КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.Н. СОСОВ

Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности

Часть 1

Геометрия Лобачевского

КАЗАНЬ – 2012

УДК 514.13, 515.17

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
Института математики и механики имени Н. И. Лобачевского

Сосов Е.Н.

Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 1.: Учебно-методическое пособие — Казань: Казанский федеральный университет, 2012. 38 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов математиков старших курсов университетов, а также для магистрантов.

© Сосов Е. Н., 2012

Введение.

Данное учебно-методическое пособие включает минимум вводного курса по геометрии Лобачевского и ее применению в специальной теории относительности (СТО). Оно предназначено для студентов математиков старших курсов университетов, магистрантов и рассчитано на 16 часов лекций, 20 часов практических занятий и 36 часов самостоятельной работы. Автор стремился дать ясное изложение начал геометрии Лобачевского по возможности бескоординатным методом, охватив бесконечномерный случай. Из наиболее известных пяти моделей геометрии Лобачевского более подробно изучается модель Бельтрами–Клейна. Это связано с тем, что эта модель достаточно наглядная, дает возможность быстро изложить основные начальные факты и достаточно просто получить во второй части пособия основные применения геометрии Лобачевского в СТО. Все задачи в пособии служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

1. Определение пространства Лобачевского. Метрика пространства Лобачевского в модели Бельтрами-Клейна.

Пусть $\mathbb{E}$ — полное, сепарабельное евклидово пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ размерности $\dim \mathbb{E} > 1$ и $B(O,1) \subset \mathbb{E}$ ($\mathbb{S}(O,1)$) — открытый шар (сфера) с центром в фиксированной точке $O \in \mathbb{E}$ радиуса 1. Обозначим через $|xy|$ — расстояние между точками x, $y \in \mathbb{E}$ и через $L[x,u) \subset \mathbb{E}$ — луч с началом в точке x, содержащий точку $u \neq x$.

Множество Λ называется **пространством Лобачевского** над полем $\mathbb{R}$, если существует такое отображение $\pi : \Lambda \to B(O,1)$, что выполняются следующие условия (аксиомы) :

1. π — биекция.

2. Любой паре элементов x, $y \in \Lambda$ сопоставляется число $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\rho(x,x) = 0 \qquad \text{и при } x \neq y \quad \rho(x,y) = \frac{k}{2} \ln \frac{|\pi(x)v||\pi(y)u|}{|\pi(x)u||\pi(y)v|},$$

где v (u) — точка пересечения луча $L[\pi(x),\pi(y))$ ($L[\pi(y),\pi(x))$) со сферой $\mathbb{S}(O,1)$, $k > 0$ — константа.

Размерностью пространства Лобачевского называется размерность $\mathbb{E}$, т.е. $\dim \Lambda = \dim \mathbb{E}$.

Элементы Λ называются **точками** или **л-точками**, когда необходимо отличать их от точек евклидова пространства.

Отрезок (**л-отрезок**) в Λ есть полный прообраз евклидова отрезка из $B(O,1)$ при отображении π.

Прямая (**л-прямая**) в Λ есть полный прообраз хорды из $B(O,1)$ при отображении π.

При $\Lambda = B(O,1)$, $\pi = \mathrm{id}$ мы получаем так называемую **модель Бельтрами–Клейна** пространства Лобачевского.

Теорема 1. (Λ, ρ) — *метрическое пространство, геодезические сегменты в котором есть отрезки.*

$\odot$ Достаточно доказать теорему в модели Бельтрами–Клейна. Действительно, после такого доказательства нужно использовать π в качестве изометрии исходного пространства Лобачевского на модель Бельтрами–Клейна.

Проверим аксиомы метрики. Пусть x, $y \in B(O,1)$, $x \neq y$. Тогда

$$\frac{|xv||yu|}{|xu||yv|} = \frac{(|xy| + |yv|)(|yx| + |xu|)}{|yv||xu|} > 1.$$

Следовательно, $\rho(x,y) > 0$. Очевидно, что для любых x, $y \in B(O,1)$ $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

Пусть точка z принадлежит отрезку $[x,y] \subset B(O,1)$. Тогда в случае $z \notin \{x,y\}$

$$\frac{|xv||yu|}{|xu||yv|} = \frac{|xv||zu||zv||yu|}{|xu||zv||zu||yv|}.$$

Следовательно, $\rho(x,y) = \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Пусть точки x, y, $z \in B(O,1)$ не принадлежат одному отрезку. Построим точки

$$\{v\} = L[x,y) \cap \mathbb{S}(O,1), \quad \{u\} = L[y,x) \cap \mathbb{S}(O,1), \quad \{s\} = L[y,z) \cap \mathbb{S}(O,1),$$

$$\{t\} = L[z,y) \cap \mathbb{S}(O,1), \quad \{m\} = L[x,z) \cap \mathbb{S}(O,1), \quad \{l\} = L[z,x) \cap \mathbb{S}(O,1),$$

$$\{q\} = [s,l] \cap [u,v], \qquad \{h\} = [m,t] \cap [u,v],$$

$$\{p\} = P[l,s] \cap P[t,m], \qquad \{w\} = P[p,z] \cap [u,v],$$

где $P[l,s]$ — прямая, проходящая через точки l и s, а p может быть несобственной точкой в случае параллельности прямых $P[l,s]$ и $P[t,m]$.

Мы разберем случай, когда $w \in [x,y] \backslash \{x,y\}$, поскольку другие случаи тривиальны или аналогичны.

$$\frac{|xv||yu|}{|xu||yv|} = \frac{|xv||wu||wv||yu|}{|wv||xu||yv||wu|} < \frac{|xh||wq||wh||yq|}{|wh||xq||yh||wq|} = \frac{|xm||zl||zt||ys|}{|zm||xl||yt||zs|},$$

так как, например,

$$\frac{|xv|}{|wv|} = \frac{|xh| + |hv|}{|wh| + |hv|} < \frac{|xh|}{|wh|}$$

и остальные неравенства аналогичны, а последнее равенство следует из инвариантности сложного отношения четырех точек при проектировании из точки p на прямые $P[l,m]$ и $P[s,t]$ соответственно.

Следовательно, $\rho(x,y) < \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Таким образом, (Λ,ρ) — метрическое пространство.

Под геодезическим сегментом в метрическом пространстве понимается кривая, длина которой равна расстоянию между ее концами (подробности см. в [1], с. 42).

После доказанных равенств и неравенств ясно, что отрезки являются геодезическими сегментами.

Из последнего строгого неравенства и определения геодезического сегмента следует, что кроме отрезков других геодезических сегментов в (Λ, ρ) нет. $\odot$

В модели Бельтрами–Клейна мы будем задавать точки их радиус-векторами относительно точки O и обозначать эти радиус-векторы также, как и точки. Точке O при этом соответствует нулевой радиус-вектор 0.

В модели Бельтрами–Клейна получим другую формулу для метрики, избавившись от точек u, v, принадлежащих так называемому **абсолюту** $\mathbb{S}(0,1)$ пространства Лобачевского $\Lambda = B(0,1)$.

Теорема 2. *В модели Бельтрами–Клейна имеет место формула*

$$\rho(x,y) = k\mathrm{Arch}\,\frac{1-(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}\,,$$

где (x,y) — скалярное произведение радиусов-векторов точек x, $y \in B(0,1)$ и x^2 — скалярный квадрат радиус-вектора точки x.

$\odot$ Представим u, $v \in \mathbb{S}(0,1)$ в следующем виде

$$v = x + \lambda_1(y-x), \quad \lambda_1 > 1, \qquad u = x + \lambda_2(y-x), \quad \lambda_2 < 0.$$

При фиксированных различных x, $y \in B(0,1)$ числа λ_1, λ_2 являются корнями уравнения

$$\lambda^2(y-x)^2 + 2\lambda(x, y-x) + x^2 - 1 = 0.$$

Откуда найдем

$$\lambda_{1,2} = \frac{(x, x-y) \pm \sqrt{\Delta}}{(y-x)^2}\,,$$

где $\Delta = (x, y-x)^2 + (1-x^2)(y-x)^2 = A^2 - B$, $A = 1-(x,y)$, $B = (1-x^2)(1-y^2)$. Кроме того,

$$\frac{|x-v||y-u|}{|x-u||y-v|} = \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2(1-\lambda_1)} = \frac{((x,x-y)+\sqrt{\Delta})((y,y-x)+\sqrt{\Delta})}{((x,y-x)+\sqrt{\Delta})((y,x-y)+\sqrt{\Delta})} =$$

$$\frac{[((x,x-y)+\sqrt{\Delta})((y,y-x)+\sqrt{\Delta})]^2}{(1-x^2)(1-y^2)(y-x)^4}=\frac{(A+\sqrt{\Delta})^2}{B}.$$

Следовательно,

$$\rho(x,y)=k\ln\left(\frac{A}{\sqrt{B}}+\sqrt{\left(\frac{A}{\sqrt{B}}\right)^2-1}\right)=k\mathrm{Arch}\,\frac{A}{\sqrt{B}},\ \odot$$

Следствие 1. *В модели Бельтрами–Клейна для любых x, $y\in B(0,1)$ имеют место формулы*

$$\rho(x,y)=\frac{k}{2}\ln\frac{A+\sqrt{\Delta}}{A-\sqrt{\Delta}}=k\mathrm{Arth}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{A}\,,$$

$$\rho(0,y)=\frac{k}{2}\ln\frac{1+|y|}{1-|y|}=k\mathrm{Arth}\,|y|=k\mathrm{Arch}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\qquad |y|=\mathrm{th}\frac{\rho(0,y)}{k}.$$

Задачи.

1. Произвести все вычисления в теоремах 1, 2 и следствии 1.

2. Доказать, что в модели Бельтрами–Клейна для любых x, $y\in B(0,r)$ имеют место формулы

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{k}{2}\ln\frac{A+\sqrt{\Delta}}{A-\sqrt{\Delta}}=k\mathrm{Arth}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{A}\,,$$

$$\tilde{\rho}(0,y)=\frac{k}{2}\ln\frac{r+|y|}{r-|y|}=k\mathrm{Arth}\,\frac{|y|}{r}=k\mathrm{Arch}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}},\qquad |y|=r\mathrm{th}\frac{\rho(0,y)}{k},$$

где $\Delta=A^2-B$, $A=r^2-(x,y)$, $B=(r^2-x^2)(r^2-y^2)$.

2. Движения пространства Лобачевского.

Движением пространства Лобачевского называется изометрия пространства (Λ,ρ) на себя, т.е. такая сюръекция $f:(\Lambda,\rho)\to(\Lambda,\rho)$, для любых x, $y\in\Lambda$

$$\rho(f(x),f(y))=\rho(x,y).$$

Группа всех движений $\mathrm{Iso}(\Lambda)$ пространства Лобачевского, очевидно, изоморфна группе всех движений $\mathrm{Iso}(B(0,1))$ модели Бельтрами–Клейна.

Что произойдет, если в определении пространства Лобачевского изменить радиус шара? Оказывается получится изометричное исходному пространство Лобачевского.

Это сразу следует из следующей леммы, доказательство которой также почти очевидно.

Лемма 1. *Отображение*

$$\chi : (B(0,1),\rho) \to (B(0,r),\tilde{\rho}), \qquad \chi(x) = rx$$

для каждого $r > 0$ является изометрией, если для любых x, $y \in B(0,r)$

$$\tilde{\rho}(x,y) = k\mathrm{Arch}\,\frac{r^2-(x,y)}{\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{r^2-y^2}}\,.$$

Выясним, какой вид имеет произвольное движение в модели Бельтрами–Клейна.

Теорема 1. *В модели Бельтрами–Клейна произвольное движение есть ограничение на открытый шар $B(0,1)$ проективного преобразования евклидова пространства $\mathbb{E}$, сохраняющего $B(0,1)$.*

$\odot$ Пусть $f \in \mathrm{Iso}(B(0,1))$ и $z \in [x,y] \subset B(0,1)$. Тогда $\rho(x,z)+\rho(z,y) = \rho(x,y)$.

Следовательно, $f(z) \in [f(x),f(y)]$. Кроме того, f сохраняет сложное отношение четырех точек специального вида

$$\frac{|f(x)\hat{v}||f(y)\hat{u}|}{|f(x)\hat{u}||f(y)\hat{v}|} = \frac{|xv||yu|}{|xu||yv|}\,,$$

где $\{\hat{v}\} = L[f(x),f(y)) \cap \mathbb{S}(O,1)$, $\{\hat{u}\} = L[f(y),f(x)) \cap \mathbb{S}(O,1)$. Осталось доказать, что f сохраняет произвольное сложное отношение четырех точек.

Нетрудно понять, что достаточно доказать, что f сохраняет сложное отношение четырех точек вида $u_1 \in [u,x]\backslash\{u\}$, x, y и v. Из предыдущего свойства получим

$$\frac{|f(u_1)\hat{v}||f(x)\hat{u}|}{|f(u_1)\hat{u}||f(x)\hat{v}|} = \frac{|u_1v||xu|}{|u_1u||xv|}\,.$$

Тогда

$$\frac{|f(x)\hat{v}||f(y)f(u_1)|}{|f(x)f(u_1)||f(y)\hat{v}|} = \frac{1 - \dfrac{|f(y)\hat{u}||f(u_1)\hat{v}|}{|f(y)\hat{v}||f(u_1)\hat{u}|}}{1 - \dfrac{|f(u_1)\hat{v}||f(x)\hat{u}|}{|f(u_1)\hat{u}||f(x)\hat{v}|}} =$$

$$\frac{1 - \dfrac{|yu||u_1v|}{|yv||u_1u|}}{1 - \dfrac{|u_1v||xu|}{|u_1u||xv|}} = \frac{|xv||yu_1|}{|xu_1||yv|} \, . \odot$$

Пусть e — фиксированный единичный вектор из ассоциированного для $\mathbb{E}$ евклидова векторного пространства E.

Радиус-вектор произвольной точки $x \in B(0,1)$ можно представить в форме $x = x_1 e + x_2$, где $x_1 = (x, e)$ и $x_2 = x - x_1 e$.

Параллельным переносом на вектор $a = pe$, где $p = |a| < 1$, в модели Бельтрами–Клейна называется преобразование $g_a : B(0,1) \to B(0,1)$, имееющее вид

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1 + p}{1 + px_1} \, , \qquad \hat{x}_2 = \frac{x_2\sqrt{1 - p^2}}{1 + px_1} \, .$$

Нетрудно проверить, что обратное преобразование есть параллельный перенос на вектор $(-a)$, т.е. имеет вид

$$g_a^{-1} = g_{-a} : \; x_1 = \frac{\hat{x}_1 - p}{1 - p\hat{x}_1} \, , \qquad x_2 = \frac{\hat{x}_2\sqrt{1 - p^2}}{1 - p\hat{x}_1} \, .$$

1. **Паралельный перенос является движением**.

$\odot$ Мы установили, что g_a — биекция. Нетрудно непосредственно проверить, что для любых x, $y \in B(0,1)$ $\rho(g_a(x), g_a(y)) = \rho(x, y)$.

Еще проще воспользоваться теоремой 1. Из вида биекции g_a следует, что это проективное преобразование. А из равенств

$$1 - (\hat{x}_1)^2 - (\hat{x}_2)^2 = \frac{(1 + px_1)^2 - (x_1 + p)^2 - (1 - p^2)x_2^2}{(1 + px_1)^2} = \frac{(1 - p^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{(1 + px_1)^2}$$

следует, что это проективное преобразование сохраняет открытый шар $B(0,1)$. $\odot$

2. В однородных компонентах $x_1 = X_1/Z$, $x_2 = X_2/Z$ параллельный перенос g_a, очевидно, имеет вид

$$\lambda\hat{X}_1 = X_1 + pZ, \qquad \lambda\hat{X}_2 = X_2\sqrt{1-p^2}, \qquad \lambda\hat{Z} = pX_1 + Z.$$

Теорема 2. *В модели Бельтрами–Клейна верны следующие утверждения.*

(i) $f \in \mathrm{Iso}(B(0,1))$ и $f(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$ и f — ортогональное преобразование.

(ii) Любое движение $f \in \mathrm{Iso}(B(0,1))$ имеет вид $f = g_{f(0)} \circ U$, где U — ортогональное преобразование.

$\odot$ (i) Утверждение следует из теоремы 1 и следующих равенств и импликаций

$$\rho(f(0), f(x)) = \rho(0, x) = \rho(0, f(x)) \Leftrightarrow k\mathrm{Arth}\,|f(x)| = k\mathrm{Arth}\,|x| \Leftrightarrow |f(x)| = |x|.$$

(ii) Утверждение следует из (i) и следующей импликации

$$U(x) = g^{-1}_{f(0)}(f(x)) \Rightarrow U(0) = 0. \odot$$

Лемма 2. *В модели Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского любое движение имеет вид*

$$\hat{x} = \frac{ax + by + c}{px + qy + r}, \qquad \hat{y} = \frac{lx + my + n}{px + qy + r},$$

где вещественные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$a^2 + l^2 - p^2 = b^2 + m^2 - q^2 = -c^2 - n^2 + r^2 = 1,$$

$$ab + lm - pq = ac + ln - pr = bc + mn - qr = 0.$$

$\odot$ Подсчитаем следующее выражение

$$(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 - 1 = \frac{V}{(px + qy + r)^2}, \quad \text{где}$$

$$V = (a^2 + l^2 - p^2)x^2 + (b^2 + m^2 - q^2)y^2 +$$

$$c^2 + n^2 - r^2 + 2(ab + lm - pq)xy + 2(ac + ln - pr)x + 2(bc + mn - qr)y.$$

Из условия сохранения $\mathbb{S}(0,1)$ получим

$$(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 - 1 = \frac{(x^2 + y^2 - 1)(a^2 + l^2 - p^2)}{(px + qy + r)^2}.$$

Левая и правая части этого равенства должны быть меньше нуля. Следовательно, $h = a^2 + l^2 - p^2 > 0$.

Полагая $h = s^2$ и деля все коэффициенты на s, получим требуемые условия. $\odot$

Задачи.

1. Произвести все вычисления в теореме 1 и лемме 1.

3. Элементарная геометрия в модели Бельтрами-Клейна плоскости Лобачевского. Параллельные и расходящиеся прямые. Величина угла. Угол параллельности. Дефект и избыток треугольника. Теорема Пифагора. Формула Лобачевского. Теоремы синусов, косинусов и двойственная теорема косинусов. Теорема о биссектрисе. Длины средней линии и медианы, точка пересечения медиан в треугольнике.

Используем модель Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского, т.е. $n = \dim \Lambda = 2$.

Величина л-угла есть величина евклидова угла, л-параллельно перенесенного так, чтобы его вершина перешла в центр круга 0.

Угловым дефектом или дефектом л-многоугольника M называется число

$$\sigma(M) = (n-2)\pi - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — величины внутренних л-углов многоугольника.

Абсолютным избытком л-треугольника T называется число

$$\delta(T) = -\sigma(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Докажем сначала теорему Пифагора.

Теорема 1. *Для прямоугольного треугольника с гипотенузой c_l и катетами a_l, b_l имеет место формула*

$$\operatorname{ch} \frac{c_l}{k} = \operatorname{ch} \frac{a_l}{k} \operatorname{ch} \frac{b_l}{k}.$$

$\odot$ Расположим треугольник так, чтобы его вершина, противолежащая гипотенузе, находилась в центре круга. Тогда

$$a_l = k\mathrm{Arch}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}, \qquad b_l = k\mathrm{Arch}\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}, \qquad c_l = k\mathrm{Arch}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}. \odot$$

Пусть точка $z \in B(0,1)$ не принадлежит л-прямой $P[x,y]$. Л-луч $L[z,a)$ называется **л-параллельным** л-лучу $L[x,y)$, если

$$L[z,a) \cap \mathbb{S}(0,1) = L[x,y) \cap \mathbb{S}(0,1).$$

Прямые $P[z,a]$ и $P[x,y]$ называются в этом случае **параллельными**.

Таким образом, **через точку вне данной л-прямой в плоскости Лобачевского проходят точно две прямые, л-параллельные данной л-прямой.**

Проведем из точки z л-перпендикуляр $P[z,b]$ к л-прямой $P[x,y]$. Л-угол (и его величина) между л-лучами $L[z,a)$ и $L[z,b)$ называется **углом параллельности**.

Две л-прямые в плоскости Лобачевского называются **расходящимися** или сверхпараллельными, если они не пересекаются и не являются л-параллельными.

Теорема 2. *Имеют место следующие формулы Лобачевского*

$$\alpha_l = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{-\frac{x_l}{k}} \qquad \cos\,\alpha_l = \mathrm{th}\,\frac{x_l}{k},$$

где α_l — угол параллельности, x_l — длина перпендикуляра, проведенного из точки вне прямой к этой прямой. При этом первая функция называется функцией Лобачевского.

$\odot$ Если одна л-прямая содержит центр шара, то в силу сохранения перпендикулярности при л-параллельном переносе вдоль этой л-прямой е-перпендикулярная ей л-прямая будет и л-перпендикулярной. Действительно, при $n=2$ и $a =< p; 0 >$

$$g_a(< 0;0 >) =< p;0 >, \qquad g_a(< 0;1 >) =< p; \sqrt{1-p^2} > .$$

Поместив вершину угла паралелльности в центр круга, получим

$$\cos\,\alpha_l = \cos\,\alpha = x = \mathrm{th}\,\frac{x_l}{k},$$

где x — евклидова длина перпендикуляра. Запишем полученное равенство в виде

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha_l}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha_l}{2}} = \frac{1-e^{-\frac{2x_l}{k}}}{1+e^{-\frac{2x_l}{k}}}\,,$$

откуда и следует первая формула. $\odot$

Для упрощения обозначений всюду в остальных формулах положим $k=1$.

Теорема 3. *Верны следующие утверждения в планиметрии Лобачевского.*

(i) *Теорема синусов :*

$$\frac{\mathrm{sh}\ a_l}{\sin\ \alpha_l} = \frac{\mathrm{sh}\ b_l}{\sin\ \beta_l} = \frac{\mathrm{sh}\ c_l}{\sin\ \gamma_l}.$$

(ii) *Теорема косинусов :*

$$\mathrm{ch}\ c_l = \mathrm{ch}\ a_l\,\mathrm{ch}\ b_l - \mathrm{sh}\ a_l\,\mathrm{sh}\ b_l \cos\ \gamma_l.$$

(iii) *Двойственная теорема косинусов :*

$$\cos\ \gamma_l = -cos\,\alpha_l \cos\ \beta_l + \sin\ \alpha_l \sin\ \beta_l\,\mathrm{ch}\ c_l.$$

Следовательно, группа всех подобий пространства Лобачевского совпадает с группой всех движений этого пространства.

(iv) *Длина медианы m_l, проведенной к стороне c_l.*

$$\mathrm{ch}\ m_l = \frac{\mathrm{ch}\ a_l + \mathrm{ch}\ b_l}{2\,\mathrm{ch}\ \frac{c_l}{2}}\,.$$

(v) *Длина средней линии d_l, проведенной к сторонам a_l и b_l.*

$$\mathrm{ch}\ d_l = \frac{\mathrm{ch}\ a_l + \mathrm{ch}\ b_l + \mathrm{ch}\ c_l + 1}{4\,\mathrm{ch}\ \frac{a_l}{2}\,\mathrm{ch}\ \frac{b_l}{2}}\,.$$

(vi) *Теорема о биссектрисе, основание которой делит сторону c_l на отрезок x_l, имеющий общую вершину со стороной a_l, и отрезок y_l, имеющий общую вершину со стороной b_l.*

$$\frac{\mathrm{sh}\ a_l}{\mathrm{sh}\ b_l} = \frac{\mathrm{sh}\ x_l}{\mathrm{sh}\ y_l}\,.$$

(vii) *Представление радиус-вектора середины ω отрезка через радиус-векторы его концов x и y.*

$$\omega = \frac{x \operatorname{ch} \rho(0,x) + y \operatorname{ch} \rho(0,y)}{\operatorname{ch} \rho(0,x) + \operatorname{ch} \rho(0,y)} = \frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}} .$$

$(viii)$ *Представление радиус-вектора r точки пересечения трех медиан треугольника через радиус-векторы вершин треугольника x, y и z.*

$$r = \frac{x \operatorname{ch} \rho(0,x) + y \operatorname{ch} \rho(0,y) + z \operatorname{ch} \rho(0,z)}{\operatorname{ch} \rho(0,x) + \operatorname{ch} \rho(0,y) + \operatorname{ch} \rho(0,z)} .$$

$\odot$ (i) Расположим вершину острого угла α_l прямоугольного треугольника в центре круга. Тогда получим

$$\operatorname{th} b_l = b = c \cos \alpha = \operatorname{th} c_l \cos \alpha_l.$$

Если учтем еще теорему Пифагора, то найдем

$$\sin \alpha_l = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{th}^2 b_l}{\operatorname{th}^2 c_l}} = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{ch}^2 a_l \operatorname{sh}^2 b_l}{\operatorname{sh}^2 c_l}} =$$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 a_l \operatorname{ch}^2 b_l - 1 - \operatorname{ch}^2 a_l \operatorname{sh}^2 b_l}}{\operatorname{sh} c_l} = \frac{\operatorname{sh} a_l}{\operatorname{sh} c_l} .$$

В произвольном треугольнике проведем высоту h_l из вершины, противолежащей стороне c_l и используем полученную формулу для двух прямоугольных треугольников.

$$\sin \alpha_l = \frac{\operatorname{sh} h_l}{\operatorname{sh} b_l} = \frac{\sin \beta_l \operatorname{sh} a_l}{\operatorname{sh} b_l}.$$

(ii) Пусть h_l — высота в треугольнике с основанием на стороне a_l. Другие случаи можно привести к этому заменой обозначений.

Рассмотрим один из образовавшихся прямоугольных треугольников со сторонами b_l, h_l и d_l.

Используя теорему Пифагора и первую из полученных формул в доказательстве (i), получим

$$\operatorname{ch} c_l = \operatorname{ch}(a_l - d_l) \operatorname{ch} h_l = \operatorname{ch} h_l (\operatorname{ch} a_l \operatorname{ch} d_l - \operatorname{sh} a_l \operatorname{sh} d_l) =$$

$$\operatorname{ch} a_l \operatorname{ch} b_l - \operatorname{sh} a_l \operatorname{th} d_l \operatorname{ch} b_l = \operatorname{ch} a_l \operatorname{ch} b_l - \operatorname{sh} a_l \operatorname{sh} b_l \cos \gamma_l.$$

(iii) Преобразуем следующее отношение, используя теоремы синусов и косинусов

$$\frac{\cos \gamma_l + \cos \alpha_l \cos \beta_l}{\sin \alpha_l \sin \beta_l} =$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{ch} b_l \operatorname{ch} a_l - \operatorname{ch} c_l}{\operatorname{sh} b_l \operatorname{sh} a_l} + \dfrac{(\operatorname{ch} c_l \operatorname{ch} b_l - \operatorname{ch} a_l)(\operatorname{ch} c_l \operatorname{ch} a_l - \operatorname{ch} b_l)}{\operatorname{sh}^2 c_l \operatorname{sh} b_l \operatorname{sh} a_l}}{\dfrac{\operatorname{sh} a_l}{\operatorname{sh} b_l}\left(1 - \dfrac{(\operatorname{ch} c_l \operatorname{ch} a_l - \operatorname{ch} b_l)^2}{\operatorname{sh}^2 c_l \operatorname{sh}^2 a_l}\right)} =$$

$$\frac{(\operatorname{ch}^2 c_l - 1)(\operatorname{ch} b_l \operatorname{ch} a_l - \operatorname{ch} c_l) + \operatorname{ch}^2 c_l \operatorname{ch} b_l \operatorname{ch} a_l + \operatorname{ch} b_l \operatorname{ch} a_l - \operatorname{ch} c_l(\operatorname{ch}^2 b_l + \operatorname{ch}^2 a_l)}{(\operatorname{ch}^2 c_l - 1) \operatorname{sh}^2 a_l - \operatorname{ch}^2 c_l \operatorname{ch}^2 a_l + 2 \operatorname{ch} c_l \operatorname{ch} a_l \operatorname{ch} b_l - \operatorname{ch}^2 b_l} =$$

$$\frac{\operatorname{ch} c_l(1 + 2 \operatorname{ch} c_l \operatorname{ch} a_l \operatorname{ch} b_l - \operatorname{ch}^2 c_l - \operatorname{ch}^2 b_l - \operatorname{ch}^2 a_l)}{-\operatorname{ch}^2 c_l - \operatorname{sh}^2 a_l + 2 \operatorname{ch} c_l \operatorname{ch} a_l \operatorname{ch} b_l - \operatorname{ch}^2 b_l} = \operatorname{ch} c_l.$$

(iv) Пусть основание медианы m_l делит сторону c_l. Используем теорему косинусов для двух образовавшихся треугольников.

$$\operatorname{ch} a_l = \operatorname{ch} \frac{c_l}{2} \operatorname{ch} m_l - \operatorname{sh} \frac{c_l}{2} \operatorname{sh} m_l \cos \delta_l,$$

$$\operatorname{ch} b_l = \operatorname{ch} \frac{c_l}{2} \operatorname{ch} m_l - \operatorname{sh} \frac{c_l}{2} \operatorname{sh} m_l \cos(\pi - \delta_l).$$

Сложив эти равенства, получим искомую формулу.

(v) Используем теорему косинусов сначала для меньшего треугольника, затем для исходного треугольника.

$$\operatorname{ch} d_l = \operatorname{ch} \frac{a_l}{2} \operatorname{ch} \frac{b_l}{2} - \operatorname{sh} \frac{a_l}{2} \operatorname{sh} \frac{b_l}{2} \cos \gamma_l = \operatorname{ch} \frac{a_l}{2} \operatorname{ch} \frac{b_l}{2} -$$

$$\frac{\operatorname{ch} a_l \operatorname{ch} b_l - \operatorname{ch} c_l}{4 \operatorname{ch} \frac{a_l}{2} \operatorname{ch} \frac{b_l}{2}} = \frac{(1 + \operatorname{ch} a_l)(1 + \operatorname{ch} b_l) - \operatorname{ch} a_l \operatorname{ch} b_l + \operatorname{ch} c_l}{4 \operatorname{ch} \frac{a_l}{2} \operatorname{ch} \frac{b_l}{2}} =$$

$$\frac{\operatorname{ch} a_l + \operatorname{ch} b_l + \operatorname{ch} c_l + 1}{4 \operatorname{ch} \frac{a_l}{2} \operatorname{ch} \frac{b_l}{2}}.$$

(vi) Используем теорему синусов для смежных треугольников.

$$\frac{\operatorname{sh} a_l}{\sin \delta_l} = \frac{\operatorname{sh} x_l}{\sin \frac{\gamma_l}{2}}, \qquad \frac{\operatorname{sh} b_l}{\sin(\pi - \delta_l)} = \frac{\operatorname{sh} y_l}{\sin \frac{\gamma_l}{2}}.$$

Взяв отношение этих равенств, получим искомое равенство.

(vii) Проведем непосредственные вычисления.

$$\rho(x,\omega) = k\mathrm{Arch}\frac{1-\dfrac{x^2\sqrt{1-y^2}+(x,y)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\left(\dfrac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}} =$$

$$k\mathrm{Arch}\frac{1-(x,y)+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2-2x^2-2y^2+2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+2x^2y^2-2(x,y)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}} =$$

$$k\mathrm{Arch}\frac{1-(x,y)+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}((1-x^2)(1-y^2))^{1/4}\sqrt{1-(x,y)+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}} =$$

$$k\mathrm{Arch}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\ \rho(x,y)+1}{2}} = \frac{1}{2}\rho(x,y).$$

Изменяя обозначения, получим второе требуемое равенство

$$\rho(y,\omega) = \frac{1}{2}\rho(x,y).$$

$(viii)$ Рассмотрим радиус-вектор

$$r = \frac{x\,\mathrm{ch}\ \rho(0,x)+y\,\mathrm{ch}\ \rho(0,y)+z\,\mathrm{ch}\ \rho(0,z)}{\mathrm{ch}\ \rho(0,x)+\mathrm{ch}\ \rho(0,y)+\mathrm{ch}\ \rho(0,z)}.$$

Используя формулы для радиуса-вектора a середины отрезка $[x,y]$ и для радиуса-вектора b середины отрезка $[z,x]$, непосредственно устанавливаем, что вектор $r-y$ сонаправлен вектору $b-y$ и вектор $r-z$ сонаправлен вектору $a-z$. Аналогично, для другой пары медиан. $\odot$

Четырехугольником Ламберта называется четырехугольник $xyzu$ с прямыми углами при вершинах x, y, z и острым углом α_l при вершине u.

Для четырехугольника Ламберта имеет место формула

$$\mathrm{sh}\ \rho(x,u) = \mathrm{ch}\ \rho(z,u)\,\mathrm{sh}\ \rho(y,z).$$

$\odot$ Действительно, пусть β_l — угол между отрезками $[y,u]$ и $[y,x]$. Тогда

$$\mathrm{sh}\ \rho(x,u) = \mathrm{sh}\ \rho(y,u)\sin\beta_l = \mathrm{sh}\ \rho(y,u)\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{2}-\beta_l)} =$$

$$\text{sh }\rho(y,u)\sqrt{1-\frac{\text{sh}^2\ \rho(z,u)}{\text{sh}^2\ \rho(y,u)}}=\sqrt{\text{ch}^2\ \rho(y,u)-1-\text{sh}^2\ \rho(z,u)}=$$

$$\sqrt{\text{ch}^2\ \rho(y,z)\,\text{ch}^2\ \rho(z,u)-\text{ch}^2\ \rho(z,u)}=\text{ch }\rho(z,u)\,\text{sh }\rho(y,z).\odot$$

4. Модели Пуанкаре пространства Лобачевского на верхней полусфере псевдоевклидова пространства индекса 1, в открытом шаре евклидова пространства и в открытом полупространстве евклидова пространства.

Рассмотрим в $\mathbb{R}\times E$ псевдоскалярное произведение

$$(< x_0; x >, < y_0; y >) = x_0 y_0 - (x,y),$$

где x_0, $y_0\in\mathbb{R}$, x, $y\in E$. Задав на верхней полусфере псевдоевклидова пространства индекса 1

$$\mathbb{S}_+ = \{< x_0; x > \in \mathbb{R}\times\mathbb{E} : < x_0; x >^2 = r^2,\ x_0 > 0\},$$

где $r>0$, метрику

$$\rho_L(< x_0; x >, < y_0; y >) = k\text{Arch}\,\frac{(< x_0; x >, < y_0; y >)}{r^2},$$

мы получим **модель пространства Лобачевского на сфере псевдоевклидова пространства индекса 1**.

Рассмотрим отображение (опустив тильду у метрики)

$$F:(\mathbb{S}_+,\rho_L)\to(B(0,r),\rho)\subset\mathbb{E},\qquad F(< x_0; x >)=\frac{r}{x_0}x=\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}x.$$

Тогда нетрудно найти обратное отображение

$$F^{-1}:(B(0,r),\rho)\to(\mathbb{S}_+,\rho_L),\qquad F^{-1}(x)=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} < r; x > .$$

Теорема 1. *Отображение $F:(\mathbb{S}_+,\rho_L)\to(B(0,r),\rho)$ является изометрией, которая есть композиция центральной проекции из точки 0 сферы S_+ на гиперплоскость с уравнением $x_0=r$ и ортогональной проекции этой гиперплоскости на гиперплоскость с уравнением $x_0=0$. Следовательно, прямые пространства $(\mathbb{S}_+,\rho_L)$ есть сечения $\mathbb{S}_+$ двумерными плоскостями, содержащими 0.*

$\odot$ Докажем сохранение расстояния отображением F

$$\rho(F(<x_0;x>),F(<y_0;y>))=k\mathrm{Arch}\,\frac{r^2-(\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}x,\frac{r}{\sqrt{r^2+y^2}}y)}{\sqrt{r^2-\left(\frac{rx}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)^2}\sqrt{r^2-\left(\frac{ry}{\sqrt{r^2+y^2}}\right)^2}}=$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{(<x_0;x>,<y_0;y>)}{r^2}=\rho_L(<x_0;x>,<y_0;y>)\,.$$

Прямая с уравнением

$$<y_0;y>=\lambda<\sqrt{r^2+x^2};x>,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

пересекает гиперплоскость с уравнением $x_0=r$ в точке с параметром на прямой $\lambda=\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$. Следовательно, после проекции на гиперплоскость с уравнением $x_0=0$, получим

$$F(<x_0;x>)=\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}x.$$

Кроме того,

$$F(F^{-1}(x))=\frac{\frac{r^2x}{\sqrt{r^2-x^2}}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{rx}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}}=x.$$

Следовательно, эти отображения взаимно обратны. $\odot$

Рассмотрим стереографическую проекцию f из точки $<-r;0>\in\mathbb{S}_+$ на открытый шар $B(0,r)\subset\mathbb{E}$

$$f:\mathbb{S}_+\to B(0,r),\qquad f(<x_0;x>)=\frac{rx}{r+\sqrt{r^2+x^2}}\,.$$

Докажем это и то, что обратное отображение имеет вид

$$f^{-1}:B(0,r)\to\mathbb{S}_+,\qquad f^{-1}(x)=\frac{r}{r^2-x^2}<r^2+x^2;2rx>\ .$$

$\odot$ Прямая с уравнением

$$<y_0;y>=<-r;0>+\lambda<r+\sqrt{r^2+x^2};x>,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

пересекает гиперплоскость с уравнением $x_0 = 0$ в точке с параметром на прямой $\lambda = \frac{r}{r+\sqrt{r^2+x^2}}$. Следовательно,

$$f(< x_0; x >) = \frac{rx}{r + \sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Кроме того,

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{\dfrac{2r^3x}{r^2 - x^2}}{r + \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{2r^2x}{r^2 - x^2}\right)^2}} = x.$$

Следовательно, эти отображения взаимно обратны. $\odot$

Определим метрику Пуанкаре формулой

$$\rho_P : B(0, r) \times B(0, r) \to \mathbb{R}_+, \qquad \rho_P(x, y) = \rho_L(f^{-1}(x), f^{-1}(y)).$$

Тогда, используя формулы

$$\mathrm{sh}\ \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\ t - 1}{2}}, \qquad \mathrm{th}\ \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\ t - 1}{\mathrm{ch}\ t + 1}},$$

нетрудно проверить, что

$$\rho_P(x, y) = k\mathrm{Arch}\,\frac{(r^2 + x^2)(r^2 + y^2) - 4r^2(x, y)}{(r^2 - x^2)(r^2 - y^2)} =$$

$$2k\mathrm{Arsh}\,\frac{r|x - y|}{\sqrt{(r^2 - x^2)(r^2 - y^2)}} = 2k\mathrm{Arth}\,\frac{r|x - y|}{\sqrt{r^2(y - x)^2 + (r^2 - x^2)(r^2 - y^2)}}\,.$$

Таким образом, получили **модель Пуанкаре пространства Лобачевского в открытом шаре $B(0, r)$ евклидова пространства**.

Теорема 2. *Отображение*

$$\psi : (B(0, r), \rho_P) \to (B(0, r), \rho), \qquad \psi(x) = \frac{2r^2x}{r^2 + x^2}$$

является изометрией, которая есть композиция ограничения на шар $B(0, r) \subset \mathbb{E}$ стереографической проекции из точки $< -r; 0 > \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$, принимающей значения на верхней полусфере $\mathbb{S}_+(< 0; 0 >, r)$ евклидова пространства $\mathbb{E}$, и ортогональной проекции этой полусферы на шар $B(0, r) \subset \mathbb{E}$. Обратная изометрия имеет вид

$$\psi^{-1} : (B(0, r), \rho) \to (B(0, r), \rho_P), \qquad \psi^{-1}(x) = \frac{rx}{r + \sqrt{r^2 - x^2}}\,.$$

$\odot$ Докажем сохранение расстояния отображением ψ

$$\rho(\psi(x),\psi(y)) = k\mathrm{Arch}\,\frac{r^2 - (\dfrac{2r^2x}{r^2+x^2},\dfrac{2r^2y}{r^2+y^2})}{\sqrt{r^2-\left(\dfrac{2r^2x}{r^2+x^2}\right)^2}\sqrt{r^2-\left(\dfrac{2r^2y}{r^2+y^2}\right)^2}} =$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{(r^2+x^2)(r^2+y^2)-4r^2(x,y)}{(r^2-x^2)(r^2-y^2)} = \rho_P(x,y).$$

Прямая с уравнением

$$< y_0; y > = < -r; 0 > + \lambda < r; x >, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

пересекает верхнюю полусферу $\mathbb{S}_+(< 0; 0 >, r)$ с уравнением $x_0^2 + x^2 = r^2$ в точке с параметром на прямой, удовлетворяющим уравнению $r^2(\lambda-1)^2 + \lambda^2x^2 = r^2$.

Следовательно, $\lambda = \frac{2r^2}{r^2+x^2}$. После проекции на гиперплоскость с уравнением $x_0 = 0$, получим

$$\psi(x) = \frac{2r^2x}{r^2+x^2}\,.$$

Кроме того,

$$\psi(\psi^{-1}(x)) = \frac{\dfrac{2r^3x}{r+\sqrt{r^2-x^2}}}{r^2+\left(\dfrac{rx}{r+\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2} = x.$$

Следовательно, эти отображения взаимно обратны. $\odot$

Теорема 3. *Если на шаре $B(0,r)$ заменить метрику ρ_P на метрику ρ, то отображение $\psi : (B(0,r),\rho) \to (B(0,r),\rho)$ будет сохранять лучи, исходящие из 0, и увеличивать на них в два раза в метрике ρ расстояния от 0. Обратное отображение ψ^{-1} отображает гиперплоскости пространства $(B(0,r),\rho)$ в гиперплоскости пространства $(B(0,r),\rho_P)$, которые в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ есть пересечения с шаром $B(0,r)$ евклидовых сфер или евклидовых гиперплоскостей (содержащих 0), ортогональных сфере $\mathbb{S}(0,r)$.*

$\odot$ Проверим свойство увеличения расстояния

$$\rho(0,\psi(x)) = \frac{k}{2}\ln\frac{r+\dfrac{2r^2|x|}{r^2+x^2}}{r-\dfrac{2r^2|x|}{r^2+x^2}} = k\ln\frac{r+|x|}{r-|x|} = 2\rho(0,x).$$

Пусть гиперплоскость в $(B(0,r),\rho)$ имеет уравнение $(n,x)=p$, где $|n|=1$ и $0\le p<r$.

При отображении ψ^{-1} эта гиперплоскость отобразится в гиперплоскость пространства $(B(0,r),\rho_P)$ с уравнением

$$\frac{2r^2(n,x)}{r^2+x^2} = p.$$

При $p=0$ это уравнение $(n,x)=0$ гиперплоскости, содержащей 0.

А при $0<p<r$ это уравнение $p(x^2+r^2)-2r^2(n,x)=0$ сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ с вектором нормали $px-r^2n$.

В точках пересечения этой сферы со сферой $\mathbb{S}(0,r)$ с уравнением $x^2 = r^2$ получим

$$(px-r^2n,x) = pr^2 - r^2(n,x) = 0,$$

т.е. они пересекаются ортогонально. $\odot$

Рассмотрим ограничение инверсии $\theta : B(<0;0>,r)\to\Pi_+$ относительно сферы $\mathbb{S}(<-r;0>,\sqrt{2}r)\subset\mathbb{R}\times\mathbb{E}$ на открытый шар $B(<0;0>,r)\subset \mathbb{R}\times\mathbb{E}$ и принимающей значения в верхнем открытом полупространстве $\Pi_+ = \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{E}$.

Используя свойства инверсии: оставлять инвариантными открытые лучи с началом в точке $<-r;0>$ и

$$|\theta(<x_1;x>)-<-r;0>||<x_1;x>-<-r;0>| = 2r^2,$$

получим явный вид инверсии

$$\theta(<x_1;x>) = <-r;x> + \frac{2r^2}{<r+x_1;x>^2}<r+x_1;x> =$$

$$\frac{r}{(r+x_1)^2+x^2}<r^2-x_1^2-x^2;2rx>.$$

Отметим, что при этой инверсии сфера $\mathbb{S}(<0;0>,r)$ отобразится на гиперплоскость с уравнением $x_1=0$.

$\odot$ Действительно, если $<x_1;x>\in\mathbb{S}(<0;0>,r)$, то

$$x_1^2+x^2=r^2,\qquad \theta(<x_1;x>)=\frac{r}{r+x_1}<0;x>.\odot$$

Если мы введем на верхнем открытом полупространстве $\Pi_+=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{E}$ метрику

$$\rho_{\Pi_+}(<x_1;x>,<y_1;y>)=\rho_P(\theta^{-1}(<x_1;x>),\theta^{-1}(<y_1;y>)),$$

то получим **модель Пуанкаре пространства Лобачевского в открытом полупространстве евклидова пространства**.

Лемма 1. *Метрика ρ_{Π_+} на Π_+ имеет вид*

$$\rho_{\Pi_+}(<x_1;x>,<y_1;y>)=k\mathrm{Arch}\,\frac{x_1^2+y_1^2+(x-y)^2}{2x_1y_1}.$$

$\odot$ Вычислим следующие величины

$$(\theta(<x_1;x>))^2=\frac{r^2}{((r+x_1)^2+x^2)^2}(r^4+(x^2)^2-2x_1^2(r^2-x^2)+2r^2x^2+x_1^4)=$$

$$\frac{r^2((r-x_1)^2+x^2)}{(r+x_1)^2+x^2},\qquad r^2-(\theta(<x_1;x>))^2=\frac{4r^3x_1}{(r+x_1)^2+x^2},$$

$$r^2+(\theta(<x_1;x>))^2=\frac{2r^2(r^2+x_1^2+x^2)}{(r+x_1)^2+x^2}.$$

Тогда, учитывая, что $\theta^{-1}=\theta$, получим

$$\rho_{\Pi_+}(<x_1;x>,<y_1;y>)=\rho_P(\theta^{-1}(<x_1;x>),\theta^{-1}(<y_1;y>))=$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{(r^2+(\theta(<x_1;x>))^2)(r^2+(\theta(<y_1;y>))^2)-4r^2(\theta(<x_1;x>),\theta(<y_1;y>))}{(r^2-(\theta(<x_1;x>))^2)(r^2-(\theta(<y_1;y>))^2)}=$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{(r^2+x_1^2+x^2)(r^2+y_1^2+y^2)-(r^2-x_1^2-x^2)(r^2-y_1^2-y^2)-4r^2(x,y)}{4r^2x_1y_1}=$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{x_1^2+y_1^2+(x-y)^2}{2x_1y_1}.\odot$$

Задачи.

1. Доказать, что при $r = 1$

$$\psi^{-1}(x) = \omega(0,x) = \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\rho(0,x)}{k} x}{1 + \operatorname{ch} \dfrac{\rho(0,x)}{k}},$$

где $\omega(0,x)$ — радиус-вектор середины отрезка $[0,x]$.

2. Доказать, что при $n = 2$, $x_1 = y$, $x_2 = x$ и $z = x + iy$

$$\theta(z) = r\frac{ri - z}{ri + z} = r\frac{r^2 - x^2 - y^2 + 2rxi}{x^2 + (r+y)^2}.$$

3. Доказать, что различные формулы для метрики ρ_P верны.

4. Докажите, что в модели Пуанкаре в шаре

$$|x| = r \operatorname{th} \frac{\rho_P(0,x)}{2k}.$$

5. Гиперплоскость в пространстве Лобачевского. Расстояние от точки до гиперплоскости. Ортогональная проекция точки на гиперплоскость. Величина угла между гиперплоскостями.

Пусть гиперплоскость Π в модели Бельтрами–Клейна в шаре $(B(0,k),\rho)$ имеет уравнение $(n,x) = p$, где $|n| = 1$ и $0 \le p < k$.

Найдем проекцию y_Π точки y на эту гиперплоскость. Сначала параллельно перенесем гиперплоскость Π так, чтобы $0 \in g_a^{-1}(\Pi)$, где $a = pn$.

$$\hat{y}_1 = k^2 \frac{y_1 - p}{k^2 - py_1}, \qquad \hat{y}_2 = k\frac{y_2\sqrt{k^2 - p^2}}{k^2 - py_1}.$$

Записывая условие ортогональности гиперплоскости и нормали, проведенной через точку $\hat{y}$ к гиперплоскости $g_a^{-1}(\Pi)$ с уравнением $(n,x) = 0$

$$(n, \hat{y} + \lambda n) = 0,$$

найдем $\lambda = -(n,\hat{y})$. Следовательно, радиус-вектор основания перпендикуляра на гиперплоскости $g_a^{-1}(\Pi)$, проведенного из точки $\hat{y}$, имеет вид

$$b = \hat{y} - (n,\hat{y})n = \hat{y}_2.$$

Осуществим обратный параллельный перенос этого основания b, чтобы получить искомый радиус-вектор ортогональной проекции точки y на гиперплоскость П.

$$y_{\Pi} = g_a(b): \quad \hat{b}_1 = k^2\frac{b_1 + p}{k^2 + pb_1} = p,$$

$$\hat{b}_2 = k\frac{b_2\sqrt{k^2 - p^2}}{k^2 + pb_1} = \frac{\hat{y}_2\sqrt{k^2 - p^2}}{k} = \frac{y_2(k^2 - p^2)}{k^2 - py_1} = \frac{(y - (n, y)n)(k^2 - p^2)}{k^2 - p(n, y)}\,.$$

Таким образом, получим

$$y_{\Pi} = pn + \frac{(y - (n, y)n)(k^2 - p^2)}{k^2 - p(n, y)} = \frac{(k^2 - p^2)y + k^2(p - (n, y))n}{k^2 - p(n, y)}\,.$$

Найдем расстояние от точки y до гиперплоскости П.

$$\rho(y, y_{\Pi}) = k\mathrm{Arch}\,\frac{k^2 - (y, y_{\Pi})}{\sqrt{k^2 - y^2}\sqrt{k^2 - y_{\Pi}^2}} =$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{k^2(k^2 - p(n, y)) - (k^2 - p^2)y^2 - k^2(p - (n, y))(n, y)}{\sqrt{k^2 - y^2}\sqrt{k^2(k^2 - p(n, y))^2 - ((k^2 - p^2)y + k^2(p - (n, y))n)^2}} =$$

$$k\mathrm{Arch}\,\frac{(k^2 - p^2)(k^2 - y^2) + k^2(p - (n, y))^2}{\sqrt{k^2 - y^2}\sqrt{(k^2 - p^2)((k^2 - p^2)(k^2 - y^2) + k^2(p - (n, y))^2)}} =$$

$$k\mathrm{Arch}\,\sqrt{1 + \frac{k^2(p - (n, y))^2}{(k^2 - y^2)(k^2 - p^2)}}.$$

Таким образом, верны формулы

$$\rho(y, y_{\Pi}) = k\mathrm{Arch}\,\sqrt{1 + \frac{k^2(p - (n, y))^2}{(k^2 - y^2)(k^2 - p^2)}},$$

$$\mathrm{sh}\,\frac{\rho(y, y_{\Pi})}{k} = \frac{k|(n, y) - p|}{\sqrt{k^2 - y^2}\sqrt{k^2 - p^2}} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{p_l}{k}|(n, y) - k\,\mathrm{th}\,\frac{p_l}{k}|}{\sqrt{k^2 - y^2}}\,.$$

Запишем формулу для параллельного переноса $g_a : (B(0, k), \rho) \to (B(0, k), \rho)$ на вектор $a = pe$ в иной форме

$$\hat{x} = k^2\frac{(x_1 + p)e}{k^2 + px_1} + k\frac{x_2\sqrt{k^2 - p^2}}{k^2 + px_1} =$$

$$\frac{k[k((a,x)+a^2)a+(a^2x-(a,x)a)\sqrt{k^2-a^2}]}{a^2(k^2+(a,x))}.$$

Рассмотрим гиперплоскость Π с уравнением $(n, \hat{x}-x_0)=0$, где $|n|=1$, и перенесем ее параллельно на вектор $a=-x_0$.

Тогда она отобразится в гиперплоскость, проходящую через центр шара и имеющую уравнение

$$(n, k[k((x_0,x)+x_0^2)x_0+(x_0^2x-(x_0,x)x_0)\sqrt{k^2-x_0^2}]-x_0x_0^2(k^2+(x_0,x)))=0 \Leftrightarrow$$

$$(kx_0^2n+(n,x_0)(\sqrt{k^2-x_0^2}-k)x_0, x)=0.$$

Вычислим величину угла, образованного в точке x_0 гиперплоскостью Π и гиперплоскостью Π_1 с уравнением $(n_1, \hat{x}-x_0)=0$, где $|n_1|=1$.

После аналогичного параллельного переноса второй гиперплоскости получим

$$cos\varphi=\frac{|(kx_0^2n+(n,x_0)(\sqrt{k^2-x_0^2}-k)x_0, kx_0^2n_1+(n_1,x_0)(\sqrt{k^2-x_0^2}-k)x_0)|}{|kx_0^2n+(n,x_0)(\sqrt{k^2-x_0^2}-k)x_0||kx_0^2n_1+(n_1,x_0)(\sqrt{k^2-x_0^2}-k)x_0|}=$$

$$\frac{|k^2(n,n_1)-(n,x_0)(n_1,x_0)|}{\sqrt{k^2-(n,x_0)^2}\sqrt{k^2-(n_1,x_0)^2}}.$$

Если гиперплоскости заданы уравнениями

$$(n,x)=p, \qquad (n_1,x)=p_1,$$

где $|n|=|n_1|=1$ и $0\le p\,,p_1<k$, то, очевидно,

$$cos\varphi=\frac{|k^2(n,n_1)-pp_1|}{\sqrt{k^2-p^2}\sqrt{k^2-p_1^2}}.$$

Эти гиперплоскости пересекаются, расходятся, перпендикулярны, если правая часть этого равенства меньше 1, больше 1, равна 0 соответственно.

Таким образом, условие перпендикулярности гиперплоскостей имеет вид

$$k^2(n,n_1)-pp_1=0.$$

6. Римановы метрики пространства Лобачевского в моделях Бельтрами–Клейна, Пуанкаре в шаре и в открытом полупространстве. Длина окружности.

Рассмотрим в $\mathbb{R}\times\mathbb{E}$ псевдориманову метрику, выбрав знак таким образом, чтобы индуцированная риманова метрика на $\mathbb{E}$ была положительно определенной

$$dl^2 = -dx_0^2 + dx^2.$$

Используем изометрию

$$F^{-1}:(B(0,r),\rho)\to(\mathbb{S}_+,\rho_L), \qquad F^{-1}(x)=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} < r; x >$$

для нахождения римановой метрики в модели Бельтрами–Клейна.

$$dl^2 = -d\hat{x}_0^2 + d\hat{x}^2 = -\frac{r^4(x,dx)^2}{(r^2-x^2)^3} + \left(\frac{rx(x,dx)}{(r^2-x^2)^{3/2}} + \frac{rdx}{(r^2-x^2)^{1/2}}\right)^2 =$$

$$\frac{r^2}{(r^2-x^2)^3}(-r^2(x,dx)^2 + x^2(x,dx)^2 + 2(x,dx)^2(r^2-x^2) + dx^2(r^2-x^2)^2) =$$

$$\frac{r^2}{(r^2-x^2)^2}((r^2-x^2)dx^2 + (x,dx)^2).$$

Следовательно, **риманова метрика в модели Бельтрами–Клейна** имеет вид

$$dl^2 = \frac{r^2((r^2-x^2)dx^2 + (x,dx)^2)}{(r^2-x^2)^2}.$$

Для нахождения римановой метрики в модели Пуанкаре в шаре используем изометрию

$$f^{-1}:(B(0,r),\rho_P)\to(\mathbb{S}_+,\rho_L), \qquad f^{-1}(x)=\frac{r}{r^2-x^2} < r^2+x^2; 2rx > .$$

$$dl^2 = -d\hat{x}_0^2 + d\hat{x}^2 = -\frac{16r^6(x,dx)^2}{(r^2-x^2)^4} +$$

$$\frac{4r^4(dx^2(r^2-x^2)^2 + 4(x,dx)^2(r^2-x^2) + 4x^2(x,dx)^2)}{(r^2-x^2)^4} = \frac{4r^4dx^2}{(r^2-x^2)^2}.$$

Следовательно, **риманова метрика в модели Пуанкаре в шаре** имеет вид

$$dl^2 = \frac{4r^4dx^2}{(r^2-x^2)^2}.$$

Для нахождения римановой метрики в модели Пуанкаре в открытом полупространстве используем изометрию

$$f^{-1}\circ\theta^{-1}:(\Pi_+,\rho_{\Pi_+})\to(\mathbb{S}_+,\rho_L)$$

Найдем сначала ее явный вид и дифференциал, используя найденные ранее выражения,

$$(f^{-1}\circ\theta^{-1})(<x_1;x>)=\frac{r}{r^2-(\theta(<x_1;x>))^2}<r^2+(\theta(<x_1;x>))^2;2r\theta(<x_1;x>)>=$$

$$\frac{1}{2x_1}<r^2+x_1^2+x^2;r^2-x_1^2-x^2;2rx>, \qquad <d\hat{x}_0;d\hat{x}_1;d\hat{x}>=$$

$$\frac{1}{2x_1^2}<(x_1^2-r^2-x^2)dx_1+2x_1(x,dx);(-x_1^2-r^2+x^2)dx_1-2x_1(x,dx);2r(x_1dx-xdx_1)> .$$

Тогда

$$dl^2=-d\hat{x}_0^2+d\hat{x}_1^2+d\hat{x}^2=\frac{1}{4x_1^4}(-(x_1^2-r^2-x^2)^2dx_1^2-4x_1^2(x,dx)^2-$$

$$4x_1dx_1(x,dx)(x_1^2-r^2-x^2)+(-x_1^2-r^2+x^2)^2dx_1^2-4x_1dx_1(x,dx)(-x_1^2-r^2+x^2)+$$

$$4x_1^2(x,dx)^2+4r^2(x_1^2dx^2-2(x,dx)x_1dx_1+x^2dx_1^2)=\frac{r^2(dx_1^2+dx^2)}{x_1^2}.$$

Следовательно, **риманова метрика в модели Пуанкаре в открытом полупространстве** имеет вид

$$dl^2=\frac{r^2(dx_1^2+dx^2)}{x_1^2}.$$

Приведем эти римановы метрики при $n=2$ в декартовых координатах $<x;y>$.

Риманова метрика плоскости Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна имеет вид

$$dl^2=\frac{r^2((r^2-x^2-y^2)(dx^2+dy^2)+(xdx+ydy)^2)}{(r^2-x^2-y^2)^2}=$$

$$\frac{r^2((r^2-y^2)dx^2+2xydxdy+(r^2-x^2)dy^2)}{(r^2-x^2-y^2)^2}.$$

Риманова метрика плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в открытом круге имеет вид

$$dl^2=\frac{4r^4(dx^2+dy^2)}{(r^2-x^2-y^2)^2}.$$

Риманова метрика плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней открытой полуплоскости имеет вид

$$dl^2 = \frac{r^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}\,.$$

Примеры.

1. Найдем длину окружности радиуса R_l плоскости Лобачевского, используя полярные координаты (ρ, φ) и модель Бельтрами–Клейна.

Сначала запишем риманову метрику в модели Бельтрами–Клейна, используя полярные координаты,

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi;$$

$$dl^2 = \frac{r^2((r^2 - x^2 - y^2)(dx^2 + dy^2) + (xdx + ydy)^2)}{(r^2 - x^2 - y^2)^2} =$$
$$\frac{r^2((r^2 - \rho^2)(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2) + \rho^2 d\rho^2)}{(r^2 - \rho^2)^2}.$$

Уравнение окружности в евклидовой плоскости имеет вид $\rho = R$, а в плоскости Лобачевского имеет вид $\rho = r\,\mathrm{th}\,\frac{R_l}{k}$. Тогда длина окружности имеет вид

$$l = r\int\limits_0^{2\pi} \frac{Rd\varphi}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{2\pi r R}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{2\pi r^2\,\mathrm{th}\,\dfrac{R_l}{k}}{r\,\mathrm{ch}^{-1}\,\dfrac{R_l}{k}} = 2\pi r\,\mathrm{sh}\,\frac{R_l}{k}\,.$$

2. Проведем рассчет той же длины в модели Пуанкаре в открытом круге.

Сначала запишем риманову метрику в модели Пуанкаре в открытом круге, используя полярные координаты,

$$dl^2 = \frac{4r^4(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2)}{(r^2 - \rho^2)^2}\,.$$

Тогда длина окружности с уравнением $\rho = R = r\,\mathrm{th}\,\frac{R_l}{2k}$ имеет вид

$$l = 2r^2\int\limits_0^{2\pi} \frac{Rd\varphi}{r^2 - R^2} = \frac{4\pi r^2 R}{r^2 - R^2} = \frac{4\pi r^3\,\mathrm{th}\,\dfrac{R_l}{2k}}{r^2 - r^2\,\mathrm{th}^2\,\dfrac{R_l}{2k}} = 4\pi r\,\mathrm{sh}\,\frac{R_l}{2k}\,\mathrm{ch}\,\frac{R_l}{2k} = 2\pi r\,\mathrm{sh}\,\frac{R_l}{k}\,.$$

Обычно формулу длины окружности приводят при $r = k$

$$l = 2\pi k \operatorname{sh} \frac{R_l}{k}\,.$$

7. Координаты Лобачевского, Бельтрами и полярные координаты в плоскости Лобачевского. Элемент площади в координатах Бельтрами. Площадь круга и треугольника. Полюс и поляра.

1. Декартовы координаты в модели Бельтрами–Клейна в круге радиуса k плоскости Лобачевского

$$x = k \operatorname{th} \frac{x_l}{k}, \qquad y = k \operatorname{th} \frac{y_l}{k}$$

называются **бельтрамиевыми координатами**.

Соответствующие полярные координаты (ρ, φ) называются **бельтрамиевыми полярными координатами**.

2. Координаты $< \rho_l = k \operatorname{Arth} \frac{\rho}{k}; \varphi >$ называются **л-полярными координатами**.

3. Координаты $< x_l; \rho(< x; 0 >, < x; y >) >$ называются **координатами Лобачевского**.

Чтобы найти элемент площади в координатах Бельтрами, найдем определитель метрического тензора

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \frac{k^4((k^2 - y^2)(k^2 - x^2) - x^2y^2)}{(k^2 - x^2 - y^2)^4} = \frac{k^6}{(k^2 - x^2 - y^2)^3}\,.$$

Следовательно, элемент площади в модели Бельтрами–Клейна в координатах Бельтрами выражается формулой

$$dS = \frac{k^3 dx dy}{(k^2 - x^2 - y^2)^{3/2}}\,.$$

Найдем площадь круга радиуса $R = k \operatorname{th} \frac{R_l}{k}$, используя бельтрамиевы полярные координаты.

$$S = k^3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho d\rho}{(k^2 - \rho^2)^{3/2}} = \frac{2\pi k^3}{\sqrt{k^2 - \rho^2}}\Big|_0^R = 2\pi k^2 \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - R^2}} - 1\right) =$$

$$2\pi k^2(\operatorname{ch}\frac{R_l}{k}-1)=4\pi k^2\operatorname{sh}^2\frac{R_l}{2k}\,.$$

Найдем теперь площадь прямоугольного треугольника, вершина острого угола $\alpha_l=\alpha$ которого расположена в центре круга.

Пусть сторона, противолежащая этому углу, имеет уравнение $\rho\cos\varphi = b$. Тогда

$$S=k^3\int\limits_0^\alpha d\varphi\int\limits_0^{\frac{b}{\cos\varphi}}\frac{\rho d\rho}{(k^2-\rho^2)^{3/2}}=k^3\int\limits_0^\alpha\frac{1}{(k^2-\rho^2)^{1/2}}|_0^{\frac{b}{\cos\varphi}}d\varphi=$$

$$k^2\int\limits_0^\alpha\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-(b/k)^2}}-1\right)d\varphi=k^2\mathrm{arcsin}\,\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-(b/k)^2}}|_0^\alpha-k^2\alpha=$$

$$k^2\mathrm{arcsin}\,(\operatorname{ch}\frac{b_l}{k}\sin\alpha_l)-k^2\alpha_l=k^2(\mathrm{arcsin}\,(\cos\beta_l)-\alpha_l)=k^2(\frac{\pi}{2}-\alpha_l-\beta_l).$$

Разбив произвольный треугольный треугольник T на два прямоугольных, получим его площадь в виде

$$S=k^2(\pi-\alpha_l-\beta_l-\gamma_l)=k^2\sigma(T).$$

Таким образом, **площадь треугольника плоскости Лобачевского пропорциональна его дефекту**.

Отметим также что, если все вершины треугольника лежат на абсолюте, то его площадь равна $k^2\pi$.

Пусть $a\neq 0$ радиус-вектор точки евклидова пространства $\mathbb{E}$. Гиперплоскость Π с уравнением

$$(a,x)=k^2$$

называется **полярной гиперплоскостью или полярой** относительно сферы $\mathbb{S}(0,k)$, а точка a называется **полюсом** гиперплоскости Π.

При $a=0$ считаем, что поляра сопадает с бесконечно удаленной гиперплоскостью.

Гиперплоскости с уравнением $(a,x)=0$ соответствует несобственный полюс, направление на который определяет вектор a.

Полюсы и поляры находятся в биективном соответствии.

Действительно, гиперплоскости Π_1 с уравнением $(b, x) = c$, где $c \neq 0$, соответствует полюс $a = \frac{k^2 b}{c}$.

Две гиперплоскости пространства Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них содержит полюс другой.

$\odot$ Пусть гиперплоскости заданы уравнениями

$$(b, x) = c, \qquad (b_1, x) = c_1.$$

В случае, когда $c \neq 0$

$$k^2(b, b_1) = cc_1 \Leftrightarrow (b_1, \frac{k^2 b}{c}) = c_1.$$

В случае, когда $c_1 \neq 0$, доказательство аналогично, а в случае, когда $c = c_1 = 0$, — очевидно. $\odot$

Почти очевидны следующие утверждения.

А (полярная сопряженность). Если из двух точек одна принадлежит поляре другой точки, то и эта другая принадлежит поляре первой.

В (двойственное утверждение). Если из двух гиперплоскостей одна проходит через полюс другой гиперплоскости, то и эта другая проходит через полюс первой .

$\odot$ Действительно, поляры точек a, a_1 имеют уравнения

$$(a, x) = k^2, \qquad (a_1, x) = k^2,$$

а условие принадлежности точки a поляре второй второй имеет вид $(a_1, a) = k^2$. Вывод очевиден. $\odot$

Пусть л-гиперплоскости с уравнениями

$$(b, x) = c, \qquad (b_1, x) = c_1,$$

пересекаются под углом φ и их полюсы есть $a = \frac{k^2 b}{c}$, $a_1 = \frac{k^2 b_1}{c_1}$ соответственно. Тогда

$$cos\varphi_l = \frac{|k^2(b, b_1) - cc_1|}{\sqrt{k^2 b^2 - c^2}\sqrt{k^2 b_1^2 - c_1^2}} = \frac{|(a, a_1) - k^2|}{\sqrt{a^2 - k^2}\sqrt{a_1^2 - k^2}} = \text{ch}\ \frac{d_l}{ik}\ .$$

Здесь $d_l = k\varphi_l$ можно рассматривать в качестве расстояния между полюсами, находящимися вне замкнутого шара $B[0, k]$.

Задачи.

1. Постройте с помощью циркуля и линейки в модели Бельтрами-Клейна плоскости Лобачевского: a) для данного полюса — поляру; b) для данной поляры — полюс; c) перпендикуляр из данной точки и данную прямую; d) середину данного отрезка; e) биссектрису данного угла.

2. Постройте с помощью циркуля и линейки в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости: a) перпендикуляр из данной точки и данную прямую; b) середину данного отрезка; c) биссектрису данного угла.

8. Сфера, орисфера и эквидистантная поверхность. Эллиптический, гиперболический и параболический пучки прямых.

Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского. Множество всех точек пространства Лобачевского, равноудаленных от фиксированной точки называется **сферой**.

Очевидно, что уравнение

$$x^2 = k^2 \operatorname{th} \frac{r_l}{k}$$

есть уравнение сферы $\mathbb{S}(0, r_l)$ пространства Лобачевского. Используя определение сферы и метрики пространства Лобачевского получим следующее уравнение сферы $\mathbb{S}(a, r_l)$

$$\operatorname{ch} \frac{r_l}{k} = \frac{k^2 - (a, x)}{\sqrt{k^2 - a^2}\sqrt{k^2 - x^2}}\,.$$

Возводя обе части в квадрат и обозначая

$$\mu^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{r_l}{k}(k^2 - a^2)}\,,$$

получим это уравнение в виде

$$k^2 - x^2 = \mu^2 (k^2 - (a, x))^2.$$

Представим x в виде $x =< y_1; y >$ и, используя действие ортогонального оператора, перейдем от вектора a к вектору $< b; 0 >$. Тогда наше уравнение примет вид

$$k^2 - y_1^2 - y^2 = \mu^2(k^2 - by_1)^2, \qquad \mu^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{r_l}{k}(k^2 - b^2)}$$

Приведем это уравнение к каноническому виду

$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{k^2\mu^2 b}{b^2\mu^2 + 1}\right)^2}{\dfrac{k^2(1 - \mu^2(k^2 - b^2))}{(b^2\mu^2 + 1)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{k^2(1 - \mu^2(k^2 - b^2))}{b^2\mu^2 + 1}} = 1.$$

Таким образом, сфера пространства Лобачевского $\mathbb{S}(< b; 0 >, r_l)$ в модели Бельтрами–Клейна изображается эллипсоидом вращения с евклидовым центром $< \frac{k^2\mu^2 b}{b^2\mu^2+1}; 0 >$.

Эллиптическим пучком прямых в пространстве Лобачевского называется множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку (**центр эллиптического пучка**).

Очевидно, что ортогональными траекториями эллиптического пучка прямых являются сферы с общим центром в центре эллиптического пучка.

Орисферой (в двумерном случае **орициклом**) называется предельное положение сферы пространства Лобачевского при условии, что ее центр неограниченно удаляется от фиксированной точки этой сферы по диаметру, проходящему через эту точку.

Пусть η фиксированная точка сферы $\mathbb{S}(a, r_l)$ с уравнением

$$k^2 - x^2 = \mu^2(k^2 - (a, x))^2.$$

Тогда

$$\mu^2 = \frac{k^2 - \eta^2}{(k^2 - (a, \eta))^2}\,.$$

После удаления центра он займет предельное положение на сфере $\mathbb{S}(0, k)$, следовательно, будет удовлетворять условию $a^2 = k^2$. Следовательно, уравнения орисферы имеют вид

$$k^2 - x^2 = \mu^2(k^2 - (a, x))^2, \qquad a^2 = k^2.$$

Снова, используя действие ортогонального оператора, получим для векторов a, η вид $< k; 0 >$ и $< \zeta; 0 >$ соответственно.

Уравнение орисферы примет вид

$$k^2 - y_1^2 - y^2 = \hat{\mu}^2 (k - y_1)^2,$$

где $\hat{\mu}^2 = k^2 \mu^2 = \frac{k+\zeta}{k-\zeta}$. Приведем это уравнение к каноническому виду

$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{k\hat{\mu}^2}{\hat{\mu}^2 + 1}\right)^2}{\dfrac{k^2}{(\hat{\mu}^2 + 1)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{k^2}{\hat{\mu}^2 + 1}} = 1.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{k+\zeta}{2}\right)^2}{\dfrac{(k-\zeta)^2}{4}} + \frac{y^2}{\dfrac{k(k-\zeta)}{2}} = 1.$$

Таким образом, орисфера пространства Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна изображается эллипсоидом вращения с евклидовым центром $< \frac{k+\zeta}{2}; 0 >$, касающимся в одной точке сферы $\mathbb{S}(0, k)$.

Эллиптический пучок прямых, проходящий через центр сферы, перейдет при удалении этого центра на абсолют в так называемый **параболический пучок прямых** с центром на абсолюте.

Таким образом, ортогональными траекториями параболического пучка прямых являются орисферы с общей точкой касания в центре параболического пучка.

На орисфере индуцируется евклидова геометрия.

Нетрудно заметить, что в модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве уравнение орисферы можно привести к виду

$$x_1 = c,$$

где c — положительная константа. Параболический пучок прямых, ортогональных этой орисфере, моделируется в этом случае пучком лучей параллельных оси $< x_1; 0 >$. Тогда риманова метрика

$$dl^2 = \frac{r^2(dx_1^2 + dx^2)}{x_1^2}$$

в данной модели индуцирует на орисфере риманову метрику

$$dl^2 = \frac{r^2 dx^2}{c^2}\,.$$

Сделав преобразование

$$\hat{x} = \frac{rx}{c}\,,$$

получим на орисфере стандартную риманову метрику евклидова пространства

$$dl^2 = d\hat{x}^2.$$

Эквидистантной поверхностью (в двумерном случае **эквидистантой**) называется множество всех точек пространства Лобачевского, равноудаленных от фиксированной гиперплоскости (**базы эквидистанты**).

Пусть положительное постоянное расстояние от точки эквидистантной поверхности до ее базы (**высота эквидистантной поверхности**) есть h_l и $(n, x) = p$ — уравнение базы. Тогда уравнение эквидистантной поверхности имеет вид

$$\operatorname{sh}\frac{h_l}{k} = \frac{\operatorname{ch}\frac{p_l}{k}|(n,x) - k \operatorname{th}\frac{p_l}{k}|}{\sqrt{k^2 - x^2}}\,.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$k^2 - x^2 = \mu^2((n,x) - k \operatorname{th}\frac{p_l}{k})^2,$$

где

$$\mu^2 = \frac{\operatorname{ch}^2\frac{p_l}{k}}{\operatorname{sh}^2\frac{h_l}{k}}\,.$$

Снова, используя действие ортогонального оператора, получим для вектора n вид $< 1; 0 >$, а для базы уравнение $y_1 = p(= k \operatorname{th}\frac{p_l}{k})$.

Уравнение эквидистантной поверхности примет вид

$$k^2 - y_1^2 - y^2 = \mu^2(y_1 - p)^2.$$

Приведем это уравнение к каноническому виду

$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{p\mu^2}{\mu^2+1}\right)^2}{\dfrac{k^2(\mu^2+1) - \mu^2 p^2}{(\mu^2+1)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{k^2(\mu^2+1) - \mu^2 p^2}{\mu^2+1}} = 1.$$

Таким образом, эквидистантная поверхность пространства Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна изображается эллипсоидом вращения с евклидовым центром $< \frac{p\mu^2}{\mu^2+1}; 0 >$, касающимся сферы $\mathbb{S}(0, k)$ в точках ее сечения базой с уравнением $y_1 = p(= k \operatorname{th} \dfrac{p_l}{k})$.

Ось вращения этого эллипсоида называется **осью эквидистантной поверхности**.

Пусть база содержит центр шара, тогда $p = 0$ и уравнение эквидистантной поверхности упрощается

$$\frac{y_1^2}{\dfrac{k^2}{\mu^2+1}} + \frac{y^2}{k^2} = 1,$$

где $\frac{k^2}{\mu^2+1} = k^2 \operatorname{th}^2 \dfrac{h_l}{k}$. В этом случае эквидистантная поверхность ортогонально пересекает пучок прямых параллельных по Евклиду нормали базы, т.е. пересекающихся в несобственной точке.

Общий случай получается из данного л-параллельным переносом. Рассматриваемый пучок перейдет в пучок прямых, имеющих при их продолжении общую точку (**центр пучка**) вне замкнутого шара $B[0, k]$.

Такой пучок прямых в самом пространстве Лобачевского называется **гиперболическим пучком прямых**.

Таким образом, ортогональными траекториями гиперболического пучка прямых являются эквидистантные поверхности с общей базой.

Пусть в модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве выделено направление $< 0; x_2; 0 >$, ортогональное направлению $< x_1; 0; 0 >$. Рассмотрим в этой модели базу с уравнением $x_2 = 0$.

Докажем, что в модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве уравнение эквидистантной поверхности с этой базой имеет вид

$$x_1 = cx_2,$$

где c — положительная константа. Действительно, точка $< cx_2; x_2; y >$ имеет ортогональную проекцию $< \sqrt{1+c^2}x_2; 0; y >$ на базе. Тогда

$$\rho_{\Pi_+}(< cx_2; x_2; y >, < \sqrt{1+c^2}x_2; 0; y >) = k\operatorname{Arch}\frac{c^2x_2^2 + (1+c^2)x_2^2 + x_2^2}{2c\sqrt{1+c^2}x_2^2} =$$

$$k\operatorname{Arch}\frac{\sqrt{1+c^2}}{c} = h_l.$$

Риманова метрика

$$dl^2 = \frac{r^2(dx_1^2 + dx^2)}{x_1^2}$$

в данной модели индуцирует на этой эквидистантной поверхности риманову метрику

$$dl^2 = \frac{r^2((1+c^2)dx_2^2 + dy^2)}{c^2x_2^2}\,.$$

Сделав преобразование

$$\hat{x}_2 = x_2, \qquad \hat{y} = \frac{y}{\sqrt{1+c^2}},$$

получим на эквидистантной поверхности риманову метрику пространства Лобачевского

$$dl^2 = \frac{R^2(d\hat{x}_2^2 + d\hat{y}^2)}{\hat{x}_2^2}\,,$$

где $R = \frac{r\sqrt{1+c^2}}{c}$.

Орисферу можно рассматривать и как предельное положение эквидистантной поверхности при условии, что ее база неограниченно удаляется от фиксированной точки эквидистантной поверхности, оставаясь перпендикулярной оси эквидистантной поверхности, проходящей через эту точку.

$\odot$ Пусть $< \zeta; 0 >$ — фиксированная точка эквидистантной поверхности. Тогда

$$k^2 - \zeta^2 = \mu^2(\zeta - p)^2 \Rightarrow \mu^2 = \frac{k^2 - \zeta^2}{(\zeta - p)^2}\,.$$

При вышеуказанном удалении базы в пределе получим $p = k$ и $\hat{\mu}^2 = \frac{k+\zeta}{k-\zeta}$. Таким образом, получим уравнение орисферы

$$k^2 - y_1^2 - y^2 = \hat{\mu}^2(y_1 - k)^2. \odot$$

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* - М.: Физматгиз. - 1962. - 503 с.

2. Широков П.А. *Краткий очерк основ геометрии Лобачевского.* М. Наука. - 1983. - 80 с.

3. Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского.* М. МЦНМО.- 2000. - 80 с.

4. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства.* М. Наука. - 1966. - 648 с.

5. Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства.* М. Наука. - 1969. - 548 с.

6. Дубровский В.Н., Смородинский Я.А., Сурков Е.Л. *Релятивистский мир.* М. Наука. Главная редакция физ.-мат. лит. Библиотечка «Квант». Вып. 34. - 1984. - 176 с.

7. Ефимов Н.В. *Высшая геометрия.* М. Наука. Главная редакция физ.-мат. лит. - 1978. - 576 с.

8. Артин Э. *Геометрическая алгебра.* М. Наука. Главная редакция физ.-мат. лит. - 1969. - 284 с.

9. Нут Ю.Ю *Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении.* М. Изд.-во Академии Наук СССР. - 1961. - 311 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И.П. *Геометрия.* М. Просвещение. - 1997. - 256 с.

2. Васильев А.В. *Николай Иванович Лобачевский.* М. Наука. -1992. - 222 с

3. Каган В.Ф. *Основания геометрии.* Ч. I - Л. Гос. изд-во технико-технической лит. - 1949. - 492 с.

4. Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. *Геометрия пространств постоянной кривизны.* «Современные проблемы математики. Фундаметальные направления. Т. 29. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)» - М. - 1988. С. 5-146.

СОДЕРЖАНИЕ