КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.Н. ГУМЕРОВ

КОНЕЧНОЛИСТНЫЕ НАКРЫТИЯ СОЛЕНОИДОВ

Учебно-методическое пособие

Казань - 2014

УДК 515 + 517

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского
Протокол № 5 от 13 марта 2014 г.,
заседания кафедры математического анализа
Протокол № 6 от 12 марта 2014 г.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, проф. С. Р. Насыров.

Гумеров Р.Н.
Конечнолистные накрытия соленоидов: Учебно-методическое пособие/ Р.Н. Гумеров. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2014 – 17 с.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов физико-математических специальностей университетов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В пособии рассматриваются конечнолистные накрывающие отображения соленоидов. Соленоиды представляют собой связные компактные абелевы группы, которые не являются локально связными. В связи с этим для исследования свойств их накрытий приходится использовать факты и технику, выходящие за рамки классической теории накрывающих пространств.

Цель данной работы — помочь студентам при подготовке материала, обычно предлагаемого для самостоятельного изучения при чтении автором спецкурса "Накрывающие пространства и группы".

Пособие состоит из введения и трех разделов. В первом разделе приводятся некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Второй раздел содержит необходимые сведения об обратных последовательностях, их отображениях и пределах. В этих терминах мы определяем P-адические соленоиды. На лекциях упомянутого выше спецкурса утверждения второго раздела обсуждаются для произвольных обратных спектров. Третий раздел посвящен структуре конечнолистных накрытий P-адических соленоидов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

На протяжении всего текста под пространством понимается хаусдорфово топологическое пространство, окрестностью называется открытое подмножество топологического пространства.

Пусть k — натуральное число. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *k-листным накрывающим отображением (накрытием)*, если каждая точка $y \in Y$ обладает такой окрестностью W в Y, что полный прообраз $f^{-1}(W)$ может быть представлен в виде объединения k непересекающихся окрестностей в X, каждую из которых соответствующее ограничение отображения f отображает гомеоморфно на W.

Сюръективное отображение между двумя пространствами будем называть *k-кратным*, если полный прообраз каждой точки из образа состоит ровно из k элементов.

Для произвольной последовательности простых чисел $P = (p_1, p_2, \ldots)$ и некоторого простого числа q мы будем говорить, что q *часто встречается* в этой последовательности, если $p_n = q$ для бесконечного числа членов p_n. В противном случае мы будем называть число q *нечасто встречающимся в* P.

В последующих разделах нами будут использоваться следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с обычным порядком;

$\mathbb{R}$ — пространство действительных чисел с естественной топологией;

$\mathbb{C}$ — пространство комплексных чисел с естественной топологией;

$\mathbb{S}^1$ — единичная окружность, рассматриваемая как подпространство в $\mathbb{C}$;

i — мнимая единица в $\mathbb{C}$;

$\sqrt[n]{1}$ — множество всех комплексных корней степени $n \in \mathbb{N}$ из 1;

$card\, A$ — мощность множества A.

Отметим, что все необходимые сведения содержатся в литературе, список которой приведен в конце работы.

ОБРАТНЫЕ СПЕКТРЫ И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть задана последовательность пространств $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ и для каждой пары чисел $m, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $m \leqslant n$, определено непрерывное отображение $f_m^n : X_n \to X_m$. Пусть при этом для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ отображение f_n^n является тождественным на X_n, и выполняются равенства $f_l^n = f_l^m \circ f_m^n$ для всех $l, m, n \in \mathbb{N}$, таких, что $l \leq m \leq n$. Семейство $\mathbf{S} = \{X_n, f_m^n, \mathbb{N}\}$ называется *обратной последовательностью*, или *обратным спектром*, пространств X_n. Отображения f_m^n называются *связующими отображениями* обратной последовательности $\mathbf{S}$.

Для обратного спектра $\mathbf{S} = \{X_n, f_m^n, \mathbb{N}\}$ элемент (x_n) произведения $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, то есть последовательность такая, что $x_n \in X_n$ для каждого индекса $n \in \mathbb{N}$, называется *нитью* заданного спектра, если $f_m^n(x_n) = x_m$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $m \leqslant n$. Подпространство пространства $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, состоящее из всех нитей спектра $\mathbf{S}$, называется *пределом обратного спектра* и обозначается следующим образом: X_∞ или $\varprojlim\{X_n, f_m^n, \mathbb{N}\}$ или $\varprojlim\mathbf{S}$. Обратную последовательность $\{X_n, f_m^n, \mathbb{N}\}$ часто изображают в виде диаграммы:

$$X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \xleftarrow{f_2^3} X_3 \xleftarrow{f_3^4} \cdots$$

Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел. *P-адическим соленоидом* называется предел обратной последовательности

$$\mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_1^2} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_2^3} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_3^4} \cdots, \tag{1}$$

где связующие отображения f_n^{n+1} определяются формулой

$$f_n^{n+1}(z) = z^{p_n} \text{ для } z \in \mathbb{S}^1 \text{ и } n \in \mathbb{N}.$$

P-адический соленоид будем обозначать через Σ_P. Если $p_n = 2$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то соленоид Σ_P называется *диадическим*.

Далее перечислим основные свойства обратных спектров. Всюду ниже под обратной последовательностью (обратным спектром) подразумевается семейство $\mathbf{S} = \{X_n, f_m^n, \mathbb{N}\}$.

1. Предложение. *Предел обратного спектра является замкнутым подпространством произведения* $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

2. Упражнение. *Докажите, что если все связующие отображения в обратной последовательности непустых пространств являются сюръективными отображениями, то предел обратной последовательности непуст.*

Таким образом, соленоид Σ_P — непустое компактное пространство.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим непрерывное отображение f_n:

$$f_n : X_\infty \to X_n : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto x_n.$$

Отображение f_n называется *проекцией предела обратного спектра* $\mathbf{S}$ *на* X_n.

3. Упражнение. *Убедитесь, что для любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *таких, что* $m \leqslant n$, *проекции и связующие отображения удовлетворяют равенству* $f_m = f_m^n \circ f_n$. *Другими словами, коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
 & X_\infty \arrow[dl, "f_m"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\
X_m & & X_n \arrow[ll, "f_m^n"']
\end{tikzcd}$$

Читателю, знакомому с азами теории категорий, предлагается выполнить следующее

4. Упражнение. *Сформулируйте определение обратной последовательности в терминах категорий и функторов.*

Базу топологии предела обратного спектра можно определить с помощью баз пространств, определяющих этот спектр, и проекций предела.

5. Предложение. *Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ зафиксирована база β_n пространства X_n. Тогда семейство всевозможных множеств вида $f_n^{-1}(O_n)$, где $O_n \in \beta_n, n \in \mathbb{N}$, есть база пространства X_∞.*

Теперь введём понятие отображения между двумя обратными спектрами. Для этого пусть имеется вторая обратная последовательность $\mathbf{S}' = \{Y_n, g_m^n, \mathbb{N}\}$. Пусть $g_n : Y_\infty \to Y_n$ — проекция предела этого спектра. *Отображением обратного спектра* $\mathbf{S}$ *в обратный спектр* $\mathbf{S}'$ называется совокупность непрерывных отображений $\{\varphi_n : X_n \to Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ таких, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xleftarrow{f_m^n} & X_n \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_m} \\ Y_m & \xleftarrow{g_m^n} & Y_n \end{array}$$

коммутативна для каждой пары индексов $m, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $m \leqslant n$.

Очевидным образом определяется тождественное отображение спектра на себя, а также композиция отображений обратных спектров.

Всякое отображение $\{\varphi_n : X_n \to Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ обратных спектров индуцирует непрерывное отображение $\varphi_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ между их пределами. А именно, нити $(x_n) \in X_\infty$ ставится в соответствие нить $(\varphi_n(x_n)) \in Y_\infty$. Это отображение называется *предельным отображением, индуцированным семейством* $\{\varphi_n : X_n \to Y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

6. Упражнение. *Проверьте корректность определения предельного отображения $\varphi_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ и его непрерывность.*

При изучении накрывающих отображений соленоидов в следующем разделе нам понадобятся следующие достаточные условия сюръективности и гомеоморфности предельных отображений.

7. Предложение. *Пусть $\{\varphi_n : X_n \to Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — отображение обратного спектра $\mathbf{S}$ компактов в обратный спектр $\mathbf{S}'$. Если все отображения*

φ_n сюръективны, то предельное отображение $\varphi_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ тоже является сюръективным.

8. Предложение. *Пусть $\{\varphi_n : X_n \to Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — отображение обратного спектра $\mathbf{S}$ в обратный спектр $\mathbf{S}'$. Если все отображения φ_n являются гомеоморфизмами, то и предельное отображение $\varphi_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ — гомеоморфизм.*

В том случае, когда рассматриваются обратные последовательности пространств и их отображений с дополнительными структурами, на их пределах часто возникают эти же структуры. Так, мы можем посмотреть на спектр (1), определяющий соленоид, как на обратную последовательность компактных групп и их непрерывных гомоморфизмов.

9. Упражнение. *P-адический соленоид является компактной абелевой группой относительно покоординатных операций с единицей $e = (1, 1, \ldots)$.*

Перейдем к P-адическим соленоидам. Для заданного натурального числа $k \in \mathbb{N}$ введем в рассмотрение предельное отображение $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$, индуцированное отображением $\{h_n^k : n \in \mathbb{N}\}$ между двумя копиями обратной последовательности (1) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_1^2"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_2^3"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_3^4"'] & \cdots & \Sigma_P \\
\mathbb{S}^1 \arrow[u, "h_1^k"] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_1^2"'] \arrow[u, "h_2^k"] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_2^3"'] \arrow[u, "h_3^k"] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_3^4"'] & \cdots \arrow[u] & \Sigma_P \arrow[u, "h_P^k"]
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Здесь для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение h_n^k является возведением в k-ую степень, то есть, $h_n^k(z) = z^k$ для любого комплексного числа $z \in \mathbb{S}^1$.

Предельное отображение соленоидов $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$ будет основным объектом изучения в следующем разделе.

НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СОЛЕНОИДОВ

Говоря неформально, из классической алгебраической топологии известно, что конечнолистным накрывающим пространством окружности может быть лишь окружность. Подобно этому факту, мы покажем в этом разделе, что конечнолистным накрывающим пространством соленоида может быть лишь соленоид. Точнее говоря, каждое конечнолистное накрытие P-адического соленоида Σ_P связным пространством эквивалентно предельному отображению $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$.

Напомним определение эквивалентности двух накрытий.

Два накрывающих отображения пространств $p : X \to Y$ и $q : Z \to Y$ называются *эквивалентными*, или *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : X \to Z$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть справедливо равенство $p = q \circ \varphi$.

1. Предложение. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ предельное отображение $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$ является m-листным накрывающим отображением с $m \leqslant k$.*

Доказательство. Достаточно показать, что h_P^k — m-кратное сюръективное открытое отображение для некоторого $m \leqslant k$.

Поскольку $\mathbb{S}^1$ — компакт и каждое отображение h_n^k сюръективно, предельное отображение h_P^k тоже сюръективно. Так как предельное отображение h_P^k является непрерывным автоморфизмом компактной группы, h_P^k — открытое отображение, и равенство

$$\operatorname{card}(h_P^k)^{-1}(y) = \operatorname{card}(h_P^k)^{-1}(e)$$

выполняется для всех элементов $y \in \Sigma_P$. Заметим, что для элемента

$$(x_1, x_2, \ldots) \in (h_P^k)^{-1}(e)$$

справедливо условие $x_n \in \sqrt[n]{1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь легко видеть, что h_P^k есть m-кратное отображение и $m \leqslant k$. $\square$

В дальнейшем мы займемся нахождением значения числа m. С этой целью для различных чисел k будем определять мощность полного прообраза единицы соленоида под действием предельного отображения h_P^k.

2. Предложение. *Пусть k – простое число, которое часто встречается в последовательности P. Тогда предельное отображение $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Покажем, что множество $(h_P^k)^{-1}(e)$ состоит всего из одной точки e. Предположим, что

$$z = (z_1, z_2, \ldots) \in (h_P^k)^{-1}(e).$$

Тогда $z_n^k = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По предположению, для заданного $n \in \mathbb{N}$, существует целое число $m \geqslant n$ такое, что f_m^{m+1} — отображение возведения в k-ую степень. Поэтому мы имеем следующую цепочку равенств

$$z_n = f_n^m(f_m^{m+1}(z_{m+1})) = f_n^m(z_{m+1}^k) = f_n^m(1) = 1.$$

Поскольку данные соотношения выполняются для всех $n \in \mathbb{N}$, получаем равенство $z = e$. Таким образом, $\mathrm{card}(h_P^k)^{-1}(e) = 1$. Используя предыдущее предложение, заключаем, что предельное отображение h_P^k является гомеоморфизмом. $\square$

Непосредственным следствием этого предложения и очевидного соотношения

$$h_P^k = h_P^l \circ h_P^m,$$

имеющего место для любых чисел $l, m \in \mathbb{N}$, для которых выполняется равенство $k = l \cdot m$, является следующее утверждение.

3. Предложение. *Пусть каждый простой делитель числа $k \in \mathbb{N}$ часто встречается в последовательности P. Тогда предельное отображение $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$ является гомеоморфизмом.*

Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$ и введем обозначение

$$\xi_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Для множества корней из единицы имеем равенство

$$\sqrt[n]{1} = \{1, \xi_n, \xi_n^2, \ldots, \xi_n^{n-1}\}.$$

Очевидно, относительно естественных операций это множество представляет собой мультипликативную циклическую группу, порождённую элементом ξ_n.

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ определим гомоморфизм группы $\sqrt[n]{1}$ в себя:

$$\psi_m : \sqrt[n]{1} \to \sqrt[n]{1} : \xi_n^j \mapsto \xi_n^{jm},$$

где j пробегает множество значений $\{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Упражнение. *Пусть натуральные числа n и m взаимно просты. Тогда гомоморфизм ψ_m является автоморфизмом.*

Таким образом, если числа n и m взаимно просты, то ψ_m — биективный гомоморфизм группы в себя. В этом случае существует гомоморфизм

$$\phi_m : \sqrt[n]{1} \to \sqrt[n]{1},$$

обратный к ψ_m. Другими словами, для любого $a \in \sqrt[n]{1}$ существует единственный элемент b группы $\sqrt[n]{1}$, который в m-ой степени равен a. При этом значение автоморфизма ϕ_m на элементе a равняется b.

5. Предложение. *Пусть k — простое число, нечасто встрещающееся в последовательности P. Тогда предельное отображение $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$ является k-листным накрывающим отображением.*

Доказательство. Через m обозначим наименьшее среди чисел $l \in \mathbb{N}$ таких, что $k \neq p_n$ для всех $n \geq l$.

Если $m = 1$, то есть k не является членом последовательности P, то для всех $p_n \in P$ числа p_n и k взаимно простые. Пусть ϕ_{p_n} обратное отображение к автоморфизму $\psi_{p_n} : \sqrt[k]{1} \to \sqrt[k]{1} : z \mapsto z^{p_n}$. Тогда $(\phi_{p_n}(z))^{p_n} = z$ для всех $z \in \mathbb{S}^1$. Нетрудно видеть, что для любого корня k-ой степени из единицы ξ_k^j, где $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, элемент $(\xi_k^j, \phi_{p_1}(\xi_k^j), \phi_{p_2} \circ \phi_{p_1}(\xi_k^j), \ldots)$ принадлежит множеству $(h_P^k)^{-1}(e)$. Получаем k различных точек, лежащих в $(h_P^k)^{-1}(e)$. Следовательно, $\mathrm{card}(h_P^k)^{-1}(e) \geqslant k$. С другой стороны, из предложения 1 имеем неравенство $\mathrm{card}(h_P^k)^{-1}(e) \leqslant k$. Таким образом, получается требуемое равенство $\mathrm{card}(h_P^k)^{-1}(e) = k$.

Если $m > 1$, то определим последовательность

$$Q = (p_m, p_{m+1}, \ldots).$$

Рассмотрим соленоид Σ_Q, определяемый этой последовательностью, и отображение $\rho : \Sigma_P \to \Sigma_Q$, корректно задаваемое формулой $\rho((x_1, x_2, \ldots)) = (x_m, x_{m+1}, \ldots)$, где $(x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma_P$. Иными словами, ρ — это сдвиг влево на $m - 1$ место. Легко видеть, что это отображение является топологическим изоморфизмом компактных групп. Поэтому существует гомоморфизм, обратный к ρ, который мы обозначим через τ.

Непосредственно проверяется, что следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_P & \xrightarrow{\rho} & \Sigma_Q \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_P^k} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_Q^k} \\ \Sigma_P & \xrightarrow{\rho} & \Sigma_Q \end{array} \tag{3}$$

коммутативна, то есть справедливо равенство $\rho \circ h_P^k = h_Q^k \circ \rho$.

Из первой части доказательства вытекает, что h_Q^k есть k-листное накрывающее отображение.

Кроме того, из коммутативности диаграммы (3) следует справедливость следующих равенств:

$$(h_P^k)^{-1}(e) = (h_P^k)^{-1}(\tau(e)) = \tau((h_Q^k)^{-1}(e)).$$

Но отображение τ инъективно и $\mathrm{card}(h_Q^k)^{-1}(e) = k$. Поэтому имеем желаемое равенство

$$\mathrm{card}(h_P^k)^{-1}(e) = k.$$

Наконец, из предложения 1 получаем, что h_P^k является k-листным накрывающим отображением. □

Из доказанных предложений этого раздела немедленно вытекает следующее утверждение.

6. Теорема. *Предельное отображение h_P^k является k-листным накрытием P-адического соленоида тогда и только тогда, когда число k не обладает простым делителем, часто встречающимся в последовательности простых чисел P.*

Далее под *конечнолистным связным накрытием* соленоида понимаем конечнолистное накрывающее отображение из связного пространства на соленоид. Мы завершим наше изложение теоремой, в которой суммируются результаты о конечнолистных накрытиях соленоидов. Как и в предыдущей теореме, будет иметь место дихотомия для натуральных чисел $k \in \mathbb{N}$.

Сначала напомним два необходимых результата из теории накрывающих отображений локально линейно связных пространств [1, гл. V]. Пусть, как обычно, $\pi(X, x)$ обозначает фундаментальную группу пространства X в точке x, а $f_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, f(x))$ — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный непрерывным отображением пространств $f : X \to Y$.

7. Критерий изоморфности накрывающих пространств *Пусть $(\widetilde{X}_1, p_1)$ и $(\widetilde{X}_2, p_2)$ – накрывающие пространства для X и $\widetilde{x}_i \in \widetilde{X}_i$, $i = 1, 2$,*

– такие точки, что $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$. *Изоморфизм* φ *пространства* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *на* $(\widetilde{X}_2, p_2)$, *для которого* $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$, *существует тогда и только тогда, когда* $p_{1_*}\pi(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) = p_{2_*}\pi(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)$.

8. Лемма о единственности поднятия отображения. *Пусть* $(\widetilde{X}, p)$ *– накрывающее пространство для* X *и* Y *— связное и локально связное пространство. Тогда для любых непрерывных отображений* $f_0, f_1 : Y \to \widetilde{X}$, *для которых* $p \circ f_0 = p \circ f_1$, *множество* $\{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$ *либо пусто, либо совпадает со всем* Y.

Теперь вернемся к накрывающим отображениям соленоидов.

9. Теорема. *Пусть* P *— последовательность простых чисел и* k *— натуральное число. Тогда имеет место следующая дихотомия: 1) либо число* k *является кратным некоторого простого числа, часто встречающегося в последовательности* P, *и* P*-адический соленоид не обладает* k*- листным связным накрытием; 2) либо предельное отображение* h_P^k *является* k*-листным связным накрытием и, более того, каждое* k*-листное связное накрытие* P*-адического соленоида эквивалентно отображению* h_P^k.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что всякое конечнолистное связное накрытие P-адического соленоида эквивалентно предельному отображению h_P^k для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$.

Итак, пусть имеется k-листное накрывающее отображение P-адического соленоида $f : X \to \Sigma_P$ со связным накрывающим пространством X.

Известно [5], что существует обратный спектр $\{X_n, g_n^{n+1}\}$ и отображение $\{g_n : X_n \to \mathbb{S}^1 | n \in \mathbb{N}\}$ между $\{X_n, g_n^{n+1}\}$ и обратным спектром (1)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_1 \arrow[d, "g_1"'] & \mathbb{X}_2 \arrow[l, "g_1^2"'] \arrow[d, "g_2"] & \mathbb{X}_3 \arrow[l, "g_2^3"'] \arrow[d, "g_3"] & \cdots \arrow[l, "g_3^4"'] & X_\infty \arrow[d, "g_\infty"] \\
\mathbb{S}^1 & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_1^2"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_2^3"'] & \cdots \arrow[l, "f_3^4"'] & \Sigma_P
\end{tikzcd}$$

такие, что выполнены следующие свойства:

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство X_n связно и локально линейно связно и $g_n : X_n \to \mathbb{S}^1$ — k-листное накрытие;

2) k-листное накрывающее отображение f изоморфно предельному отображению $g_\infty : X_\infty \to \Sigma_P$ порожденному семейством отображений $\{g_n : X_n \to \mathbb{S}^1\}$;

3) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in X_n$ такая, что $g_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ и $g_n(x_n) = 1$.

Далее воспользуемся фактами теории накрывающих пространств из классической алгебраической топологии.

Используя критерий изоморфности накрывающих пространств, построим последовательность гомеоморфизмов $\{\phi_n : \mathbb{S}_1 \to X_n\}$ такую, что для каждого числа n выполняется равенство $\phi_n(1) = x_n$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[rr, "\phi_n"] \arrow[dr, "h_n^k"'] & & X_n \arrow[dl, "g_n"] \\ & \mathbb{S}^1 & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, $g_n \circ \phi_n = h_n^k$, где h_n^k – k-листное накрытие из диаграммы (2).

Для любого $n \in \mathbb{N}$, из леммы о единственности поднятия отображения в накрывающее пространство следует коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[d, "\phi_n"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_n^{n+1}"'] \arrow[d, "\phi_{n+1}"] \\ X_n & X_{n+1} \arrow[l, "g_n^{n+1}"'] \end{tikzcd}$$

Это означает, что последовательность $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ является отображением между обратными спектрами (1) и $\{X_n, g_n^{n+1}\}$. При этом, поскольку каждое отображение $\phi_n : \mathbb{S}^1 \to X_n$ — гомеоморфизм, то предельное отображение

$\phi_\infty : \Sigma_P \to X_\infty$, индуцированное семейством отображений $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$, также является гомеоморфизмом.

Непосредственно проверяется коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Sigma_P \arrow[rr, "\phi_\infty"] \arrow[dr, "h_P^k"'] & & X_\infty \arrow[dl, "g_\infty"] \\ & \Sigma_P & \end{tikzcd}$$

Таким образом, $g_\infty \circ \phi_\infty = h_P^k$, и значит, предельные отображения g_∞ и h_P^k изоморфны. Отсюда, в силу изоморфности отображений $f : X \to \Sigma_P$ и $g_\infty : X_\infty \to \Sigma_P$, следует изоморфность отображений $f : X \to \Sigma_P$ и $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$.

$\square$

На этом мы завершаем изложение материала о конечнолистных накрывающих отображениях P-адических соленоидов.

Литература

[1] Масси У., Столлингс Дж., Алгебраическая топология. Введение. Изд-во „Мир“, М., 1977.

[2] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, Физматгиз, М., 1958.

[3] Энгелькинг Р., Общая топология, Изд-во „Мир“, М., 1986.

[4] Гумеров Р.Н., Элементы общей топологии, Изд-во КГУ, Казань, 2007.

[5] Гумеров Р.Н., Аппроксимация накрывающих отображений, КГУ, 2008. http://old.kpfu.ru/f5/bin_files/22%2131.pdf

[6] Gumerov R.N., On finite-sheeted coverings mappings onto solenoids, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 2771-2778.