствует некоторое утверждение $P(x)$. Пусть при этом* *выполняются следующие два условия:*

1) утверждение $P(0)$ верно;

2) если $z \in X$ и $P(y)$ верно для всех $y \in X$, таких, что $y \neq z$ и $y \prec z$, то $P(z)$ тоже верно.

Тогда утверждение $P(x)$ верно для любого $x \in X$.

Доказательство. Обозначим через F множество всех $x \in X$, для которых $P(x)$ неверно. Мы должны показать, что $F = \varnothing$. Предположим противное, то есть $F \neq \varnothing$. Так как F — непустое подмножество вполне упорядоченного множества, то в F существует наименьший элемент, который обозначим через x_0. Заметим, что $0 \prec x_0$ и $0 \neq x_0$ (по условию 1)). Для каждого элемента $y \in X$, такого, что $y \neq x_0$ и $y \prec x_0$, утверждение $P(y)$ верно. Поэтому, в силу условия 2), $P(x_0)$ также верно. Значит, $x_0 \notin F$. Противоречие.

1. Метрические пространства

В различных областях математики и физики важную роль играет понятие расстояния между точками. Аксиоматизация свойств, которыми обладает расстояние на прямой, плоскости и в трёхмерном пространстве, привела математиков в начале двадцатого столетия к введению понятия метрического пространства. Класс метрических пространств представляет собой наиболее изученный класс топологических пространств. Введение структуры метрического пространства позволяет описывать свойства объектов на геометрическом языке и применять геометрическую интуицию.

1.1. Определения. *Метрическим пространством* называется пара (X, d), состоящая из непустого множества X и функции $d : X \times X \longrightarrow [0; +\infty)$, удовлетворяющей следующим условиям:

(M1) $d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$;

(M2) (симметричность) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M3) (неравенство треугольника) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$;

где x, y, z — произвольные элементы X.

Множество X в этом случае называется *пространством*, его элементы — *точками*, функция d — *метрикой* на X, а число $d(x, y)$ — *расстоянием между точками x и y*. Очень часто, когда ясно о какой метрике идет речь, метрическое пространство обозначается просто X. Для точки $x \in X$ и положительного числа r множество

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

называется *открытым шаром с центром в точке x радиуса r*. Если в этом определении неравенство $d(x, y) < r$ заменить на нестрогое неравенство $d(x, y) \leqslant r$, то получим определение *замкнутого шара с центром в точке x радиуса r*. Если (X, d) — метрическое пространство и A — подмножество множества X, то ограничение метрики d на множество $A \times A$ называется *индуцированной метрикой.* Обычно она обозначается той же буквой, что и метрика, которая индуцирует её. Метрическое пространство A с индуцированной метрикой называется *подпространством* пространства X.

1.2. Примеры метрических пространств. 1) Множество $\mathbb{R}$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$, которая называется *евклидовой.* 2) Пусть X — произвольное множество и d — функция, определяемая формулой

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \neq y; \\ 0, & \text{если} \quad x = y. \end{cases}$$

В этом случае d называется *дискретной метрикой*, а (X, d) — *дискретным метрическим* пространством . 3) На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим три метрики d_1, d_2 и d_∞, определяемые следующим образом:

$$d_1(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|, \quad d_2(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$d_\infty(P_1, P_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\},$$

где $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$ — точки плоскости $\mathbb{R}^2$. Метрика d_2 называется *евклидовой*. Открытые шары с центром в точке $(0, 0)$ радиуса 1 для соответствующих пространств изображены на рисунке

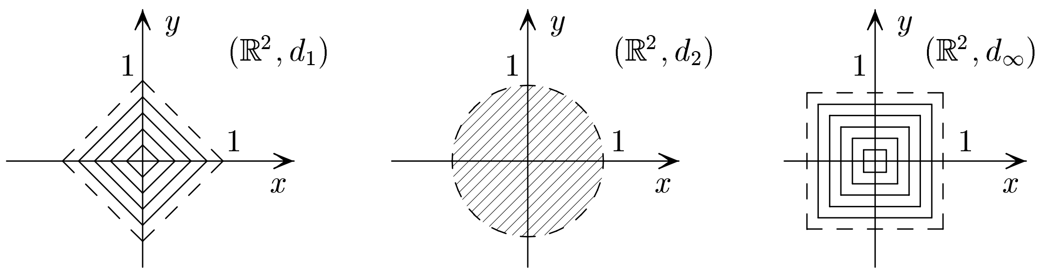


*Рис.*1

Аналогично вводятся метрики на множестве $\mathbb{R}^n$. 4) Пусть $(N, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство над полем действительных или комплексных чисел. Говорят, что *норма порождает* метрику на векторном пространстве N, которая задается так:

$$d(x, y) := \|x - y\|, \qquad x, y \in N.$$

5) Рассмотрим векторное пространство $C[0, 1]$ непрерывных действительнозначных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$. Операция умножения функции на число и операция суммы двух функций задаются поточечно:

$$(\alpha f)(t) := \alpha f(t); \quad (f + g)(t) := f(t) + g(t); \alpha \in \mathbb{R}, f, g \in C[0, 1], t \in [0, 1].$$

Зададим норму на $C[0, 1]$ формулой $\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}$. Это определение корректно, поскольку непрерывная функция $|f(\cdot)|$, заданная на отрезке $[0, 1]$, достигает своего максимума в некоторой точке этого отрезка. Норма $\|\cdot\|_\infty$ называется *равномерной*, а порождаемая ею метрика d_∞ называется *метрикой равномерной сходимости.* Очевидно, что для f и g из $C[0, 1]$ величина $d_\infty(f, g)$ представляет собой расстояние между наиболее удалёнными точками графиков этих функций, лежащими на одной вертикали.

1.3. Определения. Пусть $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ — отображение между метрическими пространствами. Это отображение называется

- *изометрическим*, если $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$ для всех $x, y \in X$;
- *изометрией*, если оно является изометрическим и биективным;
- *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in X$, удовлетворяющих условию $d(x_0, x) < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$;
- *непрерывным*, если оно является непрерывным в каждой точке пространства X;
- *равномерно непрерывным,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $d(x, y) < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

1.4. Определение. Если между двумя метрическими пространствами существует изометрия, то эти пространства называются *изометричными.*

1.5. Замечание. С точки зрения теории метрических пространств изометричные пространства не различаются. Совокупность всех метрических пространств распадается на классы эквивалентности, образованные попарно изометричными пространствами. Свойство метрического пространства, которым также обладает каждое изометричное ему метрическое пространство, называется *метрическим инвариантом.*

1.6. Определения. Пусть (X, d) — метрическое пространство . Подмножество $O \subset X$ называется *открытым* в X, если для всякой точки $x \in O$ найдется $\varepsilon > 0$, для которого $B_\varepsilon(x) \subset O$. Мы обозначаем через τ_d семейство всех открытых множеств пространства (X, d). Подмножество пространства X называется *замкнутым*, если дополнение этого подмножества в X является открытым множеством.

1.7. Упражнение. Любой открытый (замкнутый) шар произвольного метрического пространства является открытым (замкнутым) множеством в этом пространстве.

Непосредственно проверяется, что имеет место

1.8. Теорема (о свойстве открытых множеств). *Семейство открытых множеств произвольного метрического пространства обладает следующими свойствами:*

O1) Пустое множество и само пространство являются открытыми множествами;

O2) Пересечение любого конечного семейства открытых множеств является открытым множеством;

O3) Объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством.

Многие свойства метрических пространств и отображений между ними формулируются в терминах открытых множеств. Например, отображение $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ является непрерывным тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества из τ_ρ принадлежит семейству τ_d.

1.9. Определение. Две метрики d_1 и d_2 на множестве X называются *эквивалентными,* если $\tau_{d_1}{=}\tau_{d_2}$.

1.10. Упражнение. На множестве $\mathbb{R}^2$ метрики d_1, d_2 и d_∞ (см. пример 1.2.3) эквивалентны, т.е. семейства открытых множеств τ_{d_1}, τ_{d_2} и τ_{d_∞} совпадают.

Следующее утверждение является удобным критерием проверки эквивалентности метрик.

1.11. Теорема. *Две метрики d_1 и d_2 на множестве X являются эквивалентными тогда и только тогда, когда они индуцируют одну и ту же сходимость, т. е. для любой точки $x \in X$ и любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек множества X условия $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d_1(x_n,x) = 0$ и $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d_2(x_n,x) = 0$ равносильны.*

В связи с этим напомним

1.12. Определения. Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$ метрического пространства (X,d) называется *сходящейся* к точке $x \in X$, если последовательность действительных чисел $d(x,x_1), d(x,x_2)\ldots$ сходится к нулю. В этом случае точка x называется *пределом* указанной последовательности точек.

1.13. Замечание. Из условий (M1) и (M3) определения 1.1 вытекает, что всякая последовательность точек в метрическом пространстве может иметь не более одного предела.

1.14. Определения. Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$ метрического пространства (X, d) называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для любых чисел $n, m > N$ выполнено неравенство $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным.*

1.15. Замечание. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

1.16. Замечание. В курсе функционального анализа показывается, что, подобно тому как из рациональных чисел можно построить действительные числа, из каждого не полного метрического пространства можно построить соответствующее ему полное метрическое пространство.

Полные пространства обладают важными свойствами, которые позволяют доказывать многочисленные теоремы существования в анализе. Ниже мы ограничимся формулировкой лишь двух из этих свойств.

Обобщением принципа вложенных отрезков, известного из курса математического анализа, является следующий принцип вложенных шаров.

1.17. Теорема. *В полном метрическом пространстве любая последовательность замкнутых, вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет одну общую точку.*

1.18. Замечание. Справедливость этого утверждение является характеристическим свойством полных метрических пространств.

Одна из эквивалентных формулировок фундаментальной теоремы Бэра выглядит следующим образом.

1.19. Теорема. *Пусть полное метрическое пространство представлено в виде объединения последовательности своих замкнутых подмножеств. Тогда хотя бы одно из этих подмножеств содержит открытый шар.*

Несмотря на то, что понятие метрического пространства является обобщением понятия евклидова пространства, в произвольных метрических пространствах ситуация может оказаться необычной для нашей интуиции. Мы завершаем раздел одним из стандартных примеров, иллюстрирующих это высказывание.

1.20. Пример. В метрическом пространстве шар может содержать шар большего радиуса. В качестве метрического пространства (X, d)

возьмём подпространство

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$$

пространства $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой. В пространстве (X, d) рассмотрим шары $B_3((0, 0))$ и $B_4((2, 0))$. Очевидно, что

$$B_4((2, 0)) = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 < 16\} \subset B_3((0, 0)) = X.$$

Таким образом, шар $B_4((2, 0))$ радиуса 4 строго содержится в шаре $B_3((0, 0))$ радиуса 3 (см. Рис. 2).

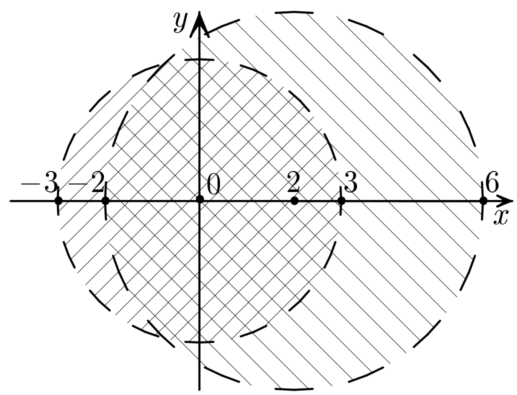


Рис.2

2. Понятие топологического пространства

Понятие топологического пространства является естественным обобщением понятия метрического пространства. Анализ целого ряда важнейших понятий теории метрических пространств показывает, что они могут быть описаны в терминах открытых множеств без привлечения понятия метрики. Топологическое пространство определяется как множество, в котором выделены некоторые подмножества, удовлетворяющие определённым аксиомам. В качестве таких аксиом берутся основные свойства открытых множеств метрического пространства.

2.1. Определения. Пусть X — произвольное множество. Семейство τ подмножеств множества X называется *топологией*, если для него выполняются условия O1) – O2) из 1.8, т.е.,

O1) $\varnothing, X \in \tau$;

O2) Если $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \tau$, $n \in \mathbb{N}$, то $O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n \in \tau$;

O3) Если $\mathcal{A} \subset \tau$, то $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Множества, принадлежащие топологии τ, называются *τ–открытыми* или просто *открытыми*. Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*. Множество X называется *пространством*, а его элементы — *точками*. Если из контекста ясно, о какой топологии на множестве X идёт речь, то топологическое пространство (X, τ) часто обозначают просто одной буквой X.

2.2. Примеры. 1) Для всякого метрического пространства (X, d) пара (X, τ_d) является топологическим пространством (см. 1.8). Семейство τ_d называется *топологией, порожденной (индуцированной) метрикой* d. В частности, $\mathbb{R}^1 := (\mathbb{R}, \tau_d)$, где d — евклидова метрика, является топологическим пространством. При этом τ_d называется *естественной или евклидовой топологией* действительной прямой. 2) Пусть X — произвольное множество и пусть $\tau_{\min} := \{\varnothing, X\}$, а $\tau_{\max} = \mathcal{P}(X)$. Легко убедиться, что семейства $\tau_{\min}$ и $\tau_{\max}$ являютя топологиями на X, которые, соответственно, называются *антидискретной*(или *тривиальной*) и *дискретной*. 3) Рассмотрим множество $X = \{a, b\}$, состоящее из двух различных точек. Помимо антидискретной и дискретной топологий на множестве X существуют ещё две топологии: $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ и $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$. Пространство $(X, \tau_{\min})$ называется *слипшимся двоеточием*, а пространство (X, τ_i) — *связным двоеточием* $(i = 1, 2)$. 4) Пусть X — произвольное бесконечное множество и пусть

$$\tau := \{\varnothing\} \cup \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \text{множество} \quad CA := X \setminus A \quad \text{конечно}\}.$$

Семейство τ образует топологию, которая называется *топологией Зарисского.*

2.3. Замечание. Часто возникает ситуация, когда метрическое пространство можно изначально рассматривать как топологическое пространство с топологией, порожденной метрикой. Этот факт подводит к понятию метризуемого пространства.

2.4. Определения. Пространство (X, τ) называется *метризуемым*, если на множестве X можно ввести такую метрику, что порождаемая ею топология в X совпадает с τ. Метрики на X, индуцирующие одну и ту же топологию, называются *топологически эквивалентными.*

Из примеров видно, что на одном и том же множестве можно задавать различные топологии.

2.5. Определения. Если τ_1 и τ_2 — две топологии на множестве X и $\tau_1 \subset \tau_2$, то говорят, что топология τ_2 *сильнее(тоньше)* топологии τ_1 или что топология τ_1 *слабее(грубее)* топологии τ_2. Две топологии на X называются *несравнимыми*, если ни одна из них не содержит другой.

Для топологий примера 2.2.3 имеем включения $\tau_{\min} \subset \tau_1 \subset \tau_{\max}$ и $\tau_{\min} \subset \tau_2 \subset \tau_{\max}$; при этом топологии τ_1 и τ_2 несравнимы. Топология Зарисского слабее естественной топологии на множестве вещественных чисел.

Очевидно, что семейство всех топологий на произвольном множестве частично упорядочено отношением включения. В этом упорядоченном множестве всегда имеется наименьший элемент — антидискретная топология и наибольший элемент — дискретная топология .

2.6. Определение. *Окрестностью* точки топологического пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

Отметим, что иногда окрестность точки $x \in X$ определяют как любое множество $A \subset X$, для которого существует открытое множество O, такое, что $x \in O \subset A$.

2.7. Утверждение. *Непустое подмножество топологического пространства открыто в том и только том случае, когда вместе с каждой точкой оно содержит и некоторую ее окрестность.*

2.8. Определение. Подмножество F топологического пространства называется *замкнутым*, если его дополнение $CF := X \setminus F$ открыто.

Так как $C\varnothing = X$ и $CX = \varnothing$, то все пространство и пустое множество являются не только открытыми, но и замкнутыми множествами в произвольном топологическом пространстве.

2.9. Определение. Множества, которые одновременно и открыты, и замкнуты, называются *открыто-замкнутыми.*

2.10. Примеры. 1) В антидискретном топологическом пространстве лишь пустое множество и все пространство являются замкнутыми множествами. 2) В дискретном топологическом пространстве все подмножества являются открыто-замкнутыми. 3) В пространстве $\mathbb{R}^1$ открыто-замкнутыми являются лишь пустое множество и все пространство. Отрезок $[a, b]$ замкнут в $\mathbb{R}^1$. 4) Пусть (X, τ_1) — пространство из 2.2.3. Замкнутыми множествами этого пространства являются $\varnothing, X, \{b\}$. Множество $\{a\}$ замкнутым не является. Этот пример показывает, что множество, состоящее из конечного числа точек, может быть не замкнутым.

Семейство замкнутых множеств топологического пространства обладает свойствами, двойственными к свойствам O1) – O3) открытых множеств. А именно:

C1) Пустое множество и само пространство замкнуты;

C2) Объединение любого конечного семейства замкнутых множеств замкнуто;

C3) Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

Свойства замкнутых множеств могут быть взяты в качестве аксиом, определяющих замкнутые множества. После этого можно определить открытые множества в качестве их дополнений. Другими словами, на произвольном множестве можно ввести топологию, задав сперва замкнутые множества.

Сформулируем эти наблюдения в виде утверждения.

2.11. Теорема. *Пусть X — произвольное множество и ν — семейство подмножеств этого множества, которое удовлетворяет свойствам C1) – C3). Пусть τ — семейство, состоящее из дополнений к множествам из ν. Тогда τ — топология на X, а ν является семейством замкнутых множеств топологического пространства (X, τ).*

2.12. Определения. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой* множества $A \subset X$, если всякая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от x. Множество всех предельных точек множества A называется *производным множеством* множества A и обозначается A'.

2.13. Пример. В пространстве $\mathbb{R}^1$ рассмотрим множества: натуральных чисел $\mathbb{N}$, $B := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $C := (0,1)$ и $D := [0,1]$. Имеем равенства: $\mathbb{N}' = \varnothing$, $B' = \{0\}$, $C' = D' = D$. Отметим, что точка 0 не лежит в множестве B.

2.14. Теорема. *Для того чтобы подмножество топологического пространства было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все свои предельные точки.*

До конца этого раздела A и B — некоторые подмножества топологического пространства (X, τ).

2.15. Теорема. *Множество $A \cup A'$ замкнуто.*

Доказательство. Проверим, что дополнение этого множества открыто. Пусть $x \in C(A \cup A')$. Тогда $x \notin A$ и $x \notin A'$. Значит, существует такая окрестность O точки x, что $O \cap A = \varnothing$. При этом также справедливо равенство $O \cap A' = \varnothing$. Иначе нашлась бы точка $y \in O \cap A'$, для которой множество O служило бы окрестностью, содержащей по крайней мере одну точку из A. Но это противоречило бы равенству $O \cap A = \varnothing$. Таким образом, $O \subset C(A \cup A')$. Дальнейшее рассуждение очевидно.

2.16. Определения. Точки множества $A \setminus A'$ называются *изолированными точками* множества A. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества A, если любая окрестность x содержит хотя бы одну точку множества A.

2.17. Утверждение. *Всякая точка прикосновения множества является либо его изолированной точкой, либо его предельной точкой.*

2.18. Пример. Каждая точка множества B из 2.13 является изолированной точкой этого множества. Множество $B \cup \{0\}$ представляет собой множество всех точек прикосновения для B.

Рассмотрим семейство $\mathcal{C}_A$ всех замкнутых подмножеств пространства X, содержащих множество A. Поскольку $X \in \mathcal{C}_A$, то семейство $\mathcal{C}_A$ непусто.

2.19. Определение. *Замыканием* (или *τ–замыканием*) множества A называется множество $\bigcap \mathcal{C}_A$. Оно обозначается $\overline{A}$.

Свойство C3) замкнутых множеств гарантирует замкнутость множества $\overline{A}$. Так как $\overline{A}$ является подмножеством всякого замкнутого множества, содержащего A, то $\overline{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Из этого немедленно вытекает

2.20. Утверждение. *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.*

2.21. Утверждение. *Если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

2.22. Теорема. $\overline{A} = A \cup A'$.

Доказательство. Так как $A \subset A \cup A'$, то, в силу предыдущего утверждения, $\overline{A} \subset \overline{A \cup A'}$. Но множество $A \cup A'$ замкнуто (см.2.15). Поэтому оно совпадает со своим замыканием. Следовательно, $\overline{A} \subset A \cup A'$.

Для доказательства обратного включения сперва заметим, что $A \subset \overline{A}$, и покажем, что $A' \subset \overline{A}$. Действительно, если точка x принадлежит производному множеству A', то она является предельной точкой всякого множества, которое содержит A. Поэтому (см. 2.14) точка x принадлежит каждому замкнутому множеству, содержащему A, а потому она принадлежит и множеству $\overline{A}$.

2.23. Следствие. *Точка x принадлежит $\overline{A}$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности O точки x множество $O \cap A$ непусто, то есть $\overline{A}$ совпадает с множеством всех точек прикосновения множества A.*

2.24. Теорема. *Справедливы следующие свойства:*

$$1)\quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}; \qquad 2)\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \qquad 3)\quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Доказательство. Первое свойство вытекает из того, что замыкание всякого множества замкнуто.

Далее, так как $A, B \subset A \cup B$, то $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Поэтому

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Теперь в обратную сторону. Поскольку $A \subset \overline{A}$ и $B \subset \overline{B}$, то $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Но последнее множество замкнуто как объединение двух замкнутых множеств. Отсюда, по определению замыкания, получаем обратное включение

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Из полученных включений следует свойство 2).

Наконец, для доказательства третьего свойства заметим, что множество $A \cap B$ содержится и в A и в B. Отсюда заключаем, что $\overline{A \cap B}$ является подмножеством и $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Иными словами, имеет место включение $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

2.25. Примеры. 1) Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $A_n = (1/n; 1-1/n)$ рассматривается как подмножество пространства $\mathbb{R}^1$. Очевидно, для объединений по всем натуральным числам n имеем равенства:

$$\bigcup \overline{A_n} = (0,1), \qquad \overline{\bigcup A_n} = [0,1].$$

2) Пусть X — произвольное несчётное множество, наделённое топологией Зарисского. Пусть для каждого натурального числа n задано непустое конечное множество A_n и множество $C := \cup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно. Нетрудно видеть, что объединение замыканий всех множеств A_n является счетным множеством, а $\overline{C}$ — несчетное множество.

Таким образом, для бесконечного числа подмножеств свойство 2) предыдущей теоремы, вообще говоря, неверно.

2.26. Пример. В пространстве $\mathbb{R}^1$ рассмотрим множества рациональных и иррациональных чисел: $A := \mathbb{Q}$, $B := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Очевидно, что $\overline{A \cap B} = \varnothing$, а $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$. Этот пример показывает, что в свойстве 3) предыдущей теоремы включение может быть строгим.

2.27. Определение. Точка $x \in X$ называется *внутренней точкой* множества A, если существует такая окрестность O этой точки, что $O \subset A$.

2.28. Определение. Совокупность всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества* A и обозначается $\mathrm{Int}A$.

Основные свойства оператора взятия внутренности приводятся в следующей теореме.

2.29. Теорема. *Справедливы следующие свойства:*

1) $\mathrm{Int}A \in \tau$;

2) $\mathrm{Int}A$ — наибольшее открытое множество, содержащееся в A, или, что эквивалентно, объединение всех открытых множеств, содержащихся в A;

3) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}A$;

4) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}B$;

5) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$;

6) $\mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$.

2.30. Примеры. 1) Для множеств A и B из примера 2.26 имеем строгое включение

$$\varnothing = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B \subset \mathrm{Int}(A \cup B) = \mathbb{R}.$$

Данный пример также показывает, что из равенств $\overline{A} = \overline{B}$ и $\mathrm{Int}A = \mathrm{Int}B$ не следует равенство $A = B$. 2) Пусть X — антидискретное топологическое пространство и $A \subset X$. Тогда $\mathrm{Int}A = X$, если $A = X$, и $\mathrm{Int}A = \varnothing$, если A не совпадает с X. 3) Поскольку в дискретном топологическом пространстве все множества открыто-замкнуты, то каждое подмножество является и открытым и замкнутым. 4) В пространстве $\mathbb{R}^1$, например, $\mathrm{Int}\mathbb{N} = \varnothing$, $\mathrm{Int}[a, b] = (a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Используя подмножество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, легко видеть, что операции взятия внутренности и взятия замыкания не коммутируют. Действительно, справедливы равенства:

$$\overline{\mathrm{Int}\mathbb{Q}} = \varnothing, \qquad \mathrm{Int}\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

2.31. Определение. *Границей* A называется множество

$$\overline{A} \cap \overline{CA} = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}A,$$

которое обозначается ∂A или $\mathrm{Fr}A$.

2.32. Замечания. 1) Граница множества замкнута. 2) Ясно, что точка x принадлежит границе множества A тогда и только тогда, когда для всякой окрестности O этой точки множества $O \cap A$ и $O \cap CA$ не являются пустыми. 3) Граница произвольного множества и граница его дополнения совпадают.

Легко проверяются критерии из следующего утверждения.

2.33. Утверждение.

1) *Множество топологического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит свою границу;*

2) *Множество топологического пространства открыто тогда и только тогда, когда оно не пересекается со своей границей.*

2.34. Примеры. 1) В пространстве $\mathbb{R}^1$ имеем равенства: $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{R} = \varnothing$, $\partial[a, b] = \{a, b\}$, $\partial[a, +\infty) = \{a\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Эти примеры показывают, что операция взятия границы не обладает свойствами монотонности и идемпотентности. 2) В пространстве $\mathbb{R}^2$ множество $\{(x, 0) : x \in [a, b], a, b \in \mathbb{R}\}$ совпадает со своей границей.

3) В антидискретном пространстве граница не открытого множества совпадает со всем пространством. 4) В дискретном пространстве граница всякого множества пуста.

2.35. Определения. Множество $A \subset (X, \tau)$ называется *всюду плотным* в X, если $\overline{A} = X$. Множество $A \subset (X, \tau)$ называется *нигде не плотным* в X, если множество $X \setminus \overline{A}$ всюду плотно в X.

Следующие непосредственно проверяемые характеристики введенных понятий часто используются в рабочем порядке.

2.36. Утверждение. *Множество A всюду плотно в X тогда и только тогда, когда любое непустое открытое подмножество X содержит точки множества A.*

Множество A нигде не плотно в X тогда и только тогда, когда любое непустое открытое множество X содержит непустое открытое подмножество, не пересекающееся с множеством A.

2.37. Определение. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит конечное или счётное подмножество, всюду плотное в этом пространстве.

2.38. Примеры. 1) Счётное множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в (сепарабельном) пространстве $\mathbb{R}^1$. Множество иррациональных чисел тоже плотно в $\mathbb{R}^1$. В связи с определением нигде не плотного множества, отметим справедливость следующих соотношений:

$$\varnothing = \overline{\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}} \neq \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

2) Прямая линия и кривая второго порядка нигде не плотны в двумерной евклидовой плоскости. Прямая линия, плоскость и поверхность второго порядка нигде не плотны в трехмерном евклидовом пространстве. В свою очередь, счётные множества, состоящие из всех точек с рациональными координатами, плотны в этих сепарабельных пространствах. 3) В дискретном топологическом пространстве единственным всюду плотным множеством является само пространство. Таким образом, сепарабельность такого пространства эквивалентна тому, что оно состоит из не более чем счётного числа элементов. 4) Пространство $C[0,1]$ (см. 1.2.5) сепарабельно. Счётным всюду плотным множеством в этом пространстве является множество всех полиномов с рациональными коэффициентами. 5) Рассмотрим метрическое пространство l_∞. Элементами этого пространства являются все ограниченные последовательности вида $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Метрика задается формулой

$$d(f, g) = \sup\{|f(n) - g(n)| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть A — подмножество l_∞, состоящее из всех последовательностей, которые принимают лишь значения 0 или 1. Хорошо известно, что A является несчётным множеством. Для любых $f, g \in A, f \neq g$, имеем равенство $d(f, g) = 1$. Поэтому, окружив каждую точку множества A открытым шаром радиуса $\frac{1}{3}$, получим несчётное множество дизъюнктных шаров. Всякое всюду плотное в l_∞ множество должно иметь хотя бы по точке в каждом из этих шаров. Отсюда следует, что пространство l_∞ не является сепарабельным.

В терминах внутренностей, очевидно, имеем следующее

2.39. Утверждение. *Множество A всюду плотно в X тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Int}\overline{A} = X$. *Множество A нигде не плотно в X тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Int}\overline{A} = \varnothing$.

Теорема 1.19 в терминах нигде не плотных множеств формулируется так:

2.40. Теорема Бэра. *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

В частности, из этой теоремы легко следует несчётность множества вещественных чисел. Действительно, в противном случае множество $\mathbb{R}$ представлялось бы в виде счётного объединения одноточечных множеств. Но последние нигде не плотны в полном пространстве $\mathbb{R}^1$.

Завершим раздел задачей, в решении которой тоже может быть использована теорема Бэра.

2.41. Упражнение. *Доказать, что бесконечномерное полное нормированное пространство не может иметь счетную алгебраическую размерность.*

3. Базы топологического пространства.

Для задания топологии на множестве нет необходимости указывать все открытые множества. Часто бывает удобно указать лишь некоторое семейство открытых множеств, а всю топологию построить, используя множества этого семейства.

3.1. Определение. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство $\beta \subset \tau$ называется *базой топологического пространства* (X, τ) или *базой топологии* τ, если каждое открытое подмножество пространства X можно представить в виде объединения некоторого семейства множеств из β.

3.2. Замечания. 1) Поскольку база является подсемейством топологии, то объединение любого подсемейства базы принадлежит топологии. 2) Если на множестве заданы две топологии, у которых существует одна и та же база, то эти две топологии совпадают. 3) Топология может иметь много баз.

3.3. Примеры. 1) Вся топология является своей базой. 2) В пространстве $\mathbb{R}^1$ семейство $\{(a, b) : a \leqslant b, a, b \in \mathbb{R}^1\}$ является базой. Подсемейство этого семейства, определяемое условием $a, b \in \mathbb{Q}$, тоже база $\mathbb{R}^1$. 3) В метрическом пространстве семейство всех открытых шаров — база топологии. Базой является и семейство всех открытых шаров с рациональными радиусами. 4) В дискретном пространстве базой является семейство всех одноточечных подмножеств носителя топологии.

Свойство, формулируемое в следующей теореме, часто берётся за определение базы.

3.4. Теорема. *Семейство β подмножеств X является базой топологического пространства (X, τ) тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и каждой окрестности V этой точки существует такой элемент $U \in \beta$, что $x \in U \subset V$.*

3.5. Замечание. Не всякое семейство подмножеств некоторого множества является базой некоторой топологии. Например, пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Рассмотрим семейство $\{\varnothing, X, A, B\}$. Очевидно, оно не может служить базой какой-либо топологии на X.

3.6. Теорема (о топологии, порожденной базой). *Пусть X — множество и β — семейство его подмножеств, удовлетворяющее следующим свойствам:*

B1) *Для любых* $U, V \in \beta$ *и любой точки* $x \in U \cap V$ *существует такой элемент* $W \in \beta$, *что* $x \in W \subset U \cap V$;

B2) $X = \bigcup \beta$.

Пусть τ *— семейство всех подмножеств множества* X, *являющихся объединениями подсемейств семейства* β. *Тогда* τ *— топология на* X, *и* β *является ее базой.*

Доказательство. Мы должны проверить, что τ удовлетворяет аксиомам O1) – O3).

Аксиома O1) выполнена в силу свойства B2) и равенства $\varnothing = \bigcup \beta_0$, где $\beta_0 = \varnothing$.

Пусть $O_n \in \tau$ и пусть $O_n = \bigcup \beta_n$, где $\beta_n \subset \beta, n = 1, 2$. Для доказательства выполнения O2) достаточно показать, что для любых $U_n \in \beta_n, n = 1, 2$ множество $U_1 \cap U_2$ является объединением некоторого подсемейства β_0 семейства β. В силу B1) для любой точки $x \in U_1 \cap U_2$ существует такой элемент $W(x) \in \beta$, что $x \in W(x) \subset U_1 \cap U_2$. Ясно, что в качестве β_0 можно взять семейство всех $W(x)$, где x пробегает все $U_1 \cap U_2$.

Остальное ясно.

3.7. Замечание. Легко видеть, что база топологии всегда удовлетворяет условиям B1) и B2). Таким образом, мы имеем критерий базы.

Когда две топологии на одном и том же множестве заданы с помощью баз, то полезно иметь правило в терминах баз, позволяющее сравнивать эти топологии. Удобным в этом плане является следующий критерий.

3.8. Теорема. *Пусть* β_1 *и* β_2 *— базы соответственно топологий* τ_1 *и* τ_2 *на некотором множестве* X. *Топология* τ_2 *сильнее топологии* τ_1 *тогда и только тогда, когда для любого* $x \in X$ *и любого элемента* $U \in \beta_1$, *содержащего* x, *найдется такой элемент* $V \in \beta_2$, *что* $x \in V \subset U$.

Доказательство. Пусть топология τ_2 сильнее топологии τ_1 и пусть $x \in U \in \beta_1$. Так как $U \in \tau_1$ и $\tau_1 \subset \tau_2$, то $U \in \tau_2$. Поскольку β_2 — база топологии τ_2, то существует элемент $V \in \beta_2$, удовлетворяющий условию $x \in V \subset U$.

В обратную сторону. Пусть $O \in \tau_1$. По определению базы O представляется в виде объединения некоторого подсемейства $\beta \subset \beta_1$. По предположению для любого элемента $U \in \beta$ и любого $x \in U$ существует такой $V(x) \in \beta_2$, что $x \in V(x) \subset U$. Ясно, что U совпадает с объединением всех таких $V(x)$ при условии, что x пробегает всё множество U. Следовательно, $U \in \tau_2$, $O \in \tau_2$ и $\tau_1 \subset \tau_2$.

3.9. Пример. Семейство $\{[a, q) : a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}, a < q\}$ удовлетворяет условиям B1) и B2) и, следовательно, является базой некоторой топологии τ на $\mathbb{R}$. Эта топология сильнее естественной топологии вещественной прямой. Пространство $(\mathbb{R}, \tau)$ называется *прямой Зоргенфрея.*

3.10. Определение. Пусть β_1 и β_2 являются соответственно базами топологий τ_1 и τ_2 на множестве X. Говорят, что эти базы *эквивалентны,* если они порождают одну и ту же топологию, то есть $\tau_1 = \tau_2$.

3.11. Замечание. Используя 3.8, легко наглядно показать совпадение топологий τ_{d_1}, τ_{d_2} и τ_{d_∞} на двумерной вещественной плоскости (см. 1.2.3 и 1.10):

3.12. Определение. Непустое семейство $\gamma \subset \tau$ называется *предбазой топологического пространства* (X, τ), если семейство всех конечных пересечений $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$, где $U_i \in \gamma$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, является базой топологии τ.

3.13. Замечания. 1) База является предбазой топологии. Обратное, вообще говоря, неверно. 2) Если задано произвольное непустое семейство множеств γ, то семейство всевозможных конечных пересечений элементов из γ образует базу некоторой топологии на множестве $\bigcup \gamma$. Эта топология называется *топологией, порожденной предбазой* γ. Она является слабейшей среди всех топологий, содержащих семейство γ.

3.14. Примеры. 1) Пусть $(X, \leqslant)$ — произвольное линейно упорядоченное множество. Для элементов $a, b \in X$ мы пишем $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Пусть γ — семейство всех множеств вида

$$(\longleftarrow, a) := \{x \in X : x < a\}, \quad (b, \longrightarrow) := \{x \in X : b < x\},$$

где $a, b \in X$. *Порядковая топология* на X имеет своей предбазой семейство γ. Топология пространства $\mathbb{R}^1$ является порядковой топологией, порожденной естественным отношением "меньше или равно." 2) Семейство $\{(-\infty, q), (r, +\infty) \mid q, r \in \mathbb{Q}\}$ — предбаза топологического пространства $\mathbb{R}^1$. 3) Семейство всех прямых линий на вещественной плоскости является предбазой дискретной топологии. 4) Семейство, состоящее из всех вертикальных и горизонтальных полос вида

$$\{(x, y) \mid a < x < b, y \in \mathbb{R}\}, \quad \{(x, y) \mid c < y < d, x \in \mathbb{R}\},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d$, является предбазой естественной топологии на плоскости.

3.15. Определение. Топологическое пространство *удовлетворяет второй аксиоме счетности,* если оно обладает не более чем счётной базой. Часто просто говорят "пространство со счётной базой".

3.16. Примеры. 1) Семейство всех открытых интервалов с рациональными концами является счётной базой в $\mathbb{R}^1$. 2) Дискретное пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности в том и только том случае, когда подлежащее множество не более чем счётно.

3.17. Теорема. *Пространство X, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\{U_1, U_2, \dots\}$ — счётная база. Построим счётное множество $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, выбрав по точке a_n из U_n, $n \in \mathbb{N}$. Нетрудно видеть, что A всюду плотно в X.

3.18. Упражнение. Показать, что сепарабельное пространство может не обладать счётной базой (таковым, например, является несчётное множество, наделенное топологией Зарисского).

3.19. Теорема. *Метрическое пространство (M, d) сепарабельно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Нам нужно доказать лишь необходимость. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $\overline{A} = M$. Рассмотрим счётную систему открытых шаров

$$\beta := \{B_q(a_n) \mid a_n \in A, q \in \mathbb{Q}\}.$$

Покажем, что β является базой топологии τ_d пространства M.

Для этого достаточно для произвольной точки $x \in M$ и любой ее окрестности O найти такой шар $B_q(a_n)$ из β, что $x \in B_q(a_n) \subset O$.

Поскольку $x \in O \in \tau_d$, то существует $B_\varepsilon(x) \subset O$. Так как $\overline{A} = M$, то найдется точка $a_n \in A \cap B_{\varepsilon/3}(x)$. Выберем рациональное число q, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon/3 < q < \frac{2}{3}\varepsilon$. Тогда $d(x, a_n) < \varepsilon/3 < q$. Значит, $x \in B_q(a_n)$. Остается показать, что $B_q(a_n) \subset O$. Но для каждого $y \in B_q(a_n)$ верна цепочка неравенств:

$$d(x, y) \leqslant d(x, a_n) + d(a_n, y) < \frac{\varepsilon}{3} + q < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Следовательно, $B_q(a_n) \subset B_\varepsilon(x) \subset O$.

3.20. Определение. Семейство окрестностей $\beta(x)$ точки $x \in X$ называется *базой топологического пространства* (X, τ) *в точке* x или *локальной базой в точке* x, если для любой окрестности U точки x найдется такой элемент $V \in \beta(x)$, что $V \subset U$.

Говоря неформально, локальная база в точке топологического пространства — это некоторое семейство окрестностей этой точки, которое содержит "сколь угодно малые" окрестности.

3.21. Примеры. 1) Семейство всех окрестностей заданной точки топологического пространства является локальной базой в этой точке. 2) Если β — база топологического пространства, то семейство $\beta(x)$, состоящее из всех элементов β, содержащих точку x, будет локальной базой в точке x. 3) Если (X, d) — метрическое пространство и $x \in X$, то семейство открытых шаров $\{B_{1/k}(x) : k \in \mathbb{N}\}$ — база топологического пространства (X, τ_d) в точке x.

3.22. Определение. Семейство окрестностей $\gamma(x)$ точки $x \in X$ называется *предбазой в точке* x, если семейство, состоящее из всевозможных конечных пересечений множеств из $\gamma(x)$, образует локальную базу в x.

3.23. Определение. Пусть для каждой точки $x \in X$ задана локальная база $\beta(x)$. Семейство $\{\beta(x) : x \in X\}$ называется *системой окрестностей* топологического пространства (X, τ).

3.24. Замечание. Если для каждой точки $x \in X$ задана база $\beta(x)$ пространства (X, τ) в точке x, то семейство $\beta = \bigcup\{\beta(x) : x \in X\}$ есть база пространства (X, τ).

3.25. Утверждение. *Пусть* $\{\beta(x) : x \in X\}$ *— система окрестностей топологического пространства* (X, τ). *Тогда она обладает следующими свойствами:*

(BP1) *Для любой точки* $x \in X$ *семейство* $\beta(x)$ *непусто и для всякого* $U \in \beta(x)$ *имеем* $x \in U$*;*

(BP2) *Для любых* $y \in X$, $U \in \beta(y)$ *и* $x \in U$ *найдется такой элемент* $V \in \beta(x)$, *что* $V \subset U$;

(BP3) *Для любых* $x \in X$ *и* $U, V \in \beta(x)$ *существует такой элемент* $W \in \beta(x)$, *что* $W \subset U \cap V$.

Доказательство этого утверждения опирается непосредственно на определение базы пространства в точке.

В следующей несложно проверяемой теореме определяется *топология, порожденная системой окрестностей.*

3.26. Теорема. *Пусть* X *— произвольное множество и каждому его элементу* $x \in X$ *поставлено в соответствие некоторое семейство* $\{\beta(x) : x \in X\}$ *подмножеств* X. *Пусть при этом выполняются условия* (BP1) – (BP3) *из* 3.25 *и пусть* τ *— семейство всех подмножеств* X, *являющихся объединениями подсемейств семейства* $\bigcup\{\beta(x) : x \in X\}$. *Тогда* τ — *топология на* X, *а совокупность* $\{\beta(x) : x \in X\}$ — *система окрестностей топологического пространства* (X, τ).

3.27. Примеры. 1) Пусть X — подмножество вещественной плоскости, состоящее из всех точек (x, y), таких, что $y \geqslant 0$. Зададим топологию на X посредством системы окрестностей. Для точки $(x, 0)$ пусть $\beta((x, 0))$ состоит из всевозможных открытых кругов, целиком лежащих в верхней полуплоскости и касающихся оси абсцисс в точке $(x, 0)$, к которым присоединена сама эта точка. Для точки (x, y) с положительной ординатой пусть $\beta((x, y))$ состоит из всевозможных открытых кругов с центром в (x, y) и целиком лежащих в верхней полуплоскости (см. Рис. 3).

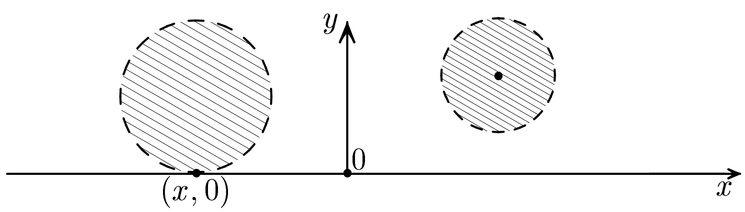


*Рис.*3

Легко проверить, что набор $\{\beta((x, y)) \mid (x, y) \in X\}$ удовлетворяет свойствам (BP1)–(BP3), а, значит, определяет топологию на X. Пространство X с этой топологией называется *плоскостью Немыцкого*.

2) Пусть N — нормированное пространство, N^* — пространство линейных ограниченных функционалов на N и x — произвольный элемент из N. Для любого конечного набора функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_n \in N^*$ и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим подмножество в пространстве N:

$$V(x; f_1, f_2, \ldots, f_n; \varepsilon) := \{y \in N : |f_k(y) - f_k(x)| < \varepsilon, k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Пусть $\beta(x)$ — семейство всевозможных таких множеств. Легко проверить, что семейства $\beta(x)$ удовлетворяют свойствам (BP1)–(BP3). Поэтому $\bigcup\{\beta(x) : x \in N\}$ — база некоторой топологии, которую называют *слабой топологией* в N.

3.28. Замечание. Особенно удобно задавать топологии с помощью систем окрестностей в тех структурах, в которых для введения топологии достаточно указать локальную базу всего лишь в одной точке. Например, в группах и векторных пространствах часто указывается лишь локальная база нейтрального элемента.

3.29. Определение. Говорят, что топологическое пространство *удов-*

летворяет первой аксиоме счетности, если в каждой его точке существует не более чем счётная локальная база.

Примером такого пространства является всякое метрическое пространство (см. 3.21.3).

3.30. Замечания. Пространство со счётной базой удовлетворяет первой аксиоме счётности. Обратное, вообще говоря, неверно. Топологическое пространство, даже метризуемое, может не удовлетворять второй аксиоме счётности. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть дискретное пространство с несчётным подлежащим множеством.

4. Индуцированная топология и подпространства

На протяжении всего раздела Y — подмножество множества X, τ — как обычно, топология на X. Обозначим через τ_Y семейство множеств $\{Y \cap O : O \in \tau\}$. Легко видеть, что τ_Y — топология на множестве Y.

4.1. Определения. Топология τ_Y называется *индуцированной топологией* или *топологией подпространства.* Множество Y с этой топологией называется *подпространством пространства* (X, τ).

4.2. Примеры. 1) В подпространстве $I := [0, 1]$ пространства $\mathbb{R}^1$ семейство всех интервалов вида $[0, q), (q, 1]$ и (q, r), где $q, r \in \mathbb{Q} \cap I$, является базой. 2) На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ топология пространства $\mathbb{R}^1$ индуцирует дискретную топологию. 3) Пусть $Y = [-1; 2) \cup \{3, 4\}$ — подпространство $\mathbb{R}^1$. Множества $[-1; 0)$ и $[-1; 1) \cup \{3\}$ открыты в Y.

Когда говорят, что индуцирование топологий транзитивно, то под этим подразумевают следующее

4.3. Утверждение. *Пусть A — подмножество множества Y. Тогда две определенные на A топологии — топология подпространства пространства (Y, τ_Y) и топология подпространства пространства (X, τ) — совпадают.*

Доказательство. Пусть $U \subset A$. Тогда имеем цепочку эквивалентностей: U — элемент топологии подпространства пространства $(Y, \tau_Y) \iff U = A \cap V$ для некоторого элемента $V \in \tau_Y \iff U = A \cap (O \cap Y)$ для некоторого элемента $O \in \tau \iff U = A \cap O \iff U \in \tau_A$.

Что касается систем окрестностей и баз подпространств, то имеет место легко проверяемое

4.4. Утверждение. *Пусть $\{\beta(x) : x \in X\}$ — система окрестностей топологического пространства (X, τ) , а β — база (предбаза) топологии τ. Тогда совокупность всех семейств $\{Y \cap O : O \in \beta(y)\}$, где y пробегает множество Y, является системой окрестностей топологического пространства (Y, τ_Y), а семейство $\{Y \cap V : V \in \beta\}$ — базой (предбазой) топологии τ_Y.*

4.5. Следствие. *Если пространство удовлетворяет первой (второй) аксиоме счетности, то и любое его подпространство тоже удовлетворяет этой аксиоме.*

4.6. Определение. Свойство топологического пространства называется *наследственным*, если оно сохраняется при переходе от любого топологического пространства, обладающего этим свойством, ко всякому его подпространству.

Например, нетрудно видеть, что свойство быть метризуемым пространством является наследственным.

Обычно всякое подмножество топологического пространства без всякой специальной оговорки рассматривается в качестве топологического пространства с индуцированной топологией. При этом следует чётко различать те или иные свойства точек и подмножеств, указывая, при необходимости, точками и подмножествами какого именно пространства они рассматриваются.

Пусть A — подмножество множества Y. Тогда для A можно определить два замыкания: $\overline{A}^{Y}$ — замыкание множества в пространстве (Y, τ_Y) и $\overline{A}^{X}$ — замыкание множества в пространстве (X, τ). Относительно связи этих двух понятий имеет место

4.7. Теорема. *Множество A замкнуто в пространстве (Y, τ_Y) тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $Y \cap F$, где F — некоторое замкнутое подмножество пространства (X, τ) . Множество $\overline{A}^{Y}$ совпадает с множеством $Y \cap \overline{A}^{X}$ (Или, как говорят, $\overline{A}^{Y}$ есть след на Y множества $\overline{A}^{X}$).*

Доказательство. 1) Пусть A замкнуто в Y. Тогда $Y \setminus A = Y \cap O$, где $O \in \tau$. Следовательно, $A = Y \setminus (Y \setminus A) = Y \setminus (Y \cap O) = Y \cap (X \setminus O)$. А множество $X \setminus O$ замкнуто в X.

2) Пусть $A = Y \cap F$, где F — некоторое замкнутое подмножество X. Тогда $Y \setminus A = Y \setminus (Y \cap F) = Y \cap (X \setminus F)$. Так как множество $(X \setminus F)$ открыто в X, то A замкнуто в Y.

3) Множество $\overline{A}^{Y}$ является наименьшим из всех замкнутых в (Y, τ_Y) множеств, содержащих A. Множество $Y \cap \overline{A}^{X}$ замкнуто в Y (в силу пункта 2) доказательства) и, очевидно, оно содержит множество A. Поэтому $\overline{A}^{Y} \subset Y \cap \overline{A}^{X}$.

С другой стороны, в силу пункта 1) доказательства, так как $\overline{A}^{Y}$ замкнуто в Y, то $\overline{A}^{Y} = F \cap Y$ для некоторого множества F, замкнутого в X. Далее, $A \subset \overline{A}^{Y} \subset F \Longrightarrow A \subset F \Longrightarrow \overline{A}^{X} \subset \overline{F}^{X} = F \Longrightarrow \overline{A}^{X} \cap Y \subset F \cap Y = \overline{A}^{Y}$.

4.8. Следствие. *Если подмножество топологического пространства открыто (замкнуто), то оно открыто (замкнуто) в любом подпространстве, содержащем это множество.*

4.9. Замечания. Аналогично можно определить две внутренности множества A. Только в этом случае нельзя утверждать, что одна из них является следом другой. Например, положим $X = \mathbb{R}^1, Y = \mathbb{Q}$ и $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Ясно, что внутренность множества A в $\mathbb{R}^1$ пуста, а в $\mathbb{Q}$ (с индуцированной топологией) множество A открыто.

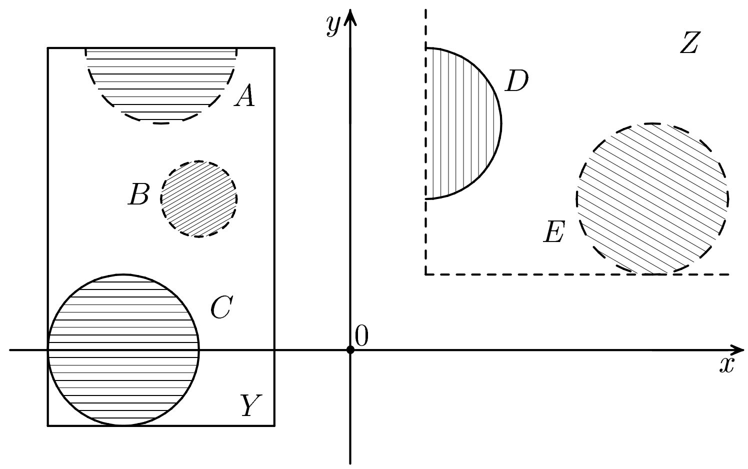


*Рис.*4

4.10. Пример. Рассмотрим в качестве X пространство $\mathbb{R}^2$ (с топологией, порожденной евклидовой метрикой). Пусть $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leqslant x \leqslant -1, -1 \leqslant y \leqslant 4\}$ и $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, y > 1\}$ — подпространства. Рассмотрим множества (см. Рис. 4):

$$A = Y \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2,5)^2 + (y-4)^2 < 1\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + (y-2)^2 < 0,25\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+3)^2 + y^2 \leqslant 1\},$$
$$D = Z \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-3)^2 \leqslant 1\},$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2 + (y-2)^2 < 1\}.$$

Множество Y замкнуто, а множество Z открыто в $\mathbb{R}^2$. Множества A и B открыты, а C замкнуто в Y. Множество D замкнуто, а E открыто в Z. При этом в пространстве $\mathbb{R}^2$ множества A и D не являются ни открытыми ни замкнутыми, B и E открыты, а C замкнуто.

4.11. Утверждение. *Всякое открытое (замкнутое) множество подпространства (Y, τ_Y) является открытым (замкнутым) множеством в (X, τ) тогда и только тогда, когда Y открыто (замкнуто) в X.*

Пусть множество X является объединением двух своих подмножеств Y и Z. Легко строится пример, показывающий, что для подмножества A пространства X из того, что множества $A \cap Y$ и $A \cap Z$ открыты соответственно в подпространствах Y и Z, вообще говоря, не следует, что A открыто в X. И все-таки в такой ситуации иногда можно гарантировать открытость множества A. Для точной формулировки утверждения (см. 4.16) нам понадобится следующее определение.

4.12. Определение. Подмножества A и B топологического пространства называются *отделенными* в этом пространстве, если оба множества $\overline{A} \cap B$ и $A \cap \overline{B}$ пусты.

4.13. Примеры. 1) В пространстве $\mathbb{R}^1$ множества $A = [0, 1)$ и $B = (1, 2]$ отделены, а множества $C = (0, 1]$ и $D = (1; 2)$ не являются отделенными. 2) Любые непересекающиеся открытые (замкнутые) множества являются отделенными.

Нетрудно видеть, что определение 4.12 может быть переформулировано в терминах индуцированной топологии. А именно:

4.14. Теорема. *Два подмножества A и B пространства (X, τ) являются отделенными тогда и только тогда, когда A и B не пересекаются и оба замкнуты в подпространстве $A \cup B$.*

Доказательство. " Тогда." Очевидно, $A \cap B \subset \overline{A} \cap B = \varnothing$. Следовательно, $A \cap B = \varnothing$. Покажем, что A замкнуто в подпространстве $A \cup B$. Множество $\overline{A}$ замкнуто в X и имеют место равенства:

$$\overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A.$$

Осталось воспользоваться 4.7.

" Только тогда." Докажем, например, что $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Для этого заметим, что $\overline{A} \cap B \subset B$. Далее, в силу замкнутости A в подпространстве $A \cup B$, имеем включение

$$\overline{A} \cap B \subset \overline{A} \cap (A \cup B) = \overline{A}^{A \cup B} = A.$$

Таким образом, $\overline{A} \cap B \subset A \cap B = \varnothing$. Следовательно, $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Что и требовалось доказать.

4.15. Следствие. *Два подмножества A и B пространства (X, τ) являются отделенными тогда и только тогда, когда A и B не пересекаются и оба являются открыто-замкнутыми в подпространстве $A \cup B$.*

Имеет место следующее утверждение (см. [5, с.81]).

4.16. Теорема. *Пусть множество X является объединением множеств Y и Z, таких, что множества $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ отделены в пространстве X. Тогда подмножество A пространства X открыто (замкнуто) в том и только том случае, когда открыто (замкнуто) множество $A \cap Y$ в подпространстве Y и открыто (замкнуто) множество $A \cap Z$ в подпространстве Z.*

5. Связные пространства

Понятие связного топологического пространства представляет собой математическую формализацию нашего интуитивного представления о неразделенности геометрической фигуры. Это понятие играет очень важную роль как в самых разнообразных вопросах топологии, так и в её многочисленных приложениях. Например, из курса математического анализа нам известна теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции. Этот результат можно рассматривать не только как свойство непрерывной функции, но и как свойство топологии отрезка. А именно, связность отрезка является существенным топологическим свойством в доказательстве указанной теоремы.

5.1. Определения. Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых отделенных подмножеств. Пространство, не являющееся связным, называется *несвязным*.

5.2. Примеры. 1) Одноточечное пространство связно. 2) Антидискретное топологическое пространство связно. 3) Дискретное топологическое пространство, содержащее по крайней мере две различные точки, несвязно.

5.3. Теорема. *Для произвольного топологического пространства* (X, τ) *следующие условия равносильны:*

1) *пространство* X *связно;*

2) X *нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) подмножеств;*

3) *пустое множество и все пространство — единственные открыто-замкнутые множества в пространстве* X.

Доказательство. Докажем, что связность пространства эквивалентна тому, что его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Остальное немедленно вытекает из этого факта.

1) $\Longrightarrow$ 2). Предполагая противное, то есть, что $X = O_1 \cup O_2$, где $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, $O_i \in \tau$, $O_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$, получаем противоречие, так как непересекающиеся непустые открытые множества отделены.

2) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что $X = A \cup B$, где $A, B \neq \varnothing$, $\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B}$. Тогда, с одной стороны, $C\overline{B} \subset A = CB$, а, с другой стороны, равенство $A \cap \overline{B} = \varnothing$ влечет включение $A \subset C\overline{B}$. Следовательно, $A = C\overline{B}$.

Аналогично устанавливается равенство $B = C\overline{A}$. Таким образом, A и B открытые дизъюнктные множества. Полученное противоречие доказывает указанную импликацию.

5.4. Упражнение. Используя последнее утверждение теоремы 5.3, докажите связность пространства $\mathbb{R}^1$.

5.5. Определение. Подмножество Y пространства (X, τ) называется *связным*, если пространство (Y, τ_Y) является связным.

5.6. Примеры. 1) Во всяком пространстве пустое множество и одноточечное подмножество связны. 2) Подмножество связного пространства может и не быть связным. Таковым, например, является подмножество $Y = (0; 1) \cup (2; 3)$ в связном пространстве $\mathbb{R}^1$. 3) Промежутком в $\mathbb{R}^1$ назовем любое из следующих множеств: саму прямую, отрезок $[a, b]$, интервал (a, b), полуинтервалы $[a, b)$ и $(a, b]$, в том числе и бесконечные (т.е. лучи). Любой промежуток связен, и всякое связное множество в $\mathbb{R}^1$ является промежутком.

5.7. Теорема. *Подмножество Y топологического пространства (X, τ) связно тогда и только тогда, когда из того, что $Y = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 — отделенные подмножества пространства X, следует, что среди множеств X_1, X_2 есть пустое множество.*

Доказательство. Предположим, что Y связно и $Y = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 отделены в X. Тогда множества X_1 и X_2 являются отделенными и в (Y, τ_Y). Действительно, по теореме 4.7, имеем равенства $\overline{X_i}^Y = Y \cap \overline{X_i}^X$, где $i = 1, 2$; поэтому, например,

$$\overline{X_1}^Y \cap X_2 = (\overline{X_1}^X \cap Y) \cap X_2 = (\overline{X_1}^X \cap X_2) \cap Y = \varnothing.$$

Значит, по определению связного подмножества, либо X_1, либо X_2 пусто.

В обратную сторону. Предположим, что пространство (Y, τ_Y) несвязно. В силу теоремы 5.3, существует такая пара X_1, X_2 непересекающихся непустых замкнутых подмножеств пространства Y, что $Y = X_1 \cup X_2$. По теореме 4.14 множества X_1 и X_2 отделены в пространстве X. Получаем, что условие теоремы не выполняется. Значит, наше предположение неверно, и Y связно.

5.8. Следствие. *Если Y — связное подмножество пространства X, содержащееся в объединении двух отделенных подмножеств X_1 и X_2 пространства X, то либо $Y \subset X_1$, либо $Y \subset X_2$.*

Доказательство. Ясно, что множества $Y \cap X_1$ и $Y \cap X_2$ отделены в X и их объединение совпадает с Y. По теореме 5.7 одно из этих множеств пусто, а, следовательно, Y целиком лежит в другом из них.

5.9. Теорема. *Пусть* $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *— семейство связных подмножеств топологического пространства* X. *Тогда если среди них существует множество* Y_μ, *которое не отделено ни от одного из множеств* Y_λ, *то объединение* $Y := \bigcup\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *связно.*

Доказательство. Предположим, что $Y = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — отделенные подмножества пространства X. Тогда следствие 5.8 гарантирует, что Y_μ лежит целиком в одном из этих подмножеств, например, $Y_\mu \subset X_1$. Из этого легко заключаем, что все множества Y_λ лежат в X_1. Поэтому и Y лежит в X_1, а X_2 пусто. Осталось применить теорему 5.7.

5.10. Следствие. *Если семейство связных подмножеств топологического пространства имеет непустое пересечение, то объединение множеств этого семейства связно.*

5.11. Пример. Трехмерное вещественное евклидово пространство связно, поскольку его можно рассматривать как объединение всех прямых линий, проходящих через начало координат.

5.12. Следствие. *Если подмножество* Y *топологического пространства* X *связно, то и каждое подмножество* A *пространства* X, *для которого* $Y \subset A \subset \overline{Y}$, *тоже связно. В частности, замыкание связного множества связно.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\{Y\} \cup \{\{x\} : x \in A\}$ и применим теорему 5.9.

5.13. Следствие. *Если топологическое пространство содержит всюду плотное связное подпространство, то и само пространство связно.*

5.14. Определение. Две точки x и y топологического пространства X *соединяются подпространством* $Y \subset X$, если $x, y \in Y$.

5.15. Следствие. *Если каждые две точки топологического пространства можно соединить связным подпространством этого пространства, то пространство связно.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку x_0 пространства X. Для каждой точки $x \in X$ рассмотрим связное подпространство Y_x, соединяющее точки x_0 и x. Семейство $\{Y_x : x \in X\}$ удовлетворяет посылкам следствия 5.10 и $\bigcup\{Y_x : x \in X\} = X$.

5.16. Определения. *Компонентой топологического пространства* называется любое его максимальное связное подмножество, т.е. такое связное подмножество, которое не является собственной частью никакого другого связного подмножества. *Компонентой подмножества* топологического пространства называется любая компонента этого множества, наделенного индуцированной топологией.

5.17. Замечания. 1) Пространство связно тогда и только тогда, когда оно является единственной своей компонентой. 2) Поскольку одноточечное множество связно, то всякое топологическое пространство совпадает с объединением своих компонент. Ниже мы увидим, что компоненты образуют дизъюнктное разбиение пространства.

5.18. Примеры. 1) Компонентами подмножества $\bigcup\limits_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$ пространства $\mathbb{R}^1$, где $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \varnothing$ при $i \neq j$, являются отрезки $[a_k, b_k]$. 2) В дискретном топологическом пространстве лишь одноточечные множества связны, и именно они являются компонентами пространства. 3) Пространство рациональных чисел с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^1$, не является дискретным. Однако его компонентами служат одноточечные множества.

5.19. Теорема. *1) Всякое связное подмножество топологического пространства содержится в некоторой компоненте этого пространства. 2) Каждая компонента замкнута. 3) Различные компоненты пространства отделены.*

Доказательство. 1) Не ограничивая общности, предположим, что Y — непустое связное подмножество пространства X. Обозначим через C объединение всех связных множеств в X, содержащих Y. По следствию 5.10 множество C связно. Если множество A связно и $C \subset A$, то $Y \subset A$. Поэтому $A \subset C$ и $A = C$. Таким образом, множество C — компонента.

2) Пусть C — компонента топологического пространства X. Тогда множество C связно и, в силу 5.12, замыкание $\overline{C}$ тоже связно. Включение $C \subset \overline{C}$ и максимальность компоненты гарантируют равенство $C = \overline{C}$. Следовательно, множество C замкнуто.

3) Пусть C_1 и C_2 — две различные компоненты пространства X. Предположим, что они имеют общую точку. Тогда, учитывая 5.10, мы заключаем, что множество $C_1 \cup C_2$ связно. Принимая во внимание строгость включений $C_i \subset C_1 \cup C_2, i = 1, 2$, получаем противоречие со свойством максимальности компоненты.

5.20. Замечания. 1) Семейство всех компонент топологического пространства образует разложение этого пространства на связные непересекающиеся замкнутые подмножества. 2) Компонента может оказаться открытой, но этого может и не быть.

5.21. Пример. В качестве топологического пространства X рассмотрим подпространство $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} I_n$ топологического пространства $\mathbb{R}^2$, где

$$I_0 := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad I_n := \{(\frac{1}{n}, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}, n \in \mathbb{N}.$$

Компонентами пространства X являются отрезки I_n, $n \geqslant 0$. При $n \neq 0$ они все открыты, однако компонента I_0 открытой не является. Действительно, для всякой точки из множества I_0 каждая ее окрестность содержит точки бесконечно многих множеств I_n (см. Рис. 5).

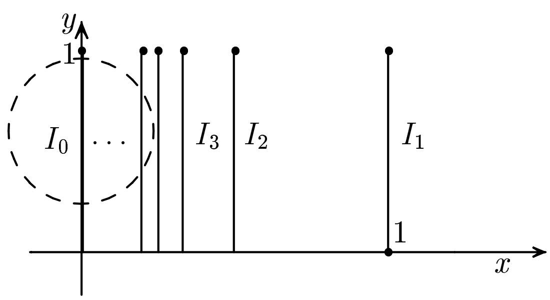


Рис.5

6. Аксиомы отделимости

В этом разделе рассматриваются аксиомы, в которых с помощью окрестностей разделяют точки и замкнутые множества топологических пространств.

6.1. Определение. *Окрестностью подмножества* A топологического пространства X будем называть любое открытое множество O, содержащее A. В этом случае мы часто будем писать $O(A)$. Для одноточечного множества $\{x\}$ — просто $O(x)$, где $x \in X$.

6.2. Определения. Пусть $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Топологическое пространство (X, τ) будет называться *T_n–пространством*, если оно удовлетворяет формулируемой ниже *аксиоме отделимости T_n:*

- **Аксиома $\mathbf{T_0}$ (Аксиома Колмогорова).** *Для любых двух различных точек пространства X существует открытое множество, содержащее ровно одну из этих точек.*

- **Аксиома $\mathbf{T_1}$.** *Для каждой из любых двух различных точек пространства X существует окрестность, не содержащая другой точки.*

- **Аксиома $\mathbf{T_2}$ (Аксиома Хаусдорфа).** *У любых двух различных точек пространства X существуют непересекающиеся окрестности.*

- **Аксиома $\mathbf{T_3}$**. *Для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, такого, что $x \notin F$, существуют такие окрестности $U(x)$ и $V(F)$, что $U(x) \cap V(F) = \varnothing$.*

- **Аксиома $\mathbf{T}_4$**. *Для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subset X$ существуют такие окрестности $U(A)$ и $V(B)$, что $U(A) \cap V(B) = \varnothing$.*

6.3. Замечание. Для перечисленных выше аксиом имеют место очевидные импликации $T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$.

6.4. Примеры. 1) Пространство $\mathbb{R}^1$ является T_2–пространством. 2) Слипшееся двоеточие (см. 2.2.3) не является T_0–пространством. 3) Связное двоеточие (см. 2.2.3) — T_0–пространство, не являющееся T_1–пространством. 4) Бесконечное множество, наделенное топологией Зарисского, является T_1–пространством, но не удовлетворяет аксиоме T_2.

6.5. Теорема. *Топологическое пространство X является T_1–пространством тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ множество $\{x\}$ замкнуто в X.*

Доказательство. Пусть X — T_1–пространство и $x \in X$. Возьмем произвольную точку $y \in X$, отличную от x. Поскольку точка y обладает окрестностью, не содержащей x, то y не является предельной точкой множества $\{x\}$. Поэтому $\{x\}$ замкнуто в X.

Обратное утверждение следует из того, что множества $X \setminus \{x\}$ и $X \setminus \{y\}$ являются окрестностями соответственно точек y и x.

6.6. Упражнения о T_1–пространствах.

1) Топологическое пространство X является T_1–пространством тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ пересечение всех её окрестностей совпадает с множеством $\{x\}$. 2) В каждой окрестности любой предельной точки подмножества T_1–пространства содержится бесконечное число точек этого подмножества. 3) Конечное множество точек замкнуто. 4) Точка x некоторого подмножества пространства является изолированной точкой этого подмножества в том и только том случае, если множество $\{x\}$ открыто в этом подмножестве. 5) Производное множество любого подмножества замкнуто.

6.7. Определения. Топологическое пространство называется *отделимым* или *хаусдорфовым*, если оно удовлетворяет аксиоме T_2. Соответственно топологию такого пространства называют *отделимой* или *хаусдорфовой.*

6.8. Теорема. *Топологическое пространство (X, τ) хаусдорфово тогда и только тогда, когда для всякой точки $x \in X$ пересечение замыканий всех ее окрестностей совпадает с множеством $\{x\}$.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка хаусдорфова пространства X и $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство всех окрестностей этой точки. Так как $x \in O_\lambda \subset \overline{O}_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, то $x \in \bigcap\{\overline{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Покажем, что ни одна точка пространства X, отличная от самой точки x, не принадлежит этому пересечению. Действительно, предположим противное. Пусть существует точка $y \in \bigcap\{\overline{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и $y \neq x$. В силу отделимости топологии τ можно выбрать окрестность U точки y и индекс $\mu \in \Lambda$, такие, что $U \cap O_\mu = \varnothing$. Поэтому $y \notin \overline{O}_\mu$. Противоречие. Значит, $\{x\} = \bigcap\{\overline{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

Теперь пусть x и y — две различные точки пространства X и пусть $\{x\} = \bigcap\{\overline{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, где $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство всех окрестностей точки x. Ясно, что существует такой индекс $\mu \in \Lambda$, что $y \notin \overline{O}_\mu$. Из этого следует, что $y \notin O_\mu$. Очевидно, что множество $X \setminus \overline{O}_\mu$ является окрестностью точки y и $(X \setminus \overline{O}_\mu) \cap O_\mu = \varnothing$.

6.9. Упражнение. Метрическое пространство хаусдорфово.

Для проверки отделимости топологии, порожденной локальными базами, удобно использовать следующее легко проверяемое утверждение.

6.10. Теорема. *Пусть даны множество X и набор $\{\beta(x) : x \in X\}$ семейств его подмножеств, обладающий свойствами (BP1) – (BP3). Пусть, вдобавок, набор $\{\beta(x) : x \in X\}$ обладает свойством*

(BP4) *Для каждой пары различных точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности $U \in \beta(x)$ и $V \in \beta(y)$.*

Тогда пространство X, наделенное топологией, порожденной системой окрестностей $\{\beta(x) : x \in X\}$, хаусдорфово.

6.11. Определение. Топологическое пространство называется *регулярным*, если оно удовлетворяет аксиомам T_1 и T_3.

6.12. Замечания. 1) Из аксиомы T_3 не следует аксиома T_1. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть антидискретное топологическое пространство, содержащее по крайней мере две точки. 2) Любое регулярное пространство хаусдорфово. Обратное, вообще говоря, неверно.

6.13. Пример. 1) Дискретное топологическое пространство регулярно. 2) Зададим в $\mathbb{R}$ топологию с помощью системы окрестностей, которая определяется следующим образом.

Пусть $A := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ и пусть $O_n(x) := (x - 1/n, x + 1/n) \subset \mathbb{R}$ для любых $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Для точки $x \in \mathbb{R}$, отличной от нуля, положим $\beta(x) := \{O_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, а $\beta(0) := \{O_n(x) \setminus A : n \in \mathbb{N}\}$.

Нетрудно проверить, что набор $\{\beta(x) : x \in \mathbb{R}\}$ обладает свойствами (BP1)–(BP4) (см. 3.25 и 6.10). Следовательно, множество $\mathbb{R}$, наделенное топологией, порожденной системой окрестностей $\{\beta(x) : x \in \mathbb{R}\}$, является хаусдорфовым топологическим пространством. Множество A замкнуто в этом пространстве и не содержит точку 0. Любые окрестности множества A и точки 0 пересекаются. Значит, рассматриваемое пространство не является регулярным.

Приводимый ниже критерий часто оказывается полезным для установления регулярности изучаемого пространства.

6.14. Теорема. *T_1–пространство (X, τ) регулярно тогда и только тогда, когда для всякой точки x этого пространства и любой ее* *окрестности U существует такая окрестность V точки x, что $\overline{V} \subset U$.*

Доказательство. Предположим, что X регулярно и точка x с окрестностью U заданы. Множество $A := X \setminus U$ замкнуто и $x \notin A$. Поэтому найдутся такие открытые множества $V(x)$ и $W(A)$, что $V(x) \cap W(A) = \varnothing$.

Очевидно, что $V(x) \subset X \setminus W(A)$ и

$$\overline{V(x)} \subset \overline{X \setminus W(A)} = X \setminus W(A).$$

Тогда $\overline{V(x)} \cap W(A) = \varnothing \Longrightarrow \overline{V(x)} \cap A = \varnothing \Longrightarrow \overline{V(x)} \subset U$.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $x \in X$, множество A замкнуто, $x \notin A$ и $U := X \setminus A$. Очевидно, что U– окрестность точки x. По условию найдется такой элемент $V(x) \in \tau$, что $\overline{V(x)} \subset U$. Ясно, что $V(x)$ и $X \setminus \overline{V(x)}$ искомые окрестности точки x и множества A соответственно.

6.15. Определение. Топологическое пространство называется *нормальным*, если оно удовлетворяет аксиомам T_1 и T_4.

6.16. Замечания. 1) Из аксиомы T_4 не следует аксиома T_1. Примером служит слипшееся двоеточие. Таким образом, оно не является нормальным. 2) Из аксиомы T_4 не следует аксиома T_3. Действительно, пусть $X := \{1, 2, 3\}$, а $\tau := \{\varnothing, X, \{1\}\}$. Для этого пространства имеем всего две пары непересекающихся замкнутых множеств: $\{\varnothing, X\}$ и $\{\varnothing, \{2, 3\}\}$. Отсюда легко видеть, что (X, τ) — T_4–пространство. Но для точки 1 и замкнутого множества $\{2, 3\}$ непересекающихся окрестностей нет, то есть (X, τ) не является T_3–пространством. 3) Любое нормальное пространство регулярно. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, плоскость Немыцкого (см. 3.27.1) – регулярное пространство, не являющееся нормальным.

6.17. Пример. Дискретное пространство нормально.

6.18. Теорема. *Каждое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Во-первых, всякое метрическое пространство (X, d) хаусдорфово, а, значит, оно является T_1– пространством.

Во-вторых, покажем, что в (X, d) выполняется аксиома T_4. Для этого в пространстве X рассмотрим дизъюнктные замкнутые подмножества A и B. Далее, для каждой точки $a \in A$ и каждой точки $b \in B$ выберем соответственно такие положительные числа $r(a)$ и $r(b)$, что

$$B_{r(a)}(a) \cap B = \varnothing \quad \text{и} \quad B_{r(b)}(b) \cap A = \varnothing.$$

Пусть $\rho(x) := r(x)/2$, где $x \in A \cup B$. Рассмотрим окрестности $U(A)$ и $V(A)$, определяемые формулами

$$U(A) := \bigcup_{a \in A} B_{\rho(a)}(a) \quad \text{и} \quad V(B) := \bigcup_{b \in B} B_{\rho(b)}(b).$$

Покажем, что $U(A) \cap V(B) = \varnothing$. Допустим противное. Пусть $z \in U(A) \cap V(B)$. Тогда найдутся такие точки $a \in A$ и $b \in B$, что

$$z \in B_{\rho(a)}(a) \cap B_{\rho(b)}(b).$$

Используя неравенство треугольника и предполагая, например, что $\rho(a)$ не превосходит числа $r(b)$, мы получаем неравенство $d(a,b) < \rho(b)$. Из этого следует, что $B_{r(b)}(b) \cap A \neq \varnothing$. Противоречие.

Следующее утверждение, часто называемое *малой леммой Урысона*, дает эквивалентное определение нормального пространства.

6.19. Теорема. *T_1– пространство (X, τ) нормально тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой его окрестности $U(F)$ существует такая окрестность $V(F)$, что $F \subset V(F) \subset \overline{V(F)} \subset U(F)$.*

Доказательство теоремы 6.19 аналогично доказательству теоремы 6.14.

6.20. Следствие. *В нормальном топологическом пространстве замкнутые дизъюнктные множества F_1 и F_2 обладают такими окрестностями $U(F_1)$ и $U(F_2)$, что $\overline{U(F_1)} \cap \overline{U(F_2)} = \varnothing$.*

7. Сходимость в топологических пространствах

Как известно, фундаментальные понятия и конструкции математического анализа основаны на понятии сходимости.

Этот раздел посвящен теории сходимости в произвольных топологических пространствах в терминах направленностей. Понятие сходящейся последовательности составляет основу, на которой строится эта теория. Для топологических пространств, аналогично тому, как это делается для метрических пространств, можно ввести понятие сходящейся последовательности. При этом оказывается, что свойства последовательностей в общих топологических пространствах могут существенно отличаться от свойств последовательностей в метрических пространствах. Это приводит к необходимости обобщения понятия последовательности, а именно, к рассмотрению направленностей — функций, заданных на произвольных направленных множествах (а не только на множестве натуральных чисел).

7.1. Определение. Функция f, заданная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и принимающая значения в топологическом пространстве (X, τ), называется *последовательностью в* X. Мы будем часто писать x_n вместо $f(n)$ и обозначать эту последовательность символом $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или просто (x_n).

7.2. Определения. Последовательность (x_n) точек X *сходится к точке* $x_0 \in X$, если всякая окрестность точки x_0 содержит, начиная с некоторого номера, все точки последовательности (x_n). При этом точка x_0 называется *пределом последовательности* (x_n).

7.3. Замечание. В произвольном топологическом пространстве последовательность может сходиться ко многим точкам.

7.4. Примеры. 1) В антидискретном топологическом пространстве любая последовательность его точек сходится к любой точке этого пространства. 2) Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ с топологией Зарисского (см. 2.2.4). Положим $x_n = n$ для каждого числа $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что (x_n) сходится к любой точке пространства.

7.5. Замечание. Пусть A — подмножество пространства (X, τ) и пусть существует последовательность (x_n) в X, сходящаяся к $x_0 \in X$, и такая, что $x_n \in A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что в этом случае x_0 является точкой прикосновения множества A, то есть принадлежит замыканию этого множества. Если X — метрическое пространство, то справедливо и обратное утверждение. А именно, если $x_0 \in \overline{A}$, то существует последовательность (x_n), которая сходится в пространстве X к точке x_0 и принимает значения в A. То есть в метрических пространствах мы имеем критерий. Для общих топологических пространств это не так.

7.6. Пример. В качестве X возьмем множество $\mathbb{R}$. Непосредственно проверяется, что семейство

$$\tau := \{\varnothing\} \cup \{O \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \text{множество} \quad \mathbb{R} \setminus O \quad \text{счётно}\}$$

образует топологию в $\mathbb{R}$. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Рассмотрим интервал (a, b). Заметим, что, с одной стороны, любая точка пространства X является предельной точкой (a, b). Значит, производное множество этого интервала, а, вслед за ним, и замыкание этого интервала совпадают со всем пространством. С другой стороны, для любой точки x_0, лежащей вне (a, b), не существует последовательности, составленной из точек (a, b) и сходящейся в X к x_0. Действительно, зафиксируем точку $x_0 \in X \setminus (a, b)$ и пусть (x_n) — последовательность в (a, b). Рассмотрим открытое множество $O := X \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$. Оно не содержит ни одной точки последовательности (x_n). Следовательно, (x_n) не сходится к x_0.

Говоря неформально, последовательностей недостаточно для описания произвольной топологии. Однако в пространствах со счётными локальными базами последовательности обладают обычными свойствами.

7.7. Теорема. *В пространстве (X, τ), удовлетворяющем первой аксиоме счетности, точка x_0 принадлежит замыканию некоторого подмножества A этого пространства тогда и только тогда, когда существует последовательность, составленная из элементов A, которая сходится в X к точке x_0.*

Доказательство. Принимая во внимание 7.5, нам нужно доказать лишь необходимость. Рассмотрим два случая: $x_0 \in A$ и $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. В первом случае последовательность, каждый член которой совпадет с x_0, является искомой. Во втором случае введем в рассмотрение счётную базу $\{U_1, U_2, \dots\}$ в точке x_0. Без ограничения общности, мы можем считать, что $U_{n+1} \subset U_n$ для любого n. (В противном случае можно рассмотреть базу, составленную из элементов $V_n := \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$.) Так как для любого числа n множество $A \cap U_n$ не является пустым, мы можем выбрать по элементу x_n в каждом $A \cap U_n$ и тем самым построить последовательность x_n. Покажем, что эта последовательность сходится к точке x_0. Для этого зафиксируем произвольную окрестность O точки x_0. Поскольку семейство

$\{U_n\}_{n=1}^{+\infty}$ является локальной базой в точке x_0, то найдется такой индекс $k \in \mathbb{N}$, что $U_k \subset O$. Учитывая включения $U_n \subset U_k$ для всех $n \geqslant k$, получаем, что

$$x_n \in A \cap U_n \subset U_k \subset O \quad \text{для всех} \quad n \geqslant k.$$

В силу произвольности выбора окрестности O, заключаем, что последовательность (x_n), составленная из точек множества A, сходится к точке x_0, что и требовалось доказать.

Согласно этой теореме, в топологических пространствах, удовлетворяющих первой аксиоме счётности, операцию замыкания, а значит, и топологию, можно задать в терминах сходящихся последовательностей. Аналогично можно поступить и в произвольных пространствах, если подходящим образом обобщить понятие сходимости. Оставшаяся часть раздела посвящена этому обобщению.

7.8. Определения. Пусть Λ — множество и $\prec$ — бинарное рефлексивное и транзитивное отношение на Λ. Говорят, что $\prec$ *направляет* множество Λ или что Λ *направлено* отношением $\prec$, если для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует такой элемент $\nu \in \Lambda$, что $\lambda \prec \nu$ и $\mu \prec \nu$. Иными словами, для каждого двухэлементного подмножества множества Λ существует мажоранта. Пара $(\Lambda, \prec)$ называется *направленным множеством.*

7.9. Примеры направленных множеств. 1) Множество $\mathbb{N}$ с естественным упорядочением. 2) Произвольное линейно упорядоченное множество. 3) Семейство всех подмножеств заданного множества может быть направлено как отношением включения, так и отношением обратного включения (см. 0.7.3). Этот пример показывает, что отношение, которое направляет множество, вообще говоря, не направляет его подмножество. 4) $(\mathcal{O}_x, \prec)$ — семейство всех окрестностей фиксированной точки x топологического пространства X с отношением обратного включения. 5) Пусть $(\Gamma, <)$ и $(\Lambda, \prec)$ — направленные множества. Их декартово произведение $\Gamma \times \Lambda$ направлено отношением $\leqslant$, которое определяется следующим образом: $(\gamma, \lambda) \leqslant (\mu, \nu) := (\gamma < \mu \quad \text{и} \quad \lambda \prec \nu)$.

7.10. Определение. *Направленностью* в топологическом пространстве (X, τ) называется всякая функция $f : \Lambda \to X$, заданная на произвольном направленном множестве $(\Lambda, \prec)$, со значениями в X. Стандартное обозначение для направленности имеет вид $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, где $x_\lambda := f(\lambda)$. Мы также будем использовать обозначение $f = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

7.11. Примеры направленностей. 1) Всякая последовательность, составленная из элементов топологического пространства. 2) Рассмотрим направленное множество $(\mathcal{O}_x, \prec)$ из 7.9.4. Выбирая из каждой окрестности $U \in \mathcal{O}_x$ по одной точке x_U, мы получаем направленность $(\mathcal{O}_x, \prec) \to X : U \mapsto x_U$. 3) С направленностями читатель встречался и в курсе интегрального исчисления. Действительно, пусть $[a, b]$ — конечный отрезок вещественной прямой. *Разбиением* отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ этого отрезка, удовлетворяющее условиям $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Обозначим через $\mathbf{P}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$ семейство всех разбиений отрезка $[a, b]$ и введем отношение порядка на $\mathbf{P}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$ следующим образом:

$$(P \prec Q) := (P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset Q = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}), P, Q \in \mathbf{P}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}.$$

Легко видеть, что пара $(\mathbf{P}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}, \prec)$ — направленное множество.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, а направленности $S^* : (\mathbf{P}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}, \prec) \to \mathbb{R}$ и $S_* : (\mathbf{P}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}, \prec) \to \mathbb{R}$ заданы формулами:

$$S^*(P) := \sum_{i=1}^{n} \sup f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}),$$

$$S_*(P) := \sum_{i=1}^{n} \inf f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}),$$

где $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathbf{P}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$.

Хорошо известно, что $S^*(P)$ и $S_*(P)$ называются соответственно верхней и нижней суммами Дарбу функции f для разбиения P отрезка $[a, b]$.

Направленности часто оказываются удобным инструментом для изучения свойств топологических пространств. При этом они обладают многими свойствами, которые аналогичны свойствам последовательностей. В литературе направленности также называются *обобщенными последовательностями* или *последовательностями по направленным множествам*, или *сетями.*

7.12. Определения. Говорят, что направленность $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в X находится в множестве $A \subset X$ *с некоторого момента,* если существует такое $\nu \in \Lambda$, что $x_\lambda \in A$ для любого $\lambda \succ \nu$. Точка $x \in X$ называется *пределом направленности* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в X, если эта направленность находится в любой окрестности точки x с некоторого момента. При этом говорят, что направленность $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *сходится* к x в пространстве X, и пишут $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \to x$.

7.13. Примеры. 1) Всякая сходящаяся последовательность является сходящейся (к тому же самому пределу) направленностью. 2) Направленность из примера 7.11.2 сходится к точке x. 3) Любая направленность в антидискретном топологическом пространстве сходится к каждой точке этого пространства. 4) Направленности S^* и S_* из примера 7.11.3 сходятся в $\mathbb{R}^1$ соответственно к верхнему интегралу Дарбу $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ и к нижнему интегралу Дарбу $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, которые определяются так:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{S^*(P) : P \in \mathbf{P_{[a,b]}}\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{S^*(P) : P \in \mathbf{P_{[a,b]}}\}.$$

Очевидно, теперь мы можем сформулировать критерий интегрируемости по Риману функции f в терминах направленностей. А именно, f интегрируема на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда направленности S^* и S_* сходятся к одному и тому же пределу.

7.14. Определения. Множество всех пределов направленности $f = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ в пространстве X обозначается $\lim f$ или $\lim x_\lambda$. Когда направленность имеет единственный предел x, будем писать $x = \lim f = \lim x_\lambda$.

7.15. Определение. Направленность $g : (\Gamma, \leq) \to X$ называется *поднаправленностью* направленности $f : (\Lambda, \prec) \to X$, если существует функция $\phi : \Gamma \to \Lambda$, обладающая следующими свойствами:

1) $g = f \circ \phi$, что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "g"'] & & \Lambda \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

2) для любого $\lambda_0 \in \Lambda$ существует $\gamma_0 \in \Gamma$, такое, что $\phi(\gamma) \succ \lambda_0$ при любом $\gamma \geq \gamma_0$.

7.16. Упражнения. 1) Подпоследовательность последовательности является направленностью. 2) Не всякая поднаправленность последовательности является подпоследовательностью. 3) Если точка является пределом некоторой направленности, то она — предел любой ее поднаправленности.

7.17. Определение. Подмножество Γ направленного множества $(\Lambda, \prec)$ называется *конфинальным*, если для любого $\lambda \in \Lambda$ найдется $\gamma \in \Gamma$ такое, что $\lambda \prec \gamma$.

7.18. Пример. Множество $\mathbb{N}$ является конфинальным подмножеством в $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

7.19. Упражнения. 1) Если отношение направляет множество, то оно направляет и конфинальное подмножество. 2) Ограничение направленности на конфинальное подмножество ее области определения является поднаправленностью заданной направленности.

7.20. Определение. Функция φ из направленного множества $(\Gamma, <)$ в направленное множество $(\Lambda, \prec)$ называется *неубывающей*, если $\varphi(\gamma) \prec \varphi(\nu)$ для любых элементов $\gamma, \nu \in \Gamma$, удовлетворяющих условию $\gamma < \nu$.

Следующая конструкция позволяет строить класс поднаправленностей, которые находят широкое применение.

7.21. Утверждение. *Пусть $\varphi : (\Gamma, <) \to (\Lambda, \prec)$ — неубывающая функция между двумя направленными множествами, такая, что образ $\varphi(\Gamma)$ является конфинальным подмножеством в Λ. Тогда для любой направленности $f : \Lambda \to X$ функция $f \circ \varphi : \Gamma \to X$ является поднаправленностью направленности f.*

7.22. Определения. Говорят, что направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в X *часто встречается* с множеством $A \subset X$, если для любого $\lambda \in \Lambda$ существует такое $\nu \in \Lambda$, что $\lambda \prec \nu$ и $x_\nu \in A$. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой направленности* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в X, если эта направленность часто встречается с каждой окрестностью точки x.

7.23. Упражнения. 1) Предел направленности является ее предельной точкой. 2) Предельная точка направленности, вообще говоря, не является ее пределом. 3) Предельная точка поднаправленности является предельной точкой и самой направленности.

7.24. Теорема. *Точка x топологического пространства является предельной точкой направленности $S = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ тогда и только тогда, когда некоторая поднаправленность направленности S сходится к x.*

Доказательство. Пусть x — предельная точка S. Рассмотрим множество Γ, состоящее из всех упорядоченных пар (λ, U), где $\lambda \in \Lambda$, U — окрестность точки x, такая, что $x_\lambda \in U$. Введем отношение $<$ на этом множестве: $((\lambda_1, U_1) < (\lambda_2, U_2)) := (\lambda_1 \prec \lambda_2 \quad \text{и} \quad U_2 \subset U_1)$. Оно направляет множество Г. Сюръективная функция $\varphi : \Gamma \to \Lambda : (\lambda, U) \mapsto \lambda$ является неубывающей. Поэтому (см. 7.21) направленность $T = \{x_{(\lambda,U)} : (\lambda, U) \in \Gamma\}$ является поднаправленностью S. Легко видеть, что T сходится к x.

Обратно, пусть x — предел некоторой поднаправленности. Если x не является предельной точкой направленности S, то существуют окрестность U точки x и $\lambda \in \Lambda$, такие, что $x_\mu \notin U$ при $\mu \succ \lambda$. Ясно, что, в этом случае, никакая поднаправленность не сходится к x.

7.25. Упражнения. 1) Предельная точка последовательности, вообще говоря, не является пределом некоторой ее подпоследовательности. 2) Пусть топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. Точка является предельной для последовательности тогда и только тогда, когда она является пределом некоторой подпоследовательности.

7.26. Теорема. *Пусть A — подмножество X и $x \in X$. Точка x принадлежит $\overline{A}$ тогда и только тогда, когда существует направленность, состоящая из элементов A и сходящаяся к x.*

Доказательство. Пусть $x \in \overline{A}$. Направленность $\{x_U : U \in \mathcal{O}_x\}$ из 7.11.2, где $x_U \in A \cap U$, сходится к x.

Обратное утверждение непосредственно следует из определений предела направленности и замыкания множества.

7.27. Теорема. *Топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда всякая направленность в X имеет не более одного предела.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство. Предположим, что в X существует направленность $S = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, имеющая два различных предела x_1 и x_2. Пусть U_1 и U_2 — непересекающиеся окрестности точек x_1 и x_2, соответственно. Для $i = 1, 2$ существуют такие $\lambda_i \in \Lambda$, что $x_\lambda \in U_i$ для любого $\lambda \succ \lambda_i$. Так как множество Λ направлено, то существует $\mu \in \Lambda$, удовлетворяющий условиям $\mu \succ \lambda_i$, $i = 1, 2$. Тогда $x_\mu \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Противоречие.

Обратно, предположим, что X не является хаусдорфовым. Это означает, что в X найдутся две различные точки x_1 и x_2, такие, что любые две окрестности этих точек пересекаются. Пусть Г — декартово произведение двух направленных множеств $\mathcal{O}_{x_1}$ и $\mathcal{O}_{x_2}$ (см. 7.9.4). Г направлено естественным отношением (см. 7.9.5). Для каждого элемента $\gamma = (U, V) \in \Gamma$ выберем точку $x_\gamma \in U \cap V$. Легко показать, что x_1 и x_2 являются пределами направленности $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Противоречие.

7.28. Определение. Направленность $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ в X называется *универсальной*, если, каково бы ни было подмножество $A \subset X$, она либо находится с некоторого момента в A, либо находится с некоторого момента в $X \setminus A$.

7.29. Пример. Универсальной направленностью является направленность, которая находится с некоторого момента в одноточечном множестве.

7.30. Лемма. *Пусть $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — направленность в X и $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств множества X, с каждым из которых данная направленность часто встречается, и такое, что пересечение любых двух элементов семейства $\mathcal{A}$ содержит некоторый элемент $\mathcal{A}$. Тогда существует поднаправленность направленности $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, которая находится в каждом элементе семейства $\mathcal{A}$ с некоторого момента.*

Доказательство. Поднаправленность, удовлетворяющая указанному условию, строится аналогично тому, как была построена поднаправленность в доказательстве теоремы 7.24.

7.31. Определение. *Фильтром* для направленности в X будем называть семейство $\mathcal{F}$ непустых подмножеств множества X, которое удовлетворяет следующим условиям: 1) для любых двух элементов из $\mathcal{F}$ их пересечение является элементом семейства $\mathcal{F}$; 2) вместе с каждым элементом F семейство $\mathcal{F}$ содержит всякое множество G, такое, что $F \subset G \subset X$; 3) данная направленность часто встречается с каждым элементом семейства $\mathcal{F}$.

7.32. Замечания. 1) Для произвольной направленности в X одноэлементное семейство $\{X\}$ является фильтром для этой направленности.
2) Совокупность всех фильтров для данной направленности частично упорядочена по включению и удовлетворяет условию леммы Цорна. Следовательно, найдется максимальный фильтр для направленности.

Применяя лемму 7.30 к произвольной направленности, где в качестве семейства $\mathcal{A}$ берется максимальный фильтр для этой направленности, получаем доказательство следующей теоремы.

7.33. Теорема. *Всякая направленность обладает универсальной поднаправленностью.*

7.34. Упражнения. 1) Поднаправленность универсальной направленности сама универсальна. 2) Если точка пространства является предельной точкой универсальной направленности, то она является пределом этой направленности.

8. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы

Важнейшим понятием топологии является понятие непрерывного отображения, которое играет в топологии такую же роль, как, например, в алгебре понятие гомоморфизма между объектами, наделёнными алгебраическими структурами. Этот раздел посвящен непрерывным отображениям между топологическими пространствами, или, как говорят на языке теории категорий, морфизмам между объектами топологической категории. Гомеоморфизмы — это в точности изоморфизмы категории топологических пространств и их непрерывных отображений.

8.1. Определения. Пусть (X, τ) и (Y, σ) — два топологических пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для каждой окрестности $V \subset Y$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $U \subset X$ точки x_0, такая, что $f(U) \subset V$. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке пространства X.

Ясно, что непрерывность в точке отображения между метрическими пространствами является частным случаем этого определения.

8.2. Примеры непрерывных отображений: 1) Тождественное отображение $\mathrm{Id} : (X, \tau) \to (X, \tau) : x \mapsto x$. Более того, тождественное отображение $\mathrm{Id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ непрерывно тогда и только тогда, когда топология τ_2 слабее топологии τ_1. 2) Постоянное отображение $f : X \to Y$ между любыми двумя топологическими пространствами, то есть такое, что существует $y_0 \in Y$, для которого $f(X) = \{y_0\}$. 3) Всякая функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая "$\varepsilon - \delta$ – определению" непрерывности (из курса математического анализа), является непрерывной в смысле определения 8.1. 4) Произвольное отображение из дискретного топологического пространства. 5) Произвольное отображение в антидискретное пространство.

Свойство, формулируемое в следующей теореме, часто берётся в качестве определения непрерывного отображения.

8.3. Теорема. *Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ между двумя топологическими пространствами является непрерывным тогда и только тогда, когда $f^{-1}(O) \in \tau$ для любого $O \in \sigma$, то есть, когда прообраз всякого открытого подмножества пространства Y является открытым подмножеством пространства X.*

8.4. Замечание. Пусть $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ — непрерывное отображение. Если топологию τ на множестве X заменить более сильной топологией τ', а на множестве Y топологию σ заменить более слабой топологией σ', то отображение $f : (X, \tau') \to (Y, \sigma')$ остается непрерывным. Говоря неформально, чем сильнее топология в X и чем слабее топология в Y, тем больше непрерывных отображений из X в Y.

Поскольку на практике непрерывность отображений часто приходится доказывать, то для этого удобно иметь критерии, сформулированные в различных терминах.

8.5. Теорема. *Пусть $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ — отображение между топологическими пространствами. Следующие условия эквивалентны:*

1) *отображение f непрерывно;*

2) *прообраз любого элемента некоторой предбазы γ в Y открыт в пространстве X;*

3) *прообраз любого элемента некоторой базы β в Y открыт в пространстве X;*

4) *существуют системы окрестностей $\{\mathcal{A}(x) \mid x \in X\}$ в X и $\{\mathcal{B}(y) \mid y \in Y\}$ в Y, такие, что для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $V \in \mathcal{B}(f(x))$ найдется окрестность $U \in \mathcal{A}(x)$, образ которой содержится в V, т.е. $f(U) \subset V$;*

5) *прообраз любого замкнутого подмножества Y замкнут в X;*

6) *для любого подмножества $A \subset X$ имеем $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) Из теоремы 8.3, потому что всякая предбаза состоит из открытых множеств.

2) $\Rightarrow$ 3) Каждый элемент V произвольной базы в Y состоит из объединения конечных пересечений элементов γ. Поэтому прообраз $f^{-1}(V)$ представляет собой объединение конечных пересечений окрестностей из пространства X.

3) $\Rightarrow$ 4) В качестве $\{\mathcal{B}(y) \mid y \in Y\}$ выберем произвольную систему окрестностей в Y. Пусть $x \in X$ и $V \in \mathcal{B}(f(x))$. Существует такая окрестность $W \in \beta$, что $f(x) \in W \subset V$. Значит, $f^{-1}(W)$ является окрестностью точки x. Пусть $\mathcal{A}(x)$ — произвольная база пространства X в точке x и U — элемент этой базы, удовлетворяющий условию $U \subset f^{-1}(W)$. Тогда $f(U) \subset V$.

4) $\Rightarrow$ 5) Пусть B — произвольное замкнутое множество в Y. Тогда $O := Y \setminus B \in \sigma$, при этом $f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus O) = X \setminus f^{-1}(O)$. Покажем, что $f^{-1}(O) \in \tau$. Если $f^{-1}(O) = \varnothing$, то $f^{-1}(O) \in \tau$. Пусть множество $f^{-1}(O)$ непусто и $x \in f^{-1}(O)$. Тогда $f(x) \in O$, и найдутся такие окрестности $V \in \mathcal{B}(f(x))$ и $U \in \mathcal{A}(x)$, что $V \subset O$ и $f(U) \subset V$. Ясно, что справедлива цепочка включений:

$$U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(O),$$

то есть множество $f^{-1}(O)$ содержит окрестность U точки x. Значит, x — внутренняя точка множества $f^{-1}(O)$. В силу произвольности выбора точки x, множество $f^{-1}(O)$ является открытым.

5) $\Rightarrow$ 6) Множество $f^{-1}(\overline{f(A)})$ замкнуто и содержит A. Следовательно, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, и, применяя f к обеим частям этого включения, получаем требуемое.

6) $\Rightarrow$ 5) Пусть F — замкнутое подмножество в Y. Достаточно показать, что $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$. А это следует из того, что

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F.$$

5) $\Rightarrow$ 1) Пусть $O \in \sigma$. Тогда $O = Y \setminus F$, где F замкнуто в Y. Тогда $f^{-1}(O) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) \in \tau$.

Следующая теорема даёт простые правила построения непрерывных функций.

8.6. Теорема. *Пусть (X,τ), (Y,μ), (Z,ν) — топологические пространства. Справедливы следующие утверждения:*

1) *(Вложение) Если (A,τ_A) — подпространство пространства (X,τ), то отображение вложения $\mathrm{in}_A : A \longrightarrow X : a \mapsto a$ подпространства A в пространство X непрерывно;*

2) *(Композиция) Если отображения $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow Z$ непрерывны, то их композиция $g \circ f : X \longrightarrow Z$ непрерывна;*

3) *(Ограничение области определения) Если отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно и (A,τ_A) — подпространство пространства (X,τ), то $f|_A : A \longrightarrow Y : a \mapsto f(a)$ — ограничение отображения f на A — является непрерывным отображением;*

4) *(Расширение области значений) Пусть отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно. Если (B,μ_B) — подпространство пространства Y, содержащее образ $f(X)$, то отображение*

$g : X \to (B, \mu_B) : x \mapsto f(x)$ непрерывно. Если Z — пространство, имеющее Y в качестве подпространства, то отображение $h : X \to Z : x \mapsto f(x)$ непрерывно.

5) *Пусть имеется некоторое отображение $f : X \to Y$. Если пространство X можно представить в виде объединения семейства $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ своих открытых множеств так, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ функция $f|_{O_\lambda} : O_\lambda \to Y$ непрерывна, то и функция f непрерывна.*

6) *Пусть имеется некоторое отображение $f : X \to Y$. Если пространство X можно представить в виде объединения конечного семейства $\{F_k : k = 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N}\}$ своих замкнутых множеств так, что для каждого k функция $f|_{F_k} : F_k \to Y$ непрерывна, то и функция f непрерывна.*

Мы сформулируем и докажем лишь частный случай последнего утверждения этой теоремы.

8.7. Теорема (Лемма о склейке). *Пусть (X, τ), (Y, μ) — топологические пространства и $X = A \cup B$, A и B — замкнутые подмножества пространства X. Пусть $f : (A, \tau_A) \to Y$ и $g : (B, \tau_B) \to Y$ — непрерывные отображения. Если $f(x) = g(x)$ для любого $x \in A \cap B$, то формула*

$$h(x) := \begin{cases} f(x), \text{если} & x \in A, \\ g(x), \text{если} & x \in B \end{cases}$$

определяет непрерывное отображение $h : X \to Y$.

Доказательство. Заметим, что в силу совпадения функций f и g на пересечении множеств A и B отображение h определено корректно.

Пусть C — произвольное замкнутое подмножество пространства Y. Для полных прообразов справедливы следующие равенства:

$$h^{-1}(C) = h^{-1}(C) \cap X = h^{-1}(C) \cap (A \cup B) =$$

$$= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) = f^{-1}(C) \cap g^{-1}(C).$$

Так как функции f и g непрерывны, то множества $f^{-1}(C)$ и $g^{-1}(C)$ замкнуты соответственно в A и B. Так как множества A и B замкнуты в пространстве X, то множества (см. 4.11) $f^{-1}(C)$ и $g^{-1}(C)$ замкнуты и в X. Следовательно, множество $h^{-1}(C)$, являющееся объединением двух замкнутых множеств, замкнуто в пространстве X. В силу произвольности выбора замкнутого множества C и пункта 5) теоремы 8.5, получаем непрерывность отображения h.

Теперь докажем критерий непрерывности отображения в терминах направленностей.

8.8. Теорема. *Для непрерывности отображения $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ в точке $x_0 \in X$ необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности S в X, сходящейся к точке x_0, направленность $f \circ S$ сходилась в Y к точке $f(x_0)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \to x_0$ и V — произвольная окрестность точки $f(x_0)$ в Y. В силу непрерывности f в точке x_0 существует такая окрестность U этой точки, что $f(U) \subset V$. Так как $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \to x_0$, то существует элемент $\lambda \in \Lambda$, такой, что для каждого $\mu \succ \lambda$ имеем $x_\mu \in U$, а, значит, и $f(x_\mu) \in V$.

Достаточность. Предположим, что f не является непрерывным в точке x_0. Тогда существует такая окрестность V точки $f(x_0)$, что в каждой окрестности U точки x_0 можно выбрать точку x_U, для которой $f(x_U) \notin V$. Направленность $S = \{x_U : U \in \mathcal{O}_{x_0}\}$ сходится к точке x_0, в то время как направленность $f \circ S$ не сходится к $f(x_0)$. Противоречие.

В следующей теореме утверждается, что связность сохраняется при непрерывных отображениях. Следствием этой теоремы является обобщение теоремы о промежуточном значении из курса математического анализа.

8.9. Теорема. *Пусть $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ непрерывно и A — связное подмножество в X. Тогда $f(A)$ связно в Y.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $X = A$ и $Y = f(A)$. Предположим, что Y несвязно. Тогда $Y = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 — непустые непересекающиеся окрестности. Отсюда следует, что непустые окрестности $f^{-1}(V_1)$ и $f^{-1}(V_2)$ образуют разбиение связного пространства X. Противоречие.

8.10. Следствие. *Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение из связного топологического пространства X в линейно упорядоченное множество Y, наделенное порядковой топологией. Если a и b — точки пространства X, а y_0 — точка из Y, лежащая между $f(a)$ и $f(b)$, то существует точка $x_0 \in X$, для которой $f(x_0) = y_0$.*

Доказательство. Пусть $A := f(X) \cap \{y \in Y \mid y \prec y_0, y \neq y_0\}$ и $B := f(X) \cap \{y \in Y \mid y_0 \prec y, y \neq y_0\}$. Ясно, что A и B — непустые непересекающиеся окрестности в $f(X)$. Если бы точки x_0, указанной в утверждении теоремы, не было, то $f(X) = A \cup B$. Но это противоречило бы связности $f(X)$.

8.11. Следствие. *Топологическое пространство (X, τ) не является связным тогда и только тогда, когда существует сюръективное непрерывное отображение $f : X \to Y$ на дискретное топологическое пространство, состоящее, по крайней мере, из двух различных точек.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $X = U_1 \cup U_2$, где $U_1, U_2 \in \tau \setminus \{\varnothing\}$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Пусть $Y = \{y_1, y_2\}$ — дискретное топологическое пространство, состоящее из двух различных точек. Рассмотрим сюръективное отображение $f : X \to Y$, определяемое формулой

$$f(x) := \begin{cases} y_1, \text{если} & x \in U_1, \\ y_2, \text{если} & x \in U_2. \end{cases}$$

Поскольку для прообразов имеют место равенства

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, \quad f^{-1}(Y) = X, \quad f^{-1}(\{y_i\}) = U_i, i = 1, 2,$$

то отображение f непрерывно.

Достаточность. Пусть существует указанное отображение $f : X \to Y$. Предположим противное, то есть, что X является связным. Тогда, по теореме 8.9, $Y = f(X)$ связно, что неверно.

8.12. Определения. Отображение $f : X \to Y$ между двумя топологическими пространствами называется *открытым* (*замкнутым*), если для любого открытого (замкнутого) множества $A \subset X$ образ $f(A)$ открыт (замкнут) в Y.

Отображение из произвольного топологического пространства в дискретное пространство является одновременно и открытым и замкнутым. Важными примерами открытых отображений являются: i) сюръективные линейные ограниченные операторы между банаховыми пространствами (теорема Банаха); ii) сюръективные непрерывные гомоморфизмы между компактными топологическими группами; iii) накрывающие отображения топологических пространств. В литературе часто в определении открытого (замкнутого) отображения требуется его непрерывность.

8.13. Упражнения. 1) Композиция двух открытых (замкнутых) отображений открыта (замкнута). 2) Открытое (замкнутое) отображение не обязательно непрерывно. 3) Непрерывное отображение может быть: i) одновременно не открытым и не замкнутым; ii) открытым, но не замкнутым; iii) замкнутым, но не открытым; iv) одновременно и открытым и замкнутым.

8.14. Определения. Отображение $f : X \to Y$ между двумя топологическими пространствами называется *гомеоморфным* или *гомеоморфизмом*, если выполняются следующие условия: 1) f — биекция; 2) f непрерывно; 3) обратное к f отображение $f^{-1} : Y \to X$ непрерывно. Два топологических пространства называются *гомеоморфными* или *топологически эквивалентными*, если между ними существует гомеоморфизм.

8.15. Теорема. *Пусть $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ — биективное непрерывное отображение между двумя топологическими пространствами. Следующие условия равносильны:*

1) *f — гомеоморфизм;*

2) *f — замкнутое отображение;*

3) *f — открытое отображение;*

4) *f сохраняет операцию замыкания, то есть для любого множества $A \subset X$ образ его замыкания совпадает с замыканием образа: $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.*

8.16. Замечания. 1) Гомеоморфизм является одновременно и замкнутым и открытым отображением. 2) Тождественное отображение произвольного топологического пространства на себя является гомеоморфизмом. 3) Если $f : X \to Y$ — гомеоморфизм, то и $f^{-1} : Y \to X$ — гомеоморфизм. 4) Композиция двух гомеоморфизмов является гомеоморфизмом.

Таким образом, отношение "X и Y гомеоморфны" есть отношение эквивалентности в классе всех топологических пространств. Следовательно, каждое пространство попадает в единственный класс эквивалентности, состоящий из всех гомеоморфных ему пространств.

8.17. Примеры. 1) Рассмотрим два конечных отрезка $[a, b]$ и $[c, d]$ действительной прямой $\mathbb{R}^1$, $a < b, c < d$. Функция

$$f : [a, b] \to [c, d] : x \mapsto y := x\frac{d - c}{b - a} + \frac{bc - ad}{b - a}$$

является гомеоморфным отображением из $[a, b]$ в $[c, d]$. С помощью этой функции строится и гомеоморфизм между открытыми интервалами (a, b) и (c, d). 2) Пространство $\mathbb{R}^1$ и его подпространство $(-1; 1)$ гомеморфны. Например, отображение

$$f : \mathbb{R}^1 \to (-1; 1) : x \mapsto \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg} x$$

является гомеоморфизмом. 3) Подпространства $(1;2)\cup(2;3)$ и $(3;4)$ пространства $\mathbb{R}^1$ не являются гомеоморфными. Действительно, если некоторое отображение $f:(3;4)\to(1;2)\cup(2;3)$ — гомеоморфизм (достаточно предположить, что f — непрерывная биекция), то в связном пространстве $(3;4)$, например, множество $f^{-1}((1;2))$ открыто-замкнуто. Поэтому оно либо пусто, либо совпадает с интервалом $(3;4)$. Таким образом, получаем противоречие с биективностью отображения f. 4) Тождественное отображение из множества $\mathbb{R}$ с дискретной топологией в $\mathbb{R}$ с антидискретной топологией является непрерывной биекцией. Однако обратное к нему отображение непрерывным не является.

8.18. Определение. Свойство топологического пространства, которым обладают все топологически эквивалентные ему пространства, называется *топологическим свойством* или *топологическим инвариантом.*

Так как гомеоморфизм устанавливает биективное соответствие между точками и топологиями двух топологических пространств, то всякое свойство, формулируемое в терминах открытых множеств, является топологическим свойством.

Например, свойства пространства быть хаусдорфовым или сепарабельным, удовлетворять первой или второй аксиомам счётности, быть связным являются топологическими свойствами.

Для установления топологической эквивалентности двух пространств достаточно задать один гомеоморфизм между ними. Доказательство того, что два пространства не являются гомеоморфными, обычно заключается в указании топологического инварианта, которым обладает лишь одно из этих пространств. Отметим, что в качестве такого инварианта может выступать алгебраический объект.

Кратко говоря, топология — это наука о топологических инвариантах. С топологической точки зрения два гомеоморфных пространства можно рассматривать как один объект.

Одним из основных понятий гомотопической топологии является понятие пути.

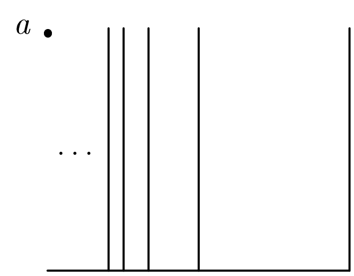
8.19. Определения. Пусть (X,τ) — топологическое пространство и $x,y\in X$. *Путем из точки x в точку y* в пространстве X называется такое непрерывное отображение $f:[0,1]\to X$, что $f(0)=x$, а $f(1)=y$, где отрезок $[0,1]$ рассматривается в качестве подпространства пространства $\mathbb{R}^1$. При этом точки x и y называются соответственно *началом* и *концом* пути f. Пространство X называется *линейно связным,* если для любых точек x и y этого пространства существует путь из точки x в точку y

в этом пространстве (или, как говорят, любые две точки пространства могут быть соединены путем).

8.20. Замечания. 1) В 8.19 вместо единичного отрезка действительной оси можно взять любой конечный отрезок $[a, b]$. 2) Непрерывный образ линейно связного пространства линейно связен. 3) Линейно связное пространство связно. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

8.21. Пример. Пусть $X = A \cup B$ — подпространство евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ (см. Рис. 6), где $A := \{a = (0, 1)\}$ — одноточечное множество, а

$$B := \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(\frac{1}{n}, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1; n \in \mathbb{N}\}.$$



$Рис.6$

Пространство X связно. Действительно, B представляет собой объединение связных множеств, среди которых есть отрезок $[0, 1] \times \{0\}$, пересекающийся со всеми остальными. Точка a является предельной точкой множества B. Так как $B \subset X \subset \overline{B}$, то пространство X связно. В то же время можно доказать, что X не является линейно связным (достаточно показать, что не существует пути в X, который соединял бы точку a с какой-либо точкой множества B).

9. Лемма Урысона. Теорема Титце-Урысона.

Следующая теорема обычно называется леммой Урысона.

9.1. Теорема. *Для любых двух непустых замкнутых непересекающихся подмножеств F_0 и F_1 нормального пространства X существует непрерывная функция $f : X \longrightarrow [0,1]$, равная нулю на F_0 и единице на F_1.*

Доказательство. Сначала в пространстве X с помощью индукции построим некоторое семейство окрестностей, которое индексируется множеством рациональных чисел. Затем это семейство используем для определения искомой функции.

Пусть S — множество всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Мы построим семейство окрестностей $\{O_s : s \in S\}$ пространства X, такое, что $F_0 \subset O_0, F_1 \subset X \setminus O_1$ и

$$\overline{O}_p \subset O_q \quad \text{при} \quad p < q. \qquad (*)$$

Заиндексируем элементы множества S с помощью множества натуральных чисел так, чтобы числа 0 и 1 были первыми двумя членами получающейся последовательности. Таким образом, мы можем написать, что $S = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $s_1 = 0, s_2 = 1$.

Пусть $O_1 := X \setminus F_1$. В силу нормальности X существует окрестность O_0, удовлетворяющая условиям $F_0 \subset O_0, \quad \overline{O}_0 \subset O_1$.

Предположим, что окрестности O_{s_j} определены для всех $j \leqslant n$, где $n \geqslant 2$, и имеет место свойство (n) :

$$\overline{O}_{s_i} \subset O_{s_j} \quad \text{при} \quad s_i < s_j \quad \text{и} \quad i, j \leqslant n.$$

Теперь определим окрестность $O_{s_{n+1}}$. Рассмотрим множество $\{s_j : j = 1, 2, \dots, n+1\}$. Обозначим через l наибольшее из тех чисел этого множества, которые строго меньше числа s_{n+1}, а через r — наименьшее из тех чисел этого множества, которые строго больше числа s_{n+1} (так как $s_{n+1} \neq 0, 1$, то такие l и r найдутся). По предположению индукции, окрестности O_l и O_r уже определены и $\overline{O}_l \subset O_r$. Поскольку пространство X нормально, существует окрестность $O_{s_{n+1}}$, такая, что $\overline{O}_l \subset O_{s_{n+1}}$ и $\overline{O}_{s_{n+1}} \subset O_r$. Легко видеть, что семейство $O_{s_1}, O_{s_2}, \dots, O_{s_{n+1}}$ удовлетворяет свойству (n+1).

В силу принципа индукции, окрестность O_s определена для каждого рационального числа s из отрезка $[0,1]$. При этом выполняется $(*)$.

Полагая $O_q = \varnothing$ при $q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty; 0)$ и $O_q = X$ при $q \in \mathbb{Q} \cap (1; +\infty)$, мы имеем семейство окрестностей пространства X, которое заиндексировано множеством всех рациональных чисел и удовлетворяет $(*)$.

Нетрудно видеть, что формулой

$$f(x) = \inf\{q : x \in O_q\}, \quad \text{где} \quad x \in X$$

корректно определена функция $f : X \to [0,1]$. Так как $F_0 \subset O_0$, то $f(F_0) = \{0\}$. Если $x \in F_1$, то, поскольку $F_1 \subset X \setminus O_1$, имеем равенство $\{q : x \in O_q\} = \mathbb{Q} \cap (1;+\infty)$, и, следовательно, $f(x) = 1$.

Осталось доказать непрерывность построенной функции f.

Пусть $x_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу $(*)$, $x_0 \in O_q$ при любом $q > y_0$ и $x_0 \notin \overline{O}_q$ при любом $q < y_0$. Выберем рациональные числа p и r, удовлетворяющие неравенству

$$y_0 - \varepsilon < p < y_0 < r < y_0 + \varepsilon.$$

Тогда x_0 лежит в открытом множестве $U := O_r \setminus \overline{O}_p$. Если $x \in U$, то $x \in O_r$. Значит, $r \in \{q : x \in O_q\}$ и $f(x) \leqslant r$. Из того, что $x \notin \overline{O}_p$, следует, что $p \notin \{q : x \in O_q\}$. Поэтому $p \leqslant f(x)$. Таким образом, функция f непрерывна в точке x_0. Ввиду произвольности выбора этой точки получаем непрерывность построенной функции на всем пространстве X.

9.2. Замечание. Отметим, что в лемме Урысона не утверждается, что $f^{-1}(\{0\}) = F_0$, а $f^{-1}(\{1\}) = F_1$.

9.3. Замечание. В случае метрического пространства (M,d) утверждение теоремы 9.1 доказывается непосредственным указанием функции

$$f(x) := \frac{d(x,F_0)}{d(x,F_0) + d(x,F_1)},$$

где $d(x,F_i) := \inf\{d(x,y) : y \in F_i\}$ — расстояние от точки x до множества F_i, $\quad i = 0,1$.

9.4. Следствие. *Для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств F_0 и F_1 нормального пространства X и любых двух действительных чисел a и b, где $a \leqslant b$, существует непрерывная функция $f : X \to [a,b]$, равная a на F_0 и b на F_1.*

Доказательство. Пусть f — функция, удовлетворяющая требованиям теоремы 9.1. Тогда формула $g(x) = (b-a)f(x) + a$ задает искомую функцию.

9.5. Определения. Пусть для непрерывного отображения $f : Z \to Y$, определенного на подпространстве Z пространства X, существует непрерывное отображение $F : X \to Y$, такое, что $F|_Z = f$, т.е. ограничение F на Z совпадает с f. Тогда говорят, что f *непрерывно продолжается* на X, а отображение F называется *непрерывным продолжением* отображения f на X.

9.6. Замечание. Теорема 9.1 может быть сформулирована в терминах непрерывных продолжений функций следующим образом. Пусть F_0 и F_1 — два замкнутых непересекающихся подмножества нормального пространства X. Пусть $g : Y \to [0,1]$ — функция, заданная на подпространстве $Y = F_0 \cup F_1$ формулами $g(F_0) = 0$ и $g(F_1) = 1$. Тогда существует функция $f : X \to [0,1]$, являющаяся непрерывным продолжением g на все пространство X.

Вопрос о продолжимости непрерывного отображения, которое задано на подпространстве топологического пространства, является одним из фундаментальных вопросов во многих разделах математики. Существование непрерывного продолжения скорее исключение, чем правило. Доказательства теорем, касающихся продолжимости функций, бывают обычно достаточно трудными. В случае вещественнозначных функций, заданных на подмножествах нормальных пространств, ответ на этот вопрос дается теоремой Титце-Урысона, при доказательстве которой используется лемма Урысона (см., например, [9, с.116]).

9.7. Теорема Титце-Урысона. *Каждая непрерывная функция, заданная на замкнутом подмножестве некоторого нормального пространства и принимающая значения в $[0,1]$ или в $\mathbb{R}^1$, обладает непрерывным продолжением на все пространство.*

9.8. Замечание. Свойство, сформулированное в теореме Титце-Урысона, характеризует нормальные пространства в классе T_1-пространств.

9.9. Замечание. Предположение о замкнутости подмножеств в лемме Урысона и в теореме Титце-Урысона существенно.

9.10. Примеры. 1) Множества $A = (0,1)$ и $B = (1,2)$ — непересекающиеся подмножества нормального пространства $\mathbb{R}^1$. При этом такой непрерывной функции $f : \mathbb{R}^1 \to [0,1]$, что $f(A) = \{0\}$ и $f(B) = \{1\}$, не существует. 2) В качестве X и F возьмем соответственно подпространства $[-1,1]$ и $(0,1]$ пространства $\mathbb{R}^1$. Функция

$$f : F \to \mathbb{R}^1 : x \mapsto \sin\frac{1}{x}$$

непрерывна. Однако не найдется непрерывной функции $g : X \to \mathbb{R}^1$ такой, чтобы её ограничение на F совпало бы с f.

Завершим раздел утверждением о продолжении непрерывных отображений с плотных подпространств.

9.11. Теорема. *Если непрерывное отображение всюду плотного подмножества Z некоторого топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y непрерывно продолжается на все X, то непрерывное продолжение единственно.*

Доказательство. Для двух продолжений $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : X \to Y$ множество $\{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$ содержит Z и замкнуто. Значит, оно совпадает с X.

10. Компактные пространства

В курсе математического анализа доказывается, что из любого семейства открытых интервалов, покрывающих замкнутый отрезок действительной оси, можно выбрать конечное подсемейство, тоже покрывающее этот отрезок (лемма Гейне-Бореля-Лебега). Это свойство, называемое компактностью сегмента, играет очень важную роль в анализе. В частности, оно используется при доказательстве теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией на замкнутом отрезке своих точных верхней и нижней граней. Доказательство теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на сегменте, тоже использует это свойство отрезка. В свою очередь, среди прочего, теорема Кантора может быть задействована в доказательстве интегрируемости непрерывной на замкнутом отрезке функции.

Компактные пространства и их непрерывные отображения, изучение которых является целью этого раздела, составляют одну из наиболее важных категорий топологии.

К классу компактных пространств принадлежат все ограниченные замкнутые подмножества евклидовых пространств, многими свойствами которых обладают произвольные компактные пространства.

10.1. Определения. Семейство $\mathcal{C}$ подмножеств множества A называется *покрытием* множества $B \subset A$, если B содержится в объединении элементов семейства $\mathcal{C}$. Покрытие называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов. Покрытие $\mathcal{D}$ множества B называется *подпокрытием* покрытия $\mathcal{C}$ множества B, если $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. В случае, когда X — топологическое пространство, покрытие $\mathcal{C}$ множества $Y \subset X$ называется *открытым*, если все элементы $\mathcal{C}$ открыты.

10.2. Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *компактным*, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т.е. если для каждого семейства $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \tau$, удовлетворяющего равенству $X = \cup\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ существует такое конечное множество $\Gamma \subset \Lambda$, что $X = \cup\{O_\lambda : \lambda \in \Gamma\}$.

10.3. Примеры. 1) Произвольное пространство, состоящее из конечного числа точек, компактно. 2) Антидискретное пространство компактно. 3) Бесконечное множество с топологией Зарисского компактно. 4) Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ не компактно. 5) Бесконечное множество, наделенное дискретной топологией, не компактно.

10.4. Определение. Подмножество $Y \subset (X, \tau)$ называется *компакт-*

ным множеством, если подпространство Y с индуцированной из X топологией τ_Y представляет собой компактное топологическое пространство.

10.5. Теорема. *Подмножество $Y \subset (X, \tau)$ компактно тогда и только тогда, когда любое покрытие множества Y открытыми подмножествами пространства X содержит конечное подпокрытие.*

10.6. Следствие. *Если множество компактно в подпространстве, то оно компактно и в самом пространстве. Таким образом, свойство компактности не зависит от того, подпространством какого объемлющего пространства рассматривается данное множество.*

10.7. Пример. Отрезок $[a, b]$ действительной оси компактен.

Ниже сформулируем некоторые свойства компактных пространств.

10.8. Утверждение. *Каждое замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

10.9. Лемма. *Если Y — компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства (X, τ) и точка $x \in X \setminus Y$, то найдутся непересекающиеся окрестности точки x и множества Y.*

Используя эту лемму, доказывается

10.10. Теорема. *Каждое компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

10.11. Замечание. Требование отделимости топологии в 10.10 существенно. Рассмотрим множество действительных чисел, наделенное топологией Зарисского. Легко видеть, что каждое подмножество этого пространства компактно, а замкнутыми являются лишь конечные подмножества.

10.12. Определение. Непустое семейство множеств называется *центрированным,* если пересечение любого его непустого конечного подсемейства не является пустым множеством.

10.13. Теорема. *Следующие условия для топологического пространства (X, τ) эквивалентны:*

1) *X компактно.*

2) *Каждое центрированное семейство замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.*

3) *Каждая направленность в X имеет предельную точку.*

4) *Каждая направленность в X обладает сходящейся поднаправленностью.*

5) *Каждая универсальная направленность в X сходится.*

Доказательство. Докажем только эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 3).

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $S = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольная направленность в пространстве X. Семейство

$$\mathcal{F} := \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}, \quad \text{где} \quad F_\lambda := \overline{\{x_\mu : \lambda \prec \mu\}},$$

состоит из замкнутых множеств и центрировано, так как $F_\lambda \neq \varnothing$ для любого индекса $\lambda \in \Lambda$ и $F_\alpha \subset F_\beta$ при $\beta \prec \alpha$. Значит, существует такая точка x в пространстве X, что $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Утверждается, что x является предельной точкой для направленности S. Действительно, в противном случае нашлись бы окрестность $U(x)$ и индекс $\mu \in \Lambda$, для которых

$$U(x) \cap \{x_\lambda : \mu \prec \lambda\} = \varnothing.$$

Получилось бы, что $x \notin F_\mu$, что неверно.

3) $\Longrightarrow$ 2). Теперь предположим, что в пространстве X всякая направленность имеет предельную точку, и $\mathcal{F}$ — произвольное центрированное семейство замкнутых подмножеств в X. Обозначим через Λ множество, состоящее из всех конечных подсемейств семейства $\mathcal{F}$. Введем на нем отношение $\prec$. Для $\lambda := \{F_1, F_2, \ldots, F_m\} \in \Lambda$ и $\mu := \{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \in \Lambda$ положим

$$\lambda \prec \mu, \quad \text{если} \quad \bigcap_{j=1}^{n} G_j \subset \bigcap_{i=1}^{m} F_i.$$

Множество Λ направлено этим отношением.

Далее строим направленность в X. Для этого, взяв произвольный элемент $\lambda := \{F_1, F_2, \ldots, F_m\} \in \mathcal{F}$, выбираем какую-нибудь точку $x_\lambda \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i$. Получаем направленность $S := \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

Пусть x— предельная точка для S. Покажем, что $x \in \bigcap \mathcal{F}$.

Зафиксируем произвольный элемент F_0 семейства $\mathcal{F}$. Пусть U — произвольная окрестность точки x. Выберем такое $\lambda := \{F_1, F_2, \ldots, F_m\} \succ \mu := \{F_0\}$, что $x_\lambda \in U$. Так как $x_\lambda \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i \subset F_0$, то $F_0 \cap U \neq \varnothing$. Следовательно, $x \in \overline{F_0} = F_0$, что и требовалось доказать.

10.14. Следствие. *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любое центрированное семейство его подмножеств имеет по крайней мере одну общую точку прикосновения.*

10.15. Теорема. *Любое компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть M и N — непустые непересекающиеся замкнутые подмножества компактного хаусдорфова пространства X. Во-первых, по 10.8, они компактны. Во-вторых, по лемме 10.9, для каждой точки $x \in N$ найдутся непересекающиеся окрестности $U_x(M)$ и $V(x)$ множества M и точки x соответственно. Семейство $\{V(x) : x \in N\}$ таких окрестностей образует открытое покрытие множества N и, следовательно, содержит конечное подпокрытие, скажем, $V(x_1), V(x_2), \ldots, V(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$U(M) := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}(M), \qquad V(N) := \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i).$$

Ясно, что $U(M)$ и $V(N)$ являются непересекающимися окрестностями соответственно M и N.

Перейдем к рассмотрению некоторых свойств непрерывных отображений между компактными пространствами.

10.16. Теорема. *Пусть $f : (X, \tau) \to (Y, \nu)$ — непрерывное отображение между топологическими пространствами. Если пространство X компактно, то и образ $f(X)$ компактен. Иными словами, непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$— открытое покрытие $f(X)$. Семейство $\{f^{-1}(O_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ является открытым покрытием компактного пространства X. Пусть

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_{\lambda_i}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Справедливы следующие формулы:

$$f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(O_{\lambda_i})) \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}.$$

Тем самым показано, что $f(X)$ компактно.

10.17. Следствие (Обобщенная теорема Вейерштрасса). *Непрерывная вещественная функция на компактном пространстве ограничена и достигает своих наибольшего и наименьшего значений.*

10.18. Следствие. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение из компактного топологического пространства X в линейно упорядоченное множество $(Y, \leqslant)$, наделенное порядковой топологией. Тогда существуют такие точки a и b в пространстве X, что*

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

для каждой точки $x \in X$.

Используя теорему 10.16, получаем

10.19. Теорема. *Непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.*

Из теоремы 10.19 следует

10.20. Теорема. *Непрерывное биективное отображение компактного пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

10.21. Следствие. *Пусть τ_1 и τ_2 — две топологии на множестве X, и пусть τ_1 сильнее, чем τ_2. Тогда если пространство (X, τ_1) компактно, а пространство (X, τ_2) является хаусдорфовым пространством, то топологии τ_1 и τ_2 совпадают.*

В заключении раздела рассмотрим компактные метрические пространства, которые обычно изучаются в курсе функционального анализа. Начнем с критерия компактности метрического пространства.

10.22. Теорема. *Для метрического пространства X следующие условия эквивалентны:*

- *X компактно.*
- *Из любого счетного открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подпокрытие.*
- *У любой последовательности точек пространства X существует сходящаяся подпоследовательность.*

10.23. Замечания. 1) Свойство компактности метрического пространства является более сильным свойством, чем полнота: всякое компактное метрическое пространство полно. 2) Пространство действительных чисел с евклидовой метрикой полно, но не компактно.

10.24. Определение. Метрическое пространство называется *предкомпактным*, если у любой последовательности точек этого пространства существует фундаментальная подпоследовательность.

10.25. Теорема. *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и полно.*

10.26. Замечания. 1) Предкомпактное множество ограничено, то есть является подмножеством некоторого шара. 2) Ограниченное множество может не быть предкомпактным.

10.27. Определения. Пусть задано действительное число $\varepsilon > 0$. Подмножество A метрического пространства (X, d) называется *ε–сетью* для подмножества $B \subset X$, если для любой точки $b \in B$ найдется такая точка $a \in A$, что $d(a, b) < \varepsilon$. Подмножество B метрического пространства X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве X существует конечная ε–сеть для B.

Удобный метод проверки предкомпактности множества дает следующая теорема Хаусдорфа.

10.28. Теорема. *Метрическое пространство предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Комбинируя приведенные выше теоремы, получаем утверждение:

10.29. Теорема. *Метризуемое пространство X является компактным тогда и только тогда, когда на нем существует такая метрика d, что пространство (X, d) полно и вполне ограничено.*

Следующий результат имеет многочисленные приложения в анализе, геометрии и топологии.

10.30. Лемма Лебега. *Для любого открытого покрытия $\mathcal{O}$ компактного метрического пространства X существует такое $\varepsilon > 0$, называемое числом Лебега покрытия $\mathcal{O}$, что для любой точки $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ целиком содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Пусть для каждой точки $x \in X$ выбрано такое число $\varepsilon(x) > 0$, что открытый шар радиуса $2\varepsilon(x)$ с центром в точке x целиком содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{O}$. В силу компактности пространства X, из открытого покрытия $\{B_{\varepsilon(x)}(x) : x \in X\}$ пространства X можно выделить конечное подпокрытие:

$$X = B_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cup B_{\varepsilon(x_2)}(x_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon(x_n)}(x_n), \quad x_1, \ldots, x_n \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно видеть, что наименьшее из чисел $\varepsilon(x_1), \varepsilon(x_2), \ldots, \varepsilon(x_n)$ является искомым числом Лебега.

Для отображений метрических пространств из леммы Лебега вытекает обобщение теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, которая непрерывна на отрезке.

10.31. Теорема. *Пусть X — компактное метрическое пространство, а Y — метрическое пространство и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда f равномерно непрерывно.*

11. Инициальная и финальная топологии

Здесь мы опишем еще два метода введения топологий на множествах.

Пусть $f : X \to (Y, \sigma)$ — отображение из множества X в топологическое пространство (Y, σ). На множестве X требуется ввести слабейшую топологию τ такую, чтобы отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ было непрерывным. Непосредственно проверяется, что такой топологией будет семейство $\tau = \{f^{-1}(V) \mid V \in \sigma\}$. Топология τ называется *прообразом топологии* σ относительно отображения f и обозначается $f^{-1}(\sigma)$.

Примером прообраза топологии является индуцированная топология. Действительно, топология подпространства на A — это прообраз топологии τ относительно вложения подпространства A в пространство X (см. 8.6).

Понятие прообраза топологии обобщается на случай произвольного семейства отображений

$$\{f_j : X \to (Y_j, \sigma_j) \mid j \in J\},$$

где X и J — некоторые множества, а Y_j — топологическое пространство с топологией σ_j.

11.1. Теорема. *Топология τ, порожденная базой, которая состоит из всех множеств вида $\bigcap_{s=1}^{n} f_{j_s}^{-1}(O_s)$, где $O_s \in \sigma_{j_s}$, $\quad j_1, j_2, \dots, j_n \in J, n \in \mathbb{N}$, является слабейшей среди всех топологий в X, относительно которых все функции f_j непрерывны.*

Такая топология τ называется *(инициальной) топологией, порожденной семейством отображений* $\{f_j\}_{j \in J}$. Таким образом, семейство всех множеств вида $f_j^{-1}(O)$, где $j \in J$, $O \in \sigma_j$, является предбазой инициальной топологии τ.

В следующих двух теоремах (X, τ) — пространство из 11.1.

11.2. Теорема. *Отображение f произвольного топологического пространства (Z, ρ) в (X, τ) непрерывно тогда и только тогда, когда композиция отображений $f_j \circ f$ непрерывна для каждого $j \in J$.*

Для проверки сходимости направленностей в пространствах с инициальной топологией часто используется доказываемый ниже критерий.

11.3. Теорема. *Направленность $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ в топологическом пространстве (X, τ) сходится к точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для каждого индекса $j \in J$ направленность $\{f_j(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ сходится к точке $f_j(x)$ в пространстве Y_j.*

Доказательство. Необходимость. Вытекает из непрерывности отображений f_j и теоремы 8.8.

Достаточность. Рассмотрим элемент $O(x)$ базы топологического пространства X, который является окрестностью точки x. Его можно представить в виде:

$$O(x) = f_{j_1}^{-1}(O_{j_1}) \cap f_{j_2}^{-1}(O_{j_2}) \cap \ldots \cap f_{j_n}^{-1}(O_{j_n}),$$

где $O_{j_k} \in \sigma_{j_k}, k = 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$.

Для каждого из указанных индексов j_k прообраз $f_{j_k}^{-1}(O_{j_k})$ содержит точку x. Поэтому множество O_{j_k} является окрестностью точки $f_{j_k}(x)$. Так как по условию направленность $\{f_{j_k}(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ сходится к точке $f_{j_k}(x)$ в пространстве Y_{j_k}, то найдется такой индекс $\lambda_k \in \Lambda$, что для всякого $\lambda \succ \lambda_k$ точка $f_{j_k}(x_\lambda)$ лежит в окрестности O_{j_k}. Поскольку Λ — направленное множество, то существует индекс λ_0, которому предшествуют все индексы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда для любого $\lambda \succ \lambda_0$ и каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ точка $f_{j_k}(x_\lambda)$ содержится в окрестности O_{j_k}. Значит, для всякого $\lambda \succ \lambda_0$ имеем включение

$$x_\lambda \in f_{j_1}^{-1}(O_{j_1}) \cap f_{j_2}^{-1}(O_{j_2}) \cap \ldots \cap f_{j_n}^{-1}(O_{j_n}).$$

Дальнейшие рассуждения очевидны.

Двойственной по отношению к инициальной топологии служит так называемая финальная топология. Сначала мы определим ее важный частный случай — фактор-топологию.

Пусть (X, τ) — произвольное топологическое пространство, R — некоторое отношение эквивалентности на множестве X, X/R — множество всех классов эквивалентности отношения R, а $q : X \to X/R$ — естественное (факторное) отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности $[x] \in X/R$. На фактор-множестве X/R существует сильнейшая топология среди всех топологий, относительно которых отображение q непрерывно. А именно, такой топологией является семейство всех подмножеств множества X/R, прообразы которых при естественном отображении открыты в X. Эта топология называется *фактор-топологией* и обозначается τ/R (или τ_q), а множество X/R, снабженное τ/R, называется *фактор-пространством*.

11.4. Теорема. *Множество F в фактор-пространстве X/R замкнуто тогда и только тогда, когда множество $q^{-1}(F)$ замкнуто в X.*

Доказательство. Утверждение немедленно вытекает из равенства $q^{-1}(X/R \setminus F) = X \setminus q^{-1}(F)$.

11.5. Теорема. *Отображение $f : (X/R, \tau/R) \to (Y, \sigma)$ фактор-пространства X/R в некоторое топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция $f \circ q$.*

Доказательство. Если f непрерывно, то $f \circ q$ непрерывно как композиция двух непрерывных отображений. Обратное утверждение следует из равенства $(f \circ q)^{-1}(O) = q^{-1}(f^{-1}(O))$, рассмотренного для $O \in \sigma$.

Теперь пусть имеется семейство отображений

$$\{f_j : (Y_j, \sigma_j) \to X \mid j \in J\},$$

где X и J — некоторые множества, а Y_j — топологическое пространство с топологией σ_j. В X рассмотрим семейство τ всех таких множеств $O \subset X$, что при каждом $j \in J$ прообраз $f_j^{-1}(O)$ открыт в пространстве Y_j. Легко проверить, что семейство τ является топологией, которая называется *финальной топологией, порожденной семейством отображений* $\{f_j\}$.

11.6. Замечания. 1) Финальная топология — сильнейшая из всех топологий, при которых каждое из отображений порождающего семейства, непрерывно. 2) Отображение $f : X \to Z$ из пространства X с финальной топологией, порожденной семейством $\{f_j\}$, в произвольное пространство Z является непрерывным тогда и только тогда, когда при каждом j непрерывна композиция $f \circ f_j$. 3) Фактор-топология представляет собой финальную топологию относительно факторного отображения.

12. Произведение пространств. Теорема Тихонова.

Этот раздел посвящен топологии на декартовых произведениях топологических пространств.

Сначала рассмотрим произведение конечного числа топологических пространств. Пусть (X, τ) и (Y, σ) — топологические пространства. Обозначим через β семейство всех подмножеств декартова произведения $X \times Y$, имеющих вид $U \times V$, где $U \in \tau, V \in \sigma$. Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

где $U_1 \times V_1$ и $U_2 \times V_2$ — элементы семейства β, и что β является базой некоторой топологии, которая называется *топологией произведения* на $X \times Y$.

12.1. Определение. Множество $X \times Y$, наделенное топологией произведения, называется *топологическим произведением* пространств (X, τ) и (Y, σ).

12.2. Примеры. 1) Топологическое произведение $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ — это в точности пространство $\mathbb{R}^2$. Этот пример показывает, что семейство β, вообще говоря, не является топологией на $X \times Y$. Так, например, объединение двух открытых прямоугольников на Рис. 7 не принадлежит семейству β:

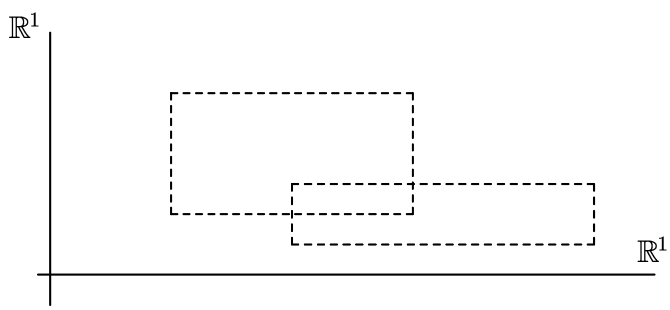


*Рис.*7

2) Топологическое произведение пространства (X, τ) на единичный отрезок $I = [0, 1]$ действительной оси $\mathbb{R}^1$ называется *цилиндром над* X.

12.3. Замечания. 1) Если β_i — база топологии пространства X_i, $i = 1, 2$, то семейство всех множеств $U_1 \times U_2$, где $U_i \in \beta_i$, является базой топологии пространства $X_1 \times X_2$. 2) Совокупность всех подмножеств множества $X \times Y$ вида $U \times Y$ и $X \times V$, где $U \in \tau, V \in \sigma$ образует предбазу топологии произведения на $X \times Y$, поскольку каждый элемент $U \times V$ базы этой топологии представляется в виде

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V).$$

Топологическое произведение любого конечного числа топологических пространств определяется аналогично случаю произведения двух пространств.

12.4. Примеры. 1) Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ представляет собой топологическое произведение n экземпляров прямой $\mathbb{R}^1$. 2) Двумерный тор, рассматриваемый как подпространство пространства $\mathbb{R}^3$, гомеоморфен топологическому произведению двух экземпляров единичной окружности из $\mathbb{R}^2$.

Теперь перейдем к описанию топологии произведения произвольного семейства топологических пространств. Эта топология была определена А. Н. Тихоновым в 1929 году. Результаты, связанные с топологией произведения, являются важнейшими инструментами исследований в различных областях математики.

Пусть имеется индексированное семейство $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ топологических пространств. Напомним, что для произвольного индекса $\mu \in \Lambda$ через p_μ обозначается проекция множества $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ на μ-е координатное множество X_μ.

12.5. Определения. Множество $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ с инициальной топологией, порожденной семейством проекций $\{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, называется *(декартовым) произведением пространств*, а сама топология называется *топологией произведения, или тихоновской топологией.*

Из определения инициальной топологии следует первое утверждение следующей теоремы.

12.6. Теорема. *Семейство β всех множеств вида $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$, где O_λ — открытое подмножество пространства X_λ и $O_\lambda = X_\lambda$ для всех, кроме конечного числа индексов λ, образует базу топологии произведения на $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Более того, если для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ фиксирована некоторая база β_λ пространства X_λ, то подсемейство семейства β, состоящее из тех $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$, для которых $O_\lambda \in \beta_\lambda$ при $O_\lambda \neq X_\lambda$, также образует базу топологии произведения.*

Второе утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из первого и определения базы.

12.7. Упражнения. 1) Проекция p_μ является непрерывным и открытым отображением. Она, вообще говоря, не замкнута. 2) Топология произведения на декартовом произведении конечного числа пространств, введенная в начале этого раздела, является тихоновской топологией.

12.8. Утверждение. *Если $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — семейство топологических пространств и A_λ — подпространство пространства $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$, то две топологии, определенные на множестве $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, а именно, топология произведения семейства пространств $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ и топология подпространства топологического произведения $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, совпадают.*

12.9. Упражнения. 1) Произведение открытых множеств в топологическом произведении любого семейства пространств может быть не открытым множеством. 2) Произведение замкнутых множеств замкнуто в топологическом произведении любого семейства пространств.

Следствием 11.2 является

12.10. Теорема. *Отображение $f : (X,\tau) \to \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ из некоторого топологического пространства (X,τ) в топологическое произведение непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $p_\lambda \circ f$ непрерывна для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$.*

Из 11.3 вытекает

12.11. Теорема. *Направленность $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ в топологическом произведении $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ сходится к точке $x \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ тогда и только тогда, когда для каждого индекса $\mu \in \Lambda$ направленность $\{p_\mu(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ сходится к точке $p_\mu(x)$.*

Одной из основных теорем общей топологии является следующая

12.12. Теорема Тихонова. *Топологическое произведение $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ произвольного семейства топологических пространств компактно в том и только том случае, когда компактны все пространства X_λ.*

Доказательство. Пусть произведение $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ компактно. Так как для каждого индекса $\mu \in \Lambda$ проекция p_μ является непрерывным отображением из топологического произведения на все пространство X_μ, то компактность X_μ следует из того факта, что непрерывный образ компактного пространства компактен (см. 10.16).

Теперь предположим, что все пространства X_λ компактны. Докажем компактность их топологического произведения. Для этого рассмотрим произвольную универсальную направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Зафиксировав произвольный индекс $\mu \in \Lambda$, очевидно, мы имеем универсальную направленность $(p_\mu(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве X_μ. Поскольку пространство X_μ компактно, то по теореме 10.13 направленность $(p_\mu(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к некоторой точке x_μ в пространстве X_μ. Обозначим через x такую точку пространства $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, что $p_\lambda(x) = x_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Так как для каждого индекса $\mu \in \Lambda$ направленность $(p_\mu(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к $p_\mu(x)$, то по теореме 12.11 заключаем, что направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к точке x в пространстве $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Таким образом, всякая универсальная направленность в топологическом произведении сходится. Воспользовавшись еще раз теоремой 10.13, получаем компактность пространства $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

12.13. Замечание. Читатель, по-видимому, задался следующим вопросом. Почему на декартовом произведении произвольного семейства пространств не ввести топологию аналогично случаю произведения конечного семейства топологических пространств? То есть в декартовом произведении $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ в качестве базы топологии взять семейство всевозможных множеств вида $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$, где O_λ является произвольным открытым подмножеством пространства X_λ для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$. Это семейство действительно является базой топологии. Порождаемая ею топология называется *ящичной топологией.* Из описания баз ящичной и тихоновской топологий немедленно следует, что ящичная топология, вообще говоря, сильнее топологии произведения. Хотя некоторые факты имеют место как для тихоновской, так и для ящичной топологий (например, если каждый из сомножителей является хаусдорфовым пространством, то и декартово произведение хаусдорфово), все-таки эти топологии существенно различаются. Прежде всего следует отметить, что для ящичной топологии не имеет места аналог теоремы Тихонова.

12.14. Пример. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — декартово произведение счетного числа экземпляров действительной оси $\mathbb{R}$. Зададим отображение f формулой:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x \mapsto (x, x, \dots).$$

Пусть, как обычно, p_n — проекция множества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ на n-е координатное пространство, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что функция $p_n \circ f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ непрерывна для каждого n. Следовательно, по теореме 12.10, функция f непрерывно отображает пространство $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с топологией произведения. При этом f не является непрерывным отображением из $\mathbb{R}^1$ в пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с ящичной топологией. Действительно, рассмотрим элемент

$$O := \prod_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$$

базы ящичной топологии. Нетрудно видеть, что полный прообраз

$$f^{-1}(O) = \{0\}$$

не является открытым множеством в пространстве $\mathbb{R}^1$.

13. Одноточечная компактификация.

Изучаемые в анализе пространства действительных и комплексных чисел не являются компактными. В связи с этим естественно ввести в рассмотрение новый класс топологических пространств, который содержал бы, в частности, все конечномерные евклидовы пространства.

13.1. Определение. Топологическое пространство X называется *локально компактным,* если у каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U, что $\overline{U}$ является компактным подпространством пространства X.

13.2. Примеры. 1) Каждое компактное пространство локально компактно. 2) Пространства $\mathbb{R}^n$ не компактные локально компактные пространства. 3) Дискретное топологическое пространство локально компактно. 4) Подпространство рациональных чисел пространства действительных чисел не локально компактно. Таким образом, свойство локальной компактности не является наследственным. 5) Бесконечномерное банахово (в частности, гильбертово) пространство не локально компактно. 6) Пространство максимальных идеалов (наделенное слабой* топологией) коммутативной банаховой алгебры — локально компактное, а в случае унитальной алгебры — компактное пространство.

П.С. Александровым была предложена конструкция, которая позволяет рассматривать локально компактное пространство как подпространство компактного пространства. Такое компактное пространство получается из данного локально компактного пространства присоединением одной точки. Ниже мы опишем эту конструкцию.

Пусть (X, τ) — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство. Введем в рассмотрение множество $X_\infty := X \cup \{\infty\}$, получаемое из X присоединением некоторого элемента ∞, который не принадлежит множеству X. Элемент ∞ обычно называется *бесконечно удаленной точкой.* Обозначим через τ_∞ семейство подмножеств множества X_∞, включающее в себя все множества из топологии τ и всевозможные множества вида $X_\infty \setminus K$, где K — компактное подпространство пространства X.

13.3. Утверждение. *Пара (X_∞, τ_∞) является компактным хаусдорфовым топологическим пространством.*

Доказательство.

Шаг 1. Семейство τ_∞ является топологией.

O1) Так как $\varnothing \in \tau \subset \tau_\infty$ и $X_\infty = X \setminus \varnothing$.

O2) Проверка того факта, что пересечение двух множеств из τ_∞ принадлежит τ_∞, состоит из трех случаев:

$$U_1, U_2 \in \tau \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau \subset \tau_\infty;$$

$$(X_\infty \setminus K_1) \cap (X_\infty \setminus K_2) = X_\infty \setminus (K_1 \cup K_2) \in \tau_\infty;$$
$$U \cap (X_\infty \setminus K) = U \cap (X \setminus K) \in \tau \subset \tau_\infty,$$

так как компактное множество K замкнуто в хаусдорфовом топологическом пространстве X, а, значит, множество $(X \setminus K)$ открыто в X.

O3) Аналогично, на три случая разбивается проверка того, что объединение произвольного семейства подмножеств из τ_∞ является элементом семейства τ_∞.

Шаг 2. Пространство (X_∞, τ_∞) компактно.

Пусть $\mathcal{O} := \{O_\lambda : \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \tau_\infty\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X_∞. Существует такой индекс $\mu \in \Lambda$, что $\infty \in O_\mu$. Из определения топологии τ_∞ следует, что множество $K := X_\infty \setminus O_\mu \subset X$ компактно в пространстве X. Нетрудно видеть, что найдется конечное подсемейство $\{O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2} \dots , O_{\lambda_n}\}$ семейства $\mathcal{O}$, являющееся покрытием K. Тогда присоединяя к этому семейству множество O_μ, получаем конечное покрытие пространства (X_∞, τ_∞). Значит, (X_∞, τ_∞) компактно.

Шаг 3. Пространство (X_∞, τ_∞) хаусдорфово.

Пусть x и y — две различные точки пространства X_∞. В силу отделимости пространства X достаточно рассмотреть случай $x \in X$ и $y = \infty$. Поскольку X локально компактно, то существует такая окрестность O точки x в пространстве X, что множество $\overline{O}$ компактно. Тогда O и $(X \setminus \overline{O}) \cup \{\infty\}$ непересекающиеся окрестности точек x и y соответственно. Утверждение доказано.

13.4. Определение. Пространство (X_∞, τ_∞) называется *одноточечной, или александровской, компактификацией* пространства X.

13.5. Определения. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфным, или топологическим, вложением,* если оно является композицией гомеоморфизма и вложения, то есть если существуют подпространство B пространства Y и гомеоморфизм $g : X \to B$, такие, что $f = \mathrm{in}_B \circ g$, где in_B — вложение B в Y (см. 8.6). Если для пространства X существует гомеоморфное вложение $f : X \to Y$ в пространство Y, то говорят, что X *вложимо* в Y.

13.6. Упражнения. 1) Непрерывное инъективное отображение из компактного пространства в хаусдорфово топологическое пространство является гомеоморфным вложением. 2) Композиция гомеоморфных вложений является гомеоморфным вложением. 3) Если пространство X вложимо в пространство Y и, наоборот, Y вложимо в X, то из этого не следует, что пространства X и Y гомеоморфны.

13.7. Определение. Пара (Y, c), где Y — компактное пространство, а $c : X \to Y$ — гомеоморфное вложение пространства X в Y, такое, что $\overline{c(X)} = Y$, называется *компактификацией пространства* X.

Теперь сформулируем теорему о свойствах александровской компактификации.

13.8. Теорема. *Каждое локально компактное хаусдорфово пространство* (X, τ) *можно гомеоморфно вложить в некоторое компактное хаусдорфово топологическое пространство* (X_∞, τ_∞)*, причем так, чтобы дополнение образа* X *в* X_∞ *было одноточечным. При этом, если* $f_1 : X \to Y_1$ *и* $f_2 : X \to Y_2$ *— два таких вложения, то существует единственный гомеоморфизм* $g : Y_1 \to Y_2$*, такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ Y_1 \arrow[rr, "g"'] & & Y_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $g \circ f_1 = f_2$.

13.9. Пример. Окружность является одноточечной компактификацией вещественной прямой.

13.10. Следствие. *Хаусдорфово пространство локально компактно тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно открытому подмножеству компактного хаусдорфова пространства.*

Литература

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию — М.: Наука, 1977.

2. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. — М.: Изд-во МГУ, 1988.

3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974.

4. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967.

5. Келли Дж.Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981.

6. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970.

7. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966.

8. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. — Казань: Изд-во КГУ, 2005.

9. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

Предметный указатель

Содержание

.

Гумеров Ренат Нельсонович

Учебно - методическое пособие