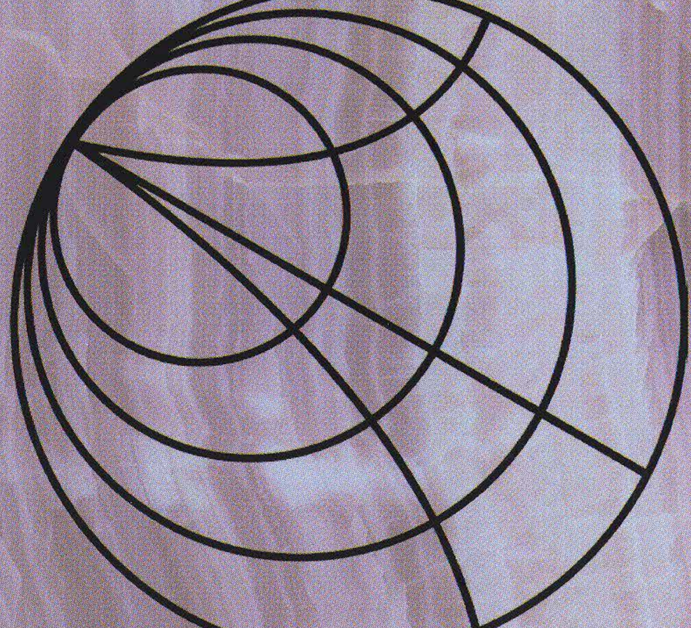
В. И. Гаврилов
А. В. Субботин
Д. А. Ефимов

Граничные свойства аналитических функций

(дальнейший вклад)



МГУ
Издательство Московского университета

УДК 517
ББК 22.16
Г12

Гаврилов В.И., Субботин А.В., Ефимов Д.А.
Г12 Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад). — М.: Издательство Московского университета, 2012. — 264 с.
ISBN 978-5-211-06379-2

В книге представлены полученные в последние 15 лет ее авторами и связанными с ними коллегами результаты по структуре, функциональным и граничным свойствам F-алгебр аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных, как принадлежащих пространству Островского–Неванлинны, так и содержащих его.

Книга предназначена для специалистов по теории функций и функциональному анализу, студентов и аспирантов.

Ключевые слова: аналитические функции одного и нескольких комплексных переменных, функциональные пространства, F-алгебры, допустимые граничные пределы, изометрии, линейные функционалы.

УДК 517
ББК 22.16

Gavrilov V.I., Subbotin A.V., Efimov D.A.
Boundary Properties of Analytic Functions (Further Contribution). — M.: Moscow University Press, 2012. — 264 p.
ISBN 978-5-211-06379-2

The book contains results, published by the authors and their colleagues in the last fifteen years, on the structure, functional and boundary properties of F-algebras of analytic functions of one and several complex variables that are included in the Nevanlinna–Ostrowski space or include it.

The book is intended for researchers in function theory and functional analysis, undergraduate and graduate students.

Keywords: analytic functions of one and several complex variables, functional space, F-algebra, permissible boundary limits, isometry, linear functional.

ISBN 978-5-211-06379-2

Оглавление

Вместо предисловия

Теория граничных свойств аналитических и гармонических функций является традиционной областью математических исследований, ведущихся в Московском университете с момента её возникновения в начале XX века. Классические результаты В. В. Голубева, Н. Н. Лузина, И. И. Привалова легли в основание теории и послужили мощным толчком для интенсивного её развития отечественными математиками. Их выдающийся и основополагающий вклад в теорию представлен в монографии И. И. Привалова [40], выпущенной Издательством Московского государственного университета в 1941 году, в год кончины её автора.

Дальнейший период развития теории, идущий с середины 40-х годов прошлого века, связан с работой на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова научно-исследовательского семинара, организованного Алексеем Ивановичем Маркушевичем (1908–1979). Уже в первые годы работы семинара учениками Маркушевича — Н. А. Давыдовым, Г. Ц. Тумаркиным, Г. А. Фридманом, С. Я. Хавинсоном — были получены настолько значительные результаты, что возникла необходимость в переиздании монографии И. И. Привалова (тем более что издана она была в количестве всего 1000 экземпляров и, будучи единственной в математической литературе того времени монографией по граничным свойствам аналитических функций, сразу заняла прочное место в библиотеках специалистов по анализу и весьма быстро исчезла из продажи). Громадные экономические трудности в стране в первые послевоенные годы естественно не позволяли расширять объём нового издания, и, как сообщает во введении к нему его редактор — А. И. Маркушевич, «перед пишущим эти строки... встал вопрос о том, переиздавать ли книгу в том виде, в котором она вышла в свет еще при жизни автора, или подвергнуть её более или менее значительной переработке. Сознавая всю ответственность, которая возлагается на меня принятым решением, я встал на второй путь... Из первоначального текста в настоящем издании сохранено не более 50%... Это дало также возможность включить в книгу принадлежащие им (ученикам А. И. — *Авт.*)

оригинальные результаты». Второе издание монографии И. И. Привалова [41] вышло в 1950 году и было затем переведено на несколько иностранных языков.

Материал в обоих изданиях монографии И. И. Привалова относился к функциям одного комплексного переменного и был связан в основном с вопросами, в которых теория аналитических функций смыкается с теорией функций действительного переменного. Дальнейшее развитие теории граничных свойств привело к установлению глубоких связей с функциональным анализом, методы которого плодотворно используются в ней и по настоящее время. Первоначально эти связи были отмечены в одномерной теории, а полученные здесь результаты можно найти в переведенных на русский язык монографиях К. Гофмана [83], Т. Гамелина [76], Дж. Гарнета [19] и в существующей только на английском языке монографии П. Л. Дюрена [70] (см. также переведённую монографию П. Кусиса [31]).

Интерес к многомерной теории граничных свойств аналитических функций нескольких комлексных переменных стремительно вырос во второй половине XX века. Полученные здесь результаты, относящиеся к функциям в поликруге и в шаре, собраны в монографиях У. Рудина [116], [118], переведённых на русский язык, а также в оригинальных и обзорных статьях многих авторов.

Авторы книги принадлежат к научной школе А. И. Маркушевича: первый участвовал в работе упомянутого выше научно-исследовательского семинара с середины 50-х годов XX века; второй и третий авторы ведут научную работу с начала 90-х годов прошлого века и с начала нулевых годов этого века соответственно. Сама книга возникла как результат работы авторов над следующими двумя проблемами: 1) распространить с одномерного случая на многомерный те результаты монографий И. И. Привалова, которые еще не подверглись этому переносу, и 2) по возможности расширить число объектов исследования теории.

Исторически вначале рассматривалась первая из названных проблем. Это объясняется тем обстоятельством, что во вторoе (широко известное в мире) издание монографии И. И. Привалова, как уже отмечалось, не вошла значительная часть материала её первого издания, которая фактически выпала из поля зрения специалистов. В частности, остались неизвестными классы аналитических в круге функций, введённые и достаточно подробно изученные самим И. И. Приваловым. Перед А. В. Субботиным была поставлена задача о распространении свойств этих классов на многомерный случай. В процессе рассмотрения данной задачи выяснилось, что структура классов Привалова в одномерном и многомерном случаях удобна для использования методов функционального анализа. Так были получены новые результаты для обоих случаев, вошедшие в эту книгу, а сами объекты исследования получили в настоящее время общепринятое название F-алгебр И. И. Привалова.

Почти одновременно с этим было замечено, что аналоги других, так называемых максимальных F-алгебр Привалова в одномерном и многомерном случаях содержат в себе пространство аналитических функций Островского–Неванлинны, являющееся давно и интенсивно изучаемым объектом теории граничных свойств. Так появились другие объекты исследования теории, новые для одномерного и многомерного случаев и перспективные, на наш взгляд, для дальнейшего изучения.

Таким образом, в настоящей книге собраны только результаты исследований самих авторов. Достаточно подробную информацию о вошедшем в неё материале предоставляет предваряющее её «Оглавление». Книга, разумеется, никак не претендует на полноту изложения всех последних достижений теории граничных свойств. Однако авторы питают скромную надежду, что книга будет полезна специалистам как источник постановок новых задач в одномерной и многомерной теории аналитических функций.

Наконец, о пользовании книгой. В ней применена сплошная нумерация глав, нумерация параграфов — своя в каждой главе, а пунктов — своя в каждом параграфе. В пределах одной главы используется сплошная нумерация для теорем, определений и замечаний. Ссылки в тексте на теоремы других глав даются в виде последовательности двух чисел, из которых первое означает номер главы, второе — порядковый номер теоремы. Аналогичны ссылки на определения, примеры и замечания. Ссылки на монографии, переведённые на русский язык, делаются по русским изданиям.

Авторы с благодарностью отмечают финансирование результатов монографии, осуществлённое в рамках грантов Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ №НШ-00-15-96050 и №НШ-680.2003.1 под руководством академика В. А. Садовничего.

1

Предварительные сведения и терминология

В этой главе собраны определения и обозначения основных объектов исследования, а также некоторые предварительные сведения, их объясняющие.

1.1. Предварительные сведения

1.1.1. Одномерный случай

Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ обозначает единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в нуле и $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — его границу, единичную окружность. Пусть также φ — неотрицательная неубывающая функция неотрицательного аргумента.

Определение 1.1. *Голоморфная в круге U функция $f(z)$ принадлежит классу $\varphi(N)$, если ограничено семейство интегралов*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\ln_+ |f(re^{i\theta})|\right) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0 \le r < 1;$$

здесь $\ln_+ a = \max(\ln a, 0)$*, если* $a > 0$*, и* $\ln_+ 0 = 0$.

Исторически первыми из классов $\varphi(N)$ изучались классы Харди H^p (см., например, работу Ф. Рисса [113]), соответствующие случаю $\varphi(t) = e^{pt}$, $t \ge 0$. При $p = +\infty$ под H^∞ понимают класс функций, голоморфных и ограниченных в круге U. Когда $\varphi(t) = t$, $t \ge 0$, получаем класс N, введённый А. Островским и братьями Р. и Ф. Неванлинна в работах [112] и [110]. Его принято называть классом Островского–Неванлинны. Полагая $\varphi(t) = t^q$, $t \ge 0$, приходим к классам N^q, введённым в случае $q > 1$ И. И. Приваловым в монографии [40, гл. IV, §10] с обозначением A_q. Классы N^q при $q > 1$ будем называть классами Привалова.

В классе N выделяют важный подкласс N_*, состоящий из всех голоморфных в круге U функций $f(z)$, у которых множество функций

$$\left\{\int\limits_0^{\xi} \ln_+ |f(re^{i\theta})| \,\frac{d\theta}{2\pi},\ -\pi \le \xi \le \pi\right\}_{0 \le r < 1}$$

образует семейство, равностепенно абсолютно непрерывное на отрезке $[-\pi, \pi]$. Заслуга введения этого подкласса принадлежит В. И. Смирнову (см. [128]), и N_* принято называть классом Смирнова.

В статье Х. О. Кима [89] рассмотрен класс M, состоящий из всех голоморфных в круге U функций $f(z)$ таких, у которых семейство функций $\left\{\ln_+ |f(re^{i\theta})|, -\pi \le \theta \le \pi\right\}_{0 \le r < 1}$ имеет интегрируемую мажоранту на отрезке $[-\pi, \pi]$. В терминах радиальной максимальной функции

$$(M_{rad} f)(e^{i\theta}) = \sup_{0 \le r < 1} |f(re^{i\theta})|, \quad -\pi \le \theta \le \pi, \tag{1.1}$$

принадлежность голоморфной в единичном круге функции $f(z)$ классу M эквивалентна свойству интегрируемости по θ функции $\ln_+ M_{rad} f(e^{i\theta})$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Из определений непосредственно следуют включения

$$H^{\infty} \subset H^{p>0} \subset N^{q>1},$$

а также

$$M \subset N_* \subset N,$$

причём каждое из этих включений строгое (см. [107] и [90]).

Функции из класса N обладают почти всюду на окружности T конечными радиальными граничными значениями. Радиальным граничным значением функции $f(z)$ в граничной точке $e^{i\theta} \in T$ называется предел

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-} f(re^{i\theta}), \tag{1.2}$$

если он существует. Углом Штольца с вершиной в точке $e^{i\theta} \in T$ называется произвольная подобласть единичного круга U, расположенная между некоторыми двумя хордами, оканчивающимися в точке $e^{i\theta}$. Говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $e^{i\theta} \in T$ угловое граничное значение $f(e^{i\theta})$, если $f(e^{i\theta})$ есть предел функции $f(z)$ при $z \to e^{i\theta}$ в любом угле Штольца. Понятно, что если существует $f(e^{i\theta})$, то существует также и $f^*(e^{i\theta})$ и при этом $f^*(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$.

Теорема 1.2 (А. Островский [112], Р. Неванлинна [111]). *Для каждой функции $f(z)$ класса N угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$ существуют (и конечны) для почти всех θ из отрезка $[-\pi, \pi]$. Если к тому же $f(z) \not\equiv 0$, то функция $\ln |f(e^{i\theta})|$ интегрируема по θ на отрезке $[-\pi, \pi]$.*

1.1.2. Метрики в разных классах голоморфных функций

Функция расстояния

$$\rho_N(f,g) = |f-g|_N, \quad f,g \in N,$$

порождаемая характеристикой

$$|f|_N = \sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+|f(re^{i\theta})|\right) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in N,$$

превращает класс N в полное метрическое пространство, причём сходимость в метрике ρ_N сильнее равномерной сходимости на компактах внутри U (см. [123]). В статье Дж. Шапиро и А. Шилдса дополнительно показано, что пространство N не будет линейно-топологическим (и даже связным). Известно также, что N не локально ограничено, не локально-выпукло и ненормируемо (впрочем, последние свойства есть простые следствия того, что пространство N не является линейно-топологическим).

Метрика ρ_N может быть сужена на класс N_*, где она принимает вид

$$\rho_N(f,g) = |f-g|_N = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+|f^*(e^{i\theta})-g^*(e^{i\theta})|\right) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f,g \in N_*,$$

в котором f^* и g^* обозначают функции радиальных граничных значений (1.2) функций f и g соответственно (см. [141]). Известно (см. [141] и [63]), что класс N_* является F-пространством относительно метрики ρ_N (относительно понятия F-пространства см. [2, разд. III] и [66, гл. II, §1]). Как всякое F-пространство, пространство N_* является линейно-топологическим (см. [66, гл. II, §1, теорема 12]), но ни локально-ограниченным, ни локально-выпуклым (а значит, и ни нормируемым) оно не является (см. [142]).

Для класса M естественная метрика выглядит как

$$\rho_M(f,g) = |f-g|_M, \quad f,g \in M,$$

где

$$|f|_M = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+M_{rad}f(e^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in M.$$

Х. О. Ким в статье [90] показал, что класс M является F-пространством относительно метрики ρ_M. В той же статье показано, что M с топологией, порождённой метрикой ρ_M, не является ни локально-ограниченным, ни локально-выпуклым (а значит, и ни нормируемым) пространством.

В статье М. Столла [132] по аналогии с метрикой ρ_N в классах Привалова N^q $(q>1)$ введена метрика

$$\rho_{N^q}(f,g) = |f-g|_{N^q}, \quad f,g \in N^q,$$

где

$$|f|_{N^q} = \sup_{0 \le r < 1} \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^q \left(1 + |f(re^{i\theta})|\right) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{1/q}, \quad f \in N^q.$$

Он показал (см. [132, теорема 4.2]), что при каждом $q > 1$ класс N^q является F-пространством относительно метрики ρ_{N^q}. Там же было доказано, что выражение для характеристики $|\cdot|_{N^q}$ можно упростить к виду

$$|f|_{N^q} = \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^q \left(1 + |f^*(e^{i\theta})|\right) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{1/q}, \quad f \in N^q \, (q > 1). \tag{1.3}$$

В классах Харди H^p $(p > 0)$ метрика имеет вид

$$\rho_{H^p}(f,g) = |f-g|_{H^p}, \quad f,g \in H^p,$$

где

$$|f|_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{\alpha_p/p}, \quad f \in H^p, \quad \alpha_p = \min(p\,, 1). \tag{1.4}$$

В классе H^∞ под $|\cdot|_{H^\infty}$ понимают

$$|f|_{H^\infty} = \lim_{p \to +\infty} |f|_{H^p} = \sup_{z \in U} |f(z)|, \quad f \in H^\infty.$$

При $p \ge 1$ классы H^p являются B-пространствами (банаховыми пространствами) относительно нормы $|\cdot|_{H^p}$ (см. [134]; относительно определения банаховых пространств см. [2, разд. IV]). П. Л. Дюрен, Б. В. Ромберг и А. Л. Шилдс в статье [68] показали, что при $0 < p < 1$ классы H^p являются F-пространствами относительно метрики ρ_{H^p}. М. Ландсберг и А. Е. Ливингстон в своих статьях [95] и [101] доказали, что при $0 < p < 1$ пространства H^p не являются локально-выпуклыми, хотя локально-ограниченными (в силу свойства абсолютной однородности степени p характеристики $|\cdot|_{H^p}$) они будут. Как следствие, H^p ненормируемы при $0 < p < 1$.

1.1.3. Канонические факторизации

Следующий результат даёт удобный аналитический аппарат к исследованию граничных свойств голоморфных функций различных классов.

Теорема 1.3. *Функция $f(z) \not\equiv 0$ принадлежит классу N тогда и только тогда, когда*

$$f(z) = Cz^{\lambda} \prod_k \Big[\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}\Big] \exp \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\,[p(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + dq(\theta)], \quad z \in U, \tag{1.5}$$

где $C \in T$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, (z_k) — последовательность (может быть, пустая или конечная) точек единичного круга U с условием $\prod_k |z_k| > 0$, действительная функция $p(\theta)$ интегрируема, а функция $q(\theta)$, также принимающая действительные значения, имеет конечную вариацию и производную, почти всюду равную нулю, на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. [127]).

При этом λ — кратность нуля функции $f(z)$ в нуле, (z_k) — последовательность нулей функции $f(z)$, отличных от нуля и записанных с учётом их кратностей, $p(\theta) = \ln|f(e^{i\theta})|$ почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$, где $f(e^{i\theta})$ обозначает функцию угловых граничных значений функции $f(z)$ (см. пункт 1.1.1), и

(1) $f \in N_*$ тогда и только тогда, когда функция $q(\theta)$ в представлении (1.5) невозрастает на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. [128]),

(2) $f \in N^q$ $(q > 1)$ тогда и только тогда, когда функция $q(\theta)$ невозрастает, а функция $p_+^q(\theta)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. [40, гл. IV, §10, п. 3], а также [102]),

(3) $f \in H^p$ $(p > 0)$ тогда и только тогда, когда функция $q(\theta)$ невозрастает и $e^{p\,p(\theta)}$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. [127]),

(4) $f \in H^\infty$ тогда и только тогда, когда функция $q(\theta)$ невозрастает и функция $p(\theta)$ ограничена сверху почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$.

1.1.4. Оценки равномерного роста и коэффициентов Тейлора

В дальнейшем для произвольной непрерывной в круге U функции $f(z)$ используем обозначения

$$M(f, r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \le r < 1,$$

и

$$A(f) = \sup_{0 \le r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln_+ |f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Теорема 1.4 (С. Н. Мергелян). *Если функция*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in U, \tag{1.6}$$

принадлежит классу N, то

$$\ln_+ M(f, r) \le A(f)\,\frac{1 + r}{1 - r}, \quad 0 \le r < 1, \tag{1.7}$$

и

$$\ln_+|a_k| \le \sqrt{8A(f)k}\,(1+o(1)) \text{ при } k\to+\infty \tag{1.8}$$

(см. [41, гл. II, §11, п. 2]).

В работе [41] приводится также пример функции из класса N, для которой последние оценки являются точными.

Теорема 1.5 (Н. Янагихара [143]). *Для функций $f(z)$ класса N_* с разложением (1.6) справедливы асимптотики*

$$\ln_+ M(f,r) = o\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \text{ при } r\to 1-$$

и

$$\ln_+|a_k| = o\big(\sqrt{k}\big) \text{ при } k\to+\infty,$$

и эти оценки асимптотически неулучшаемы (см. [143, теоремы 3 и 4]).

Теорема 1.6 (М. Столл [132]). *Для функций $f(z)$ класса N^q $(q>1)$ с разложением (1.6) справедливы асимптотики*

$$\ln_+ M(f,r) = o\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q} \text{ при } r\to 1-$$

и

$$\ln_+|a_k| = o\Big(\sqrt[q+1]{k}\Big) \text{ при } k\to+\infty. \tag{1.9}$$

Теорема 1.7 (Г. Харди и Дж. Литтлвуд [79], Г. Фридман [51]). *Для функций $f(z)$ класса H^p $(p>0)$ с разложением (1.6) справедливы оценки*

$$M(f,r) = o\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/p} \text{ при } r\to 1-$$

и

$$a_k = o\left(k^{1/\alpha_p-1}\right) \text{ при } k\to+\infty, \tag{1.10}$$

$$|a_k| \le (k+1)^{1/\alpha_p-1}|f|_{H^p}^{1/\alpha_p}, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{1.11}$$

где $|\cdot|_{H^p}$ и α_p определены по формуле (1.4), и эти оценки неулучшаемы (см. [137] и [21]).

1.2. Основные определения и обозначения

1.2.1. Многомерные пространства

Пусть n — произвольное натуральное число и $\mathbb{C}^n$ — комплексное координатное пространство размерности n. Точки $z\in\mathbb{C}^n$, по определению, представляются в виде $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где $z_k\in\mathbb{C}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Число z_k, стоящее в этой записи на k-ом месте, называется k-ой координатой вектора z. Эрмитово скалярное произведение $\langle z, w\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$, $z, w \in \mathbb{C}^n$, порождает гильбертову норму $|z|_2 = \sqrt{\langle z, z\rangle}$, $z \in \mathbb{C}^n$. Наряду с этой, в пространстве $\mathbb{C}^n$ рассматривают и другую, так называемую поликруговую норму $|z|_\infty = \max\limits_{1\le k\le n} |z_k|$, $z \in \mathbb{C}^n$. Как любые две нормы в конечномерном векторном пространстве, нормы $|\cdot|_2$ и $|\cdot|_\infty$ эквивалентны и поэтому задают в $\mathbb{C}^n$ одну и ту же топологию.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ две области: единичный шар $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|_2 < 1\}$ и единичный поликруг $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|_\infty < 1\}$. Эти области являются многомерными аналогами единичного круга U одномерной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. С точки зрения теории функций комплексного переменного естественными граничными множествами для областей B_n и U^n будут соответственно сфера $S_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|_2 = 1\}$ и тор $T^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_k| = 1, 1 \le k \le n\}$, называемый также остовом поликруга U^n. Такой их выбор объясняется тем, что сфера S_n и тор T^n являются границами Шилова областей B_n и U^n соответственно (см. [52, гл. III, §15, теоремы 3 и 4]). В дальнейшем изложении оба рассмотренных случая удобно изучать в единообразных обозначениях. Считаем, что символ G обозначает как B_n, так и U^n, символ $\varGamma$ обозначает как S_n, так и T^n.

Для произвольного $\alpha > 1$ и произвольной точки $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \varGamma$ обозначим $D_\alpha(\zeta) = \{z \in B_n \mid |1 - \langle z, \zeta\rangle| < \alpha(1 - |z|)\}$ в случае $G = B_n$ и $D_\alpha(\zeta) = \{z \in D_\alpha(\zeta_1) \times \ldots \times D_\alpha(\zeta_n) | 1/\alpha < (1 - |z_k|)/(1 - |z_l|) < \alpha, 1 \le k, l \le n\}$ в случае $G = U^n$. Множества $D_\alpha(\zeta)$ называют также допустимыми областями в смысле Кораньи [92], служащими многомерным аналогом одномерных углов Штольца.

Символом σ_2 обозначим вероятностную меру на сфере S_n, инвариантную относительно группы вращений $O(2n, \mathbb{R})$, представляя $\mathbb{C}^n$ в виде $\mathbb{R}^{2n}$. Для тора T^n через σ_∞ обозначим произведение нормированных мер Лебега на единичных окружностях, составляющих T^n.

Существенную роль в дальнейших доказательствах играют свойства инвариантного ядра Пуассона, имеющего вид

$$P_2(z, \zeta) = \left(\frac{1 - |\, z\,|_2^2}{|1 - \langle z, \zeta\rangle|^2}\right)^n, \quad z \in B_n, \quad \zeta \in S_n, \tag{1.12}$$

для шара B_n (см. [118, гл. 3, §3, определение 1]) и вид

$$P_\infty(z, \zeta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - z_k \overline{\zeta_k}|^2}, \quad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n, \tag{1.13}$$

для поликруга U^n (см. [116, гл. II, §1, п. 1]).

Введём символ P для обозначения как P_2, так и P_∞; символ σ для обозначения как σ_2, так и σ_∞; символ $|\cdot|$ обозначает как $|\cdot|_2$, так и $|\cdot|_\infty$. При $n = 1$ имеем

$$G = B_n = U^n = U, \quad \Gamma = S_n = T^n = T,$$

$$P(z,\zeta) = P_2(z,\zeta) = P_\infty(z,\zeta) = \frac{1-|z|^2}{|1-z\,\overline{\zeta}|^2}, \quad z \in U, \quad \zeta \in T, \tag{1.14}$$

$$\sigma(d\zeta) = \sigma_2(d\zeta) = \sigma_\infty(d\zeta) = \frac{d\theta}{2\pi}, \quad \zeta = e^{i\theta} \in T, \quad -\pi \le \theta \le \pi,$$

$$|z| = |z|_2 = |z|_\infty, \quad z \in \mathbb{C}.$$

1.2.2. Многомерные классы голоморфных функций

Пусть φ — произвольная неотрицательная неубывающая функция неотрицательного аргумента.

Определение 1.8. *Функция $f(z)$, голоморфная в области G, принадлежит классу $\varphi(N)$, если ограничено семейство интегралов*

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi\bigl(\ln_+ |f(r\gamma)|\bigr)\, \sigma(d\gamma), \quad 0 \le r < 1. \tag{1.15}$$

При $\varphi(t) = t$ получаем многомерный класс Островского–Неванлинны N (см. [118, гл. 5, §6, п. 1] и [116, гл. III, §3, п. 1]), при $\varphi(t) = t^q$ — многомерные классы Привалова N^q $(q > 1)$, при $\varphi(t) = e^{pt}$ — многомерные классы Харди H^p $(p > 0)$ (см. [118, гл. 5, §6, п. 1] и [116, гл. III, §4, п. 1], где рассмотрены также общие классы $\varphi(N)$). Под H^∞ понимают класс функций, голоморфных и ограниченных в области G.

Определение 1.9. *Функция $f(z)$, голоморфная в области G, принадлежит классу $\varphi(N_*)$, если семейство функций*

$$\bigl\{\varphi\bigl(\ln_+ |f(r\gamma)|\bigr),\ \gamma \in \Gamma\bigr\}_{0 \le r < 1} \tag{1.16}$$

имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что если σ-измеримое множество E на Γ имеет меру $\sigma E < \delta$, то

$$\int\limits_{E} \varphi\bigl(\ln_+ |f(r\gamma)|\bigr)\, \sigma(d\gamma) < \varepsilon, \quad 0 \le r < 1. \tag{1.17}$$

При $\varphi(t) = t$ получаем многомерный аналог класса N_*, исследованный У. Рудиным в книгах [116, гл. III, §3], [118, гл. 5, §6], К. С. Дэвисом в статье [64] и М. Столлом в статьях [130] и [131], где рассмотрены также общие классы $\varphi(N)$.

Определение 1.10. *Функция $f(z)$, голоморфная в области G, принадлежит классу $\varphi(M)$, если семейство функций (1.16) имеет интегрируемую мажоранту на Γ; другими словами,*

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi\bigl(\ln_+ M_{rad}f(\gamma)\bigr)\,\sigma(d\gamma) < \infty, \tag{1.18}$$

где

$$(M_{rad}f)(\gamma) = \sup_{0\le r<1} |f(r\gamma)|, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{1.19}$$

Если $\varphi(t) = t^q$, то получаем многомерные классы M^q $(q > 0)$, которые рассматривались в статьях [61] и [91].

Как и в одномерном случае, в многомерных классах N^q $(q > 0)$, M^q $(q > 0)$ и H^p $(p > 0)$ вводятся числовые характеристики в виде

$$|f|_{N^q} = \sup_{0\le r<1} \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q\bigl(1 + |f(r\gamma)|\bigr)\,\sigma(d\gamma)\right]^{\alpha_q/q}, \quad f \in N^q, \tag{1.20}$$

$$|f|_{M^q} = \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q\bigl(1 + M_{rad}f(\gamma)\bigr)\,\sigma(d\gamma)\right]^{\alpha_q/q}, \quad f \in M^q, \tag{1.21}$$

$$|f|_{H^p} = \sup_{0\le r<1} \left[\int\limits_{\Gamma} |f(r\gamma)|^p\,\sigma(d\gamma)\right]^{\alpha_p/p}, \quad f \in H^p, \tag{1.22}$$

$$\alpha_p = \min(p, 1), \quad p > 0, \tag{1.23}$$

порождающие в этих классах метрики, инвариантные относительно сдвигов, согласно формуле

$$\rho(f, g) = |f - g|. \tag{1.24}$$

Следует отметить, что при $q > 1$ классы N^q и M^q как множества совпадают и поэтому на одном и том же множестве функций введены две различные метрики, ρ_{N^q} и ρ_{M^q}. Тем не менее эти метрики эквивалентны по Липшицу, как показывают рассуждения, приведённые в статье [61] для доказательства равенства $N^q = M^q$. Это обстоятельство аналогично тому, которое имеет место для пространств Харди H^p, когда H^p определяются, с одной стороны, свойством ограниченности интегральных средних (1.15) при $\varphi(t) = e^{pt}$, $p > 0$, а с другой стороны — через максимальную радиальную функцию (см. определение 1.10 с $\varphi(t) = e^{pt}$). Неравенство

$$\int\limits_{\Gamma} M^p_{rad}f(\gamma)\,\sigma(d\gamma) \le C_p \sup_{0\le r<1} \int\limits_{\Gamma} |f(r\gamma)|^p\,\sigma(d\gamma), \quad f \in H^p, \tag{1.25}$$

показывает, что характеристика

$$|f|_{H^p_m} = \left[\int\limits_{\Gamma} M^p_{rad} f(\gamma)\,\sigma(d\gamma)\right]^{\alpha_p/p}, \quad f \in H^p, \tag{1.26}$$

задающая, согласно (1.24), ещё одну метрику в H^p, эквивалентна по Липшицу исходной характеристике $|\cdot|_{H^p}$, заданной по формуле (1.22). Неравенство (1.25) в случае шара доказано в [118, гл. 5, §6, теорема 5], а в случае поликруга следует из оценки слабого типа $(1,1)$ радиального максимального оператора M_{rad}, доказанной в [116, гл. II, §3, лемма 2], и очевидной оценки типа (∞,∞) по известной интерполяционной теореме Марцинкевича (см. [118, гл. 5, §7]).

С другой стороны, классы N^q при $0 < q < 1$ оказываются слишком широкими, чтобы иметь «хорошие» граничные и линейно-топологические свойства.

В классе H^∞ норма $|\cdot|_{H^\infty}$ вводится в виде

$$|f|_{H^\infty} = \sup_{z\in G} |f(z)|, \quad f \in H^\infty.$$

Доказанное в [116, гл. III, §4, п. 1] соотношение

$$N_* = \bigcup_{\varphi} \varphi(N), \tag{1.27}$$

в котором объединение берётся по всем неотрицательным, неубывающим и выпуклым вниз функциям $\varphi(t)$, $t \geq 0$, для которых $\varphi(t)/t \to +\infty$ при $t \to +\infty$, можно использовать для доказательства вложений

$$H^\infty \subset H^{p>0} \subset N^{q>1} \subset M \subset N_* \subset N, \tag{1.28}$$

и можно доказать, что все эти вложения строгие (см. [91]).

Следующая теорема является многомерным аналогом теоремы 1.2.

Теорема 1.11 (А. Зигмунд [148], А. Зигмунд, А. П. Кальдерон [60]). *Для каждой функции $f(z)$ из класса N радиальные граничные значения*

$$f^*(\gamma) = \lim_{r\to 1-} f(r\gamma) \tag{1.29}$$

существуют (и конечны) для почти всех $\gamma \in \Gamma$. При этом функция $\ln|f^*(\gamma)|$ интегрируема по γ относительно меры σ на Γ, если $f(z) \not\equiv 0$ в G.

Замечание 1.12. Утверждение теоремы допускает усиление. В случае шара конечные пределы $f(\zeta)$ функции $f(z)$ существуют и равны $f^*(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in S_n$ при $z \to \zeta$ внутри допустимых областей Кораньи $D_\alpha(\zeta)$,

$\alpha > 1$; числа $f(\zeta)$ называют допустимыми пределами функции $f(z)$ в точках $\zeta \in S_n$ (см. [92]). В случае поликруга пределы функции $f(z)$ существуют для почти всех $\zeta \in T^n$, когда z стремится к ζ внутри углов Штольца по каждой координате таким образом, что отношения $(1-|z_k|)/(1-|z_l|)$ остаются ограниченными для всех $1 \leq k, l \leq n$ (то есть по областям $D_\alpha(\zeta)$, $\alpha > 1$, определённым нами в случае поликруга; см. [60, теорема 1]); числа $f(\zeta)$ в этом случае называют ограниченными некасательными пределами в точках $\zeta \in T^n$.

Преимущество рассмотрения пределов по областям $D_\alpha(\zeta)$ в случае шара заключается в том, что допустимый подход к граничной точке не исчерпывается некасательным подходом (то есть подходом по некоторому некасательному конусу с вершиной в этой точке) и содержит касательную компоненту, а также в том, что понятие допустимой сходимости инвариантно относительно действия автоморфизмов шара B_n.

Часть I

Многомерные функциональные пространства

2

Пространства И. И. Привалова

В главе определяются и исследуются классы И. И. Привалова N^q $(q > 1)$ голоморфных функций в шаре и поликруге из $\mathbb{C}^n$. Изучены эквивалентные определения классов N^q $(q > 1)$, доказаны аналоги теорем В. И. Смирнова для классов N^q $(q > 1)$, а также логарифмическая версия теоремы Ф. и М. Риссов о сходимости в среднем к радиальным граничным значениям на границе области определения.

2.1. Равносильные определения классов N^q $(q > 1)$

2.1.1. Свойства функций, эквивалентные определению принадлежности классам N^q $(q > 1)$

Основная цель этого параграфа состоит в доказательстве следующего результата.

Теорема 2.1. *Пусть $q > 1$, функция $f(z)$ голоморфна в области G и f^* обозначает функцию её радиальных граничных значений (1.29). Следующие условия для функции $f(z)$ эквивалентны:*

(1) $f \in N^q$;
(2) $f \in N_*$ и $\ln_+^q |f^*| \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \sigma)$, где $\mathscr{L}^1(\Gamma, \sigma)$ обозначает множество функций, интегрируемых по мере σ на Γ;
(3) f^* существует почти всюду на Γ, $\ln_+^q |f^*| \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \sigma)$ и

$$\ln_+^q |f(z)| \leq \int\limits_{\Gamma} P(z, \zeta) \ln_+^q |f^*(\zeta)| \, \sigma(d\zeta), \quad z \in G, \tag{2.1}$$

где P — ядро Пуассона области G, определённое по формулам (1.12) и (1.13) соответственно;

(4) f^* *существует почти всюду на* Γ, $\ln_+^q |f^*| \in \mathscr{L}^1(\Gamma,\sigma)$ *и*

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)|\,\sigma(d\gamma) \le \int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f^*(\gamma)|\,\sigma(d\gamma), \quad 0 \le r < 1; \tag{2.2}$$

(5) f^* *существует почти всюду на* Γ, $\ln_+^q |f^*| \in \mathscr{L}^1(\Gamma,\sigma)$ *и*

$$\lim_{r\to 1-} \int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)|\,\sigma(d\gamma) = \int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f^*(\gamma)|\,\sigma(d\gamma); \tag{2.3}$$

(6) $f \in (N_*)^q$;
(7) $f \in M^q$.

Замечание 2.2. Равносильность условий (1), (5) и (6) в одномерном случае доказана И. И. Приваловым в [40, гл. IV, §10, пп. 1 и 2]. Равносильность условий (1), (2) и (7) установлена в статье Х. О. Кима и Б. Р. Чоэ [61]. Импликации (1) $\Rightarrow$ (3) и (1) $\Rightarrow$ (5) (даже в более общем случае) были установлены М. Столлом в статье [130].

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Включения (1.28) показывают, что если функция $f \in N^q$ $(q > 1)$, то $f \in N_*$ и, следовательно, $f(z)$ имеет конечные радиальные граничные значения f^* почти всюду на Γ (теорема 1.11). Согласно определению принадлежности функции $f(z)$ классу N^q (определение 1.8), существует конечная постоянная $K \ge 0$, для которой

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)|\,\sigma(d\gamma) \le K, \quad 0 \le r < 1.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r \to 1-$ и используя предельное неравенство Фату–Лебега (см., например, [106, теорема II.T7]), получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f^*(\gamma)|\,\sigma(d\gamma) \le K,$$

откуда и следует, что $\ln_+^q |f^*| \in \mathscr{L}^1(\Gamma,\sigma)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть $f \in N_*$ и $\ln_+^q |f^*| \in \mathscr{L}^1(\Gamma,\sigma)$. Функция $\ln_+ |f(z)|$ плюрисубгармонична в области G как композиция плюрисубгармонической функции $t = \ln |f(z)|$ и неубывающей выпуклой вниз функции действительного аргумента $\psi(t) = t_+ = \max(t\,,0)$. (Относительно понятия плюрисубгармонической функции см., например, [52, гл. III, §13].) Поэтому для любого радиуса $0 \le R < 1$ и любой точки $z \in G$, $|z| < R$, выполнено неравенство

$$\ln_+ |f(z)| \le \int\limits_{\Gamma} P\left(\frac{z}{R}\,,\,\zeta\right) \ln_+ |f(R\zeta)|\,\sigma(d\zeta) \tag{2.4}$$

(см. [130, лемма 2a]).

Для всех $z \in G$, $|z| < R$, справедлива оценка ядра Пуассона

$$P\left(\frac{z}{R}, \zeta\right) \le \left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^n, \quad \zeta \in \Gamma, \tag{2.5}$$

из которой следует, что при фиксированном $z \in G$ функция $P(z/R, \zeta)$ равномерно ограничена на Γ при $R \to 1-$. С другой стороны, согласно условию $f \in N_*$, семейство функций $\{\ln_+ |f(R\zeta)|, \zeta \in \Gamma\}_{0 \le R < 1}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ (см. определение 1.9). Следовательно, подынтегральные функции в (2.4) образуют семейство функций с равностепенно абсолютно непрерывными (при $R \to 1-$) интегралами и, значит, в (2.4) возможен предельный переход под знаком интеграла при $R \to 1-$ (см., например, [106, теорема II.T21]). Таким образом, на основании (2.4), получаем

$$\ln_+ |f(z)| \le \int\limits_{\Gamma} P(z, \zeta) \ln_+ |f^*(\zeta)| \, \sigma(d\zeta), \quad z \in G. \tag{2.6}$$

Применяя к правой части (2.6) неравенство Йенсена относительно выпуклой вниз и неубывающей при $t \ge 0$ функции $\varphi(t) = t^q$, $q > 1$, приходим к искомому неравенству (2.1).

(3) $\Rightarrow$ (4) Положим в неравенстве (2.1) $z = r\gamma$, $0 \le r < 1$, $\gamma \in \Gamma$, и произведём в нём интегрирование по переменной γ. Получим неравенство

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)| \, \sigma(d\gamma) \le \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} P(r\gamma, \zeta) \, \sigma(d\gamma) \, \ln_+^q |f^*(\zeta)| \, \sigma(d\zeta), \tag{2.7}$$

в котором также использована теорема Фубини об изменении порядка интегрирования в кратном интеграле Лебега.

Из определений (1.12) и (1.13) ядра Пуассона P непосредственно следует свойство симметричности

$$P(r\gamma, \zeta) = P(r\zeta, \gamma), \quad \zeta, \gamma \in \Gamma, \quad 0 \le r < 1, \tag{2.8}$$

а также свойство нормированности

$$\int\limits_{\Gamma} P(z, \gamma) \, \sigma(d\gamma) = 1, \quad z \in G, \tag{2.9}$$

доказанное в [118, гл. 3, §3, предложение 3] и [116, гл. II, §1, п. 1]. Учитывая (2.8) и (2.9), перепишем (2.7) в виде

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)| \, \sigma(d\gamma) \le \int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f^*(\zeta)| \, \sigma(d\zeta), \quad 0 \le r < 1,$$

что с точностью до переобозначения совпадает с искомым неравенством (2.2).

(4) $\Rightarrow$ (5) Из неравенства (2.2) следует, что

$$\varlimsup_{r\to 1-}\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)|\,\sigma(d\gamma) \le \int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f^*(\gamma)|\,\sigma(d\gamma).$$

С другой стороны, предельное неравенство Фату–Лебега даёт

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f^*(\gamma)|\,\sigma(d\gamma) \leqslant \varliminf_{r\to 1-}\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)|\,\sigma(d\gamma).$$

Последние два неравенства приводят к равенству (2.3).

(5) $\Rightarrow$ (6) Согласно [106, теорема II.T21], равенство (2.3) выполнено тогда и только тогда, когда семейство функций $\{\ln_+^q |f(r\gamma)|,\ \gamma \in \Gamma\}_{0\le r<1}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ. Следовательно, если выполнено (2.3), то по определению 1.9 функция $f \in (N_*)^q$.

(2) $\Rightarrow$ (7) Применим к обеим частям установленного выше неравенства (2.6) радиальный максимальный оператор (1.19), используя оценку радиальной максимальной функции интеграла Пуассона через граничную максимальную функцию (эта оценка доказана в случае шара в [118, гл. 5, §4, теорема 5], а для случая поликруга её можно найти в [116, гл. II, §3, п. 1, с. 30–31]). Тогда получим неравенство

$$\ln_+ M_{rad}f(\zeta) \le C\, M_\Gamma \ln_+ |f^*|(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma,$$

с некоторой конечной постоянной $C \ge 0$, где символ $M_\Gamma g$ обозначает граничную максимальную функцию для определённой на Γ функции g (относительно определения $M_\Gamma g$ см. [118, гл. 5, §2, определение 2] и [116, гл. II, §3, п. 1]).

Поскольку $q > 1$, дальнейшее доказательство базируется на оценке сильного типа (q, q) для граничного максимального оператора M_Γ, которая в случае шара установлена в [118, гл. 5, §2, теорема 4], а в случае поликруга по известной интерполяционной теореме Марцинкевича следует из оценки слабого типа $(1, 1)$ (см. [116, гл. II, §3, п. 1, лемма 1]) и оценки типа (∞, ∞), которая без труда проверяется и непосредственно. В силу этой оценки, интегрированием из последнего неравенства получаем неравенство

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q M_{rad}f(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \le C^q \int\limits_{\Gamma} M_\Gamma^q \ln_+ |f^*|(\zeta)\sigma(d\zeta) \le$$
$$\le C^q A_q \int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |f^*(\zeta)|\,\sigma(d\zeta) < +\infty$$

с некоторой конечной постоянной $A_q \geq 0$, из которого по определению 1.10 следует, что $f \in M^q$.

(7) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1) Эти импликации следуют из включений

$$M^q \subseteq (N_*)^q \subseteq N^q,$$

вытекающих прямо из определений 1.8, 1.9 и 1.10.

2.1.2. Эквивалентные определения классов N^q и H^p

Так как при любом $q > 0$ разность функций $\ln^q(1+t) - \ln_+^q t$ ограничена при $t \geq 0$, то в определениях 1.8, 1.9 и 1.10 классов N^q, $(N_*)^q$ и M^q функции $\ln_+^q |f(r\gamma)|$ и $\ln_+^q M_{rad}f(\gamma)$ можно заменить на функции $\ln^q(1+|f(r\gamma)|)$ и $\ln^q(1+M_{rad}f(\gamma))$ соответственно.

Используя новое определение, заметим, что утверждение теоремы 2.1 остаётся справедливым, если во всех её условиях функцию $\ln_+^q t$ заменить на $\ln^q(1+t)$. Действительно, функция $\ln(1+|f(z)|)$ плюрисубгармонична в области G для любой голоморфной там функции $f(z)$, как композиция плюрисубгармонической функции $t = \ln|f(z)|$ и выпуклой вниз неубывающей функции действительного аргумента $\psi(t) = \ln(1+e^t)$ (ср. с рассуждениями при доказательстве импликации (2) $\Rightarrow$ (3) в теореме 2.1). С учётом этого обстоятельства не представляет труда видоизменить изложенное выше доказательство теоремы 2.1.

В частности, свойство (5) теоремы 2.1 приводит к следующему утверждению.

Следствие 2.3. *Для каждой функции $f(z)$ класса N^q $(q > 1)$*

$$|f|_{N^q} = \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q(1+|f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q}, \tag{2.10}$$

где f^* обозначает функцию радиальных граничных значений (1.29) функции f (сравните с равенством (1.3)).

Действительно, при $q > 1$ функция $\ln^q(1+|f(z)|)$ плюрисубгармонична в области G для любой голоморфной там функции $f(z)$, как композиция плюрисубгармонической функции $\ln(1+|f(z)|)$ и неубывающей выпуклой вниз при $t \geq 0$ функции $\varphi(t) = t^q$. Согласно результату М. Столла (см. [130, лемма 2b]), интеграл в определении (1.20) характеристики $|\cdot|_{N^q}$ не убывает по r и поэтому знак sup в определении (1.20) можно заменить на знак lim. После этого остаётся лишь применить свойство (5) видоизменённой теоремы 2.1.

Замечание 2.4. Все утверждения теоремы 2.1, кроме, быть может, её утверждения (7), справедливы и для общих классов $\varphi(N)$, где $\varphi(t)$ — произвольная неубывающая неотрицательная выпуклая вниз при $t \geq 0$

функция, бесконечно большая по сравнению с t при $t \to +\infty$, если во всех её условиях функцию $\ln_+^q t$ заменить на $\varphi(\ln_+ t)$. Заметим, что и утверждение (7) будет справедливо, если предполагать, что при некотором $p > 1$ функция $\sqrt[p]{\varphi}$ обладает всеми свойствами функции φ, указанными выше. Более того, достаточно лишь потребовать, чтобы функция $\sqrt[p]{\varphi(\ln_+ |f(z)|)}$ при некотором $p > 1$ была плюрисубгармонической в области G для каждой голоморфной там функции $f(z)$. Как следствие, утверждения теоремы 2.1 остаются справедливыми для классов Харди H^p $(p > 0)$.

Совершенно аналогично сказанному в начале пункта относительно классов Привалова N^q $(q > 1)$, в определениях 1.8, 1.9 и 1.10 классов $H^p = e^{pN}$, $H^p_* = e^{pN_*}$ и $H^p_m = e^{pM}$ функции $e^{p\ln_+|f(r\gamma)|} = \max(1, |f(r\gamma)|^p)$ и $e^{p\ln_+ M_{rad}f(\gamma)} = \max(1, M^p_{rad}f(\gamma))$ могут быть заменены на функции $|f(r\gamma)|^p$ и $M^p_{rad}f(\gamma)$ соответственно (именно в такой форме классы H^p обычно и определяются). Сделав такое замечание, отметим, что утверждения теоремы 2.1 для классов Харди H^p также остаются справедливыми, если функцию $\max(1, |f(r\gamma)|^p)$, возникающую при этом в условиях теоремы, заменить на функцию $|f(r\gamma)|^p$. Действительно, при $p > 0$ функция $|f(z)|^p$ является плюрисубгармонической в области G для всякой голоморфной там функции $f(z)$ — и, значит, доказательство модифицированной теоремы 2.1 для классов H^p можно проводить по той же схеме, которая приведена для классов N^q $(q > 1)$.

В частности, свойство (5) указанной выше теоремы приводит к следующему выражению для характеристики $|\cdot|_{H^p}$ (сравните с выражением (1.22)).

Следствие 2.5. *Для каждой функции $f(z)$ класса H^p $(p > 0)$*

$$|f|_{H^p} = \left[\int\limits_{\Gamma} |f^*(\gamma)|^p \, \sigma(d\gamma) \right]^{\alpha_p/p}, \tag{2.11}$$

где f^* обозначает функцию радиальных граничных значений (1.29) функции f и $\alpha_p = \min(p, 1)$.

2.1.3. Аналоги теорем Смирнова для классов N^q $(q > 1)$

Известная теорема В. И. Смирнова (см., например, [41, гл. II, §6, п. 4]) утверждает, что если функция $f \in H^p$ $(p > 0)$ и функция $|f^*|^{p'}$ $(p' > p)$ интегрируема на Γ, то $f \in H^{p'}$. Как обобщение этой теоремы на случай бесконечного показателя p', справедлив также следующий результат, который можно было бы назвать граничным принципом максимума модуля: если $f \in H^p$ $(p > 0)$ и $|f^*| \le K$ почти всюду на границе Γ, то $|f(z)| \le K$ всюду в области G (см. [41, гл. III, §16, п. 2]). Аналоги этих классических результатов справедливы и для классов И. И. Привалова N^q $(q > 1)$.

Следствие 2.6. *Если функция f принадлежит классу N^q $(q > 1)$ и функция $\ln_+^{q'} |f^*|$ $(q' > q)$ интегрируема на Γ, то $f \in N^{q'}$.*

Это утверждение является непосредственным следствием утверждения (2) теоремы 2.1 (применённого в случае показателей q и q').

Следствие 2.7. *Пусть $q > 1$ и $p > 0$. Если $f \in N^q$ и $|f^*|^p$ интегрируема на Γ, то $f \in H^p$.*

Доказательство утверждения вытекает непосредственно из теоремы 2.1, применённой для класса N^q $(q > 1)$ и класса H^p $(p > 0)$ (см. также замечания в пункте 2.1.2). Следующая теорема является формальным перенесением предыдущего результата на случай $p = +\infty$.

Следствие 2.8. *Если $f \in N^q$ $(q > 1)$ и $|f^*| \le K < +\infty$ почти всюду на множестве Γ, то f ограничена в области G (то есть $f \in H^\infty$) и $|f(z)| \le K$.*

Доказательство. Если $K = 0$, то согласно граничной теореме единственности (см. последнее утверждение теоремы 1.11) $f \equiv 0$ и доказывать нечего. Если $K > 0$, то, поделив функцию f на K, можем считать, что $K = 1$. Но в этом случае $\ln_+^q |f^*| = 0$ почти всюду на Γ и, по утверждению (3) теоремы 2.1, $\ln_+^q |f(z)| = 0$ всюду в области G, то есть $|f(z)| \le 1 = K$, $z \in G$.

2.2. Аналог теоремы Риссов для классов N^q $(q > 1)$

2.2.1. Радиальный вариант

Классический результат Ф. и М. Риссов (см. [113]) утверждает, что для каждой функции $f(z)$ из пространства H^p $(p > 0)$ справедливо свойство

$$\int\limits_\Gamma |f(r\gamma) - f^*(\gamma)|^p \, \sigma(d\gamma) \to 0 \text{ при } r \to 1-,$$

которое показывает, что растяжения f_r, $f_r(z) = f(rz)$, $z \in G$, $0 \le r < 1$, приближают функцию f в метрике пространства H^p (см. (2.11)). Аналогичное свойство оказывается справедливым также и для функций классов N^q $(q > 1)$.

Теорема 2.9. *Пусть $q > 1$ и функция $f \in N^q$. Тогда*

$$\int\limits_\Gamma \ln^q\bigl(1 + |f(r\gamma) - f^*(\gamma)|\bigr) \, \sigma(d\gamma) \to 0 \text{ при } r \to 1- \tag{2.12}$$

или $f_r \to f$ при $r \to 1-$ по метрике ρ_{N^q}, где функции $f_r, 0 \le r < 1$, определены выше, а f^* обозначает функцию радиальных граничных значений (1.29).

Доказательство. Согласно неравенству

$$\ln^q(1+|a-b|) \le 2^q(\ln^q(1+|a|)+\ln^q(1+|b|)) \tag{2.13}$$

и свойствам (2) и (6) из теоремы 2.1, семейство функций

$$\{\ln^q\bigl(1+|f(r\gamma)-f^*(\gamma)|\bigr),\ \gamma\in\mathit{\Gamma}\}_{0\le r<1}$$

имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на $\mathit{\Gamma}$. Кроме того, согласно определению радиальных граничных значений (1.29) и теореме 1.11, почти всюду на $\mathit{\Gamma}$ имеет место сходимость $\ln^q(1+|f_r-f^*|)\to 0$ при $r\to 1-$, откуда свойство (2.12) следует на основании стандартной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла (см., например, [106, теорема II.T21]).

Следствие 2.10. *Для каждого $q>1$ многочлены плотны в метрическом пространстве N^q и N^q — сепарабельно.*

Доказательство. Как показывает предыдущая теорема, в пространстве N^q плотны функции, голоморфные в замкнутой области $\overline{G}$. Покажем, что многочлены равномерно плотны в пространстве всех голоморфных функций на $\overline{G}$.

Рассмотрим сначала случай $G=U^n$. Согласно определению голоморфности функции на множестве, функция g, голоморфная в $\overline{U}^n$, обязана быть голоморфной в некотором поликруге $R\,U^n=\{z\in\mathbb{C}^n \mid |z|<R\}$ для некоторого $R>1$. Выберем r, $1<r<R$, и заметим, что на поликруге $r\overline{U}^n$ для функции g справедлива формула Коши

$$g(z)=\int\limits_{T^n} C_\infty\left(\frac{z}{r},\zeta\right) g(r\zeta)\,\sigma_\infty(d\zeta), \quad |z|_\infty<r, \tag{2.14}$$

где $C_\infty(z,\zeta)=(1-z_1\overline{\zeta}_1)^{-1}\dots(1-z_n\overline{\zeta}_n)^{-1}$, $z\in U^n$, $\zeta\in T^n$ — ядро Коши в поликруге U^n (см. [116, гл. I, §1, п. 2]). Разлагая это ядро в ряд по степеням $z_k\overline{\zeta}_k$

$$C_\infty\left(\frac{z}{r},\zeta\right)=\sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{z_1}{r}\overline{\zeta}_1\right)^{k_1}\dots\left(\frac{z_n}{r}\overline{\zeta}_n\right)^{k_n},$$

заметим, что при фиксированном $r>1$ этот ряд сходится равномерно по z в $\overline{U}^n$ и по ζ в T^n и поэтому

$$g(z)=\sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}_+} c_{k_1\dots k_n} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}, \quad |z|_\infty\le 1, \tag{2.15}$$

где

$$c_{k_1\dots k_n}=\int\limits_{T^n} g(r\zeta)\left(\frac{\overline{\zeta}_1}{r}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{\overline{\zeta}_n}{r}\right)^{k_n}\sigma(d\zeta)$$

— коэффициенты Тейлора функции g и ряд (2.15) сходится равномерно в области $\overline{U}^n$. Таким образом, частичные суммы ряда (2.15) аппроксимируют функцию g равномерно на $\overline{U}^n$.

В случае $G = B_n$ вместо (2.14) воспользуемся аналогичной формулой Коши для шара. Выбирая $R > 1$ так, чтобы функция g была голоморфна в шаре $RB_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|_2 < R\}$, и применяя к g формулу Коши в шаре $r\overline{B}_n$, $1 < r < R$, имеем

$$g(z) = \int\limits_{S_n} C_2\left(\frac{z}{r}, \zeta\right) g(r\zeta)\, \sigma_2(d\zeta), \quad |z|_2 < r,$$

где $C_2(z, \zeta) = (1 - \langle z, \zeta\rangle)^{-n}$, $z \in B_n$, $\zeta \in S_n$ — ядро Коши в шаре B_n (см. [118, гл. 3, §2, п. 4]). Разлагая это ядро в ряд по степеням $\langle z, \zeta\rangle$

$$C_2\left(\frac{z}{r}, \zeta\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \mathrm{C}_{-n}^k \left\langle \frac{z}{r}, \zeta \right\rangle^k,$$

заметим, что при фиксированном $r > 1$ этот ряд сходится равномерно по z в $\overline{B}_n$ и по ζ в S_n — и поэтому

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_k(z), \quad |z|_2 \le 1, \tag{2.16}$$

где

$$P_k(z) = (-1)^k \mathrm{C}_{-n}^k \int\limits_{S_n} g(r\zeta) \left\langle \frac{z}{r}, \zeta \right\rangle^k \sigma(d\zeta)$$

— однородные полиномы степени k, причём ряд (2.16) сходится равномерно в области $\overline{B}_n$. Частные суммы ряда (2.16) приближают функцию g равномерно в области $\overline{B}_n$.

Итак, в обоих случаях показано, что любая функция, голоморфная в $\overline{G}$, приближается полиномами комплексных переменных равномерно на $\overline{G}$. Так как равномерная сходимость в $\overline{G}$ сильнее сходимости по метрике ρ_{N^q} (в классе функций, голоморфных в G и непрерывных на $\overline{G}$), то отсюда следует свойство плотности многочленов в пространстве N^q.

Сепарабельность пространства N^q следует из того, что многочлены от комплексных переменных с произвольными коэффициентами равномерно на $\overline{G}$ приближаются многочленами с комплексно-рациональными коэффициентами, множество которых счётно. Тем самым, следствие полностью доказано.

2.2.2. Граничный вариант

Применим доказанную теорему к изучению свойства непрерывности операции смещения функции $f \in N^q$ вдоль окружностей на Γ.

Следствие 2.11. *Пусть* $q > 1$ *и* $f \in N^q$. *Тогда для функций* $f_{e^{i\theta}}$, $f_{e^{i\theta}}(z) = f(e^{i\theta}z)$, $z \in G$, *справедливо* $f_{e^{i\theta}} \in N^q$, $\theta \in \mathbb{R}$, *и* $f_{e^{i\theta}} \to f$ *по метрике* ρ_{N^q} *при* $\theta \to 0$.

Доказательство. В силу инвариантности меры σ относительно преобразований $\varGamma$ вида $\zeta \mapsto e^{i\theta}\zeta$, $\theta \in \mathbb{R}$, для любой функции $f(z)$, непрерывной в области G, справедливо равенство

$$\int\limits_{\varGamma} \ln^q\bigl(1 + |f(r\zeta)|\bigr)\,\sigma(d\zeta) = \int\limits_{\varGamma} \ln^q\bigl(1 + |f(re^{i\theta}\zeta)|\bigr)\,\sigma(d\zeta), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad 0 \le r < 1,$$

из которого следует, что если $f \in N^q$ $(q > 1)$ и функция $f_{e^{i\theta}}$, $\theta \in \mathbb{R}$, определена формулой $f_{e^{i\theta}}(z) = f(e^{i\theta}z)$, $z \in G$, то $f_{e^{i\theta}} \in N^q$ и $|f_{e^{i\theta}}|_{N^q} = |f|_{N^q}$ (см. выражение (1.20) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$). Согласно теореме 2.9, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое r, $0 \le r < 1$, что $|f_r - f|_{N^q} < \varepsilon/3$, где функция f_r определена формулой $f_r(z) = f(rz)$, $z \in G$. Тогда из неравенств треугольника в пространстве N^q

$$|f + g|_{N^q},\ |fg|_{N^q} \le |f|_{N^q} + |g|_{N^q}, \quad f, g \in N^q\,(q > 1), \tag{2.17}$$

справедливых в силу неравенств

$$\ln(1 + a + b),\ \ln(1 + ab) \le \ln(1 + a) + \ln(1 + b), \quad a, b \ge 0, \tag{2.18}$$

неравенства Минковского в пространстве $\mathscr{L}^q(\varGamma, \sigma)$ и выражения (1.20) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$, имеем

$$|f_{e^{i\theta}} - f|_{N^q} \le |f_{e^{i\theta}} - (f_{e^{i\theta}})_r|_{N^q} + |(f_r)_{e^{i\theta}} - f_r|_{N^q} + |f_r - f|_{N^q} =$$

$$= 2|f_r - f|_{N^q} + |(f_r)_{e^{i\theta}} - f_r|_{N^q} < \frac{2\varepsilon}{3} + |(f_r)_{e^{i\theta}} - f_r|_{N^q}.$$

Так как функция f_r равномерно непрерывна в $\overline{G}$, то $(f_r)_{e^{i\theta}} \rightrightarrows f_r$ на $\overline{G}$ при $\theta \to 0$ и, значит, $(f_r)_{e^{i\theta}} \to f_r$ при $\theta \to 0$ по метрике ρ_{N^q}. Поэтому найдётся такое $\delta > 0$, что при всех $\theta \in \mathbb{R}$, $|\theta| < \delta$, выполнено $|(f_r)_{e^{i\theta}} - f_r|_{N^q} < \varepsilon/3$. В итоге получаем, что при $|\theta| < \delta$ выполнено $|f_{e^{i\theta}} - f|_{N^q} < \varepsilon$. Следовательно, $f_{e^{i\theta}} \to f$ при $\theta \to 0$ по метрике ρ_{N^q}.

Замечание 2.12. Утверждение следствия 2.11 останется справедливым, если вместо преобразований смещений вдоль окружностей рассмотреть преобразования $\varGamma$ более общего вида — унитарные преобразования в случае шара и преобразования типа перестановок координат и вращений по каждой из них в случае поликруга. Однако точные формулировки результатов в этом случае требуют введения топологии на этих множествах преобразований.

2.2.3. Общий случай

Объединяя результаты пунктов 2.2.1 и 2.2.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.13. *Пусть $q > 1$ и $f \in N^q$. Если функции f_ζ, $\zeta \in \overline{U}$, определены в виде $f_\zeta(z) = f(\zeta z)$, $z \in G$, то $f_\zeta \to f$ по метрике ρ_{N^q}, когда $\zeta \to 1$, оставаясь в круге $\overline{U}$.*

Доказательство. Если $\zeta = re^{i\theta}$, $0 \le r \le 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $|\theta| \le \pi$, то, используя неравенство треугольника (2.17) в пространстве N^q, имеем $|f_\zeta - f|_{N^q} \le |f_{re^{i\theta}} - f_r|_{N^q} + |f_r - f|_{N^q} \le |f_{e^{i\theta}} - f|_{N^q} + |f_r - f|_{N^q}$ (в последнем неравенстве также использовалось соотношение $|f_r|_{N^q} \le |f|_{N^q}$, $f \in N^q$, непосредственно следующее из выражения (1.20) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$). Когда $\zeta \to 1$, оставаясь в единичном круге $\overline{U}$, то $r \to 1$, $0 \le r \le 1$, и $\theta \to 0$. По теореме 2.9 и следствию 2.11 из неё, получаем $|f_\zeta - f|_{N^q} \to 0$ при $\zeta \to 1$, $\zeta \in \overline{U}$. Следствие доказано.

Замечание 2.14. Результаты этой главы опубликованы в [44] и вошли в диссертацию [46].

3

Пространства И. И. Привалова как F-пространства

В главе изучаются свойства классов Привалова как линейных и метрических пространств. Доказано, что при каждом $q > 1$ классы N^q составляют F-алгебры относительно метрики ρ_{N^q}. Получены полные характеристики ограниченных и вполне ограниченных множеств в этих F-алгебрах.

3.1. Равномерная оценка роста функций классов N^q $(q > 1)$

Результаты этого параграфа носят вспомогательный характер. Здесь устанавливаются равномерные оценки роста функций классов N^q, которые используются в параграфе 3.2 и далее при установлении свойств F-пространства для классов N^q $(q > 1)$.

3.1.1. O-оценка равномерного роста

Теорема 3.1. *Для каждой функции $f(z)$ класса N^q $(q \geq 1)$ справедлива оценка*

$$\ln(1 + |f(z)|) \leq \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|}\right)^{n/q} |f|_{N^q}, \quad z \in G. \tag{3.1}$$

Замечание 3.2. В случае $q > 1$, $n = 1$ и немного отличной форме эта теорема была доказана в статье [107, неравенство (2)].

Следствие 3.3. *Свойства сходимости и фундаментальности последовательностей функций пространств N^q $(q \geq 1)$ сильнее свойств равномерной сходимости и равномерной фундаментальности на компактах внутри G соответственно.*

Доказательство (следствия). Действительно, пусть, например, последовательность $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ содержится в N^q $(q \geq 1)$ и фундаментальна относительно метрики ρ_{N^q}. Согласно последней теореме справедливо неравенство

$$\ln(1 + |f_k(z) - f_l(z)|) \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{n/q} |f_k - f_l|_{N^q}, \quad z \in G, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

которое и показывает, что последовательность функций (f_k) фундаментальна равномерно на любом компакте K из G, причём

$$\max_{z\in K} |f_k(z) - f_l(z)| \leq \exp[C_K |f_k - f_l|_{N^q}] - 1,$$

где постоянная $C_K = \max\limits_{z\in K}[(1+|z|)/(1-|z|)]^{n/q}$ конечна и зависит только от K, n и q. Аналогично устанавливается справедливость первого утверждения следствия.

Доказательство (теоремы). Отметим сначала, что при $q \geq 1$ функция $\ln^q(1 + |f(z)|)$ плюрисубгармонична в G для всякой голоморфной там функции $f(z)$ (см. пункт 2.1.2 относительно случая $q = 1$ и доказательство следствия 2.3 из того же пункта относительно случая $q > 1$). Согласно результату М. Столла (см. [130, лемма 2a]), неравенство

$$\ln^q(1 + |f(z)|) \leq \int\limits_{\Gamma} P\left(\frac{z}{R}, \zeta\right) \ln^q(1 + |f(R\zeta)|)\, \sigma(d\zeta)$$

выполняется для любого радиуса R, $0 \leq R < 1$, и любой точки $z \in G$, $|z| < R$. Используя оценку (2.5) ядра Пуассона P, имеем неравенство

$$\ln^q(1 + |f(z)|) \leq \left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^n \int\limits_{\Gamma} \ln^q(1 + |f(R\zeta)|)\, \sigma(d\zeta), \quad |z| < R < 1. \tag{3.2}$$

Заменяя интеграл в правой части последнего неравенства на $|f|^q_{N^q}$ (см. выражение (1.20) для $|\cdot|_{N^q}$) и переходя к пределу при $R \to 1-$, получаем неравенство

$$\ln^q(1 + |f(z)|) \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n |f|^q_{N^q}, \quad z \in G,$$

равносильное искомому (3.1).

3.1.2. *o*-оценка равномерного роста

Теорема 3.4. *Если $q > 1$ и функция $f(z)$ принадлежит классу N^q, то*

$$\ln_+ |f(z)| = o\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{n/q} \quad \textit{при } |z| \to 1-. \tag{3.3}$$

Замечание 3.5. Данная теорема является многомерным обобщением теоремы 1.6.

Доказательство. Воспользуемся утверждением (3) теоремы 2.1, согласно которому функция $\ln_+^q |f^*|$ интегрируема на Γ. Тогда интеграл Лебега этой функции абсолютно непрерывен и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что если множество $E \subseteq \Gamma$ σ-измеримо и имеет меру $\sigma E < \delta$, то

$$\int\limits_E \ln_+^q |f^*(\gamma)| \, \sigma(d\gamma) < \varepsilon^q.$$

Применяя к множеству $E_k = \{\gamma \in \Gamma \mid \ln_+ |f^*(\gamma)| \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$, неравенство Чебышёва

$$\sigma E_k \leq \frac{1}{k^q} \int\limits_\Gamma \ln_+^q |f^*(\gamma)| \, \sigma(d\gamma), \quad k \in \mathbb{N},$$

видим, что для выбранного $\delta > 0$ всегда можно найти такое $K \in \mathbb{N}$, что $\sigma E_K < \delta$. Разобьём интеграл в правой части неравенства (2.1) на сумму интегралов по множеству E_K и по дополнению к этому множеству (относительно Γ). Используя оценку (2.5) и определение чисел δ и K, имеем

$$\begin{aligned} \ln_+^q |f(z)| \leq \int\limits_\Gamma P(z,\gamma) \ln_+^q |f^*(\gamma)| \, \sigma(d\gamma) = \\ = \left(\int\limits_{E_K} + \int\limits_{\Gamma \setminus E_K} \right) P(z,\gamma) \ln_+^q |f^*(\gamma)| \, \sigma(d\gamma) \leq \\ \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^n \int\limits_{E_K} \ln_+^q |f^*(\gamma)| \, \sigma(d\gamma) + \\ + K^q \int\limits_{\Gamma \setminus E_K} P(z,\gamma) \, \sigma(d\gamma) < \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^n \varepsilon^q + K^q, \quad z \in G, \end{aligned}$$

где в последней строке было использовано свойство нормированности (2.9) ядра Пуассона P. Извлекая из обеих частей полученного неравенства корень q-ой степени и воспользовавшись неравенством

$$(a+b)^{1/q} \leq a^{1/q} + b^{1/q}, \quad a, b \geq 0, \quad q \geq 1, \tag{3.4}$$

получим

$$\ln_+ |f(z)| \leq \varepsilon \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^{n/q} + K, \quad z \in G,$$

где число K, вообще говоря, зависит от ε.

Так как последнее неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то $\ln_+ |f(z)| = o\left((1+|z|)/(1-|z|)\right)^{n/q}$ при $|z| \to 1-$, что и требовалось доказать.

Отметим, что вторая теорема настоящего параграфа даёт более сильную оценку равномерного роста для функций класса N^q $(q > 1)$, чем первая, но эта оценка имеет менее явный характер.

3.2. F-пространства N^q $(q > 1)$

3.2.1. Классы N^q $(q > 1)$ как F-пространства

Следующая теорема обобщает на многомерный случай результат М. Столла (см. пункт 1.1.2) и является одним из основных результатов данной главы.

Теорема 3.6. *Классы N^q при $q > 1$ являются F-пространствами относительно метрики ρ_{N^q}, причём сходимость по метрике ρ_{N^q} сильнее равномерной сходимости на компактах внутри G.*

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение теоремы, необходимо проверить следующие свойства (ср. [2, разд. III]):

(0) N^q $(q > 1)$ — линейное пространство;
(1) $\rho_{N^q}(f, g) = \rho_{N^q}(f - g, 0)$ для любых f и g из N^q (инвариантность относительно сдвигов);
(2) последовательность (αf_k) сходится к нулю по метрике ρ_{N^q}, если $\alpha \in \mathbb{C}$ и последовательность $(f_k) \subset N^q$ сходится к нулю по метрике ρ_{N^q} (непрерывность умножения на скаляр по векторному аргументу в нуле);
(3) последовательность $(\alpha_k f)$ сходится к нулю по метрике ρ_{N^q}, если последовательность $(\alpha_k) \subset \mathbb{C}$ бесконечно малая и функция $f \in N^q$ (непрерывность умножения на скаляр по скалярному аргументу в нуле);
(4) пространство N^q полно относительно метрики ρ_{N^q}.

Свойство (0) замкнутости класса N^q $(q > 1)$ относительно операций сложения и умножения функций следует из неравенства треугольника (2.17) в пространстве N^q.

Свойство (1) следует прямо из определения (1.24) метрики ρ_{N^q} через характеристику $|\cdot|_{N^q}$.

Свойство (2) следует из неравенства

$$|\alpha f|_{N^q} \le \max(1, |\alpha|)|f|_{N^q}, \quad f \in N^q, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{3.5}$$

справедливого в силу неравенства

$$\ln(1 + \alpha a) \le \max(1, \alpha) \ln(1 + a), \quad \alpha, a \ge 0, \tag{3.6}$$

и выражения (1.20) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$. Действительно, пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ и последовательность $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset N^q$ сходится к нулю пространства N^q по метрике ρ_{N^q}. Это означает, что $|f_k|_{N^q} = \rho_{N^q}(f_k, 0) \to 0$ при $k \to \infty$.

Согласно неравенству (3.5), отсюда заключаем, что $\rho_{N^q}(\alpha f_k, 0) = |\alpha f_k|_{N^q} \le \max(1, |\alpha|)|f_k|_{N^q} \to 0$ при $k \to \infty$, то есть последовательность (αf_k) сходится к нулю по метрике ρ_{N^q}.

Для доказательства свойства (3) воспользуемся выражением (2.10) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$, справедливым только при $q > 1$. Если последовательность $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится к нулю, то для некоторого номера $K \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $|\alpha_k| \le 1$, $k \ge K$. Следовательно, для любой функции $f \in N^q$ $(q > 1)$ будет выполнено неравенство

$$\ln^q(1 + |\alpha_k f^*(\gamma)|) \le \ln^q(1 + |f^*(\gamma)|), \quad \gamma \in \varGamma, \quad k \ge K.$$

Так как функция $\ln^q(1 + |f^*|)$ интегрируема на $\varGamma$ (свойство (2) из теоремы 2.1, см. также пункт 2.1.2), то последовательность измеримых функций $\{\ln^q(1 + |\alpha_k f^*(\gamma)|),\ \gamma \in \varGamma\}_{k\in\mathbb{N}}$ имеет интегрируемую мажоранту на $\varGamma$. Кроме того, эта последовательность сходится почти всюду на $\varGamma$ к нулевой функции, поскольку $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. В силу предельной теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. [29, гл. V, §5, п. 5, теорема 6]),

$$|\alpha_k f|_{N^q} = \left[\int\limits_{\varGamma} \ln^q(1 + |\alpha_k f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

то есть последовательность $(\alpha_k f)$ сходится к нулю пространства N^q по метрике ρ_{N^q}.

Свойство (4). Пусть последовательность $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset N^q$ фундаментальна по метрике ρ_{N^q}. Согласно следствию 3.3, последовательность (f_k) фундаментальна по метрике равномерной сходимости на компактах внутри G и поэтому равномерно сходится на любом компакте из G к некоторой предельной функции $f(z)$, которая голоморфна в G по первой предельной теореме Вейерштрасса. Покажем, что $f \in N^q$ и последовательность (f_k) сходится к функции f по метрике ρ_{N^q}. Действительно, согласно свойству фундаментальности последовательности (f_k), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K \in \mathbb{N}$, что при всех $k, l \ge K$ выполнено неравенство $|f_k - f_l|_{N^q} = \rho_{N^q}(f_k, f_l) \le \varepsilon$. Из выражения (1.20) следует, что в этом случае для каждого r, $0 \le r < 1$, выполнено неравенство

$$\left[\int\limits_{\varGamma} \ln^q(1 + |f_k(r\gamma) - f_l(r\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \le \varepsilon. \tag{3.7}$$

Так как сходимость (f_k) к f равномерна на любом компакте внутри G, то $f_l(r\gamma) \rightrightarrows f(r\gamma)$ на $\varGamma$ для каждого фиксированного r, $0 \le r < 1$. Переходя в неравенстве (3.7) к пределу при $l \to \infty$ при фиксированных $0 \le r < 1$ и $k \ge K$, имеем

$$\left[\int\limits_{\varGamma} \ln^q(1 + |f_k(r\gamma) - f(r\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \le \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно утверждению $|f_k - f|_{N^q} \le \varepsilon$ (см. выражение (1.20)), из которого, на основании свойства линейности классов N^q, следует, что $f \in N^q$. Более того, из приведённых рассуждений ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число K, что при $k \in \mathbb{N}$ и $k \ge K$ будет выполнено $\rho_{N^q}(f_k, f) = |f_k - f|_{N^q} \le \varepsilon$. Последнее означает, что последовательность (f_k) сходится к функции f по метрике ρ_{N^q} и, тем самым, полнота пространства N^q доказана.

Таким образом, для класса N^q ($q > 1$) выполнены все свойства F-пространства и первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение теоремы доказано ранее, в следствии 3.3. Этим теорема полностью доказана.

3.2.2. Классы N^q ($q > 1$) как F-алгебры

Следуя М. Столлу (см. [132, теорема 4.2]), утверждение теоремы предыдущего пункта можно усилить.

Теорема 3.7. *Класс N^q при любом $q > 1$ является F-алгеброй относительно метрики ρ_{N^q}, то есть в F-пространстве N^q, $q > 1$, можно ввести алгебраическую операцию умножения, непрерывную относительно метрики ρ_{N^q} и превращающую линейное пространство N^q в алгебру.*

Доказательство. Согласно теореме предыдущего пункта, F-пространство N^q, $q > 1$, является линейным пространством над полем $\mathbb{C}$. Кроме того, в доказательстве упомянутой теоремы было установлено свойство замкнутости пространства N^q относительно операции поточечного умножения функций. Непосредственно проверяется, что введённая операция умножения вместе с операциями линейного пространства превращает его в функциональную алгебру. Таким образом, остаётся лишь проверить, что операция умножения функций в N^q непрерывна относительно метрики ρ_{N^q}.

Для этого заметим, что для любых последовательностей функций $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ из N^q и любых функций f, $g \in N^q$ разность $f_k g_k - fg$ можно представить в виде $f_k g_k - fg = (f_k - f)(g_k - g) + f(g_k - g) + g(f_k - f)$, $k \in \mathbb{N}$. Согласно неравенствам (2.17), имеем

$$|f_k g_k - fg|_{N^q} \le |f_k - f|_{N^q} + |g_k - g|_{N^q} + |f(g_k - g)|_{N^q} + |g(f_k - f)|_{N^q}.$$

Поэтому, чтобы доказать непрерывность умножения по совокупности аргументов (то есть что $f_k g_k \to fg$ по метрике ρ_{N^q}, если $f_k \to f$ и $g_k \to g$ по метрике ρ_{N^q}), достаточно доказать, что операция умножения непрерывна по каждому аргументу в отдельности (то есть что $f_k g \to fg$ и $f g_k \to fg$ по метрике ρ_{N^q}, если $f_k \to f$ и $g_k \to g$ по метрике ρ_{N^q}). Проверим, например, непрерывность умножения по второму аргументу, откуда, в силу коммутативности умножения, будет следовать его непрерывность и по первому аргументу. Покажем, что если $f \in N^q$ и последовательность $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset N^q$

сходится к функции $g \in N^q$ по метрике ρ_{N^q}, то $fg_k \to fg$ по метрике ρ_{N^q}. Для этого воспользуемся выражением (2.10) для характеристики $|f(g_k - g)|_{N^q}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$|f(g_k - g)|_{N^q} = \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q(1 + |f^*(\gamma)(g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma))|)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q}. \tag{3.8}$$

Так как функция $\ln^q(1 + |f^*|)$ интегрируема на Γ (свойство (2) теоремы 2.1), то её интеграл абсолютно непрерывен, как функция множеств, относительно меры σ. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что если множество E σ-измеримо и имеет меру $\sigma E < \delta$, то

$$\left[\int\limits_{E} \ln^q(1 + |f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} < \varepsilon.$$

Согласно неравенству Чебышёва, для меры σ-измеримого множества $E_l = \{\gamma \in \Gamma \mid |f^*(\gamma)| \geq l\}$, $l \in \mathbb{N}$, справедлива оценка

$$\sigma E_l \leq \frac{1}{\ln^q(1+l)} \int\limits_{\Gamma} \ln^q(1 + |f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma).$$

Выбирая для числа $\delta > 0$ такое натуральное L, чтобы σE_L было меньше δ, получим

$$\left[\int\limits_{E_L} \ln^q(1 + |f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} < \varepsilon.$$

Наконец, для выбранного $L \in \mathbb{N}$ найдём такой номер $K \in \mathbb{N}$, что при $k \geq K$ будет выполнено неравенство $(1 + L)|g_k - g|_{N^q} < \varepsilon$ (выбор такого K возможен в силу сходимости последовательности (g_k) к g по метрике ρ_{N^q}). Произведём оценку выражения (3.8), считая, что $k \geq K$ и числа K, L и δ были выбраны выше. Имеем

$$|f(g_k - g)|_{N^q} \leq \left[\int\limits_{E_L} \ln^q\big(1 + |f^*(\gamma)(g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma))|\big)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} +$$

$$+\left[\int\limits_{\Gamma\setminus E_L} \ln^q\big(1 + |f^*(\gamma)(g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma))|\big)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{E_L} \ln^q\big(1 + |f^*(\gamma)|\big)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} + \left[\int\limits_{E_L} \ln^q\big(1 + |g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma)|\big)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} +$$

$$+L\left[\int\limits_{\Gamma\setminus E_L} \ln^q\big(1 + |g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma)|\big)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} <$$

$$< \varepsilon + |g_k - g|_{N^q} + L|g_k - g|_{N^q} = \varepsilon + (1+L)|g_k - g|_{N^q} < 2\varepsilon,$$

где также использовались неравенство Минковского и неравенства (3.4), (2.18) и (3.6).

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $K \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $k \geq K$ выполнено неравенство $|fg_k - fg|_{N^q} < 2\varepsilon$. Это и означает, что последовательность (fg_k) сходится к функции fg по метрике ρ_{N^q}. Непрерывность умножения функций (а вместе с ней и вся теорема) доказана.

Замечание 3.8. Обычно непрерывность операции умножения по совокупности переменных выводят из непрерывности по каждому переменному, используя принцип равномерной ограниченности, справедливый для произвольных F-пространств (см. [66, гл. II, §1, теоремы 11 и 12]). Приведённое доказательство не только не использует этого глубокого результата функционального анализа, но также короче и проще, чем традиционное. Для частного случая $n = 1$ доказательство можно найти в статье [132].

3.3. Ограниченные и вполне ограниченные множества в N^q $(q > 1)$

3.3.1. Ограниченные подмножества N^q $(q > 1)$

Как показывает теорема 3.6, классы И. И. Привалова N^q при каждом $q > 1$ образуют F-пространства относительно метрики ρ_{N^q} и, следовательно, являются линейно-топологическими пространствами (см. [2, замечания к §1 разд. IV в конце книги] или [66, гл. II, §1, теорема 12]). Напомним, что линейно-топологическим называется линейное пространство с топологией, относительно которой линейные операции непрерывны. В линейно-топологических пространствах изучается важное понятие ограниченности множеств, которое даже в частном случае линейно-метрического пространства отлично от общепринятого там понятия ограниченности множества по метрике. Множество X из линейно-топологического пространства E называется ограниченным, если для любой окрестности нуля U существует такое число $\alpha_0 > 0$, что для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ с $|\alpha| \leq \alpha_0$ выполнено $\alpha X \subseteq U$.

Теорема 3.9. *Подмножество X пространства N^q $(q > 1)$ является ограниченным (в указанном выше смысле) тогда и только тогда, когда*

(1) X — ограничено по метрике ρ_{N^q};
(2) семейство функций $\{\ln_+^q |f^*(\gamma)|,\ \gamma \in \Gamma\}_{f \in X}$, где f^* обозначает функцию радиальных граничных значений (1.29), имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ.

Доказательство. Необходимость условий (1) и (2).

(1) Рассмотрим стандартную 1-окрестность нуля в пространстве N^q, то есть единичный шар $B(0,1) = \{f \in N^q \mid \rho_{N^q}(f,0) < 1\}$. Согласно условию ограниченности множества X, существует такое число $\alpha_0 > 0$, что если $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \le \alpha_0$, и $f \in X$, то $\alpha f \in B(0,1)$. Полагая $\alpha = \alpha_0$, получим $|\alpha_0 f|_{N^q} < 1$ для всех $f \in X$. С другой стороны, согласно неравенству

$$|\alpha f|_{N^q} \ge \min(1,|\alpha|)|f|_{N^q}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad f \in N^q,$$

вытекающему из элементарного неравенства

$$\ln(1+\alpha a) \ge \min(1,\alpha)\ln(1+a), \quad \alpha, a \ge 0,$$

и выражения (1.20) для $|\cdot|_{N^q}$, имеем $|\alpha_0 f|_{N^q} \ge \min(1,\alpha_0)|f|_{N^q}$. Объединяя полученные неравенства в одно, приходим к оценке $|f|_{N^q} \le \max(1, 1/\alpha_0)$ для всех $f \in X$. Таким образом, множество X ограничено в N^q относительно характеристики $|\cdot|_{N^q}$ и, следовательно, оно ограничено по метрике ρ_{N^q}.

(2) Для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим стандартную $\varepsilon^{1/q}/2$-окрестность нуля пространства N^q, то есть шар $B\big(0, \varepsilon^{1/q}/2\big) = \{f \in N^q \mid \rho_{N^q}(f,0) < \varepsilon^{1/q}/2\}$. Согласно условию ограниченности множества X, для этого шара найдётся такое число $\alpha_0 > 0$, что $\alpha X \subseteq B(0, \varepsilon^{1/q}/2)$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \le \alpha_0$. Воспользуемся выражением (2.10) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$ функции $f \in N^q$ для того, чтобы оценить интеграл от функции $\ln_+^q |f^*|$ по множеству $E \subseteq \varGamma$, которое предполагается σ-измеримым. Тогда

$$\begin{aligned}
\Bigg[\int\limits_E \ln_+^q |f^*(\gamma)|\,\sigma(d\gamma)\Bigg]^{1/q} &\le \Bigg[\int\limits_E \ln^q(1+|f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)\Bigg]^{1/q} \le \\
\le \Bigg[\int\limits_E \ln^q(1+1/\alpha_0)\,\sigma(d\gamma)\Bigg]^{1/q} &+ \Bigg[\int\limits_E \ln^q(1+|\alpha_0 f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)\Bigg]^{1/q} \le \\
&\le \ln(1+1/\alpha_0)(\sigma E)^{1/q} + |\alpha_0 f|_{N^q},
\end{aligned}$$

где также использовались элементарное неравенство (2.18) и неравенство треугольника в пространстве $\mathscr{L}^q(E,\sigma)$. Согласно выбору α_0, для функций $f \in X$ выполнено неравенство $|\alpha_0 f|_{N^q} < \varepsilon^{1/q}/2$ и поэтому

$$\int\limits_E \ln_+^q |f^*(\gamma)|\,\sigma(d\gamma) < \varepsilon, \quad f \in X, \tag{3.9}$$

если множество E имеет меру $\sigma E < \varepsilon/(2\ln(1+1/\alpha_0))^q$. Так как неравенство (3.9) справедливо для произвольного $\varepsilon > 0$ (при указанном ограничении на множество E), то интегралы семейства функций $\{\ln_+^q |f^*|\}_{f \in X}$

равностепенно абсолютно непрерывны относительно меры σ и, таким образом, необходимость условия (2) теоремы показана.

Достаточность условий (1) и (2). Чтобы доказать ограниченность множества X в пространстве N^q, нужно проверить, что для любой окрестности нуля U пространства N^q можно найти такое $\alpha_0 > 0$, что $\alpha X \subseteq U$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \le \alpha_0$. Поскольку любая окрестность нуля U содержит шар $B(0,\varepsilon) = \{f \in N^q \mid \rho_{N^q}(f,0) < \varepsilon\}$ некоторого положительного радиуса $\varepsilon > 0$, то утверждение достаточно доказать для $U = B(0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Выбрав произвольное положительное число ε и используя условие (1), найдём такую конечную постоянную $C \ge 0$, что $|f|_{N^q} \le C$ для всех $f \in X$. По неравенству Чебышёва, для меры каждого множества $E_k = \{\gamma \in \varGamma \mid |f^*(\gamma)| \ge k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in X$, справедлива оценка

$$\sigma E_k \le \frac{1}{\ln^q(1+k)} \int\limits_{\varGamma} \ln^q(1+|f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma) = \frac{|f|^q_{N^q}}{\ln^q(1+k)} \le \frac{C^q}{\ln^q(1+k)}. \tag{3.10}$$

С другой стороны, согласно условию (2), для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что если σ-измеримое множество $E \subseteq \varGamma$ имеет меру $\sigma E < \delta$, то

$$\int\limits_{E} \ln^q(1+|f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q, \quad f \in X \tag{3.11}$$

(на самом деле, в левой части последнего неравенства на основании условия (2) подынтегральная функция имеет вид $\ln^q_+ |f^*(\gamma)|$, но в силу неравенства

$$\ln^q(1+|t|) \le 2^q(\ln^q 2 + \ln^q_+ |t|), \quad q \ge 0, \tag{3.12}$$

её можно заменить на $\ln^q(1+|f^*(\gamma)|)$, если необходимо, уменьшив δ).

Чтобы связать оценки (3.10) и (3.11), выберем такое число $K \in \mathbb{N}$, что $C^q/\ln^q(1+K) < \delta$. Тогда для любой функции $f \in X$, в силу неравенства (3.10), выполнена оценка $\sigma E_K < \delta$ и в неравенстве (3.11) можно положить $E = E_K$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \le 1$, и любой $f \in X$ будет выполнена следующая цепь неравенств:

$$|\alpha f|_{N^q} = \left[\int\limits_{\varGamma} \ln^q\bigl(1+|\alpha f^*(\gamma)|\bigr)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \le$$

$$\le \left[\int\limits_{E_K} \ln^q\bigl(1+|\alpha||f^*(\gamma)|\bigr)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} + \left[\int\limits_{\varGamma\setminus E_K} \ln^q\bigl(1+|\alpha||f^*(\gamma)|\bigr)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \le$$

$$\leq \left[\int\limits_{E_K} \ln^q\bigl(1 + |f^*(\gamma)|\bigr)\, \sigma(d\gamma) \right]^{1/q} + \left[\int\limits_{\Gamma \setminus E_K} \ln^q\bigl(1 + |\alpha| K\bigr)\, \sigma(d\gamma) \right]^{1/q} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \ln(1 + |\alpha| K).$$

Следовательно, если $0 < \alpha_0 \leq 1$ выбрано из условия $\ln(1+\alpha_0 K) < \varepsilon/2$, то для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq \alpha_0$, и любой $f \in X$ будет выполнено неравенство $|\alpha f|_{N^q} < \varepsilon$, то есть $\alpha X \subseteq B(0, \varepsilon)$. Поскольку такое $\alpha_0 > 0$ можно выбрать для произвольного $\varepsilon > 0$, то множество X ограничено в N^q.

Следствие 3.10. *Пусть $f \in N^q$ $(q > 1)$ и функции f_ζ, $\zeta \in \overline{U}$, определены согласно формулам $f_\zeta(z) = f(\zeta z)$, $z \in G$. Тогда семейство функций $\{f_\zeta\}_{\zeta \in \overline{U}}$ ограничено в N^q.*

Доказательство. Так как $|\alpha f_\zeta|_{N^q} = |\alpha f_{|\zeta|}|_{N^q}$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, то достаточно показать ограниченность семейства функций $\{f_r\}_{0 \leq r \leq 1}$. Одна функция $f \in N^q$ не может повлиять на ограниченность множества в N^q, поэтому достаточно доказать ограниченность множества $\{f_r\}_{0 \leq r < 1}$. Для последнего множества свойство (1) в условии теоремы настоящего пункта следует из условия $f \in N^q$ (см. определение 1.8 и замечания в пункте 2.1.2), а свойство (2) есть не что иное, как свойство (6) из теоремы 2.1 (опять же если принять во внимание замечания пункта 2.1.2). Поэтому, по предыдущей теореме, семейство $\{f_r\}_{0 \leq r < 1}$ ограничено в N^q и следствие 3.10 доказано.

Замечание 3.11. Аналогичное описание ограниченных множеств справедливо и для пространств M^q $(q > 0)$: *множество $X \subseteq M^q$ будет ограниченным в пространстве M^q тогда и только тогда, когда*

(1) X ограничено по метрике ρ_{M^q};
(2) семейство функций $\{\ln_+^q M_{rad} f(\gamma),\ \gamma \in \Gamma\}_{f \in X}$, где $M_{rad} f$ обозначает радиальную максимальную функцию (1.19) функции f, имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ.

Доказательство замечания буквально повторяет доказательство приведенной выше теоремы и поэтому будет опущено. В случае $n = 1$ описание ограниченных множеств в M для круга U было получено Х. О. Кимом (см. [90]). Случай $n = 1$, $q > 1$ рассмотрел Р. Мештрович в своей диссертации [104, гл. 6, §4, теорема 2]; см. также монографию Р. Мештровича и Ж. Павичевича [105, гл. 9].

При $q > 1$ пространства N^q и M^q совпадают как в теоретико-множественном, так и в линейно-топологическом смысле (см. пункт 1.2.2). Как следствие, свойства ограниченности множества X как подмножества пространства N^q и как подмножества пространства M^q эквивалентны. В частности, если множество X ограничено в N^q $(q > 1)$, то равностепенно абсолютно непрерывны интегралы не только семейства $\{\ln_+^q |f^*|\}_{f\in X}$ (как утверждается теоремой), но и семейства функций $\{\ln_+^q M_{rad}f\}_{f\in X}$ (как утверждается замечанием) и, следовательно, также семейства $\{\ln_+^q |f(r\gamma)|,\ \gamma\in\Gamma\}_{f\in X,\,0\le r<1}$.

3.3.2. Вполне ограниченные подмножества N^q $(q > 1)$

Сразу же отметим, что понятие полной ограниченности множества можно трактовать разными способами. Подмножество X линейно-топологического пространства E называется вполне ограниченным, если для любой окрестности U нуля пространства E найдётся конечное подмножество $\{y_1,\dots,y_N\}\subseteq E$ (называемое U-сетью), для которого $\bigcup\limits_{1\le k\le N}(y_k+U)\supseteq X$. Подмножество X метрического пространства (E,ρ) называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся конечное подмножество $\{y_1,\dots,y_N\}\subseteq E$ (называемое ε-сетью), для которого $\bigcup\limits_{1\le k\le N}B(y_k,\varepsilon)\supseteq X$ (здесь $B(x,r)$ обозначает открытый шар с центром в x радиуса r). При всей схожести этих двух определений, понятие полной ограниченности в первом смысле — понятие линейно-топологическое, во втором же — понятие метрическое: если топология линейно-топологического пространства задаётся некоторой метрикой, то это не означает, что понятие полной ограниченности в линейно-топологическом смысле совпадает с понятием полной ограниченности в метрическом смысле. Это видно хотя бы из того, что две метрики могут быть эквивалентными топологически (то есть задавать одну и ту же топологию), но понятия полной ограниченности в этих метриках — различными (так будет, например, если на действительной прямой $\mathbb{R}$ задать метрики $\rho(x,y)=|x-y|$ и $d(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$, $x,y\in\mathbb{R}$). Однако если топология линейно-топологического пространства E задана инвариантной метрикой (как в случае пространств Привалова), то понятия полной ограниченности в линейно-топологическом и метрическом смыслах совпадают. Отметим также, что в полных метрических пространствах (пространства Привалова таковыми являются) свойство полной ограниченности множества равносильно свойству относительной компактности (компактности его замыкания) (см., например, [29, гл. II, §7, теорема 3]). Следующее описание вполне ограниченных множеств в пространствах N^q $(q>1)$ в частном случае $n=1$ принадлежит Р. Мештровичу (см. [104, гл. 6, §4, теорема 7] и [105, гл. 9]).

Теорема 3.12. *Множество $X\subseteq N^q$ $(q>1)$ вполне ограничено в пространстве N^q тогда и только тогда, когда*

(1) X ограничено в N^q (в линейно-топологическом смысле);
(2) множество σ-измеримых функций $\{f^*(\gamma),\ \gamma\in\Gamma\}_{f\in X}$, где f^* обозначает функцию радиальных граничных значений (1.29), относительно компактно в топологии сходимости по мере σ.

Доказательство. Необходимость условий (1) и (2).

(1) Ограниченность вполне ограниченных множеств есть общий факт теории линейно-топологических пространств (см., например, [88, гл. 2, §7, п. 5]).

(2) Так как топология сходимости по мере метризуема, то, чтобы показать относительную компактность множества функций $\{f^*\}_{f\in X}$ по мере σ, достаточно проверить, что из всякой последовательности функций этого множества можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по мере σ к некоторой измеримой функции на Γ. Если $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность функций из множества $\{f^*\}_{f\in X}$, то, по определению последнего множества, существует такая последовательность функций $(f_k) \subseteq X$, что $f_k^* = g_k$ почти всюду на Γ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Множество X вполне ограничено и, следовательно, относительно компактно в пространстве N^q, поэтому из последовательности (f_k) можно выделить подпоследовательность $\big(f_{k_l}\big)_{l\in\mathbb{N}}$, $k_{l+1} > k_l$, $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, сходящуюся к некоторой функции $f \in N^q$ по метрике ρ_{N^q}. Согласно неравенству Чебышёва и выражению (2.10) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$ имеем

$$\sigma\{\gamma \in \Gamma \mid |f_{k_l}^*(\gamma) - f^*(\gamma)| \geq \varepsilon\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\ln^q(1+\varepsilon)} \int\limits_{\Gamma} \ln^q\big(1+|f_{k_l}^*(\gamma) - f^*(\gamma)|\big)\,\sigma(d\gamma) = \left(\frac{|f_{k_l} - f|_{N^q}}{\ln(1+\varepsilon)}\right)^q, \quad \varepsilon > 0,$$

и поэтому $\sigma\{\gamma \in \Gamma \mid |f_{k_l}^*(\gamma) - f^*(\gamma)| \geq \varepsilon\} \to 0$ при $l \to +\infty$ для каждого $\varepsilon > 0$. Последняя сходимость означает, что последовательность $\big(g_{k_l}\big)$ сходится к функции f^* по мере σ. Таким образом, относительная компактность множества $\{f^*\}_{f\in X}$ по мере σ показана.

Достаточность условий (1) и (2). Пусть для множества X выполнены условия (1) и (2). Докажем тогда, что множество X вполне ограничено в пространстве N^q. Как известно, свойство полной ограниченности подмножества метрического пространства равносильно тому, что из любой последовательности точек этого множества можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Пусть $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность функций множества X. Согласно условию (2) доказываемой теоремы, из последовательности $(f_k^*) \subseteq \{f^*\}_{f\in X}$ можно выделить подпоследовательность $\big(f_{k_l}^*\big)_{l\in\mathbb{N}}$, $k_{l+1} > k_l$, $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, сходящуюся по мере σ к некоторой измеримой на Γ функции g. Согласно теореме Ф. Рисса, из этой подпоследовательности можно выделить ещё одну подпоследовательность $\big(f_{k_{l_m}}^*\big)_{m\in\mathbb{N}}$, $l_{m+1} > l_m$, $l_m \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, сходящуюся к функции g уже почти всюду. Согласно условию (1) и теореме 3.9, существует конечная постоянная $C \geq 0$, для которой $|f_{k_{l_m}}|_{N^q} \leq C$ или

$$\left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q\big(1 + |f_{k_{l_m}}^*(\gamma)|\big)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \leq C, \quad m \in \mathbb{N}$$

(см. выражение (2.10) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$). Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to +\infty$, согласно теореме П. Фату (см. [29, гл. V, §5, п. 5, теорема 8]) получаем

$$\left[\int_{\Gamma} \ln^q\bigl(1+|g(\gamma)|\bigr)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \le C,$$

откуда можно заключить, что функция $\ln^q\bigl(1+|g(\gamma)|\bigr)$, $\gamma \in \Gamma$, интегрируема по мере σ на Γ. Согласно условию (1) и теореме 3.9, для последовательности функций $\bigl(f^*_{k_{l_m}}\bigr)$ выполнено свойство равностепенной абсолютной непрерывности интегралов функций последовательности $\bigl(\ln^q_+|f^*_{k_{l_m}}|\bigr)_{m\in\mathbb{N}}$, откуда в силу неравенства (3.12) интегралы последовательности функций $\bigl(\ln^q\bigl(1+|f^*_{k_{l_m}}|\bigr)\bigr)_{m\in\mathbb{N}}$ также равностепенно абсолютно непрерывны. Так как, по доказанному выше, функция $\ln^q\bigl(1+|g(\gamma)|\bigr)$ интегрируема, то согласно неравенству (2.13) то же самое свойство равностепенной абсолютной непрерывности интегралов справедливо и для последовательности функций $\bigl(\ln^q\bigl(1+|f^*_{k_{l_m}}-g|\bigr)\bigr)_{m\in\mathbb{N}}$. Итак, имеем: последовательность $\bigl(\ln^q\bigl(1+|f^*_{k_{l_m}}-g|\bigr)\bigr)$ сходится почти всюду к нулевой функции и семейство интегралов этой последовательности равностепенно абсолютно непрерывно относительно меры σ. Согласно известной предельной теореме (см., например, [106, теорема II.T21]), отсюда следует

$$\left[\int_{\Gamma} \ln^q\bigl(1+|f^*_{k_{l_m}}(\gamma)-g(\gamma)|\bigr)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \to 0 \text{ при } m \to +\infty,$$

и в силу неравенства (2.18) и неравенства треугольника в $\mathscr{L}^q(\Gamma,\sigma)$ находим

$$\left[\int_{\Gamma} \ln^q\bigl(1+|f^*_{k_{l_m}}(\gamma)-f^*_{k_{l_p}}(\gamma)|\bigr)\,\sigma(d\gamma)\right]^{1/q} \to 0 \text{ при } m,p \to +\infty.$$

С учётом выражения (2.10) для характеристики $|\cdot|_{N^q}$, получаем, что $|f_{k_{l_m}}-f_{k_{l_p}}|_{N^q} \to 0$ при $m,p \to +\infty$, то есть последовательность $\bigl(f_{k_{l_m}}\bigr)_{m\in\mathbb{N}}$ фундаментальна по метрике ρ_{N^q}.

Таким образом, показано, что из любой последовательности функций множества X можно выделить фундаментальную по метрике ρ_{N^q} подпоследовательность, то есть множество X вполне ограничено.

Замечание 3.13. В силу эквивалентности по Липшицу метрик ρ_{N^q} и ρ_{M^q} на классах $N^q = M^q$ $(q>1)$ (см. пункт 1.2.2), понятия полной ограниченности множества X как подмножества пространства N^q и как подмножества пространства M^q эквивалентны. Принимая во внимание замечания, приведённые в предыдущем пункте относительно описания ограниченных подмножеств в пространстве M^q, можно получить следующую характеристику вполне ограниченных множеств в пространстве M^q $(q > 1)$: *множество X вполне ограничено в пространстве M^q $(q > 1)$ тогда и только тогда, когда*

(1) X ограничено в M^q (в линейно-топологическом смысле);
(2) множество σ-измеримых функций $\{f^*\}_{f\in X}$, где f^* обозначает функцию радиальных граничных значений (1.29), относительно компактно по мере σ.

Пример 3.14. Пусть $f \in N^q$ $(q > 1)$ и функции f_ζ, $\zeta \in \overline{U}$, определены согласно формулам $f_\zeta(z) = f(\zeta z)$, $z \in G$. Тогда множество $\{f_\zeta\}_{\zeta\in\overline{U}}$ компактно в пространстве N^q.

Доказательство. Здесь компактность усматривается и непосредственно, без использования только что доказанной теоремы. Действительно, любая последовательность множества $\{f_\zeta\}_{\zeta\in\overline{U}}$ имеет вид $\left(f_{\zeta_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, где $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — некоторая последовательность точек единичного круга $\overline{U}$. Так как круг $\overline{U}$ компактен в $\mathbb{C}$, то из последовательности (ζ_k) можно выделить подпоследовательность $\left(\zeta_{k_l}\right)_{l\in\mathbb{N}}$, $k_{l+1} > k_l$, $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, сходящуюся к некоторой точке $\zeta \in \overline{U}$. Если ζ — внутренняя точка круга U, то последовательность $\left(f_{\zeta_{k_l}}\right)$ сходится к функции f_ζ равномерно в $\overline{G}$ и, значит, сходится по метрике ρ_{N^q}. Если же $|\zeta| = 1$, то последовательность $\left(\zeta^{-1}\zeta_{k_l}\right) \subseteq \overline{U}$ сходится к 1 и, согласно следствию 2.13 из пункта 2.2.3, имеем $|f_{\zeta^{-1}\zeta_{k_l}} - f|_{N^q} \to 0$ при $l \to +\infty$. Так как $|f_{\zeta^{-1}\zeta_{k_l}} - f|_{N^q} = |f_{\zeta_{k_l}} - f_\zeta|_{N^q}$ (см. доказательство следствия 2.11 из пункта 2.2.2), то $f_{\zeta_{k_l}} \to f_\zeta$ по метрике ρ_{N^q}. Таким образом, из любой последовательности функций множества $\{f_\zeta\}_{\zeta\in\overline{U}}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции того же множества по метрике ρ_{N^q}. Следовательно, множество $\{f_\zeta\}_{\zeta\in\overline{U}}$ компактно в N^q, что и требовалось доказать.

Нетрудно заметить, что данный пример представляет собой усиление утверждения следствия теоремы из предыдущего пункта. Его доказательство можно перефразировать так: отображение $\zeta \mapsto f_\zeta$ из замкнутого единичного круга $\overline{U}$ в N^q является непрерывным, и поскольку непрерывный образ компакта — компакт, то отсюда и следует утверждение примера.

Замечание 3.15. Результаты этой главы опубликованы в [44] и вошли в диссертацию [46].

4

Максимальные пространства M^q $(q > 0)$ в шаре

В этой главе мы распространяем результаты главы 3, касающиеся линейно-топологических свойств максимальных пространств M^q $(= N^q)$ $(q > 1)$, на случай произвольного $q > 0$, рассматривая эти пространства только в шаре. Основным результатом является утверждение о том, что M^q, $q > 0$, образуют F-алгебры относительно метрик ρ_{M^q}, которые в дальнейшем в пределах данной главы для краткости будем обозначать $\rho_q \equiv \rho_{M^q}$, $q > 0$. В частности, этот результат является новым для $q = 1$, при котором M^1 служит многомерным аналогом соответствующей одномерной F-алгебры, изученной Х. О. Кимом в [90]. Одновременно с этим устанавливаются граничные свойства функций пространств M^q $(q > 0)$.

4.1. Граничные свойства функций пространств $M^q\,(q > 0)$

Для функций $f \in N$ существование радиальных пределов

$$f^*(\zeta) = \lim_{r \to 1-} f(r\zeta), \quad \zeta \in S_n,$$

почти всюду на S_n было доказано А. Зигмундом в 1950 году (см. [148]). Более того, им было показано, что граничные пределы функции $f(z)$ класса N существуют для почти всех точек ζ на S_n при подходе точки $z \in B_n$ к ζ по произвольному некасательному пути. В 1970 году А. Кораньи распространил этот результат на случай так называемых «допустимых» пределов $(K)\text{-}\lim\limits_{z \to \zeta} f(z)$, когда $z \in B_n$ стремится к ζ по любой допустимой области $D_\alpha(\zeta)$, $\alpha > 1$ (см. [93] и пункт 1.2.1).

Теорема 4.1. *Для произвольной функции f из класса M^q $(q > 0)$ допустимые граничные пределы $(K)\text{-}\lim\limits_{z \to \zeta} f(z)$, $\zeta \in S_n$, существуют почти всюду на S_n.*

Доказательство. Из основной теоремы статьи [91] и определения класса M^q $(q>0)$ следует, что условие принадлежности голоморфной в B_n функции f классу M^q равносильно условию

$$\int\limits_{S_n} \ln_+^q M_\alpha f(\zeta)\,\sigma(d\zeta) < +\infty, \quad \alpha > 1, \tag{4.1}$$

в котором

$$M_\alpha f(\zeta) = \sup_{z\in D_\alpha(\zeta)} |f(z)|, \quad \zeta \in S_n, \tag{4.2}$$

назовём допустимой максимальной функцией для f в точке ζ. Из условия (4.1) вытекает, что функции класса M^q $(q>0)$ ограничены в областях $D_\alpha(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in S_n$ и всех $\alpha > 1$. Согласно [118, п. 5.5.5], (K)-пределы функции f существуют почти всюду на S_n.

Следствие 4.2. *Для произвольной функции $f \in M^q$ $(q>0)$ радиальные пределы $f^*(\zeta)$, $\zeta \in S_n$, существуют (и конечны) почти всюду на S_n. При этом функция $\ln_+^q |f^*|$ интегрируема на S_n.*

Замечание 4.3. Верно и утверждение, в некоторой степени обратное утверждению следствия 4.2: для любой положительной полунепрерывной снизу функции φ, для которой функция $|\ln\varphi|^q$ $(q>0)$ интегрируема на S_n, существует такая функция $f \in M^q$ $(q>0)$, что $|f^*| = \varphi$ почти всюду на S_n (см. [61]). Более того, как следует из основной теоремы статьи [61], функцию f можно выбрать так, чтобы $|f^*| = M_{rad}f$ почти всюду на S_n.

Теорема 4.1 распространяет классический результат А. Кораньи о допустимых пределах функций класса N на более широкие, как показывает следующая теорема, классы M^q $(0<q<1)$.

Теорема 4.4. *Для каждого $0<q<1$ класс M^q содержит класс Островского–Неванлинны N.*

Доказательство. Напомним, что инвариантное ядро Пуассона в шаре определяется формулой

$$P(z,\zeta) = \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^2}\right)^n, \quad z \in B_n, \quad \zeta \in S_n.$$

Пусть функция f принадлежит классу Островского–Неванлинны N, так что по определению классов N^q при $q=1$

$$\sup_{0\le r<1} \int\limits_{S_n} \ln_+ |f(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta) < +\infty.$$

Поэтому, согласно [118, п. 5.6.2], существует такая неотрицательная конечная борелевская мера μ на S_n, что

$$\ln_+|f(z)| \le \int\limits_{S_n} P(z,\zeta)\,\mu(d\zeta), \quad z\in B_n.$$

Применяя к полученному неравенству радиальный максимальный оператор (1.19), получим

$$\ln_+ M_{rad}f(\zeta) \le \sup_{0\le r<1}\int\limits_{S_n} P(r\zeta,\gamma)\,\mu(d\gamma), \quad \zeta\in S_n. \tag{4.3}$$

Используя в правой части неравенства (4.3) оценку радиальной максимальной функции интеграла Пуассона через граничную максимальную функцию меры μ, определяемую формулой

$$M_{S_n}\mu(\zeta) = \sup_{\delta>0}\frac{\mu(Q_\delta(\zeta))}{\sigma(Q_\delta(\zeta))}, \quad \zeta\in S_n,$$

в которой

$$Q_\delta(\zeta) = \{\gamma\in S_n \mid |1-\langle\gamma,\zeta\rangle|^{1/2}<\delta\}, \quad \delta>0,$$

находим (см. [118, п. 5.4.11])

$$\ln_+ M_{rad}f(\zeta) \le A M_{S_n}\mu(\zeta), \quad \zeta\in S_n, \tag{4.4}$$

с некоторой конечной постоянной $A\ge 0$. На основании слабой оценки типа $(1,1)$ для оператора M_{S_n} (см. [118, п. 5.2.4]), общей интерполяционной теоремы (см. ниже лемму 6.8) и (4.4), приходим к неравенству

$$\int\limits_{S_n} \ln_+^q M_{rad}f(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \le A_q(A\,\mu S_n)^q, \quad 0<q<1,$$

с некоторой конечной постоянной $A_q\ge 0$, зависящей только от q и от n и не зависящей от f. По определению, функция f принадлежит каждому M^q $(0<q<1)$.

Следующая теорема даёт оценку равномерного роста функций классов M^q $(q>0)$ через характеристику $\|\cdot\|_{q,\alpha}$, определяемую как

$$\|f\|_{q,\alpha} = \left[\int\limits_{S_n} \ln^q(1+M_\alpha f(\zeta))\,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q}, \quad f\in M^q\,(q>0), \tag{4.5}$$

где $M_\alpha f(\zeta)$ определена формулой (4.2). Аналогичные оценки для классов N^q $(q\ge 1)$ приведены в теореме 3.1.

Теорема 4.5. *Для произвольной функции $f\in M^q$ $(q>0)$ и любого $\alpha>1$ справедлива оценка*

$$\ln(1+|f(z)|) \le \frac{C_\alpha\|f\|_{q,\alpha}}{(1-|z|)^{n/q}}, \quad z\in B_n, \tag{4.6}$$

с некоторой конечной постоянной $C_\alpha\ge 0$, зависящей только от α, q и n и не зависящей от f.

Доказательство. Рассмотрим произвольное число $\alpha > 1$ и произвольную функцию $f \not\equiv 0$ из класса M^q $(q>0)$. Согласно выражению (4.5) для $\|\cdot\|_{q,\alpha}$ и классическому неравенству Чебышёва, для меры дополнения множества $Y_E = \{\zeta \in S_n \mid \ln(1+M_\alpha f(\zeta)) \le E\}$, $E>0$, имеем оценку

$$\sigma(S_n \setminus Y_E) < \frac{1}{E^q}\|f\|_{q,\alpha}^q, \quad E>0. \tag{4.7}$$

Фиксируем произвольное r, $0 \le r < 1$, и предположим, что какая-то точка множества $rS_n = \{r\gamma \mid \gamma \in S_n\}$ оказалась не покрытой множествами вида $\{D_\alpha(\zeta)\}_{\zeta \in Y_E}$. Обозначив эту точку через $r\gamma$, $\gamma \in S_n$, заметим, что все $\zeta \in S_n$, для которых $|1-\langle r\gamma,\zeta\rangle| < \alpha(1-r)$, не принадлежат множеству Y_E. В частности, множеству Y_E не принадлежат те точки $\zeta \in S_n$, для которых $|1-\langle \gamma,\zeta\rangle| < (\alpha-1)(1-r)$. Обозначим множество этих точек символом $Z_{\alpha,r}$. Непосредственным вычислением проверяется, что σ-мера множества $Z_{\alpha,r}$ оценивается снизу величиной вида $A(\alpha-1)^n(1-r)^n$, в котором A — некоторая положительная постоянная, зависящая только от n. Поэтому (см. неравенство (4.7)) все точки множества rS_n будут покрыты множествами $\{D_\alpha(\zeta)\}_{\zeta \in Y_E}$, если выполнено равенство $\|f\|_{q,\alpha}^q / E^q = A(\alpha-1)^n(1-r)^n$.

Итак, окончательно, когда $E = \|f\|_{q,\alpha}/(A^{1/q}(\alpha-1)^{n/q}(1-r)^{n/q})$, для всех $z \in rS_n$ будет выполнено $\ln(1+|f(z)|) \le E = C_\alpha \|f\|_{q,\alpha}/(1-r)^{n/q}$ с постоянной $C_\alpha = A^{-1/q}(\alpha-1)^{-n/q}$, что доказывает (4.6).

Замечание 4.6. Если через $\|\cdot\|_q$ обозначить характеристику, определяемую формулой

$$\|f\|_q = \left[\int_{S_n} \ln^q(1+M_{rad}f(\zeta))\,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q}, \quad f \in M^q\,(q>0), \tag{4.8}$$

то, в силу основной теоремы статьи [91], характеристики $\|\cdot\|_q$ и $\|\cdot\|_{q,\alpha}$ эквивалентны при каждом $\alpha > 1$, и поэтому в правой части неравенства (4.6) выражение $\|f\|_{q,\alpha}$ можно заменить на $\|f\|_q$ и постоянную C_α — на постоянную C, зависящую только от q и n, так что

$$\ln(1+|f(z)|) \le \frac{C\|f\|_q}{(1-|z|)^{n/q}}, \quad z \in B_n,$$

для произвольной функции $f \in M^q$ $(q>0)$.

Следствие 4.7. *Из свойства сходимости или свойства фундаментальности последовательности функций класса M^q $(q>0)$ по метрике ρ_q следуют соответственно свойства равномерной сходимости или равномерной фундаментальности этой последовательности на компактах внутри B_n.*

4.2. Линейно-топологические свойства пространств M^q $(q > 0)$

В этом разделе устанавливаются свойства классов M^q $(q > 0)$ как линейных и метрических пространств.

Теорема 4.8. *Пространства M^q $(q > 0)$ образуют F-алгебры относительно метрик ρ_q.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение теоремы, необходимо убедиться, что: (1) M^q $(q > 0)$ образуют F-пространства относительно метрик ρ_q; (2) M^q $(q > 0)$ являются алгебрами; и (3) умножение функций из M^q $(q > 0)$ непрерывно в метрике ρ_q.

(1) Чтобы доказать, что каждое M^q $(q > 0)$ образует F-пространство в метрике ρ_q, проверяем выполнение аксиом F-пространства:

(i) M^q $(q > 0)$ есть линейное пространство относительно операций поточечного сложения и умножения функций на число.

Действительно, используя элементарное неравенство (2.18) пункта 2.2.2, неравенство треугольника в пространствах $\mathscr{L}^q(S_n, \sigma)$, $q > 0$, и определение классов $M^q, q > 0$, получаем

$$|f + g|_{M^q},\ |fg|_{M^q} \le |f|_{M^q} + |g|_{M^q}, \quad f, g \in M^q. \tag{4.9}$$

Так как $|c|_{M^q} < +\infty$ для любой постоянной функции c, то на основании (4.9) получаем утверждение этой аксиомы.

(ii) Для любой комплексной последовательности $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$, обладающей свойством $c_m \to 0$ при $m \to \infty$, и любой функции $f \in M^q$ $(q > 0)$ последовательность $(c_m f)$ обладает свойством $c_m f \to 0$ при $m \to \infty$ в метрике ρ_q.

Действительно, поскольку $c_m \to 0$ при $m \to \infty$, то существует такое натуральное число K, что $|c_m| < 1$ для всех индексов $m \ge K$; значит, $\ln^q(1 + M_{rad}(c_m f)(\zeta)) \le \ln^q(1 + M_{rad} f(\zeta))$ при $m \ge K$ для всех $\zeta \in S_n$. Кроме того, из условия $c_m \to 0$ при $m \to \infty$ следует, что $\ln^q(1 + M_{rad}(c_m f)(\zeta)) \to 0$ при $m \to \infty$ почти всюду на S_n (а именно — для тех $\zeta \in S_n$, в которых $M_{rad} f(\zeta)$ конечна). Поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости под знаком интеграла имеем

$$\int\limits_{S_n} \ln^q(1 + M_{rad}(c_m f)(\zeta))\, \sigma(d\zeta) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

то есть $c_m f \to 0$ при $m \to \infty$ в метрике ρ_q.

(iii) Если $c \in \mathbb{C}$, $f_m \in M^q$ $(q > 0)$, $m \in \mathbb{N}$, и $f_m \to 0$ при $m \to \infty$ в метрике ρ_q, то $cf_m \to 0$ при $m \to \infty$ в метрике ρ_q.

Это свойство следует из неравенства

$$\|cf\|_q \le \max(1, |c|)\|f\|_q, \quad f \in M^q, \quad c \in \mathbb{C},$$

в свою очередь, вытекающего из определения классов $M^q, q>0$, и элементарного неравенства (3.6) пункта 3.2.1, и связи между метрикой ρ_q и характеристикой $\|\cdot\|_q$: $\rho_q(f,g)=\|f-g\|_q^{\alpha_q}$, $\alpha_q=\min(1,q)$.

(iv) Пространство M^q $(q>0)$ полно относительно метрики ρ_q.

Действительно, пусть последовательность $(f_m)\subseteq M^q$ $(q>0)$ фундаментальна относительно метрики ρ_q. По следствию 4.7 последовательность (f_m) фундаментальна равномерно на любом компакте из B_n. По первой теореме Вейерштрасса, существует голоморфная в B_n функция f, к которой последовательность (f_m) сходится равномерно на любом компакте из B_n. Докажем, что предельная функция f принадлежит пространству M^q $(q>0)$ и последовательность (f_m) сходится к f в метрике ρ_q. Действительно, согласно условию фундаментальности в метрике ρ_q, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $K\in\mathbb{N}$, что $\rho_q(f_m,f_k)\le\varepsilon$ для всех $m,k\ge K$; другими словами, в соответствии с (1.21),

$$\int\limits_{S_n}\ln^q(1+M_{rad}(f_m-f_k)(\zeta))\,\sigma(d\zeta)\le\varepsilon^{q/\alpha_q},\quad m,k\ge K.$$

Отсюда вытекает, что для любого $R\in[0,1)$ выполнено

$$\int\limits_{S_n}\ln^q(1+\sup_{0\le r\le R}|f_m(r\zeta)-f_k(r\zeta)|)\,\sigma(d\zeta)\le\varepsilon^{q/\alpha_q},\quad m,k\ge K,$$

и так как $f_k\rightrightarrows f$ на множестве $R\overline{B}_n=\{z\in\mathbb{C}^n\mid |z|\le R\}$, то, переходя к пределу при $k\to\infty$ при фиксированном R, находим

$$\int\limits_{S_n}\ln^q(1+\sup_{0\le r\le R}|f_m(r\zeta)-f(r\zeta)|)\,\sigma(d\zeta)\le\varepsilon^{q/\alpha_q},\quad m\ge K,$$

что, в силу произвольности $R\in[0,1)$ и теоремы Б. Леви о монотонной сходимости под знаком интеграла, даёт неравенство

$$\int\limits_{S_n}\ln^q(1+M_{rad}(f_m-f)(\zeta))\,\sigma(d\zeta)\le\varepsilon^{q/\alpha_q},\quad m\ge K,$$

то есть $|f_m-f|_{M^q}\le\varepsilon$ при $m\ge K$. В частности, $f_K-f\in M^q$ $(q>0)$ и, по доказанному выше свойству линейности класса M^q $(q>0)$, функция f принадлежит M^q $(q>0)$. Кроме того, из неравенства $|f_m-f|_{M^q}\le\varepsilon$ при всех $m\ge K$, по определению метрики ρ_q, следует, что $\rho_q(f_m,f)\le\varepsilon$ для всех $m\ge K$. Последнее означает сходимость последовательности (f_m) к функции f по метрике ρ_q, а следовательно, полнота пространства M^q $(q>0)$ доказана.

Приступим теперь к проверке утверждений (2) и (3).

(2) Согласно доказанному утверждению (1), каждое M^q $(q > 0)$ составляет F-пространство относительно метрики ρ_q. Кроме того, из доказательства установленной выше аксиомы (i) видно, что классы M^q замкнуты относительно операции поточечного умножения функций, и нетрудно проверить, что эта алгебраическая операция умножения вместе с линейными операциями пространства M^q превращает M^q в алгебру.

(3) Для доказательства непрерывности операции умножения функций из M^q $(q > 0)$ относительно метрики ρ_q требуется проверить, что если $f_m \to f$ при $m \to \infty$ и $g_k \to g$ при $k \to \infty$ по метрике ρ_q, то $f_m g_k \to fg$ при $m, k \to \infty$ относительно метрики ρ_q. В силу неравенств (4.9) справедливо неравенство

$$|f_m g_k - fg|_{M^q} = |(f_m - f)(g_k - g) + f(g_k - g) + g(f_m - f)|_{M^q} \le \\ \le |f_m - f|_{M^q} + |g_k - g|_{M^q} + |f(g_k - g)|_{M^q} + |g(f_m - f)|_{M^q},$$

из которого видно, что для доказательства непрерывности умножения по совокупности переменных достаточно убедиться, что операция умножения непрерывна по каждому из аргументов в отдельности, то есть что $fg_k \to fg$ и $f_m g \to fg$ при $m, k \to \infty$ по метрике ρ_q, если $g_k \to g$ при $k \to \infty$ и $f_m \to f$ при $m \to \infty$ относительно метрики ρ_q. Докажем, например, непрерывность по второму аргументу при фиксированном первом, откуда, в силу коммутативности операции умножения, будет следовать её непрерывность и по первому аргументу.

Итак, предположим, что $f, g_k \in M^q$ $(q > 0)$, $k \in \mathbb{N}$, и $g_k \to g$ при $k \to \infty$ относительно метрики ρ_q. Так как функция $\ln^q(1 + M_{rad} f)$ интегрируема на S_n (по условию принадлежности f к M^q), то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого σ-измеримого множества A на S_n с мерой $\sigma A < \delta$ будет выполнено

$$\int\limits_A \ln^q(1 + M_{rad} f(\zeta))\, \sigma(d\zeta) < \varepsilon^{q/\alpha_q}/2^{q+1}. \tag{4.10}$$

Согласно неравенству Чебышёва для множества $Y_l = \{\zeta \in S_n \mid M_{rad} f(\zeta) \ge l\}$, $l \in \mathbb{N}$, справедлива следующая оценка меры этого множества:

$$\sigma Y_l \le \frac{1}{\ln^q(1 + l)} \int\limits_{S_n} \ln^q(1 + M_{rad} f(\zeta))\, \sigma(d\zeta), \quad l \in \mathbb{N},$$

и поэтому существует такое $\lambda \in \mathbb{N}$, что $\sigma Y_\lambda < \delta$. Разбивая интеграл в выражении для $|f(g_k - g)|_{M^q}^{q/\alpha_q}$ на интегралы по множеству Y_λ и по дополнению к нему (относительно S_n) и учитывая (4.10), имеем

$$\int\limits_{S_n} \ln^q(1+M_{rad}(f(g_k-g))(\zeta))\,\sigma(d\zeta) \le$$

$$\le \int\limits_{S_n} \ln^q(1+M_{rad}f(\zeta)M_{rad}(g_k-g)(\zeta))\,\sigma(d\zeta) \le 2^q \int\limits_{Y_\lambda} \ln^q(1+M_{rad}f(\zeta))\,\sigma(d\zeta)+$$

$$+2^q \int\limits_{Y_\lambda} \ln^q(1+M_{rad}(g_k-g)(\zeta))\,\sigma(d\zeta)+ \int\limits_{S_n\setminus Y_\lambda} \ln^q(1+\lambda M_{rad}(g_k-g)(\zeta))\,\sigma(d\zeta) <$$

$$< \frac{\varepsilon^{q/\alpha_q}}{2}+2^q\int\limits_{Y\lambda} \ln^q(1+M_{rad}(g_k-g)(\zeta))\,\sigma(d\zeta)+\lambda^q\int\limits_{S_n\setminus Y_\lambda} \ln^q(1+M_{rad}(g_k-g)(\zeta))\,\sigma(d\zeta) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon^{q/\alpha_q}}{2} + (\lambda^q+2^q)|g_k-g|_{M^q}^{q/\alpha_q}, \quad k\in\mathbb{N},$$

где использовались также неравенство $(a+b)^q \le 2^q(a^q+b^q)$, $a,b,q\ge 0$, неравенство (3.6) и второе из неравенств (2.18) пункта 2.2.2. Так как $g_k\to g$ при $k\to\infty$ по метрике ρ_q, то существует такое $K\in\mathbb{N}$, что $(\lambda^q+2^q)|g_k-g|_{M^q}^{q/\alpha_q} < \varepsilon^{q/\alpha_q}/2$ для всех $k\ge K$. Отсюда получаем, что $|f(g_k-g)|_{M^q}<\varepsilon$ для всех $k\ge K$, то есть последовательность fg_k сходится к функции fg по метрике ρ_q.

Итак, установлена справедливость утверждений (1), (2) и (3), что заканчивает доказательство теоремы 4.8.

Следующий ниже результат является аналогом в M^q $(q>0)$ известной теоремы Ф. и М. Риссов о сходимости в среднем функций пространств Харди H^p $(p>0)$.

Теорема 4.9. *Пусть $q>0$ и функция f принадлежит пространству M^q. Тогда функции f_r, $0\le r<1$, определённые равенствами $f_r(z)=f(rz)$, $z\in B_n$, сходятся к функции f при $r\to 1-$ в метрике ρ_q.*

Доказательство. Согласно следствию 4.2, радиальные граничные пределы $\lim\limits_{R\to 1-} f(R\zeta)=f^*(\zeta)$ существуют для почти всех $\zeta\in S_n$. Для всех таких ζ функции $g_{\zeta,r}(R)=f_r(R\zeta)=f(rR\zeta)$, определённые для $R\in[0,1]$, сходятся при $r\to 1-$ равномерно на $[0,1]$ к функции $g^*_\zeta(R)$, определяемой для $R\in[0,1)$ равенством $g^*_\zeta(R)=f(R\zeta)$ и для $R=1$ равенством $g^*_\zeta(R)=f^*(\zeta)$, и поэтому $\sup\limits_{0\le R<1}|f_r(R\zeta)-f(R\zeta)|\to 0$ при $r\to 1-$, так что на основании (1.19) $M_{rad}(f_r-f)(\zeta)\to 0$ для всех $\zeta\in S_n$ указанного выше типа. Кроме того, для любой $\zeta\in S_n$ и любого $r\in[0,1)$ справедливо неравенство $M_{rad}f_r(\zeta)=\sup\limits_{0\le R\le r}|f(R\zeta)|\le \sup\limits_{0\le R<1}|f(R\zeta)|=M_{rad}f(\zeta)$ и, следовательно,

$$\ln^q(1+M_{rad}(f_r-f)(\zeta)) \le 2^q(\ln^q(1+M_{rad}f_r(\zeta))+\ln^q(1+M_{rad}f(\zeta))) \le$$
$$\le 2^{q+1}\ln^q(1+M_{rad}f(\zeta)),\ 0\le r<1.$$

Последнее неравенство на основании определения классов $M^q, q > 0$, показывает, что функции $\ln^q(1 + M_{rad}(f_r - f))$, $0 \le r < 1$, имеют интегрируемую мажоранту на S_n. По предельной теореме Лебега

$$\int\limits_{S_n} \ln^q(1 + M(f_r - f)(\zeta))\, \sigma(d\zeta) \to 0 \text{ при } r \to 1-,$$

то есть $f_r \to f$ при $r \to 1-$ по метрике ρ_q.

Из доказанной теоремы следует, что любая функция пространства M^q $(q > 0)$ приближается в метрике ρ_q функциями, голоморфными в шаре с центром в нуле и радиусом, большим 1. Стандартными рассуждениями, как в доказательстве следствия 2.10, доказывается, что последние функции приближаются полиномами от n комплексных переменных равномерно на замыкании $\overline{B}_n$ шара B_n, а значит, аппроксимируются и в метрике ρ_q. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 4.10. *Многочлены плотны в пространствах M^q $(q > 0)$, и пространства M^q $(q > 0)$ — сепарабельны.*

Замечание 4.11. Из замечания 4.6 следует, что при любом $q > 0$ метрики $\rho_{q,\alpha}$, $\alpha > 1$, определяемые в M^q $(q > 0)$ равенствами $\rho_{q,\alpha}(f, g) = \|f - g\|_{q,\alpha}^{\alpha_q}$, $f, g \in M^q$, $\alpha_q = \min(1, q)$, $q > 0$, эквивалентны в топологическом смысле метрике ρ_q. Поэтому все изложенные выше утверждения, доказанные для метрики ρ_q, справедливы и для метрик $\rho_{q,\alpha}$, $\alpha > 1$.

Замечание 4.12. Представляется вполне достоверным, что результаты, изложенные в этой главе, справедливы также для случая поликруга.

Замечание 4.13. Результаты данной главы опубликованы в [8].

5

Пространство А. Зигмунда $N \ln N$

5.1. Предварительные сведения

Выбирая в определении 1.8 $\varphi(t) = t \ln_+^\alpha t$, $\alpha > 0$, получим классы $N \ln^\alpha N$, введённые А. Зигмундом в монографии [149, с. 475]. Интерес изучения этих классов диктуется тем, что они являются одними из самых близких к классу Смирнова N_*, на которые все еще удается в явном виде распространить все результаты, справедливые для классов Харди и Привалова как в многомерном, так и в одномерном случае, а также в связи с близостью с классом M.

Из соотношения (1.27) вытекает, что при каждом $\alpha > 0$ справедливы вложения

$$N \ln^\alpha N \subset N^* \subset N, \tag{5.1}$$

каждое из которых — строгое (см. [91]).

В настоящей главе в основном изучается класс $N \ln N$ (класс $N \ln^\alpha N$ при $\alpha = 1$). Непосредственная проверка показывает, что, во-первых, условие ограниченности интегралов (1.15) при $\varphi(t) = t \ln_+ t$ равносильно условию

$$\sup_{0 \le r < 1} \int\limits_{\Gamma} \varphi\bigl(\ln(1 + |f(r\gamma)|)\bigr)\, \sigma(d\gamma) < +\infty \tag{5.2}$$

и, во-вторых, что условие принадлежности голоморфной в G функции f классу $N \ln N$ равносильно конечности числовой характеристики

$$|f|_{N \ln N} = \sup_{0 \le r < 1} \int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1 + |f(r\gamma)|)\bigr)\, \sigma(d\gamma), \tag{5.3}$$

в которой функция $\omega(t) = t \ln(e + t)$, $t \ge 0$.

В дальнейшем изложении до конца этой главы для краткости индекс $N \ln N$ у функции (5.3) мы опускаем. Функция $|\cdot|$, определяемая (5.3), обладает на классе $N \ln N$ следующими свойствами:

(1) $|f| = 0$ тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$;
(2) $|-f| = |f|$ для всех $f \in N \ln N$;
(3) $|f \pm g| \leq |f| + |g|$ для всех $f, g \in N \ln N$.

Первые два свойства очевидны, а последнее вытекает из того, что функция $\psi(x) = \omega(\ln(1+x)) \geq 0$, $x \geq 0$ — выпукла вверх (и поэтому для неё выполнено неравенство $\psi(x+y) \leq \psi(x) + \psi(y)$, $x, y \geq 0$).

Свойства (1), (2) и (3) функции (5.3) позволяют утверждать, что функция

$$\rho(f, g) = |f - g|, \quad f, g \in N \ln N, \tag{5.4}$$

имеет на $N \ln N$ все свойства расстояния и, таким образом, класс $N \ln N$ становится метрическим пространством. Свойства этого метрического пространства и будут занимать наше внимание.

5.2. Свойства, эквивалентные принадлежности классу $N \ln N$

Отметим, прежде всего, что рассмотренная в параграфе 5.1 функция $\omega(t) = t \ln(e+t)$, $t \geq 0$, имеет обратную функцию $\omega^{-1}(x)$, непрерывную и строго возрастающую на $x \geq 0$. Как обычно, символ $\mathscr{L} \ln \mathscr{L}$ обозначает класс Зигмунда функций на Γ (см. [149, с. 273] и [118, с. 107]).

Теорема 5.1. *Для любой функции $f \in N$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $f \in N \ln N$;
(2) $f \in N^*$ *и* $\ln(1 + |f^*|) \in \mathscr{L} \ln \mathscr{L}$;
(3) $f \in M$ *и* $\ln(1 + |f^*|) \in \mathscr{L} \ln \mathscr{L}$;
(4) $\ln(1 + |f^*|) \in \mathscr{L} \ln \mathscr{L}$ *и*

$$\omega\bigl(\ln(1 + |f(z)|)\bigr) \leq \int\limits_{\Gamma} P(z, \gamma)\, \omega\bigl(\ln(1 + |f^*(\gamma)|)\bigr)\, \sigma(d\gamma), \quad z \in G, \tag{5.5}$$

где P обозначает ядро Пуассона в G (см. (1.12) *и* (1.13)*);*
(5) $\ln(1 + |f^*|) \in \mathscr{L} \ln \mathscr{L}$ *и*

$$\lim_{r \to 1-} \int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1 + |f(r\gamma)|)\bigr)\, \sigma(d\gamma) = \int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1 + |f^*(\gamma)|)\bigr)\, \sigma(d\gamma); \tag{5.6}$$

(6) семейство $\{\omega(\ln(1 + |f(r\gamma)|)),\ \gamma \in \Gamma\}_{0 \leq r < 1}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Утверждение о том, что $f \in N^*$ для любой функции $f \in N \ln N$, установлено вложениями (5.1). Утверждение

$\ln(1+|f^*|) \in \mathscr{L}\ln\mathscr{L}$ вытекает из (5.2) на основании предельной теоремы Фату–Лебега (см., например, [106, с. 22]).

(2) $\Rightarrow$ (3) Поскольку для функций класса N^* справедливо неравенство

$$\ln(1+|f(z)|) \le \int_\Gamma P(z,\gamma)\ln(1+|f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma), \quad z\in G, \tag{5.7}$$

доказанное, например, в [130], применим к обеим его частям максимальный радиальный оператор (1.19). Согласно оценке радиальной максимальной функции интеграла Пуассона через граничную максимальную функцию его плотности (см. [116, с. 29–31] и [118, с. 84]), имеем неравенство

$$\ln(1+M_{rad}f(\gamma)) \le A\,M_\Gamma \ln(1+|f^*|)(\gamma), \quad \gamma\in\Gamma, \tag{5.8}$$

с некоторой конечной постоянной $A\ge 0$, в котором M_Γ обозначает граничный максимальный оператор, применённый к граничной функции $\ln(1+|f^*|)$. Так как оператор M_Γ имеет слабый тип $(1,1)$ (см. [116, с. 29] и [118, с. 76]), то, после интегрирования неравенства (5.8) и применения интерполяционной теоремы Зигмунда (см. [28, с. 178]), получаем оценку

$$\int_\Gamma \ln(1+M_{rad}f(\gamma))\,\sigma(d\gamma) \le \\ \le AK\int_\Gamma \ln(1+|f^*(\gamma)|)\ln_+\ln(1+|f^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma)+AK,$$

где K — некоторая неотрицательная конечная постоянная. Из последнего неравенства следует конечность интеграла в левой части, что равносильно принадлежности f классу M, поскольку $\ln(1+M_{rad}f)$ — мажоранта семейства $\{\ln_+|f(r\gamma)|,\ \gamma\in\Gamma\}_{0\le r<1}$.

Утверждение (4) получается из утверждения (2) применением к неравенству (5.7) неравенства Йенсена для неубывающей и выпуклой вниз функции ω.

(4) $\Rightarrow$ (5) Полагая в неравенстве (5.5) $z=r\zeta$ и интегрируя по $\zeta\in\Gamma$ при фиксированном r, $0\le r<1$, имеем

$$\int_\Gamma \omega\big(\ln(1+|f(r\zeta)|)\big)\,\sigma(d\zeta) \le \int_\Gamma \omega\big(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\big)\,\sigma(d\gamma)\int_\Gamma P(r\zeta,\gamma)\,\sigma(d\zeta).$$

Используя свойства симметричности и нормированности (2.8) и (2.9) ядра Пуассона, получаем оценку

$$\int_\Gamma \omega\big(\ln(1+|f(r\zeta)|)\big)\,\sigma(d\zeta) \le \int_\Gamma \omega\big(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\big)\,\sigma(d\gamma),$$

откуда

$$\varlimsup_{r\to 1-} \int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1+|f(r\zeta)|)\bigr)\,\sigma(d\zeta) \le \int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma).$$

С другой стороны, в силу теоремы Фату–Лебега,

$$\int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) \le \varliminf_{r\to 1-} \int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1+|f(r\zeta)|)\bigr)\,\sigma(d\zeta).$$

Последние два неравенства приводят к (5.6).

Утверждение (6) следует из утверждения (5) по стандартной предельной теореме (см. [106, с. 28]).

Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) и (6) $\Rightarrow$ (1) тривиальны.

Следствие 5.2. *Как следствие пункта (3) теоремы 5.1 получаем уточнение включения* (5.1) *при* $\alpha = 1$ *в виде*

$$N\ln N \subset M \subset N^* \subset N.$$

Следствие 5.3. *Для каждой функции* f *класса* $N\ln N$

$$|f| = \int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma). \tag{5.9}$$

Доказательство. Функция $\omega\bigl(\ln(1+|f(z)|)\bigr)$ — плюрисубгармоническая в области G, как композиция плюрисубгармонической функции $t = \ln|f(z)|$ и неубывающей выпуклой вниз функции $\omega\bigl(\ln(1+e^t)\bigr)$. Согласно лемме 2 b) из [130], интеграл в (5.3) является неубывающей функцией r и, значит, символ sup в определении (5.3) можно заменить символом lim. Осталось воспользоваться утверждением (5) теоремы 5.1.

Следствие 5.4. *Для каждой функции* f *класса* $N\ln N$ *справедлива оценка*

$$\ln(1+|f(z)|) \le \omega^{-1}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n |f|\right), \quad z\in G. \tag{5.10}$$

Доказательство. Воспользуемся утверждением (4) теоремы 5.1 и оценим ядро Пуассона в неравенстве (5.5) в виде

$$P(z,\gamma) \le \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n, \quad z\in G, \quad \gamma\in\Gamma. \tag{5.11}$$

Тогда

$$\omega\bigl(\ln(1+|f(z)|)\bigr) \le \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n \int\limits_{\Gamma} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma).$$

С учётом следствия 5.3 последнее неравенство равносильно (5.10).

Следствие 5.5. *Для каждой функции f класса $N \ln N$ справедлива оценка*

$$\omega\bigl(\ln(1+|f(z)|)\bigr) = o\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n \text{ \textit{при} } |z| \to 1- \,. \tag{5.12}$$

Доказательство. Согласно свойству интегрируемости функции $\omega(\ln(1+|f^*(\gamma)|))$ (теорема 5.1) и свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенство

$$\int\limits_E \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) < \varepsilon \tag{5.13}$$

справедливо для любого измеримого множества $E \subseteq \varGamma$ меры $\sigma E < \delta$. По неравенству Чебышёва, для этого $\delta > 0$ найдётся такое $K \in \mathbb{N}$, что множество $E_K = \{\gamma \in \varGamma \mid \omega(\ln(1+|f^*(\gamma)|)) \geq K\}$ имеет меру $\sigma E_K < \delta$. Опираясь на утверждение (4) теоремы 5.1 и оценку (5.11), имеем

$$\begin{gathered}\omega\bigl(\ln(1+|f(z)|)\bigr) \leq \left(\,\int\limits_{E_K} + \int\limits_{\varGamma\setminus E_K}\right) P(z,\gamma)\,\omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) \leq \\ \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n \int\limits_{E_K} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) + K\int\limits_{\varGamma} P(z,\gamma)\,\sigma(d\gamma), \quad z \in G.\end{gathered} \tag{5.14}$$

Подставляя в правую часть неравенства (5.14) оценку (5.13) для $E = E_K$ и используя свойство нормированности (2.9) ядра Пуассона, получаем

$$\omega\bigl(\ln(1+|f(z)|)\bigr) < \varepsilon\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n + K, \quad z \in G,$$

что, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, равносильно (5.12).

Следствие 5.6. *Свойства сходимости и фундаментальности последовательностей голоморфных функций по метрике ρ не слабее, соответственно, свойств равномерной сходимости и равномерной фундаментальности на компактах внутри G. Обратно, из свойств равномерной сходимости и равномерной фундаментальности последовательности голоморфных функций в области G следуют свойства сходимости и фундаментальности по метрике ρ соответственно.*

Доказательство. Прямое утверждение вытекает непосредственно из оценки следствия 5.4. Обратное утверждение тривиально.

Следствие 5.7. *Пусть $f \in N \ln N$ и $f_r(z) = f(rz)$, $z \in G$, $0 \leq r < 1$. Тогда $f_r \to f$ при $r \to 1-$ по метрике ρ.*

Доказательство. Согласно неравенству

$$\omega\big(\ln(1+|f_r(\gamma)-f^*(\gamma)|)\big) \le \omega\big(\ln(1+|f_r(\gamma)|)\big)+\omega\big(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\big), \quad \gamma\in\varGamma,$$

использованному выше, в параграфе 5.1, при доказательстве свойства (3) функции (5.3), и утверждению (6) теоремы 5.1, семейство функций $\{\omega(\ln(1+|f_r(\gamma)-f^*(\gamma)|)),\ \gamma\in\varGamma\}_{0\le r<1}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на $\varGamma$. Так как $f_r(\gamma)\to f^*(\gamma)$ при $r\to 1-$ для почти всех $\gamma\in\varGamma$, то по стандартной предельной теореме (см. [106, с. 28])

$$\int\limits_{\varGamma}\omega\big(\ln(1+|f_r(\gamma)-f^*(\gamma)|)\big)\,\sigma(d\gamma)\to 0 \text{ при } r\to 1-,$$

то есть (см. следствие 5.3 и формулу (5.4)) $\rho(f_r,f)\to 0$ при $r\to 1-$.

Следствие 5.8. *Алгебраические многочлены плотны в пространстве $N\ln N$, а следовательно, $N\ln N$ — сепарабельное метрическое пространство.*

Доказательство. По следствию 5.7 в пространстве $N\ln N$ плотны функции, голоморфные на замыкании $\overline{G}$. Стандартными рассуждениями, использующими интегральную формулу Коши (см. доказательство следствия 2.10), показывается, что такие функции равномерно в $\overline{G}$ приближаются многочленами и, согласно следствию 5.6, многочлены плотны в $N\ln N$. Сепарабельность $N\ln N$ следует из того свойства, что многочлены с произвольными комплексными коэффициентами приближаются равномерно в $\overline{G}$ (а значит, и по метрике ρ) многочленами с комплексно-рациональными коэффициентами, множество которых счётно.

5.3. $N\ln N$ как F-пространство

Теорема 5.9. *Класс $N\ln N$ является F-пространством относительно метрики ρ.*

Доказательство. Свойства замкнутости класса $N\ln N$ относительно операций поточечного сложения и умножения функций на число следуют из неравенства треугольника для функции (5.3) (свойство (3) в параграфе 5.1), справедливого для всех голоморфных функций в G, и вытекающего из него неравенства

$$|\lambda f|\le(1+|\lambda|)|f|, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

На основании последнего неравенства получаем также свойство (2) F-пространства (см. доказательство теоремы 3.6), поскольку из $\rho(f_k,0)=|f_k|\to 0$ следует $\rho(\lambda f_k,0)=|\lambda f_k|\le(1+|\lambda|)|f_k|\to 0$ для каждого $\lambda\in\mathbb{C}$. Свойство (1) для метрики ρ — прямое следствие её определения (5.4). Чтобы доказать свойство (3) F-пространства, предположим, что последовательность комплексных чисел (λ_k) — бесконечно малая и $f \in N\ln N$. Тогда для всех достаточно больших натуральных k выполнено $|\lambda_k| \le 1$ и, следовательно, $\omega(\ln(1+|\lambda_k f^*|)) \le \omega(\ln(1+|f^*|))$. Учитывая принадлежность $\omega(\ln(1+|f^*|)) \in \mathscr{L}^1(\Gamma,\sigma)$, получаем, что последовательность $\{\omega(\ln(1+|\lambda_k f^*|)),\, \gamma\in\Gamma\}_{k\in\mathbb{N}}$ имеет интегрируемую мажоранту. Так как $\lambda_k \to 0$, то $\omega(\ln(1+|\lambda_k f^*|)) \to 0$ почти всюду на Γ. По предельной теореме Лебега о мажорируемой сходимости,

$$\int\limits_{\Gamma} \omega\big(\ln(1+|\lambda_k f^*(\gamma)|)\big)\,\sigma(d\gamma) \to 0 \text{ при } k\to+\infty;$$

другими словами (см. следствие 5.3), $\rho(\lambda_k f, 0) \to 0$.

Теперь докажем полноту пространства $N\ln N$ относительно метрики ρ. Пусть последовательность $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset N\ln N$ фундаментальна по метрике ρ. Согласно следствию 5.6, она фундаментальна в метрике равномерной сходимости на компактах внутри G. Поэтому (f_k) сходятся к некоторой предельной функции f равномерно на компактах в G и, по первой теореме Вейерштрасса, функция f голоморфна в G. Покажем, что $f\in N\ln N$ и последовательность (f_k) сходится к функции f в метрике ρ. Из свойства фундаментальности (f_k) по метрике ρ для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $K\in\mathbb{N}$, что $\rho(f_k,f_l)\le\varepsilon$ для всех $k,l\ge K$. Согласно определению $|\cdot|$ (см. (5.3)),

$$\int\limits_{\Gamma} \omega\big(\ln(1+|f_k(r\gamma)-f_l(r\gamma)|)\big)\,\sigma(d\gamma) \le \varepsilon, \quad 0\le r<1, \quad k,l\ge K.$$

Поскольку сходимость $f_l \to f$ равномерна на множестве $r\Gamma = \{r\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$, то, устремляя в последнем неравенстве l к бесконечности при фиксированном r, получим неравенство

$$\int\limits_{\Gamma} \omega\big(\ln(1+|f_k(r\gamma)-f(r\gamma)|)\big)\,\sigma(d\gamma) \le \varepsilon, \quad 0\le r<1, \quad k\ge K,$$

из которого, в силу произвольности r, $0\le r<1$, заключаем, что $|f_k - f|\le\varepsilon$, $k\ge K$, и, в частности, $f_K - f\in N\ln N$. Согласно свойству линейности пространства $N\ln N$ отсюда следует, что $f\in N\ln N$. Более того, выше доказано, что $\varepsilon\ge|f_k-f| = \rho(f_k,f)$ для любого $\varepsilon>0$ и всех $k\ge K$, $K=K(\varepsilon)$, и, значит, последовательность (f_k) сходится к функции f по метрике ρ. Таким образом, установлена полнота пространства $N\ln N$.

5.4. $N\ln N$ как F-алгебра

Используя доказанную теорему 5.9, можно показать, что пространство $N\ln N$ в действительности является F-алгеброй.

Теорема 5.10. *В F-пространстве $N \ln N$ можно ввести алгебраическую операцию умножения, превращающую $N \ln N$ в функциональную алгебру, и эта операция непрерывна относительно метрики ρ.*

Доказательство. Для того чтобы показать замкнутость $N \ln N$ относительно операции поточечного умножения функций, заметим, что для функции $\omega(t) = t \ln(e + t)$, $t \geq 0$, справедливо неравенство

$$\omega(t + s) \leq 4\big(\omega(t) + \omega(s)\big), \quad t, s \geq 0, \tag{5.15}$$

выводимое из непосредственно проверяемого неравенства $\omega(2t) \leq 2\omega(t)$, $t \geq 0$, стандартными рассуждениями, связанными с $\max(t, s)$. Поэтому для характеристики $|\cdot|$ выполняется неравенство

$$|fg| \leq 4\big(|f| + |g|\big), \tag{5.16}$$

откуда вытекает, что если функции f и g принадлежат пространству $N \ln N$, то и их произведение fg также лежит в $N \ln N$. Нетрудно проверить, что введённая операция умножения вместе с линейными операциями F-пространства $N \ln N$ превращает $N \ln N$ в функциональную алгебру, и для справедливости теоремы осталось проверить, что операция умножения непрерывна в метрике ρ.

Заметим сначала, что непрерывность умножения по совокупности аргументов (если $f_m \to f$ при $m \to \infty$ и $g_k \to g$ при $k \to \infty$ в метрике ρ, то $f_m g_k \to fg$ при $m, k \to \infty$ по метрике ρ) следует из непрерывности по каждому аргументу в отдельности, то есть из того, что $f_m g \to fg$ для каждой фиксированной $g \in N \ln N$ и $f g_k \to fg$ для каждой фиксированной $f \in N \ln N$, если $f_m \to f$ и $g_k \to g$ при m и $k \to \infty$ в метрике ρ. Действительно, для любых двух последовательностей (f_m), $(g_k) \subset N \ln N$, сходящихся к функциям $f, g \in N \ln N$ соответственно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |f_m g_k - fg| \leq |(f_m - f)(g_k - g)| + |(f_m - f)g| + |f(g_k - g)| \leq \\ \leq 4|f_m - f| + 4|g_k - g| + |(f_m - f)g| + |f(g_k - g)|, \end{aligned}$$

где использованы неравенство треугольника для $|\cdot|$ и неравенство (5.16), поэтому если $\rho(f_m g, fg) = |(f_m - f)g| \to 0$ и $\rho(f g_k, fg) = |f(g_k - g)| \to 0$ при m и $k \to \infty$, то и $|f_m g_k - fg| = \rho(f_m g_k, fg) \to 0$.

Покажем, например, непрерывность операции умножения по второму аргументу при фиксированном первом, откуда, в силу коммутативности умножения, будет следовать непрерывность и по первому аргументу (при фиксированном втором). Для этого рассмотрим произвольную функцию f из класса $N \ln N$ и последовательность (g_k), сходящуюся к g при $k \to \infty$ по метрике ρ. Согласно утверждению (2) теоремы 5.1 и свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех измеримых множеств E на $\varGamma$ с мерой $\sigma E < \delta$ справедливо неравенство

$$\int\limits_E \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{5.17}$$

С другой стороны, множества $E_\lambda = \{\gamma \in \mathit{\Gamma} \mid |f^*(\gamma)| \geq \lambda\}$, $\lambda > 0$, измеримы и, в силу неравенства Чебышёва, имеют меру

$$\sigma E_\lambda \leq \frac{1}{\omega(\ln(1+\lambda))} \int\limits_{\mathit{\Gamma}} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) = \frac{|f|}{\omega(\ln(1+\lambda))},$$

поэтому найдётся такое натуральное число l, что $\sigma E_l < \delta$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
|f(g_k - g)| &= \int\limits_{\mathit{\Gamma}} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)(g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma))|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) = \\
&= \Biggl(\int\limits_{E_l} + \int\limits_{\mathit{\Gamma}\setminus E_l}\Biggr)\omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)(g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma))|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) \leq \\
&\leq 4\int\limits_{E_l} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) + 4\int\limits_{E_l} \omega\bigl(\ln(1+|g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) + \\
&+ \int\limits_{\mathit{\Gamma}\setminus E_l} \omega\bigl(\ln(1+l|g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) \leq 4\int\limits_{E_l} \omega\bigl(\ln(1+|f^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) + \\
&+ \max(4,l)\int\limits_{\mathit{\Gamma}} \omega\bigl(\ln(1+|g_k^*(\gamma) - g^*(\gamma)|)\bigr)\,\sigma(d\gamma) < \frac{\varepsilon}{2} + \max(4,l)|g_k - g|,
\end{aligned}$$

где мы последовательно воспользовались неравенствами (5.15), $\omega(\ln(1+lx)) \leq l\omega(\ln(1+x))$, $x \geq 0$, $l \in \mathbb{N}$, и (5.17). Так как $g_k \to g$ при $k \to \infty$ по метрике ρ, то для всех $k \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого K, выполнено $\rho(g_k, g) = |g_k - g| < \varepsilon/\max(8, 2l)$, откуда

$$\rho(fg_k, fg) = |f(g_k - g)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

то есть $fg_k \to fg$ при $k \to \infty$ по метрике ρ.

Непрерывность умножения (а с ней и вся теорема) доказана.

Замечание 5.11. Результаты этой главы опубликованы в сборнике [6] и в статье [9].

6

Многомерный вариант теоремы Хинчина–Островского

В главе доказывается многомерный вариант теоремы Хинчина–Островского и приводится ее применение для характеристики компактных множеств в пространстве M.

6.1. Многомерная теорема Хинчина–Островского

Теорема 6.1. *Пусть последовательность (f_k) голоморфных функций в области G удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+ |f_k(r\zeta)|\, \sigma(d\zeta) \leq C < +\infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r < 1, \tag{6.1}$$

с некоторой постоянной $C \geq 0$, и, кроме того, последовательность допустимых граничных значений функций f_k сходится по мере на множестве E положительной меры на Γ.

Тогда последовательность (f_k) сходится равномерно на любом компакте из G к некоторой функции f класса $N(G)$.

Доказательство. Проверим сначала справедливость утверждения теоремы в случае, когда у последовательности $(f_k(\zeta))$ предельная функция $\varphi(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in E$.

Для инвариантного в G комплексного ядра Пуассона $P(z, \zeta)$, $z \in G$, $\zeta \in \Gamma$ (см. (1.12) и (1.13)) справедливы оценки

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^n \leq P(z, \zeta) \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n, \quad z \in G, \quad \zeta \in \Gamma \tag{6.2}$$

(см. [139]). Воспользуемся свойством плюрисубгармоничности логарифма модуля голоморфной функции, согласно которому

$$\ln |f_k(z)| \leq \int\limits_{\Gamma} \ln |f_k(R\zeta)|\, P\left(\frac{z}{R}, \zeta\right) \sigma(d\zeta), \quad |z| < R < 1,$$

для всех таких номеров k, что $f_k(z) \not\equiv 0$ в G. Представим функцию $\ln|t|$ в этой оценке в виде $2\ln_+|t| - |\ln|t||$, $t \in \mathbb{C}$. Тогда, с учётом (6.2), имеем

$$\ln|f_k(z)| \le 2\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^n \int_\Gamma \ln_+|f_k(R\zeta)|\,\sigma(d\zeta) - \\ - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^n \int_\Gamma \bigl|\ln|f_k(R\zeta)|\bigr|\,\sigma(d\zeta), \quad |z| < R,$$

откуда при $R \to 1-$, согласно лемме П. Фату, получим оценку

$$\ln|f_k(z)| \le 2\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n \varliminf_{R\to 1-} \int_\Gamma \ln_+|f_k(R\zeta)|\,\sigma(d\zeta) - \\ - \left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^n \int_\Gamma \bigl|\ln|f_k(\zeta)|\bigr|\,\sigma(d\zeta), \quad z \in G. \quad (6.3)$$

Так как, по условию, последовательность $(f_k(\zeta))$ сходится по мере к функции $\varphi(\zeta) \equiv 0$ на множестве E положительной меры на Γ, то по лемме П. Фату последний интеграл в правой части (6.3) расходится к $+\infty$ при $k \to \infty$. С другой стороны, справедливо (6.1), поэтому из (6.3) следует, что $\ln|f_k(z)| \rightrightarrows -\infty$ при $k \to \infty$ равномерно на каждом множестве $|z| \le R$, $0 \le R < 1$. Другими словами, $f_k(z) \rightrightarrows 0$ равномерно на любом компакте из G.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(\zeta) = \varphi(\zeta) \not\equiv 0$, $\zeta \in E$. Для любых двух подпоследовательностей $(f_{\mu_i}(z))$ и $(f_{\nu_i}(z))$ последовательности $(f_k(z))$ предельная функция $\lim\limits_{i\to\infty}\bigl(f_{\mu_i}(\zeta) - f_{\nu_i}(\zeta)\bigr) = 0$, $\zeta \in E$. Согласно рассмотренному выше случаю, $f_{\mu_i}(z) - f_{\nu_i}(z) \rightrightarrows 0$ при $i \to +\infty$ равномерно на любом компакте в G. Таким образом, последовательность $(f_k(z))$ равномерно сходится на компактах из G к некоторой голоморфной функции $f(z)$, принадлежащей $N(G)$ в силу условия (6.1).

Опираясь на теорему 6.1, укажем ещё одно доказательство хорошо известного свойства единственности функций из класса Островского–Неванлинны.

Следствие 6.2. *Если граничные значения функции $f \in N(G)$ равны нулю на множестве положительной меры на Γ, то $f \equiv 0$ в G.*

Доказательство. Рассмотрим $f_k(z) = f((1-1/k)z)$, $z \in G$, $k \in \mathbb{N}$. Так как $f \in N(G)$, то для $(f_k(z))$ выполняется условие (6.1), и так как $f(\zeta) = 0$ на некотором множестве E положительной меры на Γ, то $f_k(\zeta) \to 0$ для всех $\zeta \in E$. Согласно первой части доказательства теоремы 6.1, $f_k(z) \rightrightarrows 0$ равномерно на любом компакте из G. Так как $f_k(z) = f((1-1/k)z) \to f(z)$ при $k \to \infty$ для каждого фиксированного $z \in G$, то $f(z) \equiv 0$ внутри G.

Интересно отметить, что схемы доказательств теоремы 6.1 и следствия к ней совпадают в одномерном и многомерном случаях (см. [53], [112]).

6.2. Уточнение теоремы Хинчина–Островского

Для одномерного случая ($n = 1$) теорему Хинчина–Островского уточнил Г. Ц. Тумаркин — дополнительным утверждением о сходимости $(f_k(\zeta))$ к $f(\zeta)$ при $k \to \infty$ по мере на множестве E (см. [41, гл. II, §7]).

Теорема 6.3. *В условиях теоремы 6.1 допустимые граничные значения функций f_k сходятся на E по мере к допустимым граничным значениям функции f, предельной для последовательности (f_k) внутри области G.*

Техническую часть доказательства теоремы выделим в следующую лемму.

Лемма 6.4. *Пусть для последовательности (f_k) выполнены условия теоремы 6.1 и для любого натурального $N > 1$ выбрана ограниченная голоморфная в G функция $F_E^N(z)$, удовлетворяющая свойствам:*

(1) $|F_E^N(\zeta)| = N$ *почти всюду на некоторой окрестности V множества E;*
(2) $|F_E^N(\zeta)| = 1$ *почти всюду на дополнении Γ к V; и*
(3) $\sigma(V \setminus E) < 1/(3 \ln N)$.

Тогда существует постоянная C_1, зависящая только от постоянной C из условия (6.1) *и не зависящая от N, и такое натуральное $K(N)$, что оценка*

$$\int_{\Gamma} \ln_+ \bigl| F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta) - f_l(r\zeta)] \bigr| \, \sigma(d\zeta) \le C_1 \tag{6.4}$$

справедлива для всех $k, l \ge K(N)$ и всех $0 \le r < 1$.

Доказательство (леммы). Заметим, что в силу принципа максимума модуля для ограниченных голоморфных функций функция $F_E^N(z)$ ограничена в области G по модулю константой N. Из сходимости по мере последовательности $(f_k(\zeta))$ на E вытекает существование такого индекса $K(N)$, что $\sigma\{\zeta \in E \mid |f_k(\zeta) - f_l(\zeta)| \ge 1/N\} < 1/(3 \ln N)$ для всех $k, l \ge K(N)$. Для любых фиксированных натуральных $N > 1$ и $k, l \ge K(N)$ обозначим $E_N^{k,l}$ множество всех точек $\zeta \in E$, в которых $|f_k(\zeta) - f_l(\zeta)| < 1/N$. Так как функции f_k, f_l и F_E^N имеют почти всюду на Γ радиальные пределы, то по теореме Д. Ф. Егорова на Γ существует совершенное множество $H_N^{k,l}$ с $\sigma(\Gamma \setminus H_N^{k,l}) < 1/(3 \ln N)$, на котором радиальная сходимость $F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta) - f_l(r\zeta)] \to F_E^N(\zeta)[f_k(\zeta) - f_l(\zeta)]$ при $r \to 1-$ является равномерной. Следовательно, при $r \to 1-$

$$\int_{H_N^{k,l}} \ln_+ \bigl| F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta) - f_l(r\zeta)] \bigr| \, \sigma(d\zeta) \to \int_{H_N^{k,l}} \ln_+ \bigl| F_E^N(\zeta)[f_k(\zeta) - f_l(\zeta)] \bigr| \, \sigma(d\zeta). \tag{6.5}$$

Для оценки интеграла (6.4) разобьем его на два слагаемых по множествам $H_N^{k,l}$ и $\varGamma \setminus H_N^{k,l}$. Интеграл по множеству $\varGamma \setminus H_N^{k,l}$ оценивается на основании неравенств $|F_E^N(z)| \le N$ и $\sigma(\varGamma \setminus H_N^{k,l}) < 1/(3\ln N)$:

$$\int\limits_{\varGamma\setminus H_N^{k,l}} \ln_+\bigl|F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \le$$
$$\le \int\limits_{\varGamma\setminus H_N^{k,l}} \ln_+\bigl|N[f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \le$$
$$\le \int\limits_{\varGamma\setminus H_N^{k,l}} \ln N\,\sigma(d\zeta) + \int\limits_{\varGamma\setminus H_N^{k,l}} \ln_+|f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta) \le$$
$$\le \frac{1}{3} + \int\limits_{\varGamma\setminus H_N^{k,l}} \ln_+|f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta) \qquad (6.6)$$

для всех $0 \le r < 1$.

Оценка другой части интеграла (6.4) по множеству $H_N^{k,l}$ опирается на утверждение (6.5), согласно которому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r_0 \in [0,1)$, что

$$\int\limits_{H_N^{k,l}} \ln_+\bigl|F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \le$$
$$\le \int\limits_{H_N^{k,l}} \ln_+\bigl|F_E^N(\zeta)[f_k(\zeta)-f_l(\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) + \varepsilon \qquad (6.7)$$

для всех $r_0 < r < 1$.

Поскольку, согласно условиям (1) и (2), $\ln_+\bigl|F_E^N(\zeta)[f_k(\zeta)-f_l(\zeta)]\bigr| = 0$ почти всюду на множестве $H_N^{k,l} \cap E_N^{k,l}$ и $|F_E^N(\zeta)| = 1$ почти всюду на $H_N^{k,l} \cap (\varGamma \setminus V)$, то

$$\int\limits_{H_N^{k,l}} \ln_+\bigl|F_E^N(\zeta)[f_k(\zeta)-f_l(\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \le \int\limits_{H_N^{k,l}\cap(\varGamma\setminus V)} \ln_+|f_k(\zeta)-f_l(\zeta)|\,\sigma(d\zeta) +$$
$$+ \int\limits_{H_N^{k,l}\cap(V\setminus E_N^{k,l})} \ln N\,\sigma(d\zeta) + \int\limits_{H_N^{k,l}\cap(V\setminus E_N^{k,l})} \ln_+|f_k(\zeta)-f_l(\zeta)|\,\sigma(d\zeta).$$

Согласно условию (3),

$$\sigma(V\setminus E_N^{k,l}) \le \sigma(V\setminus E) + \sigma(E\setminus E_N^{k,l}) < 1/(3\ln N) + 1/(3\ln N) = 2/(3\ln N),$$

а следовательно,

$$\int\limits_{H_N^{k,l}} \ln_+\bigl|F_E^N(\zeta)[f_k(\zeta)-f_l(\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \le \int\limits_{H_N^{k,l}} \ln_+|f_k(\zeta)-f_l(\zeta)|\,\sigma(d\zeta)+\frac{2}{3} \le$$

$$\le \frac{2}{3}+\varliminf_{r\to 1-}\int\limits_{H_N^{k,l}} \ln_+\bigl|f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)\bigr|\,\sigma(d\zeta), \quad (6.8)$$

в котором второе неравенство справедливо в силу предельного неравенства Фату–Лебега).

Объединяя оценки (6.6), (6.7), (6.8) и переходя к верхнему пределу при $r\to 1-$, получаем

$$\varlimsup_{r\to 1-}\int\limits_{\Gamma} \ln_+\bigl|F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \le 1+\varepsilon+$$

$$+\varlimsup_{r\to 1-}\int\limits_{\Gamma\setminus H_N^{k,l}} \ln_+|f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta)+\varliminf_{r\to 1-}\int\limits_{H_N^{k,l}} \ln_+|f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta) \le$$

$$\le 1+\varepsilon+\varlimsup_{r\to 1-}\int\limits_{\Gamma} \ln_+|f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta). \quad (6.9)$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ последнее неравенство справедливо с $\varepsilon=0$, и поэтому его левая часть не превосходит числа $2C+\ln 2+1$, с константой C из неравенства (6.1). Так как логарифм модуля голоморфной функции представляет собой плюрисубгармоническую функцию, то интеграл в левой части неравенства (6.9) оказывается неубывающей функцией от r; следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+\bigl|F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta)-f_l(r\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \le 2C+\ln 2+1 < 2C+2 \equiv C_1$$

для всех $0\le r<1$, что доказывает утверждение (6.4).

Доказательство (теоремы 6.3). Согласно [116, теорема 3.5.3] и [118, теорема 19.1.4], для любого открытого множества V на Γ и любого числа $N>1$ существует функция $T_V^N(z)$, имеющая допустимые пределы с $|T_V^N(\zeta)|=N$ почти всюду на V и $|T_V^N(\zeta)|=1$ почти всюду на $\Gamma\setminus V$. Выбирая такую открытую окрестность V множества E, чтобы $\sigma(V\setminus E)<1/(3\ln N)$, видим, что функция $F_E^N(z)\equiv T_V^N(z)$ удовлетворяет условиям леммы.

Применяя к этой функции лемму, получаем оценку (6.4) с постоянной C_1, не зависящей от N. Устремляя l к ∞ в (6.4) при фиксированном r, $0\le r<1$, и используя теорему 6.1, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+\bigl|F_E^N(r\zeta)[f_k(r\zeta)-f(r\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \le C_1, \quad k\ge K(N), \quad (6.10)$$

с предельной для $(f_k(z))$ функцией $f(z)$ в области G.

Вспоминая, что $|F_E^N(\zeta)| = N$ для почти всех $\zeta \in E \subseteq V$, и устремляя r к 1 слева при фиксированном $k \geq K(N)$ в неравенстве (6.10), с учётом предельной теоремы П. Фату, приходим к оценке

$$\int\limits_E \ln_+\bigl[N|f_k(\zeta) - f(\zeta)|\bigr]\sigma(d\zeta) \leq \\ \leq \int\limits_\Gamma \ln_+\bigl|F_E^N(\zeta)[f_k(\zeta) - f(\zeta)]\bigr|\,\sigma(d\zeta) \leq C_1, \quad k \geq K(N). \quad (6.11)$$

Согласно неравенству Чебышёва и (6.11), для любого $\delta > 0$ с $N\delta > 1$ справедливо

$$\sigma\{\zeta \in E \mid |f_k(\zeta) - f(\zeta)| \geq \delta\} \leq \\ \leq \frac{1}{\ln(N\delta)} \int\limits_E \ln_+\bigl[N|f_k(\zeta) - f(\zeta)|\bigr]\,\sigma(d\zeta) \leq \frac{C_1}{\ln(N\delta)}$$

при всех $k \geq K(N)$, в котором правую часть можно сделать меньше любого числа $\varepsilon > 0$, выбирая N достаточно большим. Последнее означает, что последовательность $(f_k(\zeta))$ сходится к $f(\zeta)$ по мере на множестве E.

Замечание 6.5. В одномерном случае $(n = 1)$ доказательство леммы значительно упрощается, поскольку вместо окрестности V можно взять само множество E, а в качестве функции F_E^N рассмотреть экспоненту от голоморфной функции, действительная часть которой кратна гармонической мере множества E с коэффициентом $\ln N$ (см. [41, гл. II, §7]).

6.3. Максимальный вариант теоремы Хинчина–Островского и приложения

6.3.1. Максимальный вариант теоремы Хинчина–Островского

Напомним, что для произвольных $\zeta \in \Gamma$ и $\alpha > 1$ множества

$$D_\alpha(\zeta) = \{z \in B_n \mid |1 - \langle z, \zeta\rangle| < \alpha(1 - |z|)\},$$

где $\langle z, w\rangle$ обозначает обычное эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, называют допустимыми областями по Кораньи в B_n. В случае поликруга U^n для $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$ и $\alpha > 1$ под допустимыми областями понимают множества

$$D_\alpha(\zeta) = \{z \in D_\alpha(\zeta_1) \times \ldots \times D_\alpha(\zeta_n) \mid 1/\alpha < \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_l|} < \alpha,\ 1 \leq k, l \leq n\},$$

где $D_\alpha(\zeta_k) = \{z \in \mathbb{C} \mid |1 - z\bar{\zeta}_k| < \alpha(1 - |z|)\}$, $1 \leq k \leq n$. Символ $|\cdot|_N$ обозначает стандартную числовую характеристику в пространстве N.

Теорема 6.6. *Пусть последовательность (f_k) голоморфных функций в области G удовлетворяет условиям: (1) $|f_k|_N \le C$ для всех $k \in \mathbb{N}$ с некоторой постоянной $C > 0$; (2) последовательность (f_k^*) граничных функций для (f_k) сходится по мере на некотором множестве E положительной меры на Γ. Тогда: (i) последовательность (f_k) равномерно сходится на компактах из G к некоторой функции f класса N, (ii) граничные функции (f_k^*) сходятся по мере на множестве E к граничной функции f^* для предельной функции f, и (iii) в (f_k) существует подпоследовательность (f_{k_s}), обладающая свойством: для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha > 1$ во множестве E найдётся (замкнутое) подмножество $E_{\varepsilon,\alpha}$, мера которого отличается от меры E меньше, чем на ε, что (f_{k_s}) сходится равномерно в области $G_{\varepsilon,\alpha}$, образованной объединением допустимых областей $D_\alpha(\zeta)$ по всем $\zeta \in E_{\varepsilon,\alpha}$.*

Заметим, что утверждения (i) и (ii) составляют содержание обычной теоремы Хинчина–Островского (теорема 6.1) и ее усиления (теорема 6.3). Новым является лишь утверждение (iii). Для одномерного случая ($n = 1$) утверждение (iii) доказано Г. Ц. Тумаркиным в статье [50].

Лемма 6.7. *Для любых $0 < q < 1$ и $\alpha > 1$ существует такая конечная постоянная $A_{q,\alpha}$, что для любой голоморфной функции f в области G выполнена оценка*

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+^q M_\alpha f(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \le A_{q,\alpha}\left[\sup_{0\le r<1}\int\limits_{\Gamma} \ln_+|f(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta)\right]^q, \tag{6.12}$$

где $M_\alpha f(\zeta)$ обозначает допустимую максимальную функцию для функции f в точке $\zeta \in \Gamma$, определяемую равенством

$$M_\alpha f(\zeta) = \sup_{z\in D_\alpha(\zeta)} |f(z)|, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{6.13}$$

В свою очередь, доказательство леммы 6.7, фактически повторяющее доказательство теоремы 4.4, использует следующее утверждение, опирающееся на свойства операторов слабого типа (ср. [118, доказательство теоремы 6.2.3]) и впервые использованное Колмогоровым при доказательстве его известной теоремы о сопряженных рядах Фурье.

Лемма 6.8. *Если оператор $\mathfrak{T}$ действует из пространства конечных счетноаддитивных мер на некотором измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ в пространство неотрицательных измеримых функций на $(X, \mathfrak{B})$ с некоторой конечной неотрицательной счетноаддитивной мерой σ и $\mathfrak{T}$ имеет оценку слабого типа $(1,1)$, то для любого q, $0 < q < 1$, существует конечная постоянная A_q, зависящая только от q, полной вариации меры σ и от постоянной из слабой оценки и такая, что неравенство*

$$\int\limits_X [\mathfrak{T}\mu(x)]^q\,\sigma(dx) \le A_q\|\mu\|^q \tag{6.14}$$

справедливо для любой конечной счетноаддитивной меры μ, где $\|\mu\|$ обозначает полную вариацию меры μ.

Доказательство (леммы 6.8). Справедливость оценки слабого типа $(1,1)$ означает существование конечной постоянной $A \geq 0$, с которой неравенство $\sigma\{\mathfrak{T}\mu(x) > t\} \leq A\|\mu\|/t$, $t > 0$, выполнено для любой конечной счетноаддитивной меры μ на X. Воспользуемся тем, что для любой измеримой на X функции f справедливо

$$\int\limits_X |f(x)|\,\sigma(dx) = \int\limits_0^\infty \sigma\{|f(x)| > t\}\,dt.$$

Тогда

$$\int\limits_X [\mathfrak{T}\mu(x)]^q\,\sigma(dx) = \int\limits_0^\infty \sigma\{[\mathfrak{T}\mu(x)]^q > t\}\,dt = \int\limits_0^\infty \sigma\{\mathfrak{T}\mu(x) > t^{1/q}\}\,dt.$$

Разобьем последний интеграл на две части: от 0 до некоторого $a > 0$ и от a до $+\infty$. На первом участке имеем тривиальную оценку $a\sigma X$, а на втором воспользуемся оценкой оператора $\mathfrak{T}$ слабого типа $(1,1)$:

$$\int\limits_0^\infty \sigma\{\mathfrak{T}\mu(x) > t^{1/q}\}\,dt \leq a\sigma X + A\|\mu\| \int\limits_a^\infty \frac{dt}{t^{1/q}} = a\sigma X + \frac{A\|\mu\| a^{1-1/q}}{1/q - 1},$$

где использовано условие $0 < q < 1$, так что последний интеграл сходится. Приравнивая последние два слагаемых друг другу и решая полученное уравнение относительно a, находим $a = \left(\dfrac{A\|\mu\|}{(1/q-1)\sigma X}\right)^q$, и, следовательно, оценка (6.14) имеет место с постоянной $A_q = \dfrac{2A^q}{(1/q-1)^q \sigma^{q-1} X}$ (не являющейся, разумеется, наилучшей возможной).

Доказательство (леммы 6.7). В случае, когда правая часть (6.12) бесконечна, утверждение леммы очевидно. Предположим, что правая часть неравенства (6.12) конечна. В этом случае, как показано в [118, теорема 5.6.4] и [116, теорема 3.3.5], функция $\ln_+ |f(z)|$ имеет $\mathscr{M}$-гармоническую (для шара) или n-гармоническую (для поликруга) мажоранту в области G, и наименьшая такая мажоранта представляется в виде интеграла Пуассона

$$u_{\min}(z) = \int\limits_\Gamma P(z,\zeta)\,\mu(d\zeta)$$

по некоторой конечной неотрицательной борелевской мере μ на Γ, где $P(z,\zeta)$, $z \in G$, $\zeta \in \Gamma$ — инвариантное ядро Пуассона в области G и полная вариация меры μ совпадает с наименьшей верхней гранью в правой части (6.12). В случае поликруга уже сейчас к неравенству $\ln_+|f(z)| \le u_{\min}(z)$, $z \in G$, можно применить максимальный оператор (6.13) и воспользоваться теоремой 4 из [147], что завершит доказательство леммы. В случае шара применим в неравенстве $\ln_+|f(z)| \le u_{\min}(z)$, $z \in G$, к левой и правой частям допустимый максимальный оператор (6.13) и оценим допустимую максимальную функцию интеграла Пуассона, которым представлена функция $u_{\min}$, через граничную максимальную функцию меры μ (см. [118, теорема 5.4.5]). Получим

$$\ln_+ M_\alpha f(\zeta) \le K_\alpha M_\Gamma \mu(\zeta), \ \ \zeta \in \Gamma,$$

где M_Γ обозначает граничный максимальный оператор, действующий на пространстве конечных борелевских мер на S_n, и K_α — конечная постоянная, зависящая только от α и n. Так как граничный максимальный оператор обладает оценкой слабого типа $(1,1)$ (см. [118, теорема 5.2.4]), то, возводя полученное неравенство в степень q, $0 < q < 1$, и используя доказанное выше неравенство (6.14), находим

$$\int\limits_\Gamma \ln_+^q M_\alpha f(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \le K_\alpha^q \int\limits_\Gamma M_\Gamma^q \mu(\zeta)\sigma(d\zeta) \le K_\alpha^q A_q \|\mu\|^q.$$

Учитывая связь между $\|\mu\|$ и точной верхней гранью в (6.12), получаем отсюда искомое неравенство (6.12) с постоянной $A_{q,\alpha} = K_\alpha^q A_q$.

Доказательство (теоремы 6.6 (iii)). Как в доказательстве теоремы 6.3, для любого натурального числа $N > 1$ рассмотрим ограниченную голоморфную функцию F_E^N в области G, удовлетворяющую условиям леммы 6.4. По лемме 6.4 существует такая конечная постоянная C_1, зависящая только от постоянной C из условия (6.1) и не зависящая от $N > 1$, что выполнено неравенство (6.4). Из него, как следует из леммы 6.7, вытекает

$$\int\limits_\Gamma \ln_+^q M_\alpha[F_E^N(f_k - f_l)](\zeta)\,\sigma(d\zeta) \le A_{q,\alpha} C_1^q, \quad k, l \ge K(N), \tag{6.15}$$

где $A_{q,\alpha}$ — конечная постоянная, не зависящая от $N > 1$, и M_α — допустимый максимальный оператор, определяемый равенством (6.13).

Так как $|F_E^N(z)| \to N$ при $D_\alpha(\zeta) \ni z \to \zeta$ для почти всех $\zeta \in E$, то по теореме Д. Ф. Егорова существует замкнутое множество $E_N \subset E$, мера которого отличается от меры E меньше, чем на $1/N$, и некоторое r_0, $0 \le r_0 < 1$, такое, что $|F_E^N(z)| \ge N/2$, когда $z \in D_\alpha(\zeta)$, $|z| > r_0$, $\zeta \in E_N$. Из оценки (6.15) поэтому следует, что

$$\int\limits_{E_N} \ln_+^q \big[\frac{N}{2} M_\alpha^{(r_0)}(f_k - f_l)(\zeta)\big]\,\sigma(d\zeta) \le$$

$$\le \int\limits_{E_N} \ln_+^q M_\alpha[F_E^N(f_k - f_l)](\zeta)\,\sigma(d\zeta) \le A_{q,\alpha} C_1^q, \quad k, l \ge K(N), \tag{6.16}$$

где символом $M_\alpha^{(r_0)}$ обозначен «урезанный» максимальный оператор

$$(M_\alpha^{(r_0)}g)(\zeta) = \sup_{\substack{z\in D_\alpha(\zeta)\\ |z|>r_0}} |g(z)|, \quad \zeta\in\Gamma, \quad g\in\mathbb{C}^G.$$

Так как последовательность (f_k) сходится равномерно на множестве $|z|\le r_0$ (теорема 6.1), то существует номер $K_1(N)\in\mathbb{N}$, начиная с которого для всех k,l выполнено $\dfrac{N}{2}|f_k(z)-f_l(z)|<1$ при $|z|\le r_0$, откуда $\ln_+\bigl[\frac{N}{2}M_\alpha^{(r_0)}(f_k-f_l)(\zeta)\bigr] = \ln_+\bigl[\frac{N}{2}M_\alpha(f_k-f_l)(\zeta)\bigr]$ для всех $\zeta\in\Gamma$. Следовательно, неравенство (6.16) останется справедливым при замене $M_\alpha^{(r_0)}$ на M_α, начиная, возможно, с некоторого большего, чем $K(N)$, номера $K_2(N)$.

Итак, для любого $N>1$ существует такой номер $K_2(N)\in\mathbb{N}$ и такое замкнутое множество $E_N\subset E$, $\sigma(E\setminus E_N)<\dfrac{1}{N}$, что

$$\int\limits_{E_N}\ln_+^q\bigl[\frac{N}{2}M_\alpha(f_k-f_l)(\zeta)\bigr]\,\sigma(d\zeta)\le A_{q,\alpha}C_1^q\equiv C_2, \quad k,l\ge K_2(N),$$

с конечной постоянной C_2, не зависящей от N. Стандартными теоретико-функциональными рассуждениями отсюда выводится существование искомой подпоследовательности.

Действительно, пусть N пробегает последовательные двойные степени двойки $N_s=2^{2^s}$, $s=1,2,\ldots$. Согласно доказанному выше, существует последовательность $K_2(N_s)\in\mathbb{N}$, которую можно считать возрастающей, и последовательность замкнутых множеств $E_{N_s}\subset E$, $\sigma(E\setminus E_{N_s})<\dfrac{1}{N_s}$, для которых

$$\int\limits_{E_{N_s}}\ln_+^q\bigl[\frac{N_s}{2}M_\alpha(f_k-f_l)(\zeta)\bigr]\,\sigma(d\zeta)\le C_2, \quad k,l\ge K_2(N_s). \tag{6.17}$$

Обозначим $K_2(N_s)=k_s$ и докажем, что подпоследовательность (f_{k_s}) — искомая.

Так как $\sigma(E\setminus\bigcap\limits_{s=s_0}^{\infty}E_{N_s})\le\sum\limits_{s=s_0}^{\infty}\sigma(E\setminus E_{N_s})<\sum\limits_{s=s_0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2^s}}$ и ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2^s}}$ сходится, то существует номер s_0, для которого мера множества $\mathscr{E}_{s_0}=\bigcap\limits_{s\ge s_0}E_{N_s}$ отличается от меры всего множества E меньше, чем на $\varepsilon/2$. Далее, согласно неравенству Чебышёва и оценке (6.17), имеем

$$\sigma\bigl\{\frac{N_s}{2}M_\alpha(f_{k_{s+1}}-f_{k_s})>\sqrt{N_s}\bigr\}\le\frac{C_2}{\ln_+^q\sqrt{N_s}} \quad \text{или}$$

$$\sigma\bigl\{M_\alpha(f_{k_{s+1}}-f_{k_s})>\frac{2}{2^{2^{s-1}}}\bigr\}\le\frac{2^qC_2}{\ln^q 2\, 2^{qs}} \quad \text{при} \quad s\in\mathbb{N},\ s\ge s_0, \tag{6.18}$$

где фигурные скобки обозначают множество тех точек множества $\mathscr{E}_{s_0}$, для которых выполнено написанное в скобках неравенство. Кроме того, в силу неравенства треугольника справедливо теоретико-множественное включение

$$\Big\{M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s}) > \sum_{l=s}^{t-1}\frac{2}{2^{2^{l-1}}}\Big\} \subseteq \bigcup_{l=s}^{t-1}\Big\{M_\alpha(f_{k_{l+1}}-f_{k_l}) > \frac{2}{2^{2^{l-1}}}\Big\}$$

при $t > s$, откуда следует

$$\bigcup_{t>s}\Big\{M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s}) > \sum_{l=s}^{t-1}\frac{2}{2^{2^{l-1}}}\Big\} \subseteq \bigcup_{l=s}^{\infty}\Big\{M_\alpha(f_{k_{l+1}}-f_{k_l}) > \frac{2}{2^{2^{l-1}}}\Big\}. \tag{6.19}$$

На основании (6.18) и (6.19), для любого $\nu_0 \in \mathbb{N}$, $\nu_0 \geq s_0$, получаем

$$\begin{aligned}\sigma \bigcup_{s\geq\nu_0}\bigcup_{t>s}\Big\{M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s}) > \sum_{l=s}^{t-1}\frac{2}{2^{2^{l-1}}}\Big\} &\leq \sum_{s=\nu_0}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\sigma\Big\{M_\alpha(f_{k_{l+1}}-f_{k_l}) > \frac{2}{2^{2^{l-1}}}\Big\}\\ \leq \sum_{s=\nu_0}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\frac{2^qC_2}{\ln^q 2\, 2^{ql}} = \frac{2^qC_2}{\ln^q 2}\sum_{l=\nu_0}^{\infty}\frac{l-\nu_0+1}{2^{ql}} &\leq \frac{2^qC_2}{\ln^q 2}\sum_{l=\nu_0}^{\infty}\frac{l}{2^{ql}}. \end{aligned}\tag{6.20}$$

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{l}{2^{ql}}$ можно найти номер $\nu_0 \in \mathbb{N}$, $\nu_0 \geq s_0$, для которого правая часть в (6.20) меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначая дополнение к множеству в левой части (6.20) через $\mathscr{F}_{\nu_0}$, видим, что мера множества $E_{\varepsilon,\alpha} = \mathscr{F}_{\nu_0}$ отличается от меры множества E меньше, чем на $\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, причём множества $\mathscr{E}_{s_0}$ и $\mathscr{F}_{\nu_0}$, замкнуты, как пересечения замкнутых множеств и в силу полунепрерывности снизу функций $M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s})$, $t, s \in \mathbb{N}$. При этом на множестве $E_{\varepsilon,\alpha}$ выполнены следующие два свойства: 1) все точки $E_{\varepsilon,\alpha}$ лежат в E_{N_s} при всех $s \geq s_0$ (так что выполнены все неравенства (6.18)); и 2) для всех точек $E_{\varepsilon,\alpha}$ и любых $t > s \geq \nu_0$ имеет место неравенство $M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s}) \leq \sum\limits_{l=s}^{t-1}\dfrac{l}{2^{2^{l-1}}}$. Выбирая для любого $\delta > 0$ такое $\nu_1 = \nu_1(\delta) \in \mathbb{N}$, $\nu_1 \geq \nu_0$, что $\sum\limits_{l=s}^{t-1}\dfrac{l}{2^{2^{l-1}}} < \delta$ при $t > s \geq \nu_1$, получаем справедливые для всех $\zeta \in E_{\varepsilon,\alpha}$ и всех $t > s \geq \nu_1$ неравенства $M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s}) < \delta$, которые означают равномерную сходимость на $E_{\varepsilon,\alpha}$ функций $M_\alpha(f_{k_t}-f_{k_s})$ к нулю при $t, s \to \infty$.

Приведённое рассуждение годится для доказательства равномерной сходимости некоторой подпоследовательности в областях вида $\bigcup\limits_{\zeta\in E_{\varepsilon,\alpha}} D_\alpha(\zeta)$ с фиксированным $\alpha > 1$ и множествами $E_{\varepsilon,\alpha}$, $\sigma(E\setminus E_{\varepsilon,\alpha}) < \varepsilon$, для любого

$\varepsilon > 0$, но нетрудно видеть, применяя диагональный процесс Кантора, что такую подпоследовательность можно выбрать одну и ту же одновременно для всех $\alpha > 1$.

6.3.2. Количественное уточнение теоремы 6.6

Теорема 6.9. *Пусть выполнены условия теоремы 6.6. Тогда для любых* $0 < q < 1$ *и* $\alpha > 1$

$$\int\limits_E \ln^q\bigl(1 + M_\alpha(f_k - f_l)(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta) \to 0 \quad \textit{при} \quad k, l \to \infty.$$

Доказательство. Действительно, если это не так, то существует такая подпоследовательность (f_{k_s}), такие q, $0 < q < 1$, $\alpha > 1$ и число $\delta > 0$, что

$$\int\limits_E \ln^q\bigl(1 + M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta) \geq \delta, \quad t \neq s.$$

По теореме 6.6 из (f_{k_s}) можно выделить ещё одну подпоследовательность, которую обозначим так же, — такую, что $M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s}) \to 0$ при $t, s \to \infty$ почти всюду на E. Кроме того, из условия теоремы и леммы 6.7 следует, что

$$\int\limits_\Gamma \ln_+^{q'} M_\alpha f_{k_s}(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \leq A_{q',\alpha} C^{q'}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{6.21}$$

для любого q', $0 < q' < 1$, и конечной постоянной $A_{q',\alpha} \geq 0$, зависящей только от q' и α (а также от n). Выберем q' так, чтобы $q < q' < 1$. Тогда из оценок (6.21) следует, что семейство функций $\{\ln_+^q M_\alpha f_{k_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ, а вместе с ним и семейство $\{\ln^q\bigl(1 + M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})\bigr)\}_{t,s\in\mathbb{N}}$, поскольку

$$\ln^q\bigl(1 + M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})\bigr) \leq 2^{2q}(2\ln^q 2 + \ln_+^q M_\alpha f_{k_t} + \ln_+^q M_\alpha f_{k_s}), t, s \in \mathbb{N}.$$

Согласно предельной теореме Витали [106, теорема II.T21], отсюда следует

$$\int\limits_E \ln^q\bigl(1 + M_\alpha(f_{k_t} - f_{k_s})(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta) \to 0 \quad \text{при} \quad t, s \to \infty,$$

что противоречит выбору подпоследовательности (f_{k_s}).

Замечание 6.10. В случае $q = 1$ сходимость может уже не иметь места, даже если допустимую максимальную функцию $M_\alpha(f_k - f_l)(\zeta)$ заменить модулем разности допустимых граничных значений $|f_k^*(\zeta) - f_l^*(\zeta)|$, $\zeta \in \Gamma$. Для примера следует взять любую функцию f из класса Островского–Неванлинны N, не входящую в класс Смирнова N_* (относительно существования таких функций см. [118, гл. 19] и [116]), и рассмотреть последовательность $f_k(z) = f(r_k z)$, $z \in G$, с какой-нибудь положительной монотонно возрастающей к единице последовательностью (r_k).

Следствие 6.11. *Пусть выполнены условия теоремы 6.6 и f — предельная функция последовательности (f_k) в области G. Тогда*

$$\int\limits_E \ln^q(1+M_\alpha(f_k-f)(\zeta))\,\sigma(d\zeta)\to 0 \quad \textit{при} \quad k\to\infty$$

для любых $0<q<1$ и $\alpha>1$.

Полученному следствию можно придать следующий метрический смысл. Для любого множества E положительной меры на Γ и любых $0<q<1$, $\alpha>1$ выражения

$$\rho_{q,\alpha,E}(f,g)=\int\limits_E \ln^q\bigl(1+M_\alpha(f-g)(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta),\quad f,g\in N(G),$$

задают метрики в пространстве N, более слабые, чем традиционная для N метрика ρ_N. Доказанное следствие поэтому означает сходимость последовательности (f_k) к предельной функции f по метрикам $\rho_{q,\alpha,E}$ для каждых $0<q<1$ и $\alpha>1$.

Отметим также, что утверждения теоремы 6.9 и следствия являются новыми даже в одномерном случае.

6.3.3. Характеристика компактных множеств пространства M

В качестве приложения основной теоремы 6.6 получим критерий компактности множеств в пространстве M. Эта теорема является новой и для одномерного случая.

Теорема 6.12. *Множество L вполне ограничено в пространстве M тогда и только тогда, когда для него выполнены следующие два условия:*

(1) семейство функций $\{\ln_+ M_{rad}f(\zeta),\ \zeta\in\Gamma\}_{f\in L}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ;
(2) семейство функций $\{f^*(\zeta),\ \zeta\in\Gamma\}_{f\in L}$ относительно компактно на Γ в топологии сходимости по мере.

Доказательство. Необходимость. (1) Так как из полной ограниченности множества в линейно-топологическом пространстве (каковым является всякая F-алгебра) следует его ограниченность (в линейно-топологическом смысле), то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\alpha_0>0$, что из $f\in L$ и $|\alpha|\le\alpha_0$, $\alpha\in\mathbb{C}$, вытекает $\rho_M(\alpha f,0)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Используя неравенство (2.18) из пункта 2.2.2, получим отсюда для произвольного измеримого множества $E\subseteq\Gamma$

$$\int\limits_E \ln(1 + M_{rad} f(\zeta))\,\sigma(d\zeta) \leq$$

$$\leq \int\limits_E \ln\Big(1 + \frac{1}{\alpha_0}\Big)\,\sigma(d\zeta) + \int\limits_E \ln(1 + \alpha_0 M_{rad} f(\zeta))\,\sigma(d\zeta) \leq$$

$$\leq \ln\Big(1 + \frac{1}{\alpha_0}\Big)\,\sigma E + \rho_M(\alpha_0 f, 0) < \sigma E \ln\Big(1 + \frac{1}{\alpha_0}\Big) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.22)$$

для $f \in L$.

Выбирая $\delta > 0$ так, чтобы $\delta \ln\big(1 + \dfrac{1}{\alpha_0}\big) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, при $\sigma E < \delta$ находим

$$\int\limits_E \ln(1 + M_{rad} f(\zeta))\,\sigma(d\zeta) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad f \in L,$$

что и означает равностепенную абсолютную непрерывность интегралов семейства функций $\{\ln(1 + M_{rad} f(\zeta)),\ \zeta \in \Gamma\}_{f \in L}$, а значит, и семейства $\{\ln_+ M_{rad} f(\zeta),\ \zeta \in \Gamma\}_{f \in L}$, так как $\ln_+ M_{rad} f(\zeta) \leq \ln(1 + M_{rad} f(\zeta))$, $\zeta \in \Gamma$.

(2) Теперь воспользуемся тем, что полная ограниченность множества в полном метрическом пространстве равносильна относительной секвенциальной компактности, то есть тому, что из любой последовательности элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $(f_k^*(\zeta))$ — произвольная последовательность семейства функций $\{f^*(\zeta),\ \zeta \in \Gamma\}_{f \in L}$. Поскольку множество L относительно компактно в M, то существует подпоследовательность (f_{k_s}) последовательности $(f_k) \subseteq L$, сходящаяся к некоторой функции $f \in M$.

Так как $|f_{k_s}^*(\zeta) - f^*(\zeta)| \leq M_{rad}(f_{k_s} - f)(\zeta)$ почти всюду на Γ, то

$$\int\limits_\Gamma \ln(1 + |f_{k_s}^*(\zeta) - f^*(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta) \leq \int\limits_\Gamma \ln(1 + M_{rad}(f_{k_s} - f)(\zeta))\,\sigma(d\zeta) =$$

$$= \rho_M(f_{k_s}, f) \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Следовательно, подпоследовательность $(f_{k_s}^*(\zeta))$ последовательности $(f_k^*(\zeta))$ сходится на Γ к $f^*(\zeta)$ в среднем логарифмическом, а значит, согласно неравенству Чебышёва, и по мере.

Достаточность. Покажем, что из любой последовательности функций L можно выделить фундаментальную подпоследовательность, что и будет означать полную ограниченность множества L.

Действительно, пусть $(f_k) \subseteq L$. Тогда, согласно условию (2), из $(f_k(\zeta))$ можно выделить подпоследовательность $(f_{k_s}(\zeta))$, сходящуюся по мере. Из условия (1) следует, что множество L имеет равномерно ограниченные характеристики, то есть

$$\int\limits_\Gamma \ln_+ |f(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta) \leq C < +\infty, \quad f \in L, \quad 0 \leq r < 1. \qquad (6.23)$$

В самом деле, выберем, согласно (1), для $\varepsilon = 1$ такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $E \subseteq \Gamma$ с мерой $\sigma E < \delta$ выполнено

$$\int\limits_E \ln_+ M_{rad} f(\zeta)\, \sigma(d\zeta) < \varepsilon = 1, \quad f \in L.$$

Разбивая Γ на N равных по мере частей $E_1, \ldots, E_N$, так что $\sigma E_l = \dfrac{1}{N} < \delta$, имеем

$$\int\limits_\Gamma \ln_+ M_{rad} f(\zeta)\, \sigma(d\zeta) = \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{E_l} \ln_+ M_{rad} f(\zeta)\, \sigma(d\zeta) < N, \quad f \in L.$$

Так как $|f(r\zeta)| \leq M_{rad} f(\zeta)$, $0 \leq r < 1$, то отсюда и следует (6.23) с постоянной $C = N$.

Поэтому для последовательности (f_{k_s}) выполнены все условия теоремы 6.6, так что для некоторой подпоследовательности последовательности (f_{k_s}), которую обозначим так же, $M_{rad}(f_{k_s} - f_{k_t}) \to 0$ при $t, s \to \infty$ почти всюду на Γ. Кроме того, согласно неравенству

$$\ln(1 + M_{rad}(f_{k_t} - f_{k_s})) \leq 2\ln 2 + \ln_+ M_{rad} f_{k_t} + \ln_+ M_{rad} f_{k_s}$$

и условию (1), двойная последовательность $\ln(1+M_{rad}(f_{k_t} - f_{k_s}))$, $t, s \in \mathbb{N}$, имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на Γ. По предельной теореме Витали

$$\rho_M(f_{k_t}, f_{k_s}) = \int\limits_\Gamma \ln(1 + M_{rad}(f_{k_t} - f_{k_s})(\zeta))\, \sigma(d\zeta) \to 0 \quad \text{при} \quad t, s \to \infty,$$

то есть подпоследовательность (f_{k_s}) фундаментальна по метрике ρ_M.

Замечание 6.13. Результаты этой главы, кроме теоремы 6.6, ее следствий и приложения, опубликованы в [13], а теорема 6.6, ее следствия и применение к пространству M анонсированы в [14].

7

Характеристика граничных значений голоморфных функций

В главе полностью охарактеризованы допустимые граничные значения голоморфных функций из пространства Островского–Неванлинны и его подпространств Харди, И. И. Привалова и В. И. Смирнова в шаре и поликруге. Доказанные теоремы суть прямые многомерные обобщения (для $n > 1$) давно известных результатов Г. Ц. Тумаркина, опубликованных в [41, с. 131–141]; утверждения теоремы 7.3 и леммы представляются новыми и в одномерном случае ($n = 1$). Основным инструментом в доказательствах результатов этой главы служит теорема 6.3.

7.1. Характеристические свойства граничных значений функций классов N, H^p, N^q и M

Теорема 7.1. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы измеримая функция $\varphi(\zeta)$, определённая на множестве E точек Γ, почти всюду на E совпадала с допустимыми граничными значениями $f(\zeta)$ некоторой функции f класса N, состоит в существовании такой последовательности алгебраических многочленов $(p_\nu(z))$, что*

(1) $(p_\nu(\zeta))$ *почти всюду на E сходится к $\varphi(\zeta)$;*

(2) $\displaystyle\varlimsup_{\nu\to\infty}\int\limits_{\Gamma} \ln_+ |p_\nu(\zeta)|\,\sigma(d\zeta) < +\infty.$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in N$ справедливо

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+ |f(r\zeta)|\,\sigma(d\zeta) \le C, \quad 0 \le r < 1, \tag{7.1}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, и для почти всех $\zeta \in \Gamma$ определена граничная функция $f(\zeta)$, причём $f(\zeta) = \lim\limits_{r\to 1-} f(r\zeta)$. Возьмём последовательность (r_ν), $0 \le r_\nu < 1$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} r_\nu = 1$, и образуем последовательность функций $(f_\nu(z))$, $f_\nu(z) = f(r_\nu z)$, $\nu \in \mathbb{N}$, голоморфных в замкнутой области

$\overline{G} = \{|z| \leq 1\}$. Тогда (см. [116, с. 15 и 30] и [118, с. 12]) найдётся последовательность многочленов $(p_\nu(z))$ такая, что $|f_\nu(z) - p_\nu(z)| < 1/\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, при всех $z \in \overline{G}$; в частности, $|f_\nu(\zeta) - p_\nu(\zeta)| < 1/\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, для всех $\zeta \in \Gamma$. Так как $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(\zeta) = \lim\limits_{\nu\to\infty} f(r_\nu\zeta) = f(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in \Gamma$, то последовательность $(p_\nu(\zeta))$ для почти всех $\zeta \in \Gamma$ сходится к $f(\zeta)$ и, с учётом неравенства (7.1), справедлива оценка

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+ |p_\nu(\zeta)|\, \sigma(d\zeta) \leq C_1, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

с постоянной $C_1 = C + 1 + \ln 2$; необходимость условий (1) и (2) доказана.

Достаточность немедленно получается из указанной выше теоремы 6.3, так как из условия (2) в силу принципа максимума модуля следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+ |p_\nu(r\zeta)|\, \sigma(d\zeta) \leq C, \quad \nu \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq r < 1, \tag{7.2}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от ν и r, и при условии (7.2) класс N замкнут относительно операции равномерной сходимости на компактах области G.

Поскольку аналогами свойств, использованных в изложенном выше доказательстве для N, обладают H^p, $p > 0$, и N^q, $q > 1$, то аналогично доказывается

Теорема 7.2. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы измеримая функция $\varphi(\zeta)$, определённая на множестве E точек Γ, почти всюду на E совпадала с допустимыми граничными значениями $f(\zeta)$ некоторой функции f класса H^p, $p > 0$ [класса N^q, $q > 1$], состоит в существовании такой последовательности алгебраических многочленов $(p_\nu(z))$, что*

(1) $(p_\nu(\zeta))$ *почти всюду на E сходится к $\varphi(\zeta)$;*

(2) $\varlimsup\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_{\Gamma} |p_\nu(\zeta)|^p\, \sigma(d\zeta) < +\infty$, $p > 0$

$\Big[\varlimsup\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_{\Gamma} \ln_+^q |p_\nu(\zeta)|\, \sigma(d\zeta) < +\infty$, $q > 1\Big]$.

Теорема 7.3. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы измеримая функция $\varphi(\zeta)$, определённая на множестве E точек Γ, почти всюду на E совпадала с допустимыми граничными значениями $f(\zeta)$ некоторой функции f класса M, состоит в существовании такой последовательности алгебраических многочленов $(p_\nu(z))$, что*

(1) $(p_\nu(\zeta))$ *почти всюду на E сходится к $\varphi(\zeta)$;*

(2) $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \int\limits_{\Gamma} \ln_+ M_{rad} p_\nu(\zeta)\,\sigma(d\zeta) < +\infty.$

Доказательство. Поскольку $M_{rad} f_r(\zeta) \le M_{rad} f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, где $f_r(z) = f(rz)$, для всех $0 \le r < 1$, то необходимость условий теоремы 7.3 устанавливается так же, как в теореме 7.1. Для доказательства достаточности заметим, что из условия (2) теоремы 7.3 вытекает условие (2) теоремы 7.1, и поэтому $(p_\nu(z))$ сходится к некоторой функции f класса N равномерно на компактах области G. Остаётся показать, что $f \in M$. Для этого, на основании условия (2), рассмотрим такую постоянную $C > 0$, что

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+\Big(\sup_{0\le r<1} |p_\nu(r\zeta)|\Big)\,\sigma(d\zeta) \le C$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$, а следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+\Big(\sup_{0\le r\le R} |p_\nu(r\zeta)|\Big)\,\sigma(d\zeta) \le C \tag{7.3}$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и любого R, $0 \le R < 1$. Так как $(p_\nu(z))$ равномерно сходится к $f(z)$ на $|z| \le R$, то по лемме Фату, на основании (7.3), получим оценку

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+\Big(\sup_{0\le r\le R} |f(r\zeta)|\Big)\,\sigma(d\zeta) \le C,$$

справедливую для всех $0 \le R < 1$. При $R \to 1-$ получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \ln_+ M_{rad} f(\zeta)\,\sigma(d\zeta) \le C$$

и, следовательно, семейство $\{\ln_+ |f(r\zeta)|, \zeta \in \Gamma\}_{0\le r<1}$ обладает на Γ интегрируемой мажорантой $\ln_+ M_{rad} f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, то есть функция f принадлежит классу M.

7.2. Характеристическое свойство функций класса N_* В. И. Смирнова

Теорема 7.4. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы измеримая функция $\varphi(\zeta)$, определённая на множестве E точек Γ, почти всюду на E совпадала с допустимыми граничными значениями $f(\zeta)$ некоторой функции f класса N_*, состоит в существовании такой последовательности алгебраических многочленов $(p_\nu(z))$, что*

(1) $(p_\nu(\zeta))$ *почти всюду на E сходится к $\varphi(\zeta)$;*

(2) *интегралы последовательности функций* $(\ln_+ |p_\nu(\zeta)|,\ \zeta \in \mathit{\Gamma})$ *равностепенно абсолютно непрерывны на* $\mathit{\Gamma}$.

По форме условие (2) теоремы 7.4 аналогично условиям (2) в теоремах 7.1–7.3. Однако оно, в отличие от остальных, выражает для класса N_* некоторое геометрическое свойство, формулируемое ниже в лемме. Хорошо известно (см. [131]), что функция ρ_{N_*}, задаваемая формулой

$$\rho_{N_*}(f,g) = \int\limits_{\mathit{\Gamma}} \ln(1 + |f(\zeta) - g(\zeta)|)\, \sigma(d\zeta), \quad f, g \in N_*,$$

определяет в N_* метрику, превращая N_* в линейно-топологическое пространство. Читатель легко может заметить, что метрика ρ_{N_*} совпадает с сужением метрики ρ_N пространства Островского–Неванлинны N на пространство Смирнова N_*.

Лемма 7.5. *Множество X пространства N_* ограничено в линейно-топологическом смысле тогда и только тогда, когда интегралы семейства функций* $\{\ln_+ |f(\zeta)|,\ \zeta \in \mathit{\Gamma}\}_{f \in X}$ *равностепенно абсолютно непрерывны на* $\mathit{\Gamma}$.

Доказательство. Если X ограничено в N_*, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha_0 > 0$, что при $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \le \alpha_0$, выполнено $\rho_{N_*}(0, \alpha f) < \varepsilon/2$. В частности, для $\alpha = \alpha_0$ имеем

$$\int\limits_{\mathit{\Gamma}} \ln(1 + \alpha_0 |f(\zeta)|)\, \sigma(d\zeta) < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда, используя неравенство (2.18) из пункта 2.2.2, имеем

$$\int\limits_F \ln(1 + |f(\zeta)|)\, \sigma(d\zeta) \le \int\limits_F \ln(1 + \alpha_0 |f(\zeta)|)\, \sigma(d\zeta) + \\ + \int\limits_F \ln\Big(1 + \frac{1}{\alpha_0}\Big)\, \sigma(d\zeta) < \frac{\varepsilon}{2} + \ln\Big(1 + \frac{1}{\alpha_0}\Big)\sigma F, \quad f \in X,$$

для любого измеримого множества F на $\mathit{\Gamma}$. Следовательно, при $\sigma F < \dfrac{\varepsilon}{2}\Big[\ln\Big(1 + \dfrac{1}{\alpha_0}\Big)\Big]^{-1} = \delta(\varepsilon)$ справедливо

$$\int\limits_F \ln_+ |f(\zeta)|\, \sigma(d\zeta) \le \int\limits_F \ln(1 + |f(\zeta)|)\, \sigma(d\zeta) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad f \in X,$$

то есть интегралы семейства $\{\ln_+ |f(\zeta)|,\ \zeta \in \mathit{\Gamma}\}_{f \in X}$ равностепенно абсолютно непрерывны на $\mathit{\Gamma}$.

Обратно, в силу неравенства $\ln(1+a) \le \ln_+ a + \ln 2$, $a \ge 0$, из условия равностепенной абсолютной непрерывности интегралов семейства функций $\{\ln_+ |f(\zeta)|,\ \zeta \in \Gamma\}_{f\in X}$ вытекает равностепенная абсолютная непрерывность интегралов семейства $\{\ln(1+|f(\zeta)|),\ \zeta \in \Gamma\}_{f\in X}$, а также ограниченность этого семейства в метрике $L^1(\Gamma,\sigma)$. Действительно, для $\varepsilon = 1$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при $\sigma F < \delta$ выполнено

$$\int\limits_\Gamma \ln(1+|f(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta) < \varepsilon = 1, \quad f \in X.$$

Разбивая Γ на конечное число K частей $F_1,\dots,F_K$ меры меньше δ, получим

$$\int\limits_\Gamma \ln(1+|f(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta) = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{F_k} \ln(1+|f(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta) < K$$

для всех $f \in X$.

На основании доказанных двух свойств установим ограниченность множества X в пространстве N_*. Для произвольного $\varepsilon > 0$ находим такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого измеримого множества F на Γ с $\sigma F < \delta(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_F \ln(1+|f(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $f \in X$, и для $\delta(\varepsilon) > 0$ находим такое $\lambda > 0$, что множество $E_\lambda = \{\zeta \in \Gamma \mid |f(\zeta)| > \lambda\}$ имеет меру $\sigma E_\lambda \le K/\ln(1+\lambda) < \delta(\varepsilon)$. Тогда, считая $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \le 1$, получаем

$$\rho_{N_*}(0,\alpha f) = \int\limits_\Gamma \ln(1+|\alpha f(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta) \le \int\limits_{E_\lambda} \ln(1+|f(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta) + \\ + \int\limits_{\Gamma\setminus E_\lambda} \ln(1+|\alpha|\lambda)\,\sigma(d\zeta) < \frac{\varepsilon}{2} + \ln(1+|\alpha|\lambda)$$

для всех $f \in X$. Выбирая $0 < \alpha_0 \le 1$ таким, чтобы $\ln(1+|\alpha|\lambda) < \varepsilon/2$ при $|\alpha| \le \alpha_0$, имеем $\rho_{N_*}(0,\alpha f) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ для всех $f \in X$, то есть множество X ограничено в N_*.

Доказательство (теоремы 7.4). Так как для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ и любой $g \in N_*$ справедливы неравенства $\rho_{N_*}(0,\alpha g_r) \le \rho_{N_*}(0,\alpha g)$, в которых $g_r(z) = g(rz)$, $z \in G$, для всех $0 \le r < 1$, и последовательность $(p_\nu(z))$, в силу условия (2) и леммы 7.5, ограничена в N_*, то, обозначая $p_{r\nu}(z) = p_\nu(rz)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $z \in G$, $0 \le r < 1$, заключаем, что в N_*

ограничено множество $\{p_{r\nu},\ \nu \in \mathbb{N}, 0 \leq r < 1\}$ и, следовательно, по лемме 7.5 равностепенно абсолютно непрерывны интегралы семейства $\{\ln_+ |p_\nu(r\zeta),\ \zeta \in \Gamma\}_{\nu\in\mathbb{N},0\leq r<1}$ на Γ. Согласно теореме 7.1, $(p_\nu(z))$ сходится к некоторой функции f класса N равномерно на компактах области G. Поэтому, переходя при каждом фиксированном $0 \leq r < 1$ к пределу при $\nu \to \infty$, получим, что свойством равностепенной абсолютной непрерывности обладают интегралы семейства $\{\ln_+ |f(r\zeta)|,\ \zeta \in \Gamma\}_{0\leq r<1}$, то есть что функция f принадлежит классу N_*.

Необходимость условий теоремы 7.4, с учётом леммы 7.5, доказывается так же, как в теореме 7.1.

Замечание 7.6. В одномерном случае ($n = 1$) утверждения теорем 7.1–7.4 для классов N, N_* и H^p доказаны Г. Ц. Тумаркиным ([41, гл. II, §8]), для классов N^q — Р. Мештровичем ([104]; см. также монографию Р. Мештровича и Ж. Павичевича [105]), для класса M — в [5].

Замечание 7.7. Результаты этой главы опубликованы в [16].

8

Линейные изометрии

В главе изучаются линейные изометрии пространств И. И. Привалова и пространств M^q $(q > 0)$. В качестве следствия устанавливается, что в случае $q > 1$ множества линейных изометрий для пространств N^q и M^q различны, что указывает на различие этих классов как метрических пространств. Дополнительно устанавливаются некоторые свойства инъективных линейных изометрий пространств M^q $(q > 0)$ специального вида.

8.1. Сведения о линейных изометриях пространств голоморфных функций

В параграфе обсуждаются различные результаты, относящиеся к линейным изометриям пространств голоморфных функций. Под линейной изометрией линейного и метрического пространства всюду далее понимается линейное и изометричное отображение этого пространства в себя (не обязательно сюръективное).

8.1.1. Линейные изометрии пространств H^p

Вопрос об описании множеств линейных изометрий функциональных пространств возник практически одновременно с возникновением функционального анализа; при этом обычно рассматривались сюръективные изометрии этих пространств (см. [2, разд. XI]). Общий вид сюръективной линейной изометрии пространства L^p $(1 \leq p \neq 2)$ интегрируемых по Лебегу и пространства C непрерывных на отрезке функций нашёл С. Банах в своей монографии [2, разд. XI, §5]. Структуру произвольной, не обязательно сюръективной, линейной изометрии пространства L^p $(0 < p \neq 2)$ нашёл Дж. Ламперти в своей статье [96, теорема 3.1].

Одним из самых плодотворных методов изучения линейных изометрий функциональных пространств оказалась техника крайних точек (относительно понятия крайней точки см. [66, гл. V, §6]). Нетрудно видеть, что множество крайних точек единичного шара нормированного пространства инвариантно относительно любой линейной сюръективной изометрии, действующей в этом пространстве. Таким образом, если известна характеристика крайних точек единичного шара, то линейные сюръективные изометрии этого пространства оказываются не чем иным, как перестановкой множества крайних точек единичного шара. На этом пути были описаны множества сюръективных линейных изометрий равномерных алгебр (алгебр непрерывных функций с равномерной нормой); при этом обычно используется приём перехода к линейным сюръективным изометриям пространства, сопряжённого к исходному (см. [83, гл. 9]). Однако таким способом невозможно найти, например, линейные сюръективные изометрии пространств Лебега L^p ($p \geq 1$). Действительно, у единичного шара пространства L^1 вообще нет крайних точек, в то время как для пространств L^p ($p > 1$) крайними точками единичного шара будут все точки единичной сферы (см. [70, гл. 7, §6]). Так что и в том и в другом случае крайние точки единичного шара не дают никакой информации о структуре изометрии пространства L^p. Лучше обстоит дело, если вместо пространства L^1 рассматривать его голоморфный аналог — пространство Харди H^1. В этом случае, как показали К. де Леу и У. Рудин (см. [97, теорема 1]), крайними точками единичного шара пространства H^1 являются внешние функции единичной нормы, то есть функции вида

$$f(z) = C \exp \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, p(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi},$$

где $C \in T$ и p — некоторая действительная интегрируемая функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ с нормирующим условием

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{p(\theta)}\, \frac{d\theta}{2\pi} = 1.$$

Используя эту характеристику крайних точек, К. де Леу сначала в [98], а затем совместно с У. Рудиным и Дж. Вермером в [99, теорема 2] нашёл общий вид линейных сюръективных изометрий пространства H^1 — они имеют вид

$$(If)(\lambda) = \alpha\, \tau'(\lambda)\, f(\tau(\lambda)), \quad \lambda \in U, \quad f \in H^1, \tag{8.1}$$

для некоторого числа $\alpha \in T$ и некоторого конформного отображения τ единичного круга на себя (см. также [83]). Их доказательство опиралось на описание множества линейных сюръективных изометрий пространства H^∞, полученное методами равномерных пространств. Отметим, что почти одновременно с де Леу, Рудиным и Вермером линейные сюръективные изометрии пространства H^∞ (неявно) были найдены М. Нагасавой (см. [109, теоремы 2 и 3]). Сюръективные линейные изометрии пространства H^∞ имеют вид

$$(If)(\lambda) = \alpha\, f(\tau(\lambda)), \quad \lambda \in U, \quad f \in H^\infty, \tag{8.2}$$

для некоторого числа $\alpha \in T$ и некоторого конформного отображения τ единичного круга на себя (см. [83]). Такой же вид имеют сюръективные линейные изометрии пространства A, состоящего из функций, голоморфных внутри и непрерывных на замыкании единичного круга U (см. [83]). Интересно, что до сих пор, насколько это известно, не найден общий вид линейных (не обязательно сюръективных) изометрий для пространства H^∞, хотя для пространства A аналогичная проблема решена (см. [71]). В случае $1 < p < +\infty$ все точки единичной сферы являются крайними для единичного шара пространства H^p, так что приведённый выше метод здесь неприменим. Дальнейшее развитие методов теории равномерных пространств для изучения изометрий пространств голоморфных функций см. в работах Ж. Майера [34], [35] и М. А. Станева [43].

Итак, техника крайних точек позволяет описывать линейные сюръективные изометрии пространств H^p лишь в двух частных случаях: $p = 1$ и $p = +\infty$. Поворотной в этом отношении стала статья Ф. Форелли [74](1964), в которой был получен общий вид линейных изометрий пространств H^p для всех конечных положительных показателей $p \neq 2$, безотносительно к тому, какие изометрии рассматриваются — инъективные или сюръективные. Его метод заключался в изучении «аналитических» свойств квазинормы пространства H^p и, по-видимому, является самым общим и плодотворным, не основанным ни на каких соображениях «геометрического» типа. Ввиду важности работы Ф. Форелли, приведём теорему в её оригинальной формулировке. Относительно понятия внутренней функции см. ниже.

Теорема 8.1 (Ф. Форелли [74]). *Пусть $0 < p < +\infty$, $p \neq 2$ и I — линейная изометрия пространства H^p. Тогда существует такая непостоянная внутренняя функция ϕ и такая функция F класса H^p, что*

$$If = F\, f(\phi), \quad f \in H^p, \tag{8.3}$$

причём функции ϕ и F связаны соотношением

$$\int\limits_X |F^*|^p\, d\sigma = \int\limits_X \frac{1}{P(\phi)}\, d\sigma \tag{8.4}$$

для каждого множества X из $\Sigma(\phi)$, где $\Sigma(\phi)$ и $P(\phi)$ обозначают, соответственно, σ-алгебру и ядро Пуассона, порождённые внутренней функцией ϕ.

Обратно, если функция $F \in H^p$ и внутренняя функция ϕ связаны соотношением (8.4), то отображение (8.3) является линейной изометрией H^p.

Здесь $P(\phi)$ обозначает функцию $P(\phi(0), e^{i\theta})$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, где P — ядро Пуассона (1.12) для единичного круга U, а $\Sigma(\phi)$ — совокупность подмножеств T вида $X \triangle Z$, где $X \in \phi^{-1}(\Sigma)$, Σ обозначает σ-алгебру σ-измеримых множеств на T, $Z \in \Sigma$, $\sigma Z = 0$, и знак $\triangle$ обозначает операцию симметрической разности множеств (см. [74]).

Случай $p = 2$, исключённый в условии теоремы, соответствует случаю гильбертова пространства, когда H^2, как и всякое гильбертово пространство, имеет необозримо много изометрий.

Как следствие основной теоремы Ф. Форелли получил описание сюръективных линейных изометрий пространства H^p.

Теорема 8.2 (Ф. Форелли [74]). *Пусть $0 < p < +\infty$, $p \neq 2$ и I — линейная изометрия H^p на всё H^p.*

Тогда

$$If = b\,(\phi')^{1/p}\, f(\phi), \tag{8.5}$$

где ϕ — некоторое конформное отображение единичного круга на себя и $|b| = 1$.

Обратно, если $|b| = 1$ и ϕ — конформное отображение единичного круга на себя, то (8.5) определяет линейную изометрию H^p на всё H^p.

Заметим, что в частном случае $p = 1$ формула (8.5) содержит формулу (8.1), а формулу (8.2) можно рассматривать как предел формулы (8.5) при $p \to +\infty$.

На многомерный случай результат Ф. Форелли распространялся несколькими авторами (см. [125], [75], [117], [94]). Пожалуй, окончательную форму этот результат приобрёл в работе [94]. Ограничимся результатом в формулировке У. Рудина, как раз охватывающей случай шара и поликруга. Чтобы сформулировать эту теорему, понадобятся обобщения понятий внутренней функции и внутреннего отображения на случай функций нескольких комплексных переменных.

Определение 8.3. *Голоморфная функция ψ называется внутренней в области G, если она ограничена и её радиальные граничные значения ψ^* (которые существуют почти всюду на Γ по теореме из пункта 1.2.2) равны единице по абсолютной величине почти всюду на Γ. Аналогичным образом, голоморфное отображение $\phi\colon G \to \mathbb{C}^n$ называется внутренним в области G, если оно ограничено и его радиальные граничные значения $\phi^*(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, определяемые, как и для функций, по формуле (1.29) и существующие почти всюду на Γ согласно теореме пункта 1.2.2, принадлежат Γ для почти всех $\gamma \in \Gamma$.*

Относительно определения внутренних функций и отображений см. [118, гл. 19, §1, п. 1 и §3, п. 4] и [116, гл. V, §2, определение 1]. Заметим, что внутренние функции и отображения действуют на самом деле в $\overline{U}$ и $\overline{G}$ соответственно, в чём нетрудно убедиться с помощью теорем Смирнова (см. пункт 2.1.3) и интегральных неравенств Пуассона для ограниченных голоморфных функций. Каждое внутреннее отображение ϕ посредством радиальных граничных значений порождает измеримое отображение $\phi^* : \varGamma \to \varGamma$, и, аналогично, внутренняя функция ψ порождает измеримую функцию $\psi^* : \varGamma \to T$.

Теорема 8.4 (У. Рудин [117]). *Пусть $0 < p < +\infty$ и $p \neq 2$. Для любой линейной изометрии I пространства H^p найдётся такая функция $F \in H^p$ и такое внутреннее отображение ϕ области G, что*

$$(If)(z) = F(z)f(\phi(z)), \quad z \in G, \quad f \in H^p, \tag{8.6}$$

причём F и ϕ связаны соотношением

$$\int\limits_{\varGamma} h(\phi^*(\gamma))|F^*(\gamma)|^p \,\sigma(d\gamma) = \int\limits_{\varGamma} h(\gamma)\,\sigma(d\gamma) \tag{8.7}$$

для каждой ограниченной борелевской на $\varGamma$ функции h.

Обратно, если функция $F \in H^p$ и внутреннее отображение ϕ области G связаны соотношением (8.7) для каждой ограниченной борелевской функции h на $\varGamma$, то (8.6) определяет линейную изометрию пространства H^p.

Заметим, что эта теорема в чём-то созвучна по формулировке теореме 3.1 из [96], описывающей линейные изометрии пространств L^p. Относительно сюръективных линейных изометрий пространств H^p см. [118, гл. 7, §5, теорема 6] и [125].

Приведём также теорему, описывающую общий вид линейных сюръективных изометрий пространства H^∞, которая справедлива также для пространства A функций, голоморфных внутри и непрерывных на замыкании области G.

Теорема 8.5 (П. Р. Ахерн, Р. Шнайдер [56]). *Для того чтобы отображение I было линейной сюръективной изометрией пространства H^∞, необходимо и достаточно, чтобы I для каждой функции $f \in H^\infty$ имело вид*

$$(If)(z) = \alpha\, f(\phi(z)), \quad z \in G,$$

где $\alpha \in T$ и ϕ — некоторый автоморфизм области G.

8.1.2. Линейные изометрии пространства N_*

Опираясь на описание линейных изометрий пространств H^p, полученное У. Рудиным, К. Стефенсон нашёл общий вид линейных изометрий пространства Смирнова N_*. Напомним, что метрика в пространстве N_* индуцируется метрикой пространства N (см. формулу (1.20)).

Теорема 8.6 (К. Стефенсон [133]). *Для того чтобы отображение I было линейной изометрией пространства N_*, необходимо и достаточно, чтобы для всех функций f из N_* оно имело вид*

$$(If)(z) = \psi(z)f(\phi(z)), \quad z \in G, \tag{8.8}$$

где ψ — некоторая внутренняя функция в области G и ϕ — некоторое внутреннее отображение области G, радиальные граничные значения которого сохраняют меру σ на Γ.

Непосредственным следствием сформулированной выше теоремы является характеристика линейных сюръективных изометрий пространства N_*.

Теорема 8.7 (К. Стефенсон [133]). *Отображение I представляет собой изометрический автоморфизм пространства N_* тогда и только тогда, когда для всех функций f из N_* оно имеет вид (8.8), где $\psi(z) \equiv \alpha \in T$, а ϕ — автоморфизм области G, оставляющий точку 0 неподвижной.*

Замечание 8.8. Автоморфизмы ϕ из утверждения теоремы 8.7 в случае $G = B_n$ образуют группу $U(n, \mathbb{C})$ унитарных преобразований $\mathbb{C}^n$, а в случае $G = U^n$ — группу $S(n, \mathbb{C})$ преобразований $\mathbb{C}^n$ вида

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\alpha_1 z_{\tau(1)}, \ldots, \alpha_n z_{\tau(n)}),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ и $(\tau(1), \ldots, \tau(n))$ — некоторая перестановка чисел $(1, 2, \ldots, n)$ (см. [133]).

Замечание 8.9. Можно показать (см. [133]), что равномерно непрерывное отображение I из N_* в N_* является линейной изометрией пространства N_* тогда и только тогда, когда оно является линейной изометрией хотя бы двух пространств Харди. В этом случае I будет линейной изометрией всех без исключения пространств Харди. Это обстоятельство напоминает аналогичную ситуацию для изометрий пространств L^p (см. [96, следствие 3.1]).

Замечание 8.10. Хотя работа [133], как видно из её названия, посвящена изучению линейных изометрий пространства Неванлинны N, результаты, относящиеся к пространству N, не такие полные. Известно только (см. [133]), что

(1) каждая линейная изометрия пространства N пространство N_* переводит в N_* и дополнение к нему $N \setminus N_*$ переводит в $N \setminus N_*$;
(2) не всякое отображение вида (8.8) является линейной изометрией N, даже если ψ — внутренняя функция, а $\phi(z) = z$, $z \in G$;
(3) в случае $n = 1$ отображение $f \mapsto \psi f$ является линейной изометрией пространства N тогда и только тогда, когда ψ — произведение Бляшке (относительно определения произведения Бляшке см. [41]).

Неизвестно даже, всякая ли линейная изометрия N имеет вид (8.8) на всём N (а не только на N_*, как следует из теоремы 8.6).

8.2. Изометрии пространств $\ln_+^q L$ $(q > 0)$

Параграф носит вспомогательный характер, его результаты будут использованы при доказательстве основной теоремы пункта 8.3. Здесь доказываются некоторые факты, относящиеся к линейным (или положительно-однородным) изометриям пространства $\ln_+^q L$. В качестве следствия получено описание множества линейных изометрий пространства $\ln_+^q L$.

8.2.1. Пространство $\ln_+^q L$ $(q > 0)$

Пусть (X, μ) — измеримое пространство с конечной неотрицательной мерой.

Определение 8.11. *Пусть $q > 0$. Измеримая функция f на X принадлежит классу $\ln_+^q \mathscr{L} = \ln_+^q \mathscr{L}(X, \mu)$, если функция $\ln_+^q |f|$ интегрируема на X по мере μ.*

С учётом неравенства (3.12) и конечности меры μ, условие принадлежности измеримой функции f классу $\ln_+^q \mathscr{L}$ равносильно конечности числовой характеристики

$$|f|_{\ln_+^q L} = \left[\int\limits_X \ln^q(1 + |f(x)|)\, \mu(dx) \right]^{\alpha_q/q}, \quad \alpha_q = \min(1, q). \tag{8.9}$$

Характеристика $|\cdot|_{\ln_+^q L}$ обладает на множестве всех измеримых на X функций свойствами

(1) $|-f|_{\ln_+^q L} = |f|_{\ln_+^q L}$;
(2) $|f + g|_{\ln_+^q L} \le |f|_{\ln_+^q L} + |g|_{\ln_+^q L}$;
(3) $|fg|_{\ln_+^q L} \le |f|_{\ln_+^q L} + |g|_{\ln_+^q L}$,

вытекающими непосредственно из неравенств (2.18), а также из неравенства треугольника в пространстве $\mathscr{L}^q(X, \mu)$.

Свойства (1) и (2) характеристики $|\cdot|_{\ln_+^q L}$ позволяют заключить, что функция

$$\rho_{\ln_+^q L}(f, g) = |f - g|_{\ln_+^q L}, \quad f, g \in \ln_+^q \mathscr{L}, \tag{8.10}$$

имеет все свойства полуметрики на классе $\ln_+^q \mathscr{L}$. Отождествляя измеримые функции, совпадающие почти всюду, в классы *эквивалентных* по мере μ функций и вводя расстояние между этими классами посредством расстояния между отдельными их представителями, приходим к метрическому пространству $(\ln_+^q L, \rho_{\ln_+^q L})$, которое и будет предметом нашего изучения в этом параграфе и которое для краткости обозначим символом $\ln_+^q L$. Отметим, что результаты данного пункта сохраняют свою силу и в случае не обязательно конечной меры, однако при этом приходится соответствующим образом усложнять определение класса измеримых функций, для которого определена полуметрика $\rho_{\ln_+^q L}$.

Теорема 8.12. *Класс* $\ln_+^q L$ *является* F*-пространством относительно метрики* $\rho_{\ln_+^q L}$. *Кроме того, класс* $\ln_+^q L$ *является* F*-алгеброй, в которой* $|fg|_{\ln_+^q L} \le |f|_{\ln_+^q L} + |g|_{\ln_+^q L}$ *для всех* $f,\, g \in \ln_+^q L$.

Доказательство. Отметим, что доказательство теоремы по сути повторяет доказательство теоремы пункта 3.2.1, поэтому детали доказательства будут иногда опускаться. При рассмотрении элементов пространства $\ln_+^q L$ будем отождествлять классы эквивалентных по мере μ функций с отдельными представителями этих классов, то есть с некоторыми измеримыми функциями, — пользуясь соответствующими обозначениями и терминологией.

Замкнутость пространства $\ln_+^q L$ относительно операций поточечного сложения и умножения функций следует из свойств (2) и (3) характеристики $|\cdot|_{\ln_+^q L}$.

Свойство инвариантности метрики $\rho_{\ln_+^q L}$ относительно операции параллельного переноса следует непосредственно из её определения (8.10).

Покажем теперь, что если некоторая последовательность функций $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ln_+^q L$ сходится по метрике $\rho_{\ln_+^q L}$ к нулю пространства $\ln_+^q L$, то для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ последовательность функций (λf_k) также сходится к нулю пространства $\ln_+^q L$ по метрике $\rho_{\ln_+^q L}$. Это свойство следует непосредственно из неравенства $|\lambda f|_{\ln_+^q L} \le \max(1, |\lambda|^{\alpha_q})|f|_{\ln_+^q L}$, аналогичного неравенству (3.5) и доказываемого аналогично. Действительно, если $f_k \to 0$ в метрике пространства $\ln_+^q L$, то $\rho_{\ln_+^q L}(f_k, 0) = |f_k|_{\ln_+^q L} \to 0$ и, значит, $\rho_{\ln_+^q L}(\lambda f_k, 0) = |\lambda f_k|_{\ln_+^q L} \le \max(1, |\lambda|^{\alpha_q})|f_k|_{\ln_+^q L} \to 0$, то есть $\lambda f_k \to 0$ по метрике $\rho_{\ln_+^q L}$.

Далее покажем, что если последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ бесконечно малая, то, какова бы ни была функция $f \in \ln_+^q L$, последовательность функций $(\lambda_k f)$ сходится к нулевому элементу пространства $\ln_+^q L$ относительно метрики $\rho_{\ln_+^q L}$. Действительно, так как $\lambda_k \to 0$, то без ограничения общности можем считать, что $|\lambda_k| \le 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\ln^q(1 + |\lambda_k f(x)|) \le \ln^q(1 + |f(x)|)$ для всех $x \in X$ и, так как $\lambda_k \to 0$, $\ln^q(1+|\lambda_k f(x)|) \to 0$ для почти всех $x \in X$. Согласно предельной теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\int\limits_X \ln^q(1 + |\lambda_k f(x)|)\, \mu(dx) \to 0 \text{ при } k \to +\infty,$$

откуда $|\lambda_k f|_{\ln_+^q L} \to 0$; последнее и означает, что $\lambda_k f \to 0$ по метрике $\rho_{\ln_+^q L}$.

Уже доказанных свойств метрики $\rho_{\ln_+^q L}$ достаточно, чтобы заключить, что пространство $\ln_+^q L$ является квазинормированным относительно характеристики $|\cdot|_{\ln_+^q L}$ (определение квазинормированного пространства см. в [144, гл. I, §2, определение 2]). Чтобы доказать утверждение о том, что пространство $\ln_+^q L$ действительно является F-пространством относительно метрики $\rho_{\ln_+^q L}$, осталось показать его полноту. Считая известной полноту пространства всех измеримых функций относительно метрики сходимости по мере μ, доказательство полноты пространства $\ln_+^q L$ проводится стандартным способом, таким же образом, как и для пространств Лебега L^p. Действительно, пусть (f_k) — произвольная фундаментальная по метрике $\rho_{\ln_+^q L}$ последовательность функций на X. Из неравенства Чебышёва следует, что

$$\mu\{x\in X \mid |f_k(x)-f_l(x)|\geq\delta\}\leq$$
$$\leq\frac{1}{\ln^q(1+\delta)}\int\limits_X \ln^q(1+|f_k(x)-f_l(x)|)\,\mu(dx),\quad k,l\in\mathbb{N},\quad \delta>0,$$

поэтому из фундаментальности последовательности (f_k) по метрике $\rho_{\ln_+^q L}$ вытекает её фундаментальность в метрике сходимости по мере μ. Так как метрика сходимости по мере полная, то существует измеримая функция $f(x)$, $x\in X$, к которой последовательность функций (f_k) сходится по мере μ. Согласно теореме Ф. Рисса, из последовательности (f_k) можно выделить подпоследовательность $\left(f_{k_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$, $k_{m+1}>k_m$, $k_m\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, сходящуюся к f уже почти всюду (относительно меры μ). Опять воспользуемся фундаментальностью последовательности (f_k) по метрике $\rho_{\ln_+^q L}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $K\in\mathbb{N}$, что неравенство $\rho_{\ln_+^q L}(f_k,f_l)\leq\varepsilon$ справедливо для всех натуральных $k,l\geq K$, то есть

$$\left[\int\limits_X \ln^q(1+|f_k(x)-f_l(x)|)\,\mu(dx)\right]^{\alpha_q/q}\leq\varepsilon,\quad k,l\geq K.$$

Полагая в этом неравенстве l равным k_m и устремляя m к бесконечности, по предельному неравенству Фату–Лебега (см. [106, гл. II, §1, T7]) получим

$$\left[\int\limits_X \ln^q(1+|f_k(x)-f(x)|)\,\mu(dx)\right]^{\alpha_q/q}\leq\varepsilon,\quad k\in\mathbb{N},\quad k\geq K,$$

то есть $|f_k-f|_{\ln_+^q L}\leq\varepsilon$ для любого натурального $k\geq K$. В частности, функция $f_K-f\in\ln_+^q L$, откуда, в силу доказанной выше линейности класса $\ln_+^q L$, заключаем, что $f\in\ln_+^q L$. Более того, из приведённых выше рассуждений следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $K\in\mathbb{N}$, что $\rho_{\ln_+^q L}(f_k,f)\leq\varepsilon$ для всех натуральных $k\geq K$. Это означает, что $f_k\to f$ по метрике $\rho_{\ln_+^q L}$ и, следовательно, искомая полнота пространства $\ln_+^q L$ доказана.

Неравенство $|fg|_{\ln_+^q L}\leq|f|_{\ln_+^q L}+|g|_{\ln_+^q L}$ было доказано выше свойством (3) характеристики $|\cdot|_{\ln_+^q L}$. Утверждение об F-алгебраичности пространства $\ln_+^q L$ доказывается аналогично теореме из пункта 3.2.2.

Замечание 8.13. Пространство И. И. Привалова N^q $(q > 1)$ посредством радиальных граничных значений (1.29) вкладывается в пространство $\ln_+^q L(\varGamma, \sigma)$: $f \mapsto [f^*]$, $f \in N^q$, где символом $[f^*]$ обозначен класс функций, совпадающих σ-почти всюду с функцией f^*; функция f^* принадлежит классу $\ln_+^q \mathscr{L}$ по теореме 2.1. Это вложение линейно и изометрично (см. выражение (2.10)). Следовательно, пространство N^q можно отождествить с некоторым замкнутым линейным подпространством пространства $\ln_+^q L$.

8.2.2. Оценки ряда Тейлора функции $(\ln(1+x)/x)^q$

В пункте доказываются некоторые оценки приближения функции $(\ln(1+x)/x)^q$ частичными суммами её ряда Тейлора в нуле. Данные оценки понадобятся для обоснования законности предельного перехода под знаком интеграла в доказательстве основной теоремы этого параграфа.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad x > 0, \tag{8.11}$$

доопределив её при $x = 0$ значением 1. Нетрудно видеть, что функция (8.11) положительна и невозрастает на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 8.14. *Для функции (8.11) справедливы неравенства*

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(x) \geq 0 \ \textit{при всех}\ x > 0 \ \textit{и}\ l \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Если $l = 0$, то неравенство $(-1)^l \varphi^{(l)}(x) \geq 0$ означает $\varphi(x) \geq 0$, что действительно имеет место при каждом $x > 0$.

Пусть теперь $l \in \mathbb{N}$. Найдём явное выражение для l-ой производной функции (8.11), используя правило Лейбница дифференцирования произведения. Имеем

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} \mathrm{C}_l^k (\ln(1+x))^{(k)} (x^{-1})^{(l-k)}, \quad x > 0.$$

Если $k = 0$, то $(\ln(1+x))^{(k)} = \ln(1+x)$ и $(x^{-1})^{(l-k)} = (-1)^l l! x^{-l-1}$, $x > 0$. Если же $k > 0$, то $(\ln(1+x))^{(k)} = ((1+x)^{-1})^{(k-1)} = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ и $(x^{-1})^{(l-k)} = (-1)^{l-k}(l-k)! x^{-1-l+k}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{(l)} = \frac{(-1)^l l! \ln(1+x)}{x^{l+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \frac{(-1)^{l-k}(l-k)!}{x^{l+1-k}} =$$

$$= \frac{(-1)^l l! \ln(1+x)}{x^{l+1}} + \frac{(-1)^{l-1} l!}{x^{l+1}} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \left(\frac{x}{1+x} \right)^k =$$

$$= \frac{(-1)^l l!}{x^{l+1}} \left[\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \left(\frac{x}{1+x} \right)^k \right], \quad x > 0.$$

В силу разложения

$$\ln(1+x) = -\ln \frac{1}{1+x} = -\ln \left(1 - \frac{x}{1+x} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x}{1+x} \right)^k, \quad x > -\frac{1}{2},$$

выражение в квадратных скобках положительно для всех $x > 0$, откуда и следуют искомые неравенства леммы.

Свойство функции (8.11), доказанное в лемме 8.14, имеет особое название.

Определение 8.15. *Действительная функция φ называется вполне монотонной на промежутке $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, если она бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}_+^*$ и*

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(x) \geq 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+^*$ и $l \in \mathbb{Z}_+$.

Таким образом, функция (8.11) — вполне монотонная на $\mathbb{R}_+^*$. С. Н. Бернштейн доказал, что условие полной монотонности действительной на промежутке $\mathbb{R}_+^*$ функции $\varphi(x)$ эквивалентно любому из следующих двух условий:

(1) $(-1)^l \Delta_{h_l} \ldots \Delta_{h_1} \varphi(x) \geq 0$ для всех $l \in \mathbb{Z}_+$ и всех $x, h_1, \ldots, h_l \in \mathbb{R}_+^*$, где символ Δ_h, $h > 0$, обозначает оператор взятия конечной разности: $\Delta_h \varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$, $x > 0$;

(2) существует такая счётно-аддитивная неотрицательная мера ν на действительной полупрямой $\mathbb{R}_+$, что

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, \nu(dt), \quad x > 0;$$

мера ν из последнего представления единственна (см. [106, гл. XI, §2 «Применение теоремы Крейна–Мильмана»]). Заметим, что на основании последней эквивалентности лемму 8.14 можно доказать без непосредственного дифференцирования, если воспользоваться тем, что функция (8.11) является преобразованием Лапласа положительной функции

$$\mathrm{ei}(t) = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} \, d\tau, \quad t > 0,$$

называемой интегральной экспонентой.

Лемма 8.16. *Произведение или неотрицательная линейная комбинация вполне монотонных функций на положительной полупрямой — вполне монотонная функция на положительной полупрямой.*

Доказательство. Предположим, что функции f и g вполне монотонны на $\mathbb{R}_+^*$. Тогда f и g дифференцируемы на $\mathbb{R}_+^*$ бесконечное число раз, поэтому функция fg также бесконечно дифференцируема на промежутке $\mathbb{R}_+^*$. Согласно правилу Лейбница дифференцирования произведения, имеем

$$(fg)^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{l} \mathrm{C}_l^k f^{(k)}(x) g^{(l-k)}(x), \quad x > 0, \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Так как функции f и g — вполне монотонные, то $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ и $(-1)^{l-k} g^{(l-k)}(x) \geq 0$ при всех $x > 0$, откуда

$$(-1)^l (fg)^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{l} \mathrm{C}_l^k (-1)^k f^{(k)}(x) (-1)^{l-k} g^{(l-k)}(x) \geq 0, \quad x > 0,$$

то есть fg также вполне монотонна на $\mathbb{R}_+^*$.

Утверждение о замкнутости класса вполне монотонных функций относительно взятия неотрицательных линейных комбинаций следует из свойства линейности производной.

Замечание 8.17. Лемму можно было бы доказать, используя свойства преобразования Лапласа. Действительно, свёртка мер при преобразовании Лапласа переходит в поточечное произведение их образов, и так как множество неотрицательных мер замкнуто относительно операции взятия свёртки, то первое утверждение леммы следует из критерия (2) полной монотонности действительной функции на полупрямой (см. выше). Аналогичным образом, второе утверждение леммы следует из свойства замкнутости множества неотрицательных мер относительно операции взятия неотрицательных линейных комбинаций.

Лемма 8.18. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и*

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^k = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \, x^l, \quad |x| < 1. \tag{8.12}$$

Тогда $c_l \neq 0$ *для всех* $l \in \mathbb{Z}_+$ *и*

$$(-1)^l \left[\left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^k - \sum_{m=0}^{l-1} c_m x^m \right] \geq 0, \quad x > 0. \tag{8.13}$$

Доказательство. Заметим, что ряд Тейлора для функции (8.11) в нуле имеет областью сходимости интервал $|x| < 1$, поэтому ряд Тейлора функции $(\ln(1+x)/x)^k$ также сходится в этом интервале. Согласно двум предыдущим леммам, функция φ^k вполне монотонна на луче $\mathbb{R}_+^*$ и, следовательно, функция $|(\varphi^k)^{(l)}|$ невозрастает на $\mathbb{R}_+$ для каждого $l \in \mathbb{Z}_+$. Если бы коэффициент Тейлора $c_l = (\varphi^k)^{(l)}(0)/l!$ равнялся нулю, то отсюда следовало бы, что $(\varphi^k)^{(l)} \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$, то есть функция φ^k была бы многочленом степени меньшей, чем l. Последнее, очевидно, не имеет места. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что производная функция $(\varphi^k)^{(l)}$ не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $\mathbb{R}_+^*$.

Теперь докажем неравенство (8.13). Для этого воспользуемся формулой Тейлора на промежутке $[0,x]$, $x > 0$, с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi^k(x) = \sum_{m=0}^{l-1} c_m x^m + \frac{(\varphi^k)^{(l)}(\xi)}{l!} x^l$$

для некоторого $0 < \xi < x$. Так как, по доказанному выше, функция φ^k вполне монотонна на $\mathbb{R}_+^*$, то $(-1)^l(\varphi^k)^{(l)}(\xi) \geq 0$, то есть неравенство (8.13) доказано.

Нашей следующей задачей будет получение оценки, аналогичной оценке леммы 8.18, для других значений показателя k.

Лемма 8.19. *Пусть $q > 0$ и l — произвольное неотрицательное целое число, не превосходящее $q+1$. Если*

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^q = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k, \quad |x| < 1, \tag{8.14}$$

то $c_l \neq 0$ и

$$(-1)^l \left[\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^q - \sum_{k=0}^{l-1} c_k x^k\right] \geq 0, \quad x > 0. \tag{8.15}$$

Доказательство. В случае $q \in \mathbb{N}$ утверждение леммы представляет собой частный случай утверждения леммы 8.18, так что сразу рассмотрим случай $q \notin \mathbb{N}$. Воспользуемся формулой для производной сложной функции (см., например, [119, гл. III, §7, теорема 21_3]) применительно к композиции функции $y = \varphi(x)$, $x > 0$, рассмотренной в лемме 8.14, и функции $z = y^q$, $y > 0$. Тогда

$$(\varphi^q)^{(l)}(x) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+lk_l=l \\ k_1,\, k_2,\ldots,\, k_l \in \mathbb{Z}_+}} \frac{l!}{k_1!k_2!\ldots k_l!(1!)^{k_1}\ldots(l!)^{k_l}} \times$$

$$\times q(q-1)\ldots(q-k_1-\ldots-k_l+1)\varphi^{q-k_1-\ldots-k_l}(x)(\varphi'(x))^{k_1}\ldots(\varphi^{(l)}(x))^{k_l}, \quad x > 0. \tag{8.16}$$

Функция φ^q, так же как и функция φ, аналитична в интервале $|x| < 1$ (см. формулы (8.12) и (8.14)), так что в последнем тождестве можно перейти к пределу при $x \to 0$ и мы получаем, что формула (8.16) справедлива также и для $x = 0$. Далее, заметим, что каждое из слагаемых в правой части равенства (8.16) имеет знак $(-1)^l$. Действительно, $k_1 + k_2 + \ldots + k_l \le k_1 + 2k_2 + \ldots + lk_l = l \le q + 1$ и, значит, произведение $q(q-1)\ldots(q - k_1 - k_2 - \ldots - k_l + 1)$ положительно ($q \notin \mathbb{N}$!). Кроме того, в силу лемм 8.14 и 8.18, $(-1)^1\varphi'(0) > 0, \ldots, (-1)^l\varphi^{(l)}(0) > 0$, поэтому произведение $(\varphi'(0))^{k_1}\ (\varphi''(0))^{k_2}\ \ldots\ (\varphi^{(l)}(0))^{k_l}$ имеет знак, одинаковый с $(-1)^l$. Поскольку сумма в (8.16) непустая, то значение l-ой производной функции φ^q в нуле не может быть нулевым, и, следовательно, $c_l = (\varphi^q)^{(l)}(0)/l! \neq 0$. Аналогичные рассуждения могут быть проведены для любого $x > 0$ (вместо $x = 0$), а значит, $(-1)^l(\varphi^q)^{(l)}(x) > 0$, $x > 0$. Для того чтобы доказать неравенство (8.15), осталось применить формулу Тейлора на отрезке $[0, x]$, $x > 0$, с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi^q(x) = \sum_{k=0}^{l-1} c_k x^k + \frac{(\varphi^q)^{(l)}(\xi)}{l!} x^l, \quad 0 < \xi < x,$$

и заметить, что $(-1)^l(\varphi^q)^{(l)}(\xi) > 0$.

8.2.3. Изометрии $\ln_+^q L$

В пункте доказывается основной результат этого параграфа. Перед его формулировкой напомним некоторые элементарные понятия теории линейных пространств.

Под конусом в линейном пространстве будем понимать конус с вершиной в нуле, то есть множество, замкнутое относительно умножения на положительные числа. Под положительно-однородным отображением из одного конуса в другой (может быть, тот же самый) понимается отображение, однородное с положительными коэффициентами. За символом $\ln_+^q L$ сохраним тот же смысл, что и в пункте 8.2.1. Стандартную характеристику в пространстве Лебега L^p $(p > 0)$ будем обозначать

$$|f|_{L^p} = \left[\int\limits_X |f(x)|^p\,\mu(dx)\right]^{\alpha_p/p}, \quad f \in L^p, \quad \alpha_p = \min(1, p).$$

В случае $p = +\infty$ под нормой $\|f\|_{L^\infty}$ для измеримой функции f понимают существенный супремум абсолютных значений этой функции, то есть

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{essup}_{x \in X} |f(x)| = \inf_{\substack{Y \subset X \\ \mu Y = 0}} \sup_{x \in X \setminus Y} |f(x)|$$

(см. [119, гл. IV, §4 «Пространства $\mathscr{L}^\infty(\overrightarrow{F})$ и $L^\infty(\overrightarrow{F})$»]).

Теорема 8.20. *Пусть $q > 0$ и положительно-однородное отображение I конуса $C \subseteq \ln_+^q L$ в $\ln_+^q L$ является $\ln_+^q L$-изометричным, то есть*

$$\int_X \ln^q(1 + |f(x)|)\,\mu(dx) = \int_X \ln^q(1 + |If(x)|)\,\mu(dx), \quad f \in C.$$

Тогда отображение I будет также и L^p-изометричным, то есть

$$\int_X |f(x)|^p\,\mu(dx) = \int_X |If(x)|^p\,\mu(dx), \quad f \in C, \tag{8.17}$$

для всех p вида $q + l$, где $l \in \mathbb{Z}_+$ и $l \leq q + 1$. Если $q \in \mathbb{N}$, то утверждение теоремы справедливо для всех $l \in \mathbb{Z}_+$ и тогда I также L^∞-изометрично, то есть

$$\operatorname*{essup}_{x \in X} |f(x)| = \operatorname*{essup}_{x \in X} |If(x)|, \quad f \in C.$$

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по l. Предположим, что положительно-однородное отображение I из конуса $C \subseteq \ln_+^q L$ в $\ln_+^q L$ является $\ln_+^q L$-изометричным. Рассмотрим произвольную функцию $f \in C$ и её образ $g = If$ при отображении I; зафиксируем их на всё оставшееся доказательство.

1. База индукции $\boxed{l = 0}$. Согласно свойству положительной однородности и $\ln_+^q L$-изометричности отображения I, для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\int_X \ln^q(1 + \varepsilon|f(x)|)\,\mu(dx) = \int_X \ln^q(1 + \varepsilon|g(x)|)\,\mu(dx).$$

Поделим обе части последнего равенства на ε^q и занесём число $1/\varepsilon$ под логарифм. Тогда получим

$$\int_X \ln^q(1 + \varepsilon|f(x)|)^{1/\varepsilon}\,\mu(dx) = \int_X \ln^q(1 + \varepsilon|g(x)|)^{1/\varepsilon}\,\mu(dx), \quad \varepsilon > 0.$$

Функции $(1 + \varepsilon|f|)^{1/\varepsilon}$ и $(1 + \varepsilon|g|)^{1/\varepsilon}$, монотонно не убывая, сходятся при ε, убывающем к нулю, к функциям $e^{|f|}$ и $e^{|g|}$ соответственно, поэтому, по предельной теореме Б. Леви (см., например, [29, гл. V, §5, п. 5, теорема 7]), устремляя число ε в последнем равенстве к 0, имеем

$$\int_X |f(x)|^q\,\mu(dx) = \int_X |g(x)|^q\,\mu(dx),$$

то есть равенство (8.17) при $p = q$ доказано.

2. Переход индукции $\boxed{< l \to l}$. Пусть утверждение теоремы справедливо для всех целых неотрицательных $k < l$. Докажем, что тогда оно имеет место и при $k = l$. Предположим дополнительно, что $l \leq q + 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда интеграл в левой части искомого равенства (8.17) при $p = q + l$ конечен. Образуем вспомогательную функцию

$$\chi_\varepsilon(y) = \frac{\ln^q(1+\varepsilon y) - \sum\limits_{k=0}^{l-1} c_k(\varepsilon y)^{q+k}}{\varepsilon^{q+l}}, \quad y \geq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

где $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ обозначают коэффициенты разложения (8.14). Тогда, согласно лемме 8.19 и определению чисел c_l, для функции χ_ε при всех $y \geq 0$ справедливы свойства

$(\alpha)\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\chi_\varepsilon(y) = c_l y^{q+l}$;
$(\beta)\, 0 \leq (-1)^l\chi_\varepsilon(y) \leq C_l y^{q+l}$, $\varepsilon > 0$,

с некоторой конечной постоянной $C_l \geq 0$. Так как функция f принадлежит пространству L^{q+l}, то, в силу конечности меры μ, она принадлежит и пространствам L^p для каждого p вида $p = q+k$, $0 \leq k \leq l$, а также пространству $\ln_+^q L$. По предположению индукции, отображение I является L^p-изометричным для всех $p = q$, $q+1$, …, $q+l-1$. Из положительной однородности и $\ln_+^q L$-изометричности отображения I, а также свойства линейности интеграла Лебега следует, что

$$\int\limits_X \chi_\varepsilon(|f(x)|)\,\mu(dx) = \int\limits_X \chi_\varepsilon(|g(x)|)\,\mu(dx), \quad \varepsilon > 0. \tag{8.18}$$

Согласно свойствам (α) и (β) функции χ_ε, а также предположению об интегрируемости функции $|f|^{q+l}$, к левой части равенства (8.18) применима теорема Лебега об ограниченной сходимости, из которой следует, что левая часть равенства (8.18) сходится при $\varepsilon \to 0+$ к конечному числу, равному интегралу от функции $c_l|f|^{q+l}$ по множеству X. В силу равенства (8.18), правая часть этого равенства также имеет (тот же) конечный предел при $\varepsilon \to 0+$, однако применение теоремы Лебега в данном случае затруднительно, поскольку, вообще говоря, неизвестно, принадлежит ли функция g пространству L^{q+l}. Именно здесь существенным образом будет использовано предположение $l \leq q+1$. Действительно, в этом случае функция $\chi_\varepsilon(|g|)$ знакопостоянна при $\varepsilon \to 0+$ (см. левую часть неравенства (β)). Согласно предельному неравенству Фату–Лебега (см., например, [106, теорема II.T7]) и доказанной выше ограниченности интегралов в правой части равенства (8.18), интеграл функции $c_l|g|^{q+l}$ конечен. По лемме 8.19, $c_l \neq 0$ и, значит, функция $|g|^{q+l}$ интегрируема на X. Поэтому к правой части равенства (8.18) также применима теорема Лебега, согласно которой интеграл в правой части формулы (8.18) сходится при $\varepsilon \to 0+$ к интегралу от функции $c_l|g|^{q+l}$ по множеству X.

Итак, предельный переход при $\varepsilon \to 0+$ в равенстве (8.18) приводит к равенству интегралов функций $c_l|f|^{q+l}$ и $c_l|g|^{q+l}$. Так как $c_l \neq 0$, то этим равенство (8.17) при $p = q + l$ доказано.

В случае, когда функция g принадлежит пространству L^{q+l}, функции f и g в предыдущих рассуждениях следует поменять ролями.

Наконец, в случае, когда обе функции f и g не принадлежат пространству L^{q+l}, равенство (8.17) при $p = q + l$ тривиально.

Доказательство возможности перехода индукции завершено.

Из доказательства перехода индукции видно, что индукция получилась неполной, так как существенным образом использовалось условие $l \le q + 1$. Как следствие, утверждение теоремы справедливо для всех целых неотрицательных $l \le q + 1$. В случае, когда $q \in \mathbb{N}$, лемма 8.18 позволяет провести полную математическую индукцию и, следовательно, справедливо второе утверждение теоремы. Наконец, последнее утверждение (о L^∞-изометричности) следует из соотношения

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty},$$

справедливого (в силу конечности меры μ) для произвольной измеримой на X функции f (см. [119, гл. IV, §4, теорема 50]).

Следствие 8.21 (описание линейных изометрий в $\ln_+^q L$). *Пусть $q > 0$ и I — произвольная линейная изометрия пространства $\ln_+^q L$. Тогда I имеет вид*

$$(If)(x) = h(x)Tf(x), \quad x \in X, \quad f \in \ln_+^q L, \tag{8.19}$$

где T — сохраняющий меру μ изоморфизм множеств на X и $|h(x)| = 1$ почти всюду на множестве TX.

Обратно, если I имеет вид (8.19) для некоторого сохраняющего меру μ изоморфизма множеств T и некоторой измеримой функции h, для которой $|h(x)| = 1$ почти всюду на TX, то I — линейная изометрия пространства $\ln_+^q L$.

Относительно необходимых понятий и обозначений см. статью Дж. Ламперти [96].

Доказательство. Предположим, что I — линейная изометрия пространства $\ln_+^q L$. Положим $C = \ln_+^q L$ и заметим, что всякое линейное отображение I также и положительно-однородно. Согласно доказанной теореме, отображение I является линейной изометрией одновременно двух пространств L^q и L^{q+1}. Применяя следствие 3.1 из работы [96], получаем, что отображение I имеет вид (8.19) на L^q или L^{q+1} (если $q \ne 2$ или $q + 1 \ne 2$ соответственно). Так как L^q и L^{q+1} плотны в $\ln_+^q L$, то отображение I сохраняет вид (8.19) на всём $\ln_+^q L$.

Обратное утверждение тривиально.

8.3. Линейные изометрии пространств И. И. Привалова

Доказательство основной теоремы этого параграфа опирается на теорему 8.20 и описание линейных изометрий пространств Харди H^p, $p > 0$, в шаре и поликруге, принадлежащее У. Рудину (теорема 8.4).

Напомним, что голоморфная функция ψ в G называется внутренней, если она ограничена и $|\psi^*| = 1$ почти всюду на Γ. Аналогично голоморфное отображение $\phi : G \to \overline{G}$ называется внутренним, если $\phi^*(\zeta) \in \Gamma$ для почти всех $\zeta \in \Gamma$.

Теорема 8.22. *Отображение A из N^q, $q > 1$, в себя является линейной изометрией тогда и только тогда, когда оно имеет вид*

$$Af(z) = \psi(z)f(\phi(z)), z \in G, f \in N^q, q > 1, \tag{8.20}$$

где ψ — внутренняя функция и ϕ — внутреннее отображение в G, радиальные граничные значения которого сохраняют меру σ на Γ.

Замечание 8.23. В одномерном случае аналогичный результат был доказан, со слегка отличным от приведенного ниже методом доказательства, в [84]. Отметим, что в одномерном случае внутреннее отображение ϕ (в данном случае функция) сохраняет меру σ на Γ тогда и только тогда, когда $\phi(0) = 0$ (см. [74]). В многомерном случае это уже неверно (см. [118, гл. 19, §3, п. 4]).

Замечание 8.24. Изометрии пространств Привалова имеют в точности тот же вид, что и изометрии пространства Смирнова N_* (см. [133]).

Замечание 8.25. Из доказательства необходимости представления (8.20) в последней теореме видно, что для линейности и изометричности равномерно непрерывного отображения пространства N^q $(q > 1)$ в себя необходимо и достаточно, чтобы оно являлось линейной изометрией хотя бы двух пространств Харди. В этом случае оно будет линейной изометрией одновременно всех пространств Харди. С другой стороны, не каждая линейная изометрия пространства H^p $(p > 0)$ является сужением некоторой линейной изометрии пространства N^q $(q > 1)$; в этом можно убедиться из общего вида сюръективных линейных изометрий пространств H^p $(p \neq 2)$ (см. [118, гл. 7, §5, теорема 6] и [125]).

Доказательство. Необходимость. В силу доказанного в следствии 2.3 выражения для квазинормы $|\cdot|_{N^q}$, $q > 1$, справедливо равенство

$$|f|_{N^q} = \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q(1 + |f^*(\zeta)|)\,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q}, \quad f \in N^q,$$

где $f^*(\zeta)$ — радиальные граничные значения $f(z)$. Поэтому N^q, $q > 1$, изометрически изоморфно некоторому линейному подпространству пространства $\ln_+^q L(\mathit{\Gamma},\sigma)$ с метрикой $\rho_{\ln_+^q L}$; соответствие устанавливается следующим образом: $f \in N^q \mapsto [f^*] \in \ln_+^q L(\mathit{\Gamma},\sigma)$ (ср. с [118, следствие 5.6.8]). В силу этого любая изометрия пространства N^q, $q > 1$, индуцирует изометрию на этом подпространстве в метрике $\rho_{\ln_+^q L}$. Согласно теореме 8.20

$$\int\limits_{\mathit{\Gamma}} |(Af)^*(\zeta)|^p \,\sigma(d\zeta) = \int\limits_{\mathit{\Gamma}} |f^*(\zeta)|^p \,\sigma(d\zeta), \quad f \in N^q, \quad q > 1, \tag{8.21}$$

для всех $p = q + l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $l \le q + 1$; в частности, для $p = q$ и $q + 1$. Так как при $f \in H^p$, $p = q$ или $q + 1$, обе части равенства (8.21) конечны и Af принадлежит классу N^q, $q > 1$, то, по теореме П. Я. Полубариновой-Кочиной (см. также следствие 2.7), из (8.21) вытекает, во-первых, что классы Харди H^p, $p = q, q+1$, инвариантны относительно A и, во-вторых, что A является линейной изометрией пространств H^p, $p = q, q + 1$. Так как $q + 1 > 2$, то, применяя теорему 8.4 при $p = q + 1$, получаем, что A имеет вид (8.6) для всех $f \in H^{q+1}$ с некоторой функцией $\psi \in H^{q+1}$ и внутренним отображением ϕ, связанным с ψ соотношением (8.7). При этом, в силу одновременной изометричности в нормах H^q и H^{q+1},

$$\begin{aligned}\left[\int\limits_{\mathit{\Gamma}} |\psi^*(\zeta)|^q \,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q} = \left[\int\limits_{\mathit{\Gamma}} |1|^q \,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q} = 1 = \\ = \left[\int\limits_{\mathit{\Gamma}} |1|^{q+1} \,\sigma(d\zeta)\right]^{1/(q+1)} = \left[\int\limits_{\mathit{\Gamma}} |\psi^*(\zeta)|^{q+1} \,\sigma(d\zeta)\right]^{1/(q+1)}\end{aligned} \tag{8.22}$$

(так как $\psi = A1$, где 1 — тождественно единичная функция в G), что может быть только при условии, что $|\psi^*| = 1$ почти всюду на $\mathit{\Gamma}$ (равенство в неравенстве между средними степенными разных порядков достигается, только если усредняемая функция постоянна почти всюду). Согласно теореме П. Я. Полубариновой-Кочиной (или по следствию 2.8), функция ψ — внутренняя в области G, а соотношение (8.7) показывает, что отображение $\phi^* : \mathit{\Gamma} \to \mathit{\Gamma}$ сохраняет меру σ на $\mathit{\Gamma}$.

Осталось показать, что A сохраняет вид (8.20) на всем пространстве N^q, $q > 1$. Действительно, для любой функции $f \in N^q$, $q > 1$, функции $f_r(z) = f(rz)$, $z \in G$, $0 \le r < 1$, сходятся при $r \to 1-$ к f в смысле метрики ρ_{N^q} (см. теорему 2.9), поэтому в силу изометричности A имеем $Af_r \to Af$, $r \to 1-$. Так как сходимость в метрике ρ_{N^q} сильнее равномерной сходимости на компактах, то для любой точки $z \in G$ выполнено $f_r(\phi(z)) \to f(\phi(z))$ и $Af_r(z) \to Af(z)$, $r \to 1-$. С другой стороны, функции f_r, $0 \le r < 1$, принадлежат пространству H^{q+1}, поэтому справедливо представление $Af_r(z) = \psi(z) f_r(\phi(z))$. Устремляя $r \to 1-$, получаем

$Af(z) = \psi(z)f(\phi(z))$, $z \in G$, $f \in N^q$, $q > 1$, то есть A имеет искомый вид (8.20) на всем пространстве N^q, $q > 1$.

Достаточность. Если ψ — внутренняя функция в области G и ϕ — внутреннее отображение G в себя, радиальные граничные значения которого сохраняют меру σ на Γ, то свойство изометричности отображения $Af(z) = \psi(z)f(\phi(z))$, $z \in G$, $f \in N^q$, $q > 1$, легко проверяется для случая, когда f — полином (в этом случае, очевидно, $Af \in N^q$ и $(f(\phi))^*(\zeta) = f(\phi^*(\zeta)))$, с помощью соотношения $|\psi^*| = 1$ почти всюду на Γ и формулы замены переменной в интеграле Лебега:

$$|Af|_{N^q} = \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q\bigl(1 + |\psi^*(\zeta)f(\phi^*(\zeta))|\bigr)\,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q} =$$

$$= \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q\bigl(1+|f(\phi^*(\zeta))|\bigr)\,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q} = \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q\bigl(1+|f(\zeta)|\bigr)\,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q} = |f|_{N^q}. \tag{8.23}$$

Так как полиномы плотны в N^q, $q > 1$, и N^q, $q > 1$, — полное в метрике ρ_{N^q} (см. следствие 2.10 и теорему 3.6), то отображение A единственным способом продолжается на все N^q, $q > 1$, с сохранением свойства изометричности. Согласно доказанной необходимости, эта изометрия сохраняет тот же вид $Af(z) = \psi(z)f(\phi(z))$ (с теми же ψ и ϕ) на всем N^q, $q > 1$.

Следствие 8.26. *Отображение A является сюръективной линейной изометрией N^q, $q > 1$, на себя тогда и только тогда, когда*

$$Af(z) = \alpha f(\phi(z)), \quad z \in G, \quad f \in N^q, \quad q > 1, \tag{8.24}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ и ϕ — автоморфизм области G, сохраняющий меру σ на Γ.

Замечание 8.27. Автоморфизмы области G, сохраняющие меру σ на Γ (или, что равносильно, оставляющие точку 0 неподвижной) имеют простое описание (см. [133]) — это группа $U_n(\mathbb{C})$ унитарных преобразований $\mathbb{C}^n$ (в случае шара) и подгруппа $S_n(\mathbb{C})$ группы $U_n(\mathbb{C})$, состоящая из преобразований $\mathbb{C}^n$ вида

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto (\alpha_1 z_{\tau(1)}, \alpha_2 z_{\tau(2)}, \ldots, \alpha_n z_{\tau(n)}),$$

где $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \ldots = |\alpha_n| = 1$ и $(\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n))$ — перестановка $(1, 2, \ldots, n)$ (в случае поликруга). Следовательно, для групп $Isom\, N^q$ изометрий пространств N^q, $q > 1$, в шаре и поликруге имеем изоморфизмы

$$Isom\, N^q \simeq T \times U_n(\mathbb{C}) \text{ и } Isom\, N^q \simeq T \times S_n(\mathbb{C})$$

соответственно.

Замечание 8.28. Сюръективные линейные изометрии пространств Привалова имеют такой же вид, как у пространства Смирнова (см. [133]).

Доказательство. Необходимость. Применяя необходимость теоремы 8.22 к A и A^{-1}, получаем представления

$$Af(z) = \psi(z)f(\phi(z)), \quad A^{-1}f(z) = \chi(z)f(\theta(z)), \quad z \in G, \quad f \in N^q,$$

с некоторыми внутренними функциями ψ и χ и внутренними отображениями ϕ и θ, радиальные граничные значения которых сохраняют меру σ на Γ. Подставляя второе выражение (вместо f) в первое, получаем

$$f(z) = \psi(z)\chi(\phi(z))f(\theta(\phi(z))), \quad z \in G, \quad f \in N^q, \tag{8.25}$$

и, полагая $f(z) \equiv 1$, имеем $\psi(z)\chi(\phi(z)) \equiv 1$. Так как $|\psi(z)| \le 1$ и $\chi(z)| \le 1$, то отсюда вытекает $|\psi(z)| \equiv 1$, $|\chi(\phi(z))| \equiv 1$, и по принципу максимума модуля $\psi(z) \equiv \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

Подставляя теперь вместо f в (8.25) последовательно все координатные функции, имеем $\theta(\phi(z)) \equiv z$, и аналогично можно получить, что $\phi(\theta(z)) \equiv z$. Поэтому ϕ и θ взаимно обратны в G и, таким образом, являются автоморфизмами области G.

Достаточность. Определим отображения A и B равенствами

$$Af(z) = \alpha f(\phi(z)), \quad Bf(z) = \alpha^{-1}f(\phi^{-1}(z)), \quad z \in G, \quad f \in N^q.$$

Очевидно, что отображения ϕ и ϕ^{-1} (как автоморфизмы) оба являются внутренними, причем как ϕ, так и ϕ^{-1} сохраняют меру σ на Γ. Согласно достаточности теоремы 8.22, они являются линейными изометриями на N^q, и так как, что легко проверяется, они взаимно обратны на N^q, то A — сюръективная линейная изометрия пространства N^q, $q > 1$, на себя.

8.4. Линейные изометрии пространства $N \ln N$

Теорема 8.29. *Отображение A пространства $N \log N$ в себя представляет собой линейную изометрию тогда и только тогда, когда оно имеет вид*

$$(Af)(z) = \Psi(z)f(\Phi(z)), \quad z \in G, \quad f \in N \log N, \tag{8.26}$$

в котором Ψ — внутренняя функция в области G и Φ — внутреннее преобразование G в себя, сохраняющее меру σ на Γ.

Доказательство. Доказательство теоремы повторяет в целом аналогичные рассуждения доказательства теоремы 8.22, поэтому ограничимся лишь некоторыми моментами.

Пусть $f \in N \ln N$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\lim_{r\uparrow 1}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{\varepsilon}\omega(\ln(1+\varepsilon|f(r\gamma)|))\,\sigma(d\gamma)=\lim_{r\uparrow 1}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{\varepsilon}\omega(\ln(1+\varepsilon|Af(r\gamma)|))\,\sigma(d\gamma),$$

причем интегралы слева и справа являются неубывающими по r. Кроме того, поскольку функция $\psi(x)=\omega(\ln(1+x))$ выпукла вверх при $x\geq 0$, то их подынтегральные выражения не убывают при $\varepsilon\downarrow 0+$, поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon\downarrow 0+$ в левой и правой части равенства, переставляя знаки предела по r и по ε и занося предел по ε под знак интеграла, получим

$$\lim_{r\uparrow 1}\int\limits_{\Gamma}|f(r\gamma)|\,\sigma(d\gamma)=\lim_{r\uparrow 1}\int\limits_{\Gamma}|Af(r\gamma)|\,\sigma(d\gamma),$$

то есть установлено свойство изометричности отображения A в норме пространства Харди H^1.

Далее, ограничиваясь функциями класса Харди H^2, с помощью предельной теоремы Лебега о мажорируемой сходимости на основании изометричности в норме H^1 и изометричности в метрике $N\ln N$ устанавливается изометричность в норме H^2.

Из изометричности отображения A в нормах двух пространств Харди так же, как в доказательстве теоремы 8.22, с учетом уже доказанных свойств пространства $N\ln N$, вытекает утверждение теоремы.

Теорема 8.30. *Отображение A пространства $N\log N$ в себя представляет собой изометрический автоморфизм тогда и только тогда, когда A имеет вид (8.26), где $\Psi(z)\equiv\alpha\in T$ и Φ — автоморфизм области G, оставляющий 0 неподвижным.*

Поскольку доказательство последней теоремы полностью повторяет доказательство аналогичной теоремы для пространств Привалова, то опускаем его.

8.5. Линейные изометрии пространств M^q $(q>0)$

8.5.1. Сюръективные изометрии пространств M^q $(q>0)$

Теорема 8.31. *Отображение $A: M^q\to M^q$ является сюръективной линейной изометрией пространства M^q, $q>0$, тогда и только тогда, когда оно имеет для всех функций $f\in M^q$ вид*

$$Af(z)=\alpha f(\phi(z)),\quad z\in G, \tag{8.27}$$

где $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$, и ϕ — биголоморфный автоморфизм области G, оставляющий точку 0 на месте.

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 8.32. *Функция* $\ln(1+x)/x$ *и функции* $(\ln(1+x)/x)^q$ *для любого* $q>0$ *являются вполне монотонными на* $(0,+\infty)$.

Доказательство. Проверим, что функция $\ln(1+x)/x$ является преобразованием Стилтьеса некоторой неотрицательной функции $g(t)$, то есть

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(t)}{x+t}\,dt,\quad x>0,\quad g(t)\geq 0.$$

Действительно, положим $g(t)=1/t$, если $t\geq 1$, и $g(t)=0$, если $0\leq t<1$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(t)}{x+t}\,dt=\frac{1}{x}\int\limits_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{x+t}\Big)\,dt=\frac{1}{x}\ln\frac{t}{x+t}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\ln(1+x)}{x},\quad x>0.$$

Согласно [57, теорема 1.2] отсюда следует, что функция $\ln(1+x)/x$ логарифмически вполне монотонна, то есть $(-1)^n[\ln(\ln(1+x)/x)]^{(n)}\geq 0$, $x>0$, $n\in\mathbb{N}$, откуда, по [126, теорема 9], вытекает полная монотонность функций $(\ln(1+x)/x)^q$ для всех $q>0$.

Следующая лемма является непосредственным следствием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и определения вполне монотонной функции.

Лемма 8.33. *Если вполне монотонная функция* $\varphi(x)$ *на* $(0,+\infty)$ *продолжается до бесконечно дифференцируемой функции на* $[0,+\infty)$, *то для любого* $n\in\mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\frac{(-1)^n}{x^n}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)x-\ldots-\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\Big]\geq 0,\quad x>0,$$

причем $\varphi^{(n)}(0)\neq 0$, *если только* $\varphi\not\equiv const$.

Замечание 8.34. На самом деле, функция в левой части неравенства леммы 8.33 также вполне монотонна на $(0,+\infty)$.

Лемма 8.35. *Если мера* μ *в условиях теоремы 8.20 конечна, то отображение* A *сохраняет норму пространства* $L^\infty(X,\mu)$ *(существенный супремум модуля функции).*

Доказательство. Неравенство леммы 8.33 позволяет утверждать, что полная математическая индукция в доказательстве теоремы 8.20 проходит для любого $q>0$. Поэтому утверждение теоремы 8.20 справедливо для всех $p=q+l$, $l\in\mathbb{Z}_+$. Следовательно, утверждение леммы вытекает из предельного соотношения

$$\|f\|_\infty = \lim_{l\to\infty} \|f\|_{q+l}, \quad f \in L^\infty(X,\mu),$$

в котором $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_p$ обозначают стандартные нормы в пространствах $L^\infty(X,\mu)$ и $L^p(X,\mu)$, выполненного в силу конечности меры μ (см. [119, теорема 50]).

Доказательство (теоремы). Необходимость. Рассмотрим произвольную функцию $f \in M^q$, $q > 0$. Пусть C — конус в пространстве $\ln_+^q L$, натянутый на функцию $M_{rad}f$, то есть луч $\{tM_{rad}f \mid t > 0\}$. Отображение A естественным образом индуцирует положительно-однородную изометрию конуса C в $\ln_+^q L$. Следовательно, выполнены все условия леммы 8.35. Согласно лемме 8.35 получим свойство изометричности отображения A в норме пространства H^∞ и, используя теорему 8.5, найдем, что отображение A имеет для всех $f \in H^\infty$ вид (8.27) с некоторым $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, и некоторым биголоморфным автоморфизмом ϕ области G. Так как H^∞ плотно в M^q и сходимость в метрике ρ_{M^q} сильнее поточечной сходимости в области G (см. следствия 4.7 и 4.10), то отображение A сохраняет вид (8.27) и на всем пространстве M^q. Отсюда, при условии изометричности A в метрике ρ_{M^q}, следует, что точка 0 является неподвижной точкой отображения ϕ.

Действительно, если это не так, то рассмотрим на Γ множество K специального вида: пересечение некоторого шара в $\mathbb{C}^n$ с S_n в случае $G = B_n$, или декартово произведение открытых дуг на единичных окружностях, составляющих остов поликруга в случае $G = U^n$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует голоморфная функция f в G, которая достигает максимального по модулю значения, равного 1, на любом радиусе, идущем в точку K, при приближению к границе, и принимает значения, не превосходящие по модулю ε, на остальных радиусах области G. В случае шара такая функция существует согласно основной теореме из [61], а в случае поликруга такую функцию можно построить как произведение функций, зависящих каждая от своей переменной, полученных применением упомянутой теоремы в одномерном случае. Заметим, что для почти каждого $\zeta \in K$ $Mf(\zeta) = |f^*(\zeta)| = 1$, а для каждого $\zeta \in \Gamma \setminus K$ $Mf(\zeta) \le \varepsilon$. Так как автоморфизм ϕ непрерывно продолжается на $\overline{G}$, то он переводит каждый радиус, идущий в точку $\zeta \in \Gamma$, в кривую, начинающуюся в $\phi(0)$ и заканчивающуюся в $\phi(\zeta)$, причем эта кривая подходит к $\phi(\zeta)$ по допустимому направлению. Так как допустимые пределы f совпадают с радиальными (там, где они существуют, то есть почти всюду), отсюда заключаем, что $Mf(\phi(\zeta)) \ge (Mf)(\phi(\zeta)) = 1$ в почти каждой точке $\zeta \in \Gamma$ открытого множества, определяемого условием $\phi(\zeta) \in K$, а так как $|f(z)| \le 1$ (по принципу максимума модуля), то $Mf(\phi)(\zeta)$ не может превосходить 1. Следовательно, $Mf(\phi)(\zeta) = 1$ для почти всех $\zeta \in \Gamma$, таких что $\phi(\zeta) \in K$. Отсюда заключаем, что

$$|Af|^q_{M^q} = \int\limits_\Gamma \ln^q\bigl(1 + Mf(\phi)(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta) \ge$$

$$\geq \int\limits_{\phi^{-1}(K)} \ln^q\bigl(1 + Mf(\phi)(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta) = \ln^q 2\,\sigma(\phi^{-1}(K)).$$

С другой стороны,

$$|f|^q_{M^q} = \int\limits_K \ln^q\bigl(1 + Mf(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta) + \int\limits_{\Gamma\setminus K} \ln^q\bigl(1 + Mf(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta) \leq$$

$$\leq \ln^q 2\,\sigma(K) + \ln^q(1+\varepsilon)\sigma(\Gamma \setminus K).$$

Поскольку, в силу изометричности A, выполнено $|f|_{M^q} = |Af|_{M^q}$, то

$$\ln^q 2\,\sigma(\phi^{-1}(K)) \leq \ln^q 2\,\sigma(K) + \ln^q(1+\varepsilon)\sigma(\Gamma \setminus K).$$

Устремляя в этом неравенстве $\varepsilon \to 0+$, имеем $\sigma(\phi^{-1}(K)) \leq \sigma(K)$. Здесь K – произвольное открытое множество специального вида на Γ. Каждое борелевское множество $E \subseteq \Gamma$ для любого $\varepsilon > 0$ можно покрыть счетным набором множеств K_l указанного выше вида так, что выполняется неравенство $\sum\limits_l \sigma K_l < \sigma E + \varepsilon$. Поэтому

$$\sigma(\phi^{-1}(E)) \leq \sum_l \sigma(\phi^{-1}(K_l)) \leq \sum_l \sigma K_l < \sigma E + \varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to 0+$ получаем $\sigma(\phi^{-1}(E)) \leq \sigma E$ для любого борелевского множества E на Γ. Применяя это неравенство к дополнению E на Γ, найдём противоположное неравенство $\sigma E \leq \sigma(\phi^{-1}(E))$, поэтому $\sigma E = \sigma(\phi^{-1}(E))$, то есть ϕ сохраняет меру σ на Γ. Производя замену переменной $\gamma = \phi(\zeta)$, имеем

$$\int\limits_\Gamma \phi(\zeta)\,\sigma(d\zeta) = \int\limits_\Gamma \gamma\,\sigma(d\gamma),$$

получим $\phi(0) = 0$, так как

$$\int\limits_\Gamma \phi(\zeta)\,\sigma(d\zeta) = \phi(0) \quad \text{и} \quad \int\limits_\Gamma \gamma\,\sigma(d\gamma) = 0,$$

в силу свойства среднего значения голоморфных функций.

Достаточность условий теоремы доказывается по стандартной схеме. Согласно замечанию 8.27, автоморфизмы ϕ области G, сохраняющие точку 0, являются линейными отображениями, сохраняющими меру σ на Γ. Следовательно, если радиальная максимальная функция $M_{rad}g(\zeta)$ функции $g(z)$, определенной в G, задана формулой $M_{rad}g(\zeta) = \sup\limits_{0\leq r<1} |g(r\zeta)|$, $\zeta \in \Gamma$, то $M_{rad}g(\phi)(\zeta) = M_{rad}g(\phi(\zeta))$ для любого $\zeta \in \Gamma$ (так как радиусы переходят в радиусы). Поэтому для отображения

A, определенного по формуле $Af(z) = \alpha f(\phi(z))$, $z \in G$, $f \in M^q$, $q \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, справедливо равенство

$$|Af|_{M^q} = \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q\bigl(1 + M_{rad}f(\phi(\zeta))\bigr)\,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q} =$$

$$= \left[\int\limits_{\Gamma} \ln^q\bigl(1 + M_{rad}f(\zeta)\bigr)\,\sigma(d\zeta)\right]^{1/q} = |f|_{M^q},$$

где мы произвели замену переменной в интеграле Лебега и использовали тот факт, что мера σ инвариантна относительно отображения ϕ. Следовательно, отображение A является линейной изометрией M^q в себя. Так как отображение B, определенное по формуле $(Bf)(z) = \alpha^{-1} f(\phi^{-1}(z))$, $z \in G$, $f \in M^q$, $q \in \mathbb{N}$, обратно к A на M^q, то A — сюръективная линейная изометрия пространства M^q, $q \in \mathbb{N}$, на себя.

8.5.2. Изометрии в пространствах M^q специального вида

Целью этого пункта служит доказательство таких двух утверждений.

Теорема 8.36. *Пусть ψ — внутренняя функция в области G и отображение I задано по формуле*

$$(If)(z) = \psi(z)f(z), \quad z \in G, \quad f \in M^q. \tag{8.28}$$

Тогда отображение I является линейной изометрией пространства M^q $(q > 0)$ в том и только в том случае, когда функция ψ — постоянна.

Доказательство. Нетривиальную часть утверждения теоремы составляет только необходимость.

Очевидно, что умножение на внутреннюю функцию ψ не увеличивает значение точной верхней грани в выражении (1.21) для характеристики $|\cdot|_{M^q}$, то есть $M_{rad}(\psi f) \le M_{rad}f$, $f \in M^q$. Если функция ψ не тождественно постоянна, то, в силу принципа максимума модуля, $|\psi| < 1$ в области G, поэтому если функция $f \in M^q$ такова, что точная верхняя грань в определении $M_{rad}f$ достигается не у границы области определения, то есть $M_{rad}f(\gamma) > \varlimsup\limits_{r\to 1-} |f(r\gamma)|$, для множества точек $\gamma \in \Gamma$ положительной меры на Γ, то $M_{rad}(\psi f) < M_{rad}f$ на множестве положительной меры и, следовательно, $|\psi f|_{M^q} < |f|_{M^q}$, то есть отображение (8.28) не может быть изометрией пространства M^q. Такую функцию f можно выбрать, например, среди афинных функций вида $\langle z, a\rangle + b$, $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}$, где $\langle z, a\rangle$ обозначает эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 8.37. *Пусть $q > 0$, $\alpha \in T$ и ϕ — внутреннее отображение области G, радиальные граничные значения которого сохраняют меру σ на Γ. Отображение I вида*

$$(If)(z) = \alpha f(\phi(z)), \quad z \in G, \quad f \in M^q, \tag{8.29}$$

является линейной изометрией пространства M^q тогда и только тогда, когда отображение ϕ почти все радиусы области G переводит в радиусы.

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение I вида (8.29) является линейной изометрией пространства M^q $(q > 0)$. Так как число $\alpha \in T$ на максимальную радиальную функцию функции If не влияет, то можем считать, что $\alpha = 1$. По условию, радиальные граничные значения $\phi^* : \Gamma \mapsto \Gamma$ отображения ϕ сохраняют меру σ на Γ, поэтому, согласно формуле замены переменной в интеграле Лебега, для характеристики функции f имеем следующее выражение:

$$|f|_{M^q} = \left[\int\limits_\Gamma \ln^q(1 + M_{rad}f(\gamma))\,\sigma(d\gamma)\right]^{\alpha_q/q} =$$

$$= \left[\int\limits_\Gamma \ln^q(1 + M_{rad}f(\phi^*(\gamma)))\,\sigma(d\gamma)\right]^{\alpha_q/q}, \quad f \in M^q. \tag{8.30}$$

Сравним последнее выражение со значением характеристики функции If:

$$|If|_{M^q} = |f(\phi)|_{M^q} = \left[\int\limits_\Gamma \ln^q(1 + M_{rad}(f(\phi))(\gamma))\,\sigma(d\gamma)\right]^{\alpha_q/q}. \tag{8.31}$$

Для этого предположим, что γ — такая точка множества Γ, для которой существует радиальный граничный предел $\lim\limits_{r\to 1-} \phi(r\gamma) = \phi^*(\gamma)$ и, кроме того, $\phi^*(\gamma) \in \Gamma$; согласно определению внутреннего отображения (см. пункт 8.1.1) такие γ составляют множество полной меры на Γ. Рассмотрим значения максимальных радиальных функций $(M_{rad}f)(\phi^*(\gamma))$ и $M_{rad}(f(\phi))(\gamma)$, входящих в выражения (8.30) и (8.31) соответственно. Заметим, что первая величина есть наименьшая верхняя грань значений функции $|f|$ на радиусе $R_{\phi^*(\gamma)} = \{r\phi^*(\gamma),\ 0 \le r < 1\}$, идущем из точки 0 в точку $\phi^*(\gamma)$. Вторая величина представляет собой наименьшую верхнюю грань значений $|f|$ на кривой $\phi(R_\gamma) = \{\phi(r\gamma),\ 0 \le r < 1\}$, являющейся образом радиуса $R_\gamma = \{r\gamma,\ 0 \le r < 1\}$ при отображении ϕ. Радиальные граничные значения ϕ^* отображения ϕ сохраняют меру σ на Γ, поэтому (см. доказательство необходимости условий следствия из теоремы параграфа 8.3) $\phi(0) = 0$. Следовательно, кривая $\phi(R_\gamma)$, так же как и радиус $R_{\phi^*(\gamma)}$, начинается в точке 0 и идёт в точку $\phi^*(\gamma)$. Поэтому если голоморфная внутри и непрерывная на замыкании области G функция f обладает тем свойством, что наименьшая верхняя грань её абсолютных значений на каждом радиусе достигается либо в начале (точке 0), либо в конце этого радиуса, то неравенство $M_{rad}f(\phi^*(\gamma)) \leq M_{rad}(f(\phi))(\gamma)$ необходимо будет выполнено для всех γ указанного выше вида. В частности, последнее неравенство справедливо для всех афинных функций, то есть для функций вида $f(z) = \langle z, a\rangle - b$, $z \in \mathbb{C}^n$, где $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}$.

Наша задача — доказать, что кривая $\phi(R_\gamma)$ содержится в радиусе $R_{\phi^*(\gamma)}$ для всех γ указанного выше типа. Предположим противное, то есть что образ радиуса R_γ при отображении ϕ не весь попал на радиус $R_{\phi^*(\gamma)}$, по крайней мере, для одной точки γ_0 рассмотренного выше вида. Это означает, что существует такое $0 \leq r_0 < 1$, для которого $\phi(r_0\gamma_0) \notin R_{\phi^*(\gamma_0)}$; ясно также, что $\phi(r_0\gamma_0) \neq \phi^*(\gamma_0)$, так как значения отображения ϕ расположены внутри области G, согласно свойству сохранения меры σ его радиальными граничными значениями ϕ^*. Поэтому $\phi(r_0\gamma_0) \notin \overline{R}_{\phi^*(\gamma_0)}$, где $\overline{R}_{\phi^*(\gamma_0)}$ обозначает замкнутый радиус, идущий в точку $\phi^*(\gamma_0)$, то есть $\overline{R}_{\phi^*(\gamma_0)} = \{r\phi^*(\gamma_0),\ 0 \leq r \leq 1\}$. По теореме об отделении выпуклых множеств (см., например, [114]), существует непрерывный линейный функционал Φ на пространстве $\mathbb{C}^n$, отделяющий точку $\phi(r_0\gamma_0)$ от радиуса $R_{\phi^*(\gamma_0)}$, то есть такой, что $\Phi(\phi(r_0\gamma_0)) \notin \overline{\Phi(R_{\phi^*(\gamma_0)})}$, где $\overline{\Phi(R_{\phi^*(\gamma_0)})}$ обозначает замыкание в $\mathbb{C}$ множества значений функционала Φ на радиусе $R_{\phi^*(\gamma_0)}$. Следовательно, существует такая точка $b \in \mathbb{C}$, для которой $|\Phi(\phi(r_0\gamma_0)) - b| > \sup\limits_{z \in R_{\phi^*(\gamma_0)}} |\Phi(z) - b|$ (точку b можно выбрать, например, лежащей на прямой, проходящей через точку $\Phi(\phi(r_0\gamma_0))$ перпендикулярно полуинтервалу, являющемуся образом радиуса $R_{\phi^*(\gamma_0)}$ при отображении функционалом Φ). В силу непрерывности отображения ϕ в области G и аппроксимативной непрерывности отображения ϕ^* на Γ (см. теорему А. Данжуа в [36, гл. IX, §6, теорема 2]; доказательство, приведённое там для одномерного случая, без труда переносится на общий случай), аналогичным свойством должны обладать все точки γ из некоторого множества на Γ положительной меры, имеющего точку γ_0 точкой плотности. Заметим также, что функционал Φ представляется в виде $\Phi(z) = \langle z, a\rangle$, $z \in \mathbb{C}^n$, для некоторого $a \in \mathbb{C}^n$.

Выберем функцию f в виде $f(z) = \langle z, a\rangle - b$, $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда, согласно доказанному ранее, неравенство $(M_{rad}f)(\phi^*(\gamma)) \leq M_{rad}(f(\phi))(\gamma)$ выполняется для всех γ из некоторого множества полной меры на Γ и неравенство $(M_{rad}f)(\phi^*(\gamma)) < M_{rad}(f(\phi))(\gamma)$ выполняется для некоторого множества точек γ положительной меры. Следовательно, равенства (8.30) и (8.31) приводят к неравенству $|f|_{M^q} < |If|_{M^q}$ и отображение I не может быть линейной изометрией пространства M^q. Полученное противоречие доказывает необходимость условия теоремы.

Достаточность. Пусть внутреннее отображение ϕ таково, что его радиальные граничные значения ϕ^* сохраняют меру σ на Γ и почти все радиусы оно переводит в радиусы. Тогда для всех γ из некоторого множества полной меры на Γ выполнены два условия:

(1) существует $\lim\limits_{r\to 1-} \phi(r\gamma) = \phi^*(\gamma)$ и $\phi^*(\gamma) \in \Gamma$;

(2) $\{\phi(r\gamma),\ 0 \le r < 1\} \subseteq \{r\phi^*(\gamma),\ 0 \le r < 1\}$.

Из условия (1), свойства $\phi(0) = 0$ и непрерывности отображения ϕ в области G следует, что в условии (2) на самом деле выполняется равенство и, следовательно, $M_{rad}(f(\phi))(\gamma) = (M_{rad}f)(\phi^*(\gamma))$ для каждой функции f, определённой в области G. Ограничиваясь функциями класса M^q, из равенств (8.30) и (8.31) находим, что $|f|_{M^q} = |If|_{M^q}$, то есть отображение I является линейной изометрией пространства M^q.

Замечание 8.38. Пользуясь непрерывностью отображения ϕ и компактностью множества Γ, можно показать, что в условиях теоремы *все* радиусы области G переводятся в радиусы. (Указание: для любого радиуса взять аппроксимирующую последовательность радиусов из множества почти всех радиусов, фигурирующего в утверждении теоремы.)

Замечание 8.39. Для поликруга U^n нетрудно построить *нелинейное* внутреннее отображение ϕ, радиальные граничные значения которого сохраняют меру σ на Γ и которое радиусы переводит в радиусы. Такое отображение можно выбрать, например, действующим независимо по каждой координате так, чтобы соответствующие одномерные внутренние функции точку нуль переводили в нуль (см. замечание 8.23 к теореме параграфа 8.3) и радиусы переводили в радиусы (например, можно положить $\phi_k(z_k) = z_k^l$, $z_k \in U$, $l \in \mathbb{N}$, $l > 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Существуют ли подобные отображения в шаре — неизвестно.

Замечание 8.40. Эти результаты показывают, что множества линейных изометрий пространств M^q и N^q различны при $q > 1$, поскольку, согласно теореме 8.22, отображение I, задаваемое формулой (8.28), является линейной изометрией пространства N^q для любой внутренней функции $\psi(z)$, в то же время, как отмечено выше, отображение I вида (8.28) является линейной изометрией пространства M^q лишь для постоянной функции $\psi(z)$.

В шаре и поликруге *непостоянные* внутренние функции действительно существуют — для поликруга они строятся как произведения одномерных внутренних функций, каждая из которых зависит только от своей переменной, а для шара существование таких функций было доказано независимо А. Б. Александровым ([1]) и Е. Лёвом ([100]). Точно так же легко построить *нелинейное* внутреннее отображение поликруга U^n, сохраняющее меру σ на Γ. Для шара существование подобных внутренних отображений было доказано Б. Томашевским (см. [138]). Таким образом, существуют линейные изометрии пространств N^q $(q > 1)$, имеющие вид $f \mapsto f(\phi)$ (где $f \in N^q$ и ϕ — некоторое внутреннее отображение), которые не являются сюръективными (см. теорему параграфа 8.3).

Замечание 8.41 (проблема). В предыдущем замечании сказано, что существуют линейные изометрии пространства $N^q (q > 1)$, не являющиеся изометриями в метрике пространства M^q. Представляет интерес установить, существуют ли линейные изометрии пространства $M^q (q > 1)$, не являющиеся линейными изометриями пространства N^q.

Замечание 8.42. Анализируя доказательство теоремы, несложно увидеть, что всякая линейная изометрия пространства M^q $(q > 0)$, будучи сужена на пространство H^∞, является линейной изометрией H^∞. Естественно предположить, что каждая линейная изометрия пространства H^∞ имеет вид

$$(If)(z) = \psi(z) f(\phi(z)), \quad z \in G, \tag{8.32}$$

где ψ и ϕ — некоторые внутренние функция и отображение области G соответственно, хотя до сих пор неизвестно, действительно ли это так (см. по этому поводу статью [71]). В связи с этим предположением было бы интересно изучить линейные изометрии пространства M^q $(q > 0)$ вида (8.32), однако в соответствии с вышеуказанной проблемой решение поставленной задачи представляется трудным, даже в случае $\psi(z) \equiv \alpha \in T$.

Замечание 8.43. Результаты этой главы анонсированы в [45] и опубликованы в [48] и [49], а также частично вошли в диссертацию [46].

Часть II

Пространства функций на плоскости

9

Мультипликаторы и функционалы пространств Привалова в круге

9.1. Коэффициенты Тейлора функций из N^q $(q \geq 1)$

Результаты данного параграфа сыграют важную роль в доказательстве основной теоремы параграфа 9.3 (о коэффициентных мультипликаторах из классов Привалова в классы Харди), образуя вместе с результатами параграфа 9.2 основу и техническое оформление этого доказательства. Они содержат в себе асимптотические оценки, полученные С. Н. Мергеляном в случае $q = 1$ (см. И. И. Привалов [41, гл. II, §11.2]) и М. Столлом в случае $q > 1$ (см. [132, следствие 4.4a]). С учётом результатов параграфа 9.3 и пункта 9.1.2 настоящего параграфа, установленные оценки асимптотически неулучшаемы, так что они приобретают окончательный характер.

9.1.1. O-оценка коэффициентов Тейлора для функций классов N^q $(q \geq 1)$

Для произвольной непрерывной в круге U функции $f(z)$ введём числовую характеристику

$$A_q(f) = \sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln_+^q |f(re^{i\theta})| \, \frac{d\theta}{2\pi}, \quad q > 0,$$

принимающую значения, вообще говоря, из расширенной области неотрицательных действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}_+$. Для голоморфных функций $f(z)$ характеристика $A_q(f)$ конечна тогда и только тогда, когда $f(z)$ принадлежит классу N^q (см. определение 1.8). Нетрудно видеть, что характеристика $A_q(f)$ представляет собой обобщение на произвольную степень характеристики $A(f)$, введённой в пункте 1.1.4 ($A(f) = A_1(f)$). В монографии [40, гл. IV, §10] доказано, что для $f \in N^q$ при $q > 1$

$$A_q(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln_+^q |f^*(e^{i\theta})| \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

За обозначением $M(f,r)$ сохраним тот же смысл, что и в пункте 1.1.4.

Теорема 9.1. *Для произвольного натурального k и произвольной функции $f(z)$ класса N^q $(q \geq 1)$ справедлива следующая оценка её коэффициентов Тейлора:*

$$\ln |a_k| \leq \sqrt[q+1]{2A_q(f)kq} \left(\sqrt{1 + (A_q(f)/(2qk)^q)^{2/(q+1)}} + \frac{1}{q} \right), \tag{9.1}$$

в которой по определению полагается $\ln |a_k| = -\infty$ при $a_k = 0$, так что неравенство в этом случае выполнено автоматически.

Замечание 9.2. При $q = 1$ неравенство (9.1) содержит в себе асимптотическую оценку (1.8) из теоремы 1.4.

Доказательство. Воспользуемся известными неравенствами Коши

$$|a_k| \leq \frac{M(f,r)}{r^k}, \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.2}$$

для коэффициентов Тейлора голоморфной в круге U функции $f(z)$.

Заметим, что если функция $f(z)$ принадлежит классу N^q $(q \geq 1)$, то для неё справедлива оценка равномерного роста

$$\ln_+ M(f,r) \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{1/q} A_q^{1/q}(f), \quad 0 \leq r < 1, \tag{9.3}$$

аналогичная оценке (1.7) теоремы 1.4 и практически совпадающая с оценкой (3.1) из теоремы 3.1. Для полноты изложения приведем доказательство этой оценки. Действительно, функция $\ln_+^q |f(z)|$ является субгармонической в круге U, как композиция субгармонической функции $t = \ln |f(z)|$ и неубывающей выпуклой вниз на расширенной вещественной прямой $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ функции $\varphi(t) = t_+^q$ (где t_+ обозначает наибольшее из чисел t и 0). Поэтому согласно одному из основных свойств субгармонических функций (см., например, [80, теорема 2.5]) выполнено неравенство

$$\ln_+^q |f(z)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} P\left(\frac{z}{R}, e^{i\theta}\right) \ln_+^q |f(Re^{i\theta})| \, \frac{d\theta}{2\pi}, \quad |z| < R < 1,$$

где символ P обозначает ядро Пуассона

$$P(z, e^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\phi - \theta) + r^2}, \;\; z = re^{i\phi}, \;\; 0 \leq r < 1, \;\; -\pi \leq \theta, \phi \leq \pi. \tag{9.4}$$

Отсюда, согласно оценке (2.5), имеем

$$\ln_+^q |f(z)| \leq \frac{R+|z|}{R-|z|} A_q(f), \quad |z| < R < 1,$$

и, переходя к пределу при $R \to 1-$, получим

$$\ln_+^q |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} A_q(f), \quad |z| < 1.$$

Для того чтобы получить искомую оценку (9.3), осталось из последнего неравенства извлечь корень q-ой степени и перейти в левой части к наименьшей верхней грани по всем z, удовлетворяющим равенству $|z| = r$ $(0 \leq r < 1$ — фиксировано).

Объединяя оценки (9.2) и (9.3), получаем

$$\ln |a_k| \leq A_q^{1/q}(f) \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q} - k \ln r, \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.5}$$

Заменив правую часть в (9.5) на наибольшую нижнюю грань по r, находим

$$\ln |a_k| \leq \inf_{0<r<1} \phi(r), \tag{9.6}$$

где

$$\phi(r) = \alpha \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q} - k \ln r, \quad 0 < r < 1, \tag{9.7}$$

и

$$\alpha = A_q^{1/q}(f). \tag{9.8}$$

Для того чтобы получить более явный вид этой оценки, решим задачу на инфимум для функции (9.7). Заметим, что случаи $\alpha = 0$ или $k = 0$ тривиальны: при $\alpha = 0$ $\inf\limits_{0<r<1} \phi(r)$ равен нулю и совпадает с пределом функции $\phi(r)$ при $r \to 1-$, при $k = 0$ $\inf\limits_{0<r<1} \phi(r)$ равен α и равен пределу $\phi(r)$ при $r \to 0+$.

Пусть теперь $\alpha > 0$ и $k \in \mathbb{N}$. В этом случае точка минимума функции $\phi(r)$ находится посредством производной

$$\phi'(r) = \frac{2\alpha}{q(1-r)^2} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{q}-1} - \frac{k}{r} \tag{9.9}$$

приравниванием последней к нулю:

$$\phi'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha r}{q(1-r)^2} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{q}-1} = k. \tag{9.10}$$

Решение последнего уравнения существует и единственно на интервале $(0, 1)$. Существование решения следует по теореме Коши о промежуточном значении из того, что функция

$$\psi(r) = \frac{2\alpha r}{q(1-r)^2} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{q}-1}$$

непрерывна на $(0,1)$ и имеет предельные значения 0 и $+\infty$ при $r \to 0+$ и $r \to 1-$ соответственно. Чтобы убедиться в единственности этого решения, представим функцию $\psi(r)$ в виде

$$\psi(r) = \frac{2\alpha r}{q} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{1-r^2}$$

и заметим, что каждый из трёх сомножителей в этом представлении положителен и строго возрастает на интервале $(0,1)$. Следовательно, функция $\psi(r)$ инъективна, и поэтому уравнение (9.10) имеет единственное решение на интервале $(0,1)$. Более того, из возрастания функции $\psi(r)$ и выражения (9.9), связывающего функции $\psi(r)$ и $\phi'(r)$, следует, что решение уравнения (9.10) есть на самом деле точка строгого минимума для функции ϕ, задаваемой (9.7). Обозначив эту точку строгого минимума через r_k, оценим, насколько быстро r_k сходятся к 1 при $k \to +\infty$.

Для этого обозначим величины $\dfrac{1-r_k}{2\sqrt{r_k}}$ и $\dfrac{1+r_k}{2\sqrt{r_k}}$ через s_k и c_k соответственно; нетрудно заметить, что s_k и c_k связаны соотношением $c_k^2 = 1+s_k^2$. В новых обозначениях уравнение (9.10) переписывается в виде

$$\frac{\alpha}{2qs_k^2} \left(\frac{c_k}{s_k}\right)^{\frac{1}{q}-1} = k \Leftrightarrow \alpha \left(\frac{c_k}{s_k}\right)^{\frac{1}{q}} = 2qkc_k s_k \Leftrightarrow c_k^{1-\frac{1}{q}} s_k^{1+\frac{1}{q}} = \frac{\alpha}{2qk}. \tag{9.11}$$

Так как $c_k \geq 1$, из последнего равенства следует, что

$$s_k^{1+\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{2qk} \text{ или } s_k \leq \left(\frac{\alpha}{2qk}\right)^{\frac{q}{q+1}},$$

откуда получаем

$$c_k = \sqrt{1+s_k^2} \leq \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{2qk}\right)^{2q/(q+1)}}.$$

Используя полученные оценки для s_k и c_k, оценим значение функции (9.7) в точке $r = r_k$ её строгого минимума. Первое слагаемое в (9.7) можно оценить, используя второе из равенств (9.11):

$$\alpha \left(\frac{1+r_k}{1-r_k}\right)^{\frac{1}{q}} = \alpha \left(\frac{c_k}{s_k}\right)^{\frac{1}{q}} = 2qkc_k s_k \leq$$
$$\leq 2qk\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{2qk}\right)^{2q/(q+1)}} \left(\frac{\alpha}{2qk}\right)^{\frac{q}{q+1}} = \left(2q\alpha^q k\right)^{\frac{1}{1+q}} \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{2qk}\right)^{2q/(q+1)}}. \tag{9.12}$$

Для оценки второго слагаемого в (9.7) заметим, что

$$s_k = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{r_k}} - \sqrt{r_k}}{2} = \frac{e^{-\ln r_k/2} - e^{\ln r_k/2}}{2} = \operatorname{sh}\left(-\frac{\ln r_k}{2}\right),$$

так что

$$-\frac{\ln r_k}{2} = \operatorname{arcsh} s_k.$$

Из неравенства $\operatorname{arcsh} x \leq x$, $x \geq 0$, вытекает

$$-k \ln r_k = 2k\left(-\frac{\ln r_k}{2}\right) = 2k \operatorname{arcsh} s_k \leq$$
$$\leq 2ks_k \leq 2k\left(\frac{\alpha}{2qk}\right)^{\frac{q}{q+1}} = \left(2q\alpha^q k\right)^{\frac{1}{1+q}} \frac{1}{q}. \qquad (9.13)$$

Складывая неравенства (9.12) и (9.13), получаем

$$\phi(r_k) \leq \left(2q\alpha^q k\right)^{\frac{1}{1+q}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{2qk}\right)^{2q/(q+1)}} + \frac{1}{q}\right). \qquad (9.14)$$

Неравенства (9.6), (9.14) и равенство (9.8) приводят к искомой оценке (9.1).

9.1.2. Оценка снизу коэффициентов Тейлора некоторых функций класса N^1

В пункте доказывается оценка снизу коэффициентов Тейлора функций вида

$$g_c(z) = \exp\left(\frac{c}{2}\,\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in U, \quad c > 0. \qquad (9.15)$$

Эта оценка будет играть одну из основных ролей при доказательстве теоремы параграфа 9.3 (о коэффициентных мультипликаторах из классов N^q $(q > 1)$ в классы H^p $(p > 0)$).

Функции (9.15) принадлежат классу Неванлинны N^1, как нетрудно убедиться, заметив, что

$$\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = P(r, e^{i\theta}), \quad z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \qquad (9.16)$$

где через P обозначено ядро Пуассона (9.4) для единичного круга, которое к тому же обладает свойством нормированности (2.9).

Функции g_c обладают различными экстремальными свойствами в классе N^1; например, на них достигается оценка равномерного роста, устанавливаемая теоремой 1.4. Кроме того, как показано в [41, гл. II, §11.2], для этих функций асимптотически точна оценка коэффициентов Тейлора (1.8) из той же теоремы. Асимптотика при $c \to 0+$ в этой оценке получена Н. Янагихарой в [141, лемма 4]. Приводимая ниже теорема указывает оценку для всех $c > 0$.

Теорема 9.3. *Для коэффициентов Тейлора функций (9.15) справедлива оценка*

$$\ln a_k \geq \sqrt{4ck + (c+1)^2} - \frac{c}{2} - 4 - 3\ln(k+1) - |\ln c|, \quad c > 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.17}$$

Доказательство. Найдём точные выражения для коэффициентов Тейлора функций (9.15). Для этого представим их в виде

$$g_c(z) = e^{c/2} \exp \frac{cz}{1-z}, \quad z \in U, \quad c > 0. \tag{9.18}$$

Почленно дифференцируя ряд

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} z^k, \quad z \in U,$$

последовательно находим

$$\frac{1}{(1-z)^l} = \sum_{k \geq l-1} \frac{k(k-1)\dots(k-l+2)}{(l-1)!} z^{k-l+1}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

откуда

$$\exp \frac{cz}{1-z} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{l!} \left(\frac{cz}{1-z} \right)^l = 1 + \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!} \left(\frac{cz}{1-z} \right)^l =$$
$$= 1 + \sum_{l \geq 1} \frac{c^l}{l!} \sum_{k \geq l-1} C_k^{l-1} z^{k+1}, \quad z \in U.$$

Поскольку все ряды в последней формуле сходятся абсолютно, то мы можем поменять порядок суммирования, так что

$$\exp \frac{cz}{1-z} = 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} z^{k+1} \sum_{l=1}^{k+1} C_k^{l-1} \frac{c^l}{l!}, \quad z \in U. \tag{9.19}$$

Сравнивая (9.18) и (9.19), приходим к искомым выражениям для коэффициентов Тейлора функций (9.15)

$$a_k = e^{c/2} \sum_{l=1}^{k} C_{k-1}^{l-1} \frac{c^l}{l!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+; \tag{9.20}$$

при $k = 0$ считаем сумму равной единице.

Оценим снизу сумму

$$S = \sum_{l=1}^{k} C_{k-1}^{l-1} \frac{c^l}{l!} = \sum_{l=1}^{k} b_l, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.21}$$

входящую в выражение (9.20), заменив её наибольшим по величине слагаемым. Для нахождения наибольшего слагаемого составим отношения каждого последующего слагаемого к предыдущему и определим номер, при котором это отношение переходит значение единицу:

$$\frac{b_{l+1}}{b_l} = \frac{c^{l+1}}{(l+1)!} \frac{(k-1)!}{l!(k-1-l)!} \frac{l!}{c^l} \frac{(l-1)!(k-l)!}{(k-1)!} = \frac{c(k-l)}{l(l+1)}, \quad 1 \leq l < k,$$

$$\frac{b_{l+1}}{b_l} = 1 \Leftrightarrow c(k-l) = l(l+1) \Leftrightarrow l^2 + (c+1)l - ck = 0,$$

откуда

$$D = \sqrt{(c+1)^2 + 4ck}, \quad l_\pm = \pm\sqrt{\left(\frac{c+1}{2}\right)^2 + ck} - \frac{c+1}{2}.$$

Ограничиваясь рассмотрением только натуральных $l < k$ (как требует того задача), получаем, что $b_{l+1} > b_l$ при $l < l_+$ и $b_{l+1} < b_l$ при $l > l_+$. На самом деле, номер максимального по величине слагаемого в сумме (9.21) равен наименьшему целому числу, не уступающему l_+ (такое число иногда обозначают $\lceil l_+ \rceil$). Но для дальнейшей оценки удобнее будет оценить сумму (9.21) не этим слагаемым, а слагаемым с номером, быть может, немного меньшим, а именно с номером, равным наибольшему целому числу, не превосходящему l_+, то есть с номером $l = \lfloor l_+ \rfloor$. Для корректности такой оценки необходимо проверить, что $1 \leq l_+ \leq k$ (тогда и для l будет выполнено $1 \leq l \leq k$). Если l_+ не удовлетворяет требуемому условию, то либо $l_+ < 1$ либо $l_+ > k$. Неравенство $l_+ < 1$ равносильно неравенству $\sqrt{ck + ((c+1)/2)^2} < 1 + (c+1)/2$ или $ck < c+2$, а неравенство $l_+ > k$ эквивалентно неравенству $\sqrt{ck + ((c+1)/2)^2} > k + (c+1)/2$ или $ck > k^2 + k(c+1)$ или $0 > k^2 + k$. Так как мы рассматриваем только целые неотрицательные k, то последнее неравенство невозможно.

Итак, в предположении $ck \geq 2 + c$, оценим снизу сумму (9.21) одним слагаемым с номером $l = \lfloor l_+ \rfloor$:

$$\ln S \geq L = \ln\left(C_{k-1}^{l-1} \frac{c^l}{l!}\right) = l \ln c - \ln l! + \\ + \ln(k-1)! - \ln(l-1)! - \ln(k-l)! \tag{9.22}$$

Воспользуемся теперь неравенствами

$$l \ln(l+1) - l \leq \ln l! \leq (l+1)\ln(l+1) - l, \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

следующими непосредственно из неравенств

$$\left(1+\frac{1}{l}\right)^l < e < \left(1+\frac{1}{l}\right)^{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$L \geq l\ln c - (l+1)\ln(l+1) + l + (k-1)\ln k - (k-1) - \\ - l\ln l + l - 1 - (k-l+1)\ln(k-l+1) + k - l.$$

Сокращаем слагаемые $-(k-1)$, $l-1$, $k-l$ и заменяем $-(l+1)\ln(l+1)$, $(k-1)\ln k$, $-(k-l+1)\ln(k-l+1)$ на $-l\ln(l+1)$, $k\ln k$, $-(k-l)\ln(k-l+1)$ соответственно. При такой замене оценка уменьшится не более чем на число $3\ln k$, так как $1 \leq l < k$ и $1 < k-l+1 \leq k$. После перегруппировки слагаемых получаем

$$L \geq l + k\big[\ln k - \ln(k-l+1)\big] + \\ + l\big[\ln c + \ln(k-l+1) - \ln l - \ln(l+1)\big] - 3\ln k.$$

Здесь главным по порядку слагаемым (наряду с l) будет второе, которое можно оценить, с учётом неравенства $\ln(1+x) \leq x$, как

$$k\big[\ln k - \ln(k-l+1)\big] = -k\ln\frac{k-l+1}{k} = -k\ln\left(1-\frac{l-1}{k}\right) \geq l-1.$$

Для оценки третьего слагаемого заметим, что

$$l\big[\ln c + \ln(k-l+1) - \ln l - \ln(l+1)\big] = l\ln\frac{c(k-l+1)}{l(l+1)},$$

а согласно выбору l выполнено $l \leq l_+$ и, следовательно,

$$\frac{b_{l+1}}{b_l} = \frac{c(k-l)}{l(l+1)} \geq 1.$$

Отсюда

$$L \geq 2l - 1 - 3\ln k,$$

и согласно (9.20), (9.21) и (9.22) мы приходим к оценке

$$\ln a_k \geq 2l + \frac{c}{2} - 1 - 3\ln k.$$

Так как l отличается от l_+ не более чем на единицу, имеем также

$$\ln a_k \geq 2l_+ + \frac{c}{2} - 3 - 3\ln k, \quad kc \geq 2 + c. \tag{9.23}$$

Теперь рассмотрим случай $kc < c+2$. В этом случае, как мы видели выше, $l_+ < 1$ и максимальную величину в сумме (9.21) имеет слагаемое с номером $l_m = 1$. Так как это слагаемое равно c, то из (9.20) и (9.21) получаем $\ln a_k \geq c/2 + \ln c$. С другой стороны, используя предположение $kc < 2 + c$, видим, что

$$2l_+ = 2\sqrt{kc + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2} - c - 1 < 2\sqrt{c + 2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2} - c - 1 =$$
$$= \sqrt{4 + 4(c+1) + (c+1)^2} - c - 1 = c + 3 - c - 1 = 2$$

и, значит,

$$\ln a_k \geq 2l_+ + \frac{c}{2} - 2 + \ln c, \quad kc < 2 + c. \tag{9.24}$$

Объединяя неравенства (9.23) и (9.24), получим общую оценку

$$\ln a_k \geq 2l_+ + \frac{c}{2} - 3 - 3\ln(k+1) - |\ln c|,$$

очевидно, совпадающую с искомой.

9.1.3. o-оценка коэффициентов Тейлора для функций классов N^q $(q > 1)$

В теореме 9.3 было показано, что в случае $q = 1$ оценка (9.1) в теореме 9.1 асимптотически неулучшаема: существует пример функции класса N^1, для которой в неравенстве (9.1) можно написать асимптотическое равенство. Однако, как показывает следующая теорема, в случае $q > 1$ оценка допускает уточнение.

Теорема 9.4. *Для произвольной функции $f(z)$ класса N^q $(q > 1)$ справедлива следующая асимптотическая оценка её коэффициентов Тейлора:*

$$\ln|a_k| \leq o\left(\sqrt[q+1]{k}\right) \text{ при } k \to +\infty; \tag{9.25}$$

здесь при $a_k = 0$ полагаем по определению $\ln|a_k| = -\infty$, так что неравенство выполнено автоматически.

Замечание 9.5. Оценка (9.25) есть не что иное, как оценка (1.9) в теореме 1.6.

Доказательство. Согласно оценке (3.3) в теореме 3.4, для произвольной функции $f(z)$ класса N^q $(q > 1)$ выполнена оценка

$$\ln_+ M(f, r) = o\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q} \text{ при } r \to 1- .$$

Другими словами, если функция $\alpha(r)$ определена равенством

$$\ln_+ M(f,r) = \alpha(r)\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q}, \quad 0 \le r < 1, \tag{9.26}$$

то $\alpha(r) \to 0$ при $r \to 1-$. Из определения также ясно, что $\alpha(r)$ неотрицательна и непрерывна на $[0,1)$, так что её по непрерывности можно распространить на весь отрезок $[0,1]$. Далее, можем считать, что $\alpha(r)$ не возрастает на $[0,1]$, так как в противном случае её можно заменить на $\beta(r) = \sup\limits_{r\le\rho\le 1} \alpha(\rho)$ (правда, при этом в равенстве (9.26), возможно, придётся отказаться от знака «$=$», заменив его на «$\le$»). Кроме того, можем предположить, что функция $\alpha(r)$ выпукла вверх на $[0,1]$, заменив её, если необходимо, на выпуклую вверх верхнюю огибающую. Очевидно, что свойства неотрицательности, непрерывности и бесконечной малости при $r \to 1-$ при таких заменах не теряются.

Итак, пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге U и удовлетворяет ограничению

$$\ln_+ M(f,r) \le \alpha(r)\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q}, \quad 0 \le r < 1,$$

где $\alpha(r)$ — непрерывная невозрастающая выпуклая вверх на отрезке $[0,1]$ функция с $\alpha(1) = 0$, которую к тому же можно предположить строго положительной на промежутке $[0,1)$ (в противном случае имеем $\alpha(r) \equiv 0$, модуль функции $f(z)$ ограничен единицей и оценка (9.25) тривиальна). Приступим теперь к доказательству оценки (9.25) при указанных предположениях относительно функции $f(z)$.

Используя рассуждения доказательства теоремы 9.1 как наводящие, рассмотрим уравнение

$$\frac{2\alpha(r)r}{q(1-r)^2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{q}-1} = k, \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9.27}$$

аналогичное уравнению (9.10). Покажем, что решение уравнения (9.27) существует и единственно на интервале $(0,1)$. Для этого представим функцию в левой части (9.27) в виде

$$\frac{\alpha(r)}{1-r}\,\frac{2r}{q(1+r)}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{q}} = \psi(r). \tag{9.28}$$

Из этого представления и предположений относительно функции $\alpha(r)$ следует, что предельные значения функции $\psi(r)$ при $r \to 0+$ и $r \to 1-$ равны соответственно 0 и $+\infty$. Действительно, утверждение для $r \to 0+$ очевидно, а для $r \to 1-$ следует из того, что отношение $\alpha(r)/(1-r)$ неубывает и положительно на $(0,1)$ (в силу выпуклости вверх и положительности функции α), отношение $2r/(q(1+r))$ возрастает и имеет положительный предел при $r \to 1-$ и отношение $(1+r)^{1/q}/(1-r)^{1/q}$ стремится к $+\infty$ при $r \to 1-$. По теореме Коши о промежуточных значениях существование решения уравнения (9.27) следует из непрерывности функции $\psi(r)$ на интервале $(0,1)$. Из того же представления (9.28) видно, что функция $\psi(r)$ строго возрастает на интервале $(0,1)$. Действительно, по крайней мере два последних сомножителя в (9.28) строго возрастают и положительны на интервале $(0,1)$, а первый, во всяком случае, неубывает и тоже положителен на $(0,1)$ (в силу положительности функции $\alpha(r)$). Отсюда следует, что решение уравнения (9.27) единственно. Обозначив это решение через r_k, заметим, что те же рассуждения, которые были использованы при выводе оценки (9.1), применимы и в данном случае, с единственной лишь оговоркой, что вместо α нужно писать $\alpha(r_k)$ (ср. также оценки (9.3) и (9.26)). Таким образом, для коэффициентов Тейлора функции $f(z)$ выполнены неравенства

$$\ln|a_k| \leq \sqrt[q+1]{2q\alpha^q(r_k)k}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\alpha(r_k)}{2qk}\right)^{2q/(q+1)}}+\frac{1}{q}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как, очевидно, $r_k \to 1$ и $\alpha(r_k) \to 0$ при $k \to +\infty$, то последовательность в правой части последнего неравенства есть $o\left(\sqrt[q+1]{k}\right)$ при $k \to +\infty$, то есть оценка (9.25) доказана.

9.2. Вспомогательные утверждения

Утверждения параграфа составляют техническую основу доказательств основных результатов данной работы, изложенных в параграфах 9.3 и 9.4. Многие из них, на наш взгляд, могут быть также использованы при изучении и других свойств пространств голоморфных функций.

9.2.1. Коэффициентные мультипликаторы пространств голоморфных функций

Пусть F и H — некоторые классы голоморфных функций в единичном круге U.

Определение 9.6. *Последовательность комплексных чисел $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ называется коэффициентным мультипликатором класса F в класс H, если для любой функции*

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k z^k, \quad z \in U, \tag{9.29}$$

из класса F функция

$$h(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k a_k z^k, \quad z \in U, \tag{9.30}$$

принадлежит классу H.

При этом функция h называется образом функции f относительно мультипликатора B и обозначается $h = Bf$. Множество всех коэффициентных мультипликаторов класса F в класс H обозначается через $CM(F, H)$ (см. статью Г. Д. Лёвшиной [32]). Следующее утверждение устанавливает некоторое общее свойство коэффициентных мультипликаторов классов голоморфных функций.

Лемма 9.7. *Пусть F и H — линейные классы голоморфных в единичном круге U функций с метриками, сходимость по которым не слабее равномерной сходимости на компактах внутри U. Тогда любой коэффициентный мультипликатор класса F в класс H является линейным и замкнутым как оператор линейных и метрических пространств F и H.*

Замечание 9.8. Для частного случая, когда $F = N_*$, а Y — некоторое метрическое пространство последовательностей, утверждение леммы содержится в статье [141, разд. 3].

Доказательство. По определению любой коэффициентный мультипликатор $B = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ класса F в класс H есть отображение из F в H, которое, как и мультипликатор, обозначим символом B.

Отображение B как оператор линейных пространств — линейное, в силу линейности коэффициентов Тейлора как функционалов на пространстве всех голоморфных функций.

Для доказательства замкнутости этого отображения как оператора метрических пространств покажем, что предел любой сходящейся последовательности $(f_l, Bf_l)_{l \in \mathbb{N}}$ точек графика оператора B также принадлежит графику оператора B, то есть принадлежит множеству $\Gamma_B = \{(f, h) \in F \times H \mid h = Bf\}$. Действительно, пусть последовательность (f_l, Bf_l) сходится при $l \to +\infty$ к некоторой точке (f, h) пространства $F \times H$ в обычной топологии произведения (задаваемой метрикой $\rho_{F \times H}\big((f_1, h_1), (f_2, h_2)\big) = \rho_F(f_1, f_2) + \rho_H(h_1, h_2)$, где (f_1, h_1) и (f_2, h_2) из $F \times H$, а ρ_F и ρ_H обозначают метрики пространств F и H соответственно). Последняя сходимость означает, что $f_l \to f$ и $Bf_l \to h$ по метрикам ρ_F и ρ_H соответственно. По условию леммы сходимость по метрикам ρ_F и ρ_H не слабее равномерной сходимости на компактах в U, так что последовательности f_l и Bf_l сходятся равномерно на любом компакте из U к функциям f и h соответственно. Из неравенств Коши (9.2) вытекает, что каждый коэффициент Тейлора является не только линейным, но ещё и непрерывным функционалом относительно топологии равномерной сходимости на компактах внутри U, так что $a_k(f_l) \to a_k(f)$ и $a_k(Bf_l) \to a_k(h)$ при $l \to +\infty$ для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$, где через $a_k(w)$ обозначен k-ый коэффициент Тейлора голоморфной в круге U функции w. С другой стороны, согласно определению коэффициентного мультипликатора, $a_k(Bf_l) = b_k a_k(f_l)$ и из предыдущих предельных соотношений следует, что $a_k(h) = b_k a_k(f)$, то есть $h = Bf$. Таким образом показано, что каждая предельная точка (f, h) графика оператора B имеет вид

(f, Bf), то есть принадлежит графику Γ_B оператора B. Итак, доказана замкнутость множества Γ_B, а вместе с ней и утверждение леммы.

9.2.2. Квазинормированные пространства и пространства типа $(\boldsymbol{F})$

Напомним, что линейное пространство E называют квазинормированным, если оно наделено некоторой числовой характеристикой $|\cdot|$ элементов этого пространства, называемой квазинормой, которая удовлетворяет следующим аксиомам (здесь x_l, x, y — элементы пространства E, а α_l, α – элементы числового поля K, над которым рассматривается линейное пространство E):

(1) $\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$	(невырожденность)
(2) $\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$	(симметричность)
(3) $\lvert x+y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	(неравенство треугольника)
(4) $\lvert \alpha_l x\rvert \to 0,$ если $\alpha_l \to 0$	(согласованность квазинормы с
(5) $\lvert \alpha x_l\rvert \to 0,$ если $\lvert x_l\rvert \to 0$	операцией умножения на скаляр)

(см. [144, гл. I, §2, определение 2]). В каждом квазинормированном пространстве E с помощью метрики

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in E, \tag{9.31}$$

задаётся естественная топология, и можно показать (см. [144, гл. I, §2, предложение 2]), что эта топология превращает E в линейно-топологическое пространство. Квазинормированные пространства во многом схожи с нормированными, что подтверждает следующее предложение.

Лемма 9.9 (К. Йосида [144]). *Непрерывность линейного оператора квазинормированных пространств равносильна его ограниченности, то есть тому, что он ограниченные множества переводит в ограниченные.*

Замечание 9.10. Здесь под ограниченностью множеств квазинормированного пространства следует понимать не ограниченность по квазинорме, а ограниченность в смысле линейно-топологических пространств, частными случаями которых являются квазинормированные.

Из формулы (9.31) можно видеть, что задание квазинормы в линейном пространстве эквивалентно заданию инвариантной относительно параллельных переносов метрики, согласованной с операцией умножения на скаляр (более точно, операция умножения на скаляр должна быть непрерывной по скалярному и по векторному аргументам в отдельности). Таким образом, для того, чтобы квазинормированное пространство E представляло собой пространство типа (F) (или, что то же самое,

F-пространство) относительно метрики (9.31), не хватает лишь свойства полноты пространства E. Поэтому пространства типа (F) можно рассматривать как полные квазинормированные пространства, то есть как обобщения пространств типа (B) (банаховых пространств). Свойство полноты играет существенную роль во многих предложениях функционального анализа, таких, например, как следующее.

Лемма 9.11 (Н. Данфорд, Дж. Шварц [66]). *Непрерывность линейного оператора F-пространств равносильна его замкнутости, то есть замкнутости его графика.*

Это утверждение называют теоремой о замкнутом графике.

Пространства Привалова N^q $(q > 1)$ и пространства Харди H^p $(p > 0)$ являются пространствами типа (F) (см. работы М. Столла [132, теорема 4.2], П. Л. Дюрена, Б. В. Ромберга и А. Л. Шилдса [68], А. Е. Тейлора [134]), так что к ним применимы обе сформулированные леммы.

9.2.3. Оценки ядра Пуассона

Оценки данного пункта будут играть важную роль в доказательстве леммы следующего пункта. Кроме того, они могут быть использованы для построения различных примеров функций, принадлежащих или не принадлежащих классам Харди и Привалова.

Ядро Пуассона (9.4) удобней обозначить как

$$P_r(\theta) = P(r, e^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}. \tag{9.32}$$

Следующая лемма была сформулирована как упражнение в книге У. Рудина [116, с. 33].

Лемма 9.12. *Для ядра Пуассона (9.32) справедлива оценка*

$$P_r(\theta) \le (1 - r)\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^2, \quad 0 \le r < 1, \quad -\pi \le \theta \le \pi, \quad \theta \ne 0.$$

Доказательство. Так как для всех $-\pi \le \theta \le \pi$ справедливо неравенство $|\sin(\theta/2)| \ge |\theta/\pi|$, то знаменатель дроби в (9.32) можно оценить как

$$\begin{aligned} 1 + r^2 - 2r\cos\theta = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2} \ge \\ \ge (1-r)^2 + 4r\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 \ge (1-r)^2\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 + 4r\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 = \\ = (1+r)^2\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 \ge (1+r)\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2, \end{aligned}$$

если только $r \ge 0$. Отсюда при $r < 1$ и $\theta \ne 0$ из выражения (9.32) получаем искомую оценку леммы.

Следующая лемма в немного отличной от приводимой здесь форме и в частном случае $q > 1/2$ встречается в монографии П. Л. Дюрена [70, раздел 6.4].

Лемма 9.13. *Для каждого действительного числа q найдутся такие конечные положительные постоянные C_q и D_q, зависящие только от q, что*

$$C_q\,\phi_q(r) \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r^q(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} \le D_q\,\phi_q(r), \quad 0 \le r < 1, \tag{9.33}$$

где

$$\phi_q(r) = \begin{cases} (1-r)^q, & \text{если } q < 1/2 \\ \sqrt{1-r}\ln\Bigl(1+\frac{1}{1-r}\Bigr), & \text{если } q = 1/2 \\ (1-r)^{1-q}, & \text{если } q > 1/2. \end{cases} \tag{9.34}$$

Доказательство. Обозначим интеграл в оценке (9.33) через $I_q(r)$ и воспользуемся неравенствами

$$(1-r)^2 + 4r\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 \le 1 + r^2 - 2r\cos\theta \le$$
$$\le (1-r)^2 + r\theta^2, \quad r \ge 0,\ -\pi \le \theta \le \pi,$$

чтобы оценить ядро Пуассона (9.32), входящее в выражение для $I_q(r)$:

$$\frac{1+r}{1-r}\,\frac{1}{1+r\theta^2/(1-r)^2} \le P_r(\theta) \le \frac{1+r}{1-r}\,\frac{1}{1+4r\theta^2/(\pi^2(1-r)^2)},$$
$$0 \le r < 1,\ -\pi \le \theta \le \pi.$$

Тогда

$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^q \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+r\theta^2/(1-r)^2)^q}\,\frac{d\theta}{2\pi} \le I_q(r) \le$$
$$\le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^q \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+4r\theta^2/(\pi(1-r))^2)^q}\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0 \le r < 1,$$

если $q \ge 0$, и неравенства меняются на противоположные, если $q < 0$. Сделаем в интегралах левой и правой части последнего неравенства замены переменных $\chi = \sqrt{r}\theta/(1-r)$ и $\xi = 2\sqrt{r}\theta/(\pi(1-r))$ соответственно (такие замены возможны при $0 < r < 1$). После небольших преобразований получаем

$$\frac{(1+r)^q}{2\pi\sqrt{r}}\int\limits_{-\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}}^{\pi\sqrt{r}/(1-r)}\frac{d\chi}{(1+\chi^2)^q}\le I_q(r)(1-r)^{q-1}\le$$

$$\le\frac{(1+r)^q}{4\sqrt{r}}\int\limits_{-\frac{2\sqrt{r}}{1-r}}^{2\sqrt{r}/(1-r)}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^q},\quad 0<r<1,\quad (9.35)$$

если $q\ge 0$, и неравенства нужно поменять на противоположные, если $q<0$. Обозначим левую и правую части последнего неравенства через $C_q(r)$ и $D_q(r)$ соответственно. В поведении этих функций при $r\to 1-$ и будет заключаться различие трёх рассмотренных в (9.34) случаев.

В случае $q>1/2$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\chi}{(1+\chi^2)^q}\qquad (9.36)$$

сходится и поэтому функции $C_q(r)$ и $D_q(r)$ имеют конечные положительные пределы при $r\to 1-$. Точно так же при $r\to 0+$ эти функции имеют конечные положительные пределы (равные единице). Так как при $0<r<1$ функции $C_q(r)$ и $D_q(r)$, очевидно, положительны и непрерывны, то они допускают непрерывное и положительное продолжение на весь отрезок $[0,1]$. Следовательно, существуют конечные положительные постоянные C_q и D_q, ограничивающие функции $C_q(r)$ и $D_q(r)$ на интервале $(0,1)$ соответственно снизу и сверху. Объединяя эти оценки с неравенством (9.35), приходим к искомому неравенству (9.33).

В случае $q<1/2$ интеграл (9.36) расходится и его частичные интегралы

$$\int\limits_{-\xi}^{\xi}\frac{d\chi}{(1+\chi^2)^q},\quad \xi\ge 0,\qquad (9.37)$$

эквивалентны при $\xi\to+\infty$ функции $2\xi^{1-2q}/(1-2q)$. Принимая это во внимание, рассмотрим вместо функций $C_q(r)$ и $D_q(r)$ функции $X_q(r)=(1-r)^{1-2q}C_q(r)$ и $Y_q(r)=(1-r)^{1-2q}D_q(r)$ соответственно. Из вышесказанного следует, что функции $X_q(r)$ и $Y_q(r)$ имеют конечные положительные пределы при $r\to 1-$ и то же самое имеет место при $r\to 0+$. Так как внутри интервала $(0,1)$ функции положительны и непрерывны, то их можно продолжить на весь отрезок $[0,1]$ с сохранением свойств положительности и непрерывности. Если $q\ge 0$, то найдём конечные положительные постоянные C_q и D_q, ограничивающие функции $X_q(r)$ и $Y_q(r)$ снизу и сверху соответственно, и тогда $C_q(r)\ge C_q(1-r)^{2q-1}$ и $D_q(r)\le D_q(1-r)^{2q-1}$, $0<r<1$, что вместе с неравенством (9.35) доказывает искомое неравенство (9.33). В случае $q<0$ следует учесть, что неравенства в (9.35) меняются на противоположные, поэтому, находя конечные положительные постоянные C_q и D_q, ограничивающие функции $X_q(r)$ и $Y_q(r)$ на $(0,1)$ соответственно сверху и снизу, получим $C_q(r) \leq D_q(1-r)^{2q-1}$ и $D_q(r) \geq C_q(1-r)^{2q-1}$, что вместе с неравенством (9.35) приводит к искомой оценке (9.33) и в случае $q < 0$.

Единственное отличие случая $q = 1/2$ от всех предыдущих заключается в особенности скорости расходимости интеграла (9.36). В этом случае частичные интегралы (9.37) будут эквивалентны при $\xi \to +\infty$ выражению $2\ln(1+\xi)$. Поэтому функции $X_q(r) = C_q(r)/\ln\bigl(1+\frac{1}{1-r}\bigr)$ и $Y_q(r) = D_q(r)/\ln\bigl(1+\frac{1}{1-r}\bigr)$ имеют конечные положительные пределы при $r \to 1-$. То же самое относится и к пределу при $r \to 0+$, так что из непрерывности и положительности функций $X_q(r)$ и $Y_q(r)$ на интервале $(0,1)$ следует, что эти функции могут быть продолжены, с сохранением непрерывности и положительности, на весь отрезок $[0,1]$. Следовательно, существуют конечные положительные постоянные C_q и D_q, ограничивающие функции $X_q(r)$ и $Y_q(r)$ на интервале $(0,1)$ соответственно снизу и сверху, что равносильно неравенствам $C_q(r) \geq C_q\ln\bigl(1+\frac{1}{1-r}\bigr)$ и $D_q(r) \leq D_q\ln\bigl(1+\frac{1}{1-r}\bigr)$. Объединяя полученные оценки с неравенством (9.35), приходим к искомому неравенству (9.33) и в случае $q = 1/2$.

9.2.4. Ограниченность некоторых множеств в N^q $(q > 1)$

В пункте приводятся примеры ограниченных множеств в N^q $(q > 1)$, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 9.14. *Пусть $q > 1$ и последовательности $0 \leq r_l < 1$ и $\beta_l \geq 0$ удовлетворяют условию $\beta_l^q(1-r_l)^{1-q} \to 0$ при $l \to +\infty$. Тогда последовательность функций $f_l(z) = g_{\beta_l}(r_l z)$, $z \in U$, где функции g_c определены в соответствии с формулой (9.15), ограничена в пространстве N^q.*

Доказательство. Для того чтобы показать ограниченность последовательности $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$, для любой окрестности V нуля пространства N^q требуется найти такое положительное число α_0, что если $\alpha \in \mathbb{C}$ и $|\alpha| \leq \alpha_0$, то последовательность $(\alpha f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ полностью содержится в этой окрестности V. Так как в любую окрестность нуля можно вписать шар достаточно малого положительного радиуса (с центром в нуле), то без ограничения общности считаем $V = B(0,\varepsilon) = \{f \in N^q \mid |f|_{N^q} < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Считая, что $|\alpha| \leq 1$ и $l \in \mathbb{N}$, оценим квазинорму функции αf_l, воспользовавшись выражением (1.3) для $|\cdot|_{N^q}$ и разбивая интеграл в этом выражении на интеграл по промежутку $-\theta_l < \theta < \theta_l$ и по его дополнению (относительно отрезка $[-\pi,\pi]$):

$$|\alpha f_l|_{N^q}^q = \Bigg(\int\limits_{|\theta|<\theta_l} + \int\limits_{\theta_l\le|\theta|\le\pi} \Bigg) \ln^q\Big(1+|\alpha|\exp\Big(\frac{\beta_l}{2}P_{r_l}(\theta)\Big)\Big)\,\frac{d\theta}{2\pi} \le$$

$$\le \int\limits_{|\theta|<\theta_l} \ln^q\Big(1+\exp\Big(\frac{\beta_l}{2}P_{r_l}(\theta)\Big)\Big)\,\frac{d\theta}{2\pi} + \int\limits_{\theta_l\le|\theta|\le\pi} \ln^q\Big(1+|\alpha|\exp\Big(\frac{\beta_l}{2}P_{r_l}(\theta)\Big)\Big)\,\frac{d\theta}{2\pi},$$

где мы воспользовались также тождеством (9.16). Для оценки предпоследнего интеграла воспользуемся неравенством (3.12), а последний оценим согласно лемме 9.12:

$$|\alpha f_l|_{N^q}^q \le \frac{2\theta_l}{2\pi}2^q\ln^q 2 + \beta_l^q\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{r_l}^q(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} + \ln^q\Big(1+|\alpha|\exp\Big(\frac{\beta_l}{2}(1-r_l)\Big(\frac{\pi}{\theta_l}\Big)^2\Big)\Big).$$

Теперь воспользуемся свободой выбора последовательности (θ_l), $0<\theta_l\le\pi$, выбрав её так, чтобы, во-первых, она сходилась к нулю, а, во-вторых, неравенство $\beta_l(1-r_l)(\pi/\theta_l)^2\le 1$ выполнялось, по крайней мере, начиная с некоторого номера (выбор такой последовательности возможен, так как в силу условия леммы $\beta_l(1-r_l)\to 0$ при $l\to+\infty$). Тем самым мы оценим в последнем неравенстве последнее слагаемое. Предпоследнее слагаемое можно оценить по лемме 9.13. Окончательно получаем, что для некоторой конечной положительной постоянной D_q выполнено неравенство

$$|\alpha f_l|_{N^q}^q \le \frac{\ln^q 4}{\pi}\theta_l + D_q\beta_l^q(1-r_l)^{1-q} + \ln^q(1+|\alpha|\sqrt{e}), \tag{9.38}$$

по крайней мере, начиная с некоторого номера. Первое и второе слагаемые в правой части последнего неравенства стремятся при $l\to+\infty$ к нулю: первое — согласно выбору θ_l, второе — согласно условию леммы. Следовательно, для произвольного $\varepsilon>0$ найдётся такой номер $l_0\in\mathbb{N}$, что при любом натуральном $l\ge l_0$ первые два слагаемых в правой части последнего неравенства в сумме дадут число, не превосходящее $2\varepsilon^q/3$. Выбрав такое $\alpha_{l_0}>0$, чтобы были выполнены неравенства $\alpha_{l_0}\le 1$ и $\ln^q(1+\alpha_{l_0}\sqrt{e})<\varepsilon^q/3$, согласно неравенству (9.38), мы получим, что для всех натуральных $l\ge l_0$ и всех комплексных α с $|\alpha|\le\alpha_{l_0}$ будет выполнено $|\alpha f_l|_{N^q}<\varepsilon$, так что, начиная с номера l_0, все элементы последовательности (αf_l) содержатся в шаре $B(0,\varepsilon)$. Согласно тому, что N^q является F-пространством, для каждого из номеров $l=1,2,\ldots,l_0-1$ найдётся такое положительное число $\alpha_l>0$, что для всех $\alpha\in\mathbb{C}$ с $|\alpha|\le\alpha_l$ будет выполнено $|\alpha f_l|_{N^q}<\varepsilon$. Полагая $\alpha_0=\min(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{l_0})$, получим, что при $|\alpha|\le\alpha_0$ уже вся последовательность (αf_l) будет содержаться в шаре $B(0,\varepsilon)$. Так как $\varepsilon>0$ вначале выбиралось произвольным, то последовательность (f_l) ограничена в N^q.

Замечание 9.15. Последовательность (f_l) из леммы на самом деле сходится в метрике пространства N^q к функции, тождественно равной единице (чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться критерием ограниченности множеств в N^q (см. теорему 3.9) и потом стандартной предельной теоремой из [106, теорема II.T21]). Таким образом, лемма даёт пример множества, которое является не только ограниченным, но также и вполне ограниченным в пространстве N^q. Пример множества, которое ограничено в пространстве N^q, но не вполне, можно найти, например, в диссертации Р. Мештровича [104, гл. 6, теорема 4.5] (см. также монографию Р. Мештровича и Ж. Павичевича [105, гл. 9]). Р. Мештрович (см. [104, гл. 2, комментарий к лемме 2.7] или [105]) заметил, что верно также утверждение, в некоторой степени обратное к только что доказанной лемме: *если последовательности $0 \le r_l < 1$ и $\beta_l \ge 0$ таковы, что функции f_l, определённые в лемме, образуют ограниченную последовательность в пространстве N^q $(q > 1)$ и, кроме того, $r_l \to 1$ при $l \to +\infty$, то $\beta_l^q(1-r_l)^{1-q} \to 0$ при $l \to +\infty$* (если $r_l \not\to 1$ при $l \to +\infty$, то о последовательности $\beta_l^q(1-r_l)^{1-q}$ можно сказать лишь, что она ограничена).

9.2.5. Лемма о бесконечном ослаблении неравенства

Следующее утверждение в некоторых частных случаях встречается в статьях [141, лемма 1] и [90, лемма 5.1].

Лемма 9.16. *Пусть $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — неотрицательная, а $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — произвольная последовательность действительных чисел, причём x_k могут принимать значения $-\infty$. Чтобы выполнялось неравенство*

$$x_k \le A - c\,y_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.39}$$

с некоторыми конечными постоянными A и $c > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой невозрастающей бесконечно малой последовательности $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ нашлась конечная постоянная A, для которой

$$x_k \le A - c_k\,y_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.40}$$

Доказательство. Интерес представляет только доказательство достаточности. Пусть неравенство (9.39) не может быть выполнено ни при каких A и $c > 0$. Беря в качестве A и c последовательности чисел l и $1/l$, $l \in \mathbb{N}$, по индукции можем построить возрастающую последовательность номеров (k_l), $k_{l+1} > k_l$, $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, для которой выполнены противоположные неравенства

$$x_{k_l} > l - \frac{1}{l}\,y_{k_l}. \tag{9.41}$$

Положим $c_k = 1/l$ для $k = k_l$, а для остальных номеров $k \ne k_l$ доопределим последовательность c_k по монотонности. Очевидно, что $c_k \downarrow$ и $c_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Из неравенства (9.41) следует, что для этой последовательности нельзя подобрать конечной постоянной A такой, что неравенство

(9.40) будет выполнено для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Действительно, для каждой конечной постоянной A можно найти такой натуральный номер l, что $l \geq A$. Тогда из (9.41) имеем

$$x_{k_l} > l - \frac{1}{l}\, y_{k_l} \geq A - c_{k_l} y_{k_l},$$

что и доказывает требуемое свойство. Тем самым, достаточность условия леммы проверена.

Необходимость условия леммы очевидна.

9.3. Коэффициентные мультипликаторы из N^q $(q > 1)$ в H^p $(p > 0)$

В параграфе устанавливается общий вид коэффициентных мультипликаторов из классов Привалова N^q $(q > 1)$ в классы Харди H^p $(p > 0)$ и выясняется, что он не зависит от показателя $p > 0$. Как следствие основной теоремы, доказывается точность в классах N^q $(q > 1)$ оценок равномерного роста и коэффициентов Тейлора, полученных в теоремах 1.6 и 9.4.

9.3.1. Коэффициентные мультипликаторы классов H^p $(p > 0)$ и N_*

Понятие коэффициентного мультипликатора естественно возникает при изучении асимптотических свойств коэффициентов Тейлора функций какого-нибудь класса. В упрощённом виде задача ставится так: на какие множители нужно домножить тейлоровские коэффициенты функций из данного класса, чтобы они стали обладать заданными свойствами; например, были бы ограниченными или образовывали абсолютно сходящийся ряд. Требуя, чтобы полученные произведения были тейлоровскими коэффициентами функций некоторого другого класса, приходим к общему определению коэффициентного мультипликатора (см. определение 9.6). Часто пространства последовательностей $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, имеющих $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \leq 1$, отождествляют с пространствами голоморфных в единичном круге функций, у которых (a_k) образуют последовательности тейлоровых коэффициентов. Поэтому становится возможным говорить о коэффициентных мультипликаторах пространств аналитических функций в пространства последовательностей; например, из классов Харди H^p $(p > 0)$ в пространства последовательностей l^q $(q > 0)$.

Коэффициентные мультипликаторы классов Харди H^p и их обобщений, классов B^p, изучались многими авторами (см. по этому поводу книгу П. Л. Дюрена [70, разд. 6.4, комментарии к гл. 6], где приведён хороший обзор по результатам до 1970 года). Отметим лишь результат, отличающийся особо простой формулировкой.

Теорема 9.17 (П. Л. Дюрен, А. Шилдс [69]). *Для того чтобы последовательность $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ являлась мультипликатором из H^p $(0 < p \le 1)$ в l^∞ (пространство ограниченных последовательностей), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lambda_k = O(k^{1-\frac{1}{p}}) \text{ при } k \to +\infty.$$

Из этой теоремы непосредственно следует неулучшаемость для классов H^p $(0 < p \le 1)$ оценки коэффициентов Тейлора (1.10) из теоремы 1.7 (см. [70, следствие теоремы 6.4]). Вообще, основным приложением результатов о коэффициентных мультипликаторах классов голоморфных функций является установление точности оценок тейлоровских коэффициентов функций этих классов.

Общий вид коэффициентных мультипликаторов из класса Смирнова N_* в классы Харди H^p был найден Н. Янагихарой.

Теорема 9.18 (Н. Янагихара [141]). *Пусть $0 < p \le +\infty$. Для того чтобы последовательность $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ была мультипликатором из N_* в H^p, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lambda_k = O\big(e^{-c\sqrt{k}}\big) \text{ при } k \to +\infty$$

с некоторой положительной постоянной c.

П. Л. Дюрен, Б. В. Ромберг, А. Шилдс и вслед за ними Н. Янагихара указали ещё одно интересное приложение понятия коэффициентного мультипликатора — с его помощью можно доказывать теоремы о представлении непрерывных линейных функционалов на классах голоморфных функций. Более подробно это приложение рассмотрено в следующем параграфе.

9.3.2. Коэффициентные мультипликаторы классов N^q $(q > 1)$ в классы H^p $(p > 0)$

В этом пункте содержится основной результат параграфа. Для его формулировки удобно ввести в рассмотрение ещё один класс функций.

Определение 9.19. *Пусть $q > 0$. Голоморфная в единичном круге функция*

$$g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k z^k, \quad z \in U, \tag{9.42}$$

принадлежит классу A_q^∞, если

$$\ln|b_k| \le A - c\,\sqrt[q+1]{k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.43}$$

для некоторых действительных постоянных A и $c > 0$.

Условие (9.43), очевидно, равносильно условию $b_k = O\bigl(e^{-c\,\sqrt[q+1]{k}}\bigr)$ при $k \to +\infty$, и поэтому каждая функция класса A_q^∞ непрерывна вплоть до границы круга U, вместе со всеми своими производными, то есть принадлежит классу A^∞.

Теорема 9.20. *Пусть $1 < q < +\infty$ и $0 < p \le +\infty$. Для того, чтобы последовательность $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ была коэффициентным мультипликатором из класса N^q в класс H^p, необходимо и достаточно, чтобы B была последовательностью тейлоровских коэффициентов некоторой функции класса A_q^∞.*

Замечание 9.21. Заметим, что условие теоремы не зависит от показателя $p > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность чисел $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является коэффициентным мультипликатором класса N^q ($q > 1$) в класс H^p ($p > 0$). Чтобы показать, что эта последовательность удовлетворяет неравенству (9.43), то есть является последовательностью тейлоровских коэффициентов некоторой функции класса A_q^∞ — согласно лемме 9.16, достаточно показать, что для каждой бесконечно малой невозрастающей последовательности $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ найдётся такое действительное число A, что

$$\ln|b_k| \le A - c_k\,\sqrt[q+1]{k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.44}$$

Поскольку $c_k \to 0$ при $k \to +\infty$, не ограничивая общности, можем считать, что $c_k \le 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, в силу неравенства $\max(c_k, k^{-\beta}) \ge c_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, неравенство (9.44) достаточно доказать для последовательностей (c_k), удовлетворяющих условию $c_k \ge k^{-\beta}$, $k \in \mathbb{N}$. Итак, предположим, что (c_k) — невозрастающая бесконечно малая последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{k^\beta} \le c_k \le 1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9.45}$$

в котором фиксированное положительное число β будет выбрано позже.

Для каждого $l \in \mathbb{N}$ положим $\beta_l = c_l^2/l^{q\frac{q-1}{q+1}}$, $r_l = 1 - c_l^{q/(q-1)}/l^{q/(q+1)}$ и определим последовательность голоморфных в единичном круге функций $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$, как в лемме 9.14. Из условия (9.45) следует, что $\beta_l \ge 0$ и $0 \le r_l < 1$. Кроме того, $\beta_l^q(1-r_l)^{1-q} = c_l^q \to 0$ при $l \to +\infty$, так что по лемме 9.14 последовательность (f_l) ограничена в пространстве N^q. Согласно следствию 3.3 и неравенству

$$M(f,r) \le \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/p} |f|_{H^p}^{1/\alpha_p}, \quad 0 \le r < 1, \quad \alpha_p = \min(p,1),$$

пространства N^q и H^p удовлетворяют всем условиям леммы 9.7. Следовательно, мультипликатор B, рассматриваемый как оператор из пространства N^q в пространство H^p, линеен и замкнут. В силу лемм 9.9 и 9.11, оператор B переводит ограниченные множества в ограниченные. Таким образом, последовательность (Bf_l) ограничена в пространстве H^p и

$$|Bf_l|_{H^p} \le D < +\infty$$

с некоторой положительной постоянной D, не зависящей от номера $l \in \mathbb{N}$. Для дальнейшего изложения доказательства удобно через символ $a_k(w)$ обозначить k-ый тейлоровский коэффициент произвольной функции w, голоморфной в U. Тогда в силу оценки Г. А. Фридмана (оценка (1.11) из теоремы 1.7) имеем

$$\ln\bigl|a_k(Bf_l)\bigr| \le \frac{\ln D}{\alpha_p} + \left(\frac{1}{\alpha_p} - 1\right)\ln(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{9.46}$$

Для того чтобы оценить $\ln\bigl|a_k(Bf_l)\bigr|$ снизу, заметим, что из определения коэффициентного мультипликатора (определение 9.6) вытекает, что $a_k(Bf_l) = b_k a_k(f_l)$, а по определению функций f_l справедливо соотношение $a_k(f_l) = r_l^k a_k(g_{\beta_l})$, где функции g_{β_l} определены формулами (9.15). Применяя к коэффициентам Тейлора функций g_{β_l} оценку (9.17) из теоремы 9.3, получаем

$$\begin{aligned}\ln\bigl|a_k(Bf_l)\bigr| = \ln|b_k| + k\ln r_l + \ln\bigl|a_k(g_{\beta_l})\bigr| \ge \\ \ge \ln|b_k| + k\ln r_l + 2\sqrt{\beta_l k} - 3\ln(k+1) - 4 - \\ - \frac{\beta_l}{2} - |\ln\beta_l|, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad l \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{9.47}$$

Объединяя неравенства (9.46) и (9.47) и полагая в них $k = l$, после несложных преобразований, с учётом условия (9.45), находим

$$\ln|b_k| \le -2c_k \sqrt[q+1]{k} - k\ln r_k + O(\ln k) \text{ при } k \to +\infty.$$

Далее, оценивая слагаемое $-k\ln r_k$ с помощью неравенства $\ln(1+x) \ge x/(1+x)$, имеем

$$\begin{aligned}- k\ln r_k = -k\ln(1-(1-r_k)) \le k(1-r_k)/r_k = c_k^{q/(q-1)} \sqrt[q+1]{k} = \\ = o(c_k \sqrt[q+1]{k}) \text{ при } k \to +\infty.\end{aligned}$$

Выбирая число $\beta > 0$ в условии (9.45) меньшим, чем число $1/(1+q)$, замечаем, что $O(\ln k)$ становится $o(c_k \sqrt[q+1]{k})$ и

$$\ln|b_k| \le -2c_k \sqrt[q+1]{k} + o(c_k \sqrt[q+1]{k}) \text{ при } k \to +\infty.$$

Следовательно, существует такой номер $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\ln|b_k| \le -c_k \sqrt[q+1]{k} \text{ при всех } k \in \mathbb{N},\ k \ge k_0. \tag{9.48}$$

Полагая $A = \max\{0, \ln|b_k| + c_k \sqrt[q+1]{k} \mid k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1\}$, приходим к искомому неравенству (9.44).

Достаточность. Пусть $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ есть последовательность коэффициентов Тейлора некоторой функции класса A_q^∞ $(q > 1)$. Согласно оценке (9.25) из теоремы 9.4, для каждой функции $f \in N^q$ с разложением (9.29) функция h с разложением (9.30) принадлежит классу A_q^∞. По определению коэффициентного мультипликатора (определение 9.6), последовательность B является коэффициентным мультипликатором класса N^q в класс A_q^∞, а следовательно, и в любой из классов H^p $(p > 0)$.

Замечание 9.22. Из доказательства достаточности видно, что коэффициентные мультипликаторы классов N^q $(q > 1)$ в классы H^p $(p > 0)$ действуют на самом деле в более узкий класс A_q^∞.

Замечание 9.23. Доказательство необходимости условия теоремы нетрудно приспособить для доказательства более сильного утверждения о коэффициентных мультипликаторах из классов N^q $(q > 1)$ в классы $N^{q'}$ с бóльшими показателями $q' > q$. Изменения в доказательстве состоят в замене в предыдущих рассуждениях оценки (1.11) из теоремы 1.7 на оценку (9.1) из теоремы 9.1 (с заменой q на q') и в более аккуратном выборе показателя $\beta > 0$ в условии (9.45).

9.3.3. Точность оценки коэффициентов Тейлора функций классов N^q $(q > 1)$

Непосредственным следствием доказанной теоремы служит утверждение о неулучшаемости оценки (9.25) из теоремы 9.4 для коэффициентов Тейлора функций классов N^q $(q > 1)$.

Следствие 9.24 (Р. Мештрович [104]). *Пусть $q > 1$ и $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — произвольная бесконечно малая последовательность положительных чисел. Тогда существует функция f класса N^q, для которой коэффициенты Тейлора имеют следующее свойство:*

$$a_k \neq O\big(e^{\alpha_k \sqrt[q+1]{k}}\big) \text{ при } k \to +\infty. \tag{9.49}$$

Доказательство. Допустим противное, то есть что для каждой функции f из класса N^q коэффициенты Тейлора $a_k = a_k(f)$ удовлетворяют оценке

$$a_k = O\big(e^{\alpha_k \sqrt[q+1]{k}}\big) \text{ при } k \to +\infty. \tag{9.50}$$

Рассмотрим последовательность чисел $b_k = e^{-\alpha_k \sqrt[q+1]{k}}/(k+1)^2$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Согласно предположению, для каждой функции f из класса N^q с разложением (9.29) функция h с разложением (9.30) имеет абсолютно сходящийся ряд Тейлора в замкнутом единичном круге $\overline{U}$. По определению 9.6, последовательность $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является коэффициентным мультипликатором из класса N^q в класс H^∞ ограниченных голоморфных функций.

По теореме 9.19, коэффициенты этого мультипликатора должны удовлетворять неравенствам (9.43) с некоторыми A и $c > 0$. Но тогда

$$-\alpha_k \sqrt[q+1]{k} - 2\ln(k+1) \le A - c \sqrt[q+1]{k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и

$$-\alpha_k - \frac{2\ln(k+1) + A}{\sqrt[q+1]{k}} \le -c, \quad k \in \mathbb{N},$$

что противоречит условию бесконечной малости последовательности (α_k). Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения следствия.

Замечание 9.25. Аналог утверждения следствия 9.24 справедлив и для функций класса N_*. Он доказан в статье Н. Янагихары [143, теорема 4], причём доказательство состоит в явном построении функции с требуемым свойством (правда, доказательство имеет довольно сложную конструкцию).

9.3.4. Точность оценки равномерного роста функций классов N^q $(q > 1)$

На основании следствия 9.24 можно установить асимптотическую точность оценки равномерного роста функций классов N^q $(q > 1)$, доставляемой теоремой 1.6.

Следствие 9.26. *Пусть $q > 1$ и $\alpha(r)$ — произвольная положительная функция на промежутке $[0, 1)$, бесконечно малая при $r \to 1-$. Тогда существует функция f класса N^q, для которой максимум модуля обладает свойством*

$$M(f, r) \ne O\big(e^{\alpha(r)\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q}}\big) \text{ при } r \to 1- .$$

Доказательство. Предположим, что свойство

$$\ln_+ M(f, r) \le A + \alpha(r)\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q}, \quad 0 \le r < 1, \tag{9.51}$$

с некоторой постоянной A выполнено для каждой функции f класса N^q (выбор постоянной A, вообще говоря, зависит от f). В доказательстве теоремы 9.4 установлено существование такой положительной бесконечно малой последовательности (α_k), выбор которой зависит только от $\alpha(r)$ и q, что для каждого коэффициента Тейлора функции f выполнено неравенство

$$\ln |a_k| \le A + \alpha_k \sqrt[q+1]{k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким образом, для каждой функции f класса N^q справедлива оценка (9.50). Последнее противоречит утверждению следствия 9.24, и поэтому исходное предположение не имеет места.

Замечание 9.27. Аналогичный результат для класса N_* доказан Н. Янагихарой в статье [143, теорема 3]. Пример функции с требуемым свойством приведён у него с помощью явного построения.

9.4. Линейные функционалы на N^q $(q > 1)$

Цель данного параграфа состоит в описании множества непрерывных линейных функционалов на пространствах N^q $(q > 1)$. Предложено два представления таких функционалов, доказательства которых основаны на полученной в предыдущем параграфе полной характеризации коэффициентных мультипликаторов классов N^q в классы H^p. Как следствия основных результатов, установлены некоторые свойства коэффициентных мультипликаторов классов N^q, дополняющие результаты параграфа 9.3.

9.4.1. Представления непрерывных линейных функционалов на пространствах H^p и N_*

Понятие непрерывного линейного функционала играет большую роль в теории линейно-топологических пространств. Напомним, что функционал Φ на линейно-топологическом пространстве E со значениями в поле скаляров K называется непрерывным и линейным, если он непрерывен относительно топологических структур и линеен относительно линейных структур E и K. Множество всех непрерывных линейных функционалов на E называется пространством, топологически сопряжённым к E, и обозначается E'.

Вопрос об описании непрерывных линейных функционалов на пространствах голоморфных функций изучается сравнительно давно. Первой была найдена структура непрерывных линейных функционалов для пространств Харди H^p с показателями $p \geq 1$. С современных позиций схема исследования имеет такой вид. Пространства H^p посредством радиальных граничных значений (1.2) отождествляются с некоторыми замкнутыми линейными подпространствами пространств Лебега L^p функций, интегрируемых на единичной окружности T. Так как пространства, топологически сопряжённые к L^p $(p \geq 1)$, хорошо известны, то пространства, топологически сопряжённые к H^p $(p \geq 1)$, согласно общей теории B-пространств, описываются как некоторые фактор-пространства пространств $(L^p)'$ (см. [70, теорема 7.3]). Однако первоначально представления непрерывных линейных функционалов на пространствах H^p были получены исходя из других общих рассмотрений B-пространств голоморфных функций.

Теорема 9.28 (А. Е. Тейлор [136]). *Пусть $1 < p < +\infty$. Тогда каждый непрерывный линейный функционал Φ на пространстве H^p может быть представлен, и единственным способом, в виде*

$$\Phi(f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) g^*(e^{-i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^p, \tag{9.52}$$

в котором f^* обозначает функцию радиальных граничных значений для $f \in H^p$, а g^* — функцию радиальных граничных значений некоторой функции $g \in H^q$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. В случае $p = 1$ каждый непрерывный линейный функционал на пространстве H^1 представляется в виде (9.52) с помощью некоторой функции g^*, принадлежащей пространству L^∞, но не обязательно являющейся функцией радиальных граничных значений некоторой функции класса H^∞.

В случае $0 < p < 1$ пространства H^p и L^p не являются пространствами типа (B) (они только пространства типа (F)), поэтому указанная выше общая схема для них неприемлема. Более того, можно показать, что все непрерывные линейные функционалы на пространствах L^p при $0 < p < 1$ сводятся к одному лишь нулевому (см. [65]). Естественно было бы ожидать, что и для пространств H^p при $0 < p < 1$ пространства $(H^p)'$ тривиальны (то есть состоят из одного лишь нулевого функционала). Однако, как показывает следующая ниже теорема, это не так. Формулировку теоремы удобно провести в терминах пространств Гёльдера–Липшица и Зигмунда голоморфных функций в круге U.

Определение 9.29. *Пусть $0 < \alpha \le 1$ и A обозначает класс функций, голоморфных внутри и непрерывных на замыкании единичного круга U. Функция $f \in A$ принадлежит классу Гёльдера–Липшица Λ_α, если на границе круга U она удовлетворяет условию Гёльдера–Липшица степени α, то есть $|f(e^{i\theta+ih}) - f(e^{i\theta})| \le Ch^\alpha$ с некоторой конечной постоянной $C \ge 0$ для всех $-\pi \le \theta \le \pi$ и $0 \le h \le \pi$. Функция $f \in A$ принадлежит классу Зигмунда Λ_*, если на границе круга U она удовлетворяет условию Зигмунда, то есть $|f(e^{i\theta+ih}) - 2f(e^{i\theta}) + f(e^{i\theta-ih})| \le Ch$ с некоторой конечной постоянной $C \ge 0$ для всех $-\pi \le \theta \le \pi$ и $0 \le h \le \pi$.*

Теорема 9.30 (П. Л. Дюрен, Б. В. Ромберг, А. Л. Шилдс [68]). *Пусть $0 < p < 1$. Тогда каждый ограниченный линейный функционал Φ на пространстве H^p представляется, и единственным способом, в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{r \to 1-} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) \, \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^p \tag{9.53}$$

с некоторой функцией $g \in A$. Если $(n+1)^{-1} < p < n^{-1}$ для некоторого числа $n \in \mathbb{N}$, то $(n-1)$-я производная функции g принадлежит классу Λ_α, $\alpha = 1/p - n$, и, обратно, если $(n-1)$-я производная функции g обладает таким свойством, то предел в правой части (9.53) существует для каждой функции $f \in H^p$ и определяет по формуле (9.53) ограниченный линейный функционал на пространстве H^p. Если $p = (n+1)^{-1}$ для *некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $(n-1)$-я производная функции g принадлежит классу Λ_*, и, обратно, если $(n-1)$-производная функции g имеет такое свойство, то для каждой функции $f \in H^p$ предел в правой части (9.53) существует и определяет, согласно формуле (9.53), ограниченный линейный функционал на пространстве H^p.*

В связи с формулировкой последней теоремы напомним, что непрерывность линейного функционала над квазинормированным пространством равносильна его ограниченности; в случае пространств H^p это нетрудно проверить и непосредственно, используя абсолютную однородность степени $\alpha_p = \min(1,p)$ квазинормы $|\cdot|_{H^p}$; см. также лемму 9.9.

Позднее был найден общий вид непрерывных линейных функционалов над пространством Смирнова N_*.

Теорема 9.31 (Н. Янагихара [141]). *Для каждого непрерывного линейного функционала Φ над пространством N_* существует и единственная функция $g \in A$ с разложением (9.42), такая что*

$$\Phi(f) = \lim_{r\to 1-}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})g(e^{-i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k b_k \tag{9.54}$$

для всех $f \in N_*$ с разложением (9.29) и ряд в правой части (9.54) сходится абсолютно. Более того, тейлоровские коэффициенты $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ функции g удовлетворяют оценке

$$b_k = O(e^{-c\sqrt{k}}) \text{ при } k \to +\infty \tag{9.55}$$

с некоторой положительной постоянной c.

Обратно, если для коэффициентов разложения (9.42) голоморфной функции g в ряд Тейлора справедлива оценка (9.55), то функция g принадлежит классу A, предел и сумма ряда в правой части (9.54) существуют и равны для каждой функции $f \in N_*$ с разложением (9.29) и формула (9.54) определяет непрерывный линейный функционал над N_*.

9.4.2. Дискретное представление непрерывных линейных функционалов над пространствами N^q $(q>1)$

В этом пункте сформулирован и доказан центральный результат параграфа — теорема об общем виде непрерывных линейных функционалов над пространствами Привалова N^q $(q>1)$.

Проблема описания непрерывных линейных функционалов над пространствами N^q $(q>1)$ известна сравнительно давно (с 1977 года). Очень близко к её полному разрешению подошёл М. Столл в своей статье [132]. Основным предметом его исследования были классы F_β $(\beta>0)$, которые можно определить следующим образом.

Определение 9.32. *Пусть $\beta > 0$. Функция f принадлежит классу F_β, если она голоморфна в единичном круге U и*

$$\lim_{r\to 1-}(1-r)^\beta \ln_+ M(f,r) = 0.$$

М. Столл показал, что при каждом $\beta > 0$ система норм

$$\|f\|_c = \int\limits_0^1 M(f,r)\, e^{-c(1-r)^{-\beta}} dr, \quad c > 0$$

превращает класс F_β в пространство Фреше (в смысле Н. Бурбаки, см. [58, гл. 2, §6.2]), и дал полное описание множества непрерывных линейных функционалов над этими пространствами (см. [132, теорема 3.3], а также [145] и [146]). Классы Привалова N^q при каждом $q > 1$ составляют плотные собственные подклассы классов $F_{1/q}$, и можно показать, что топология пространства N^q, задаваемая естественной метрикой ρ_{N^q}, не слабее топологии, индуцированной в N^q топологией пространства $F_{1/q}$ (см. [132, следствие 4.4]). Из этого можно заключить, что каждый непрерывный линейный функционал над пространством $F_{1/q}$ $(q > 1)$ сужается до непрерывного линейного функционала над пространством N^q. Оставалось только неясным, всякий ли непрерывный линейный функционал над пространством N^q $(q > 1)$ является сужением некоторого непрерывного линейного функционала над пространством $F_{1/q}$. Поскольку непрерывные линейные функционалы над пространствами F_β $(\beta > 0)$ были полностью описаны, положительный ответ на этот вопрос позволил бы сразу получить полное описание непрерывных линейных функционалов над N^q $(q > 1)$. То, что ответ на поставленный вопрос действительно положителен, по сути утверждается приводимой ниже теоремой. Доказательство этой теоремы использует технику, развитую в статьях [68] для случая пространств H^p, $0 < p < 1$, и [141] для случая пространства N_*, суть которой коротко можно выразить так: вопрос о нахождении общего вида непрерывного линейного функционала на пространстве N^q $(q > 1)$ сводится к отысканию вида произвольного коэффициентного мультипликатора из N^q в класс H^∞.

Теорема 9.33. *Пусть $1 < q < +\infty$. Любой непрерывный линейный функционал Φ над пространством N^q определяется формулой*

$$\Phi(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k b_k, \tag{9.56}$$

в которой числа $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ являются коэффициентами Тейлора некоторой функции класса A_q^∞, а числа $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ являются коэффициентами Тейлора функции $f \in N^q$. При этом ряд в правой части (9.56) сходится абсолютно и быстрее любого степенного ряда вида $\sum(k+1)^{-p}$, $p > 1$.

Обратно, каждая последовательность $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *тейлоровских коэффициентов некоторой функции класса* A_q^∞ *определяет формулой (9.56) непрерывный линейный функционал над* N^q.

Кроме того, если комплексная последовательность $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *такова, что ряд в правой части (9.56) сходится для каждой функции* $f \in N^q$ *с разложением (9.29), то функционал* Φ, *определённый по формуле (9.56), непрерывен и линеен на пространстве* N^q.

Доказательство. Пусть Φ — произвольный непрерывный линейный функционал на пространстве N^q $(q > 1)$. Каждой функции $f \in N^q$ отнесём функцию

$$h(\zeta) = \Phi(f_\zeta), \quad \zeta \in U,$$

где

$$f_\zeta(z) = f(\zeta z), \quad z \in U. \tag{9.57}$$

Ряд Тейлора функции f_ζ сходится абсолютно и равномерно на замкнутом единичном круге $\overline{U}$, а следовательно, сходится по метрике ρ_{N^q}, так что в силу непрерывности и линейности функционала Φ имеем

$$h(\zeta) = \Phi(f_\zeta) = \lim_{K\to+\infty} \Phi\Big(\sum_{k=0}^{K} a_k \zeta^k z^k\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k a_k \zeta^k, \quad \zeta \in U, \tag{9.58}$$

где $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — последовательность тейлоровских коэффициентов функции f, $b_k = \Phi(z^k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и ряд в правой части (9.58) – сходящийся. Поэтому функция h голоморфна в круге U. Кроме того, по лемме 9.9 и следствию 3.10, функция h ограничена в единичном круге U.

Итак, доказано, что для каждой функции $f \in N^q$ с разложением (9.29) функция h с разложением (9.30) принадлежит классу H^∞ ограниченных голоморфных функций в круге U. По определению 9.6, последовательность $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является коэффициентным мультипликатором класса N^q в класс H^∞. Согласно теореме 9.20, коэффициенты $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ должны удовлетворять неравенству (9.43), то есть будут коэффициентами Тейлора некоторой функции класса A_q^∞. Оценка (9.25) из теоремы 9.4 тогда показывает, что ряд в правой части (9.56) сходится, и быстрее любого степенного ряда вида $\sum (k+1)^{-p}$, $p > 1$. На основании теоремы Абеля о степенных рядах заключаем, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k a_k = \lim_{r\to1-} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k a_k r^k. \tag{9.59}$$

С другой стороны, согласно теореме 2.9, функции f_r, $0 \le r < 1$, определённые формулой (9.57), сходятся к $f \in N^q$ при $r \to 1-$ по метрике пространства N^q, и из непрерывности функционала Φ находим

$$\lim_{r\to1-} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k a_k r^k = \lim_{r\to1-} \Phi(f_r) = \Phi(f), \quad f \in N^q \tag{9.60}$$

(см. также формулу (9.58)). Объединяя равенства (9.59) и (9.60), приходим к искомому представлению (9.56).

Обратно, пусть $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — последовательность тейлоровских коэффициентов некоторой функции класса A_q^∞. Согласно определению класса A_q^∞ (определение 9.19) и оценке (9.25) из теоремы 9.4, ряд в правой части (9.56) сходится для каждой функции $f \in N^q$ с разложением (9.29), а значит, функционал (9.56) корректно определён.

Линейность функционала Φ очевидным образом следует из линейности каждого тейлоровского коэффициента как функционала на пространстве всех голоморфных в единичном круге функций. Чтобы доказать непрерывность функционала Φ, определим последовательность функционалов $(\Phi_K)_{K\in\mathbb{Z}_+}$ посредством выражений

$$\Phi_K(f) = \sum_{k=0}^{K} b_k a_k, \quad K \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.61}$$

в которых функция f принадлежит пространству N^q и имеет разложение (9.29). Линейность и непрерывность каждого функционала Φ_K следует из линейности и непрерывности функционалов, порождаемых коэффициентами Тейлора, над пространством всех голоморфных функций в единичном круге U с топологией равномерной сходимости на компактах (см. неравенства Коши (9.2)) и того свойства, что топология сходимости по метрике ρ_{N^q} не слабее топологии равномерной сходимости на компактах внутри U (следствие 3.3). Таким образом, последовательность $(\Phi_K)_{K\in\mathbb{Z}_+}$ представляет собой последовательность непрерывных линейных функционалов на пространстве N^q. По доказанному выше, предел значений этой последовательности существует для каждой функции из N^q, и поэтому последовательность функционалов (Φ_K) поточечно ограничена. Согласно общему принципу равномерной ограниченности для F-пространств (см. [66, гл. II, §1, теорема 11]), последовательность функционалов (Φ_K) равностепенно непрерывна, а значит, непрерывен и их поточечный предел — функционал Φ.

Непосредственно видно, что свойства линейности и непрерывности функционала (9.56) в предыдущем доказательстве были выведены из одного лишь предположения, что ряд (9.56) в определении этого функционала сходится для каждой функции $f \in N^q$ с разложением (9.29). Следовательно, справедливо и последнее утверждение доказываемой теоремы.

Замечание 9.34. Теорему можно доказать и линейно-топологическими методами. Именно таким путем были впервые описаны линейные непрерывные функционалы на пространствах Привалова. Укажем схему этого доказательства. К. М. Эофф в статье [72, теорема 4.2] доказал, что пространство $F_{1/q}$ является оболочкой Фреше F-пространства N^q $(q > 1)$. Известно, что совпадают пространства, топологически сопряжённые к

F-пространству и его оболочке Фреше (если последняя существует). Отсюда, согласно [132, теорема 3.3], и следует утверждение теоремы (см. [72, разд. 2] и [103, теорема C]).

9.4.3. Интегральное представление непрерывных линейных функционалов над пространствами N^q $(q > 1)$

Сформулируем и докажем теорему о представлении непрерывных линейных функционалов над пространствами Привалова в интегральной форме, более привычной для теории функций.

Теорема 9.35. *Пусть $1 < q < +\infty$. Для любого непрерывного линейного функционала Φ на пространстве N^q существует такая функция g класса A_q^∞, что*

$$\Phi(f) = \lim_{r\to 1-}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})g(e^{-i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in N^q. \tag{9.62}$$

Обратно, если функция g принадлежит классу A_q^∞, то предел в правой части равенства (9.62) существует для любой функции $f \in N^q$ и формула (9.62) определяет непрерывный линейный функционал на пространстве N^q.

Функция g из представления (9.62) единственна в классе A функций, голоморфных внутри и непрерывных на замыкании единичного круга U.

Кроме того, если комплексная последовательность $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ такова, что предел

$$\Phi(f) = \lim_{r\to 1-}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k b_k r^k \tag{9.63}$$

существует (и конечен) для произвольной функции $f \in N^q$ с разложением (9.29), то формула (9.63) также определяет непрерывный линейный функционал на пространстве N^q.

Доказательство. Прямое утверждение теоремы следует из представления (9.56) в теореме 9.33. Действительно, если Φ — непрерывный линейный функционал на пространстве N^q, то согласно упомянутой теореме функционал Φ представляется (и единственным образом) в виде (9.56) посредством некоторой функции g класса A_q^∞ с разложением (9.42), причём ряд в правой части (9.56) сходится. Согласно второй теореме Абеля о степенных рядах, справедливо также представление (9.63). Для завершения доказательства осталось заметить, что, согласно общей теории рядов Фурье, для каждого r, $0 \le r < 1$, и каждой функции $f \in N^q$ выполнено тождество

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k a_k r^k = \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})g(e^{-i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}, \tag{9.64}$$

объединяя которое с (9.63) получим (9.62).

Для доказательства обратного утверждения теоремы предположим, что функция g с разложением (9.42) принадлежит классу A_q^∞. Тогда, в силу оценки (9.25) из теоремы 9.4, для каждой функции $f \in N^q$ с разложением (9.29) ряд из правой части (9.56) сходится и по теореме Абеля выполнено тождество (9.59). В силу равенства (9.64), предел правой части представления (9.62) существует для каждой функции f из класса N^q. Определим функционал Φ по формуле (9.62) и докажем, что он представляет собой непрерывный линейный функционал на пространстве N^q.

Линейность функционала Φ следует из определения (9.62). Чтобы показать его непрерывность, воспользуемся представлением Φ в виде (9.63). Из этого представления видно, что континуальная последовательность функционалов

$$\Phi_r(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k b_k r^k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{r}e^{i\theta}) g(\sqrt{r}e^{-i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0 \le r < 1, \tag{9.65}$$

имеет предел (равный $\Phi(f)$) при $r \to 1-$ для каждой фиксированной функции $f \in N^q$ с разложением (9.29), то есть эта последовательность поточечно ограничена при $r \to 1-$.

Кроме того, функционалы Φ_r линейны и непрерывны на пространстве N^q при каждом $0 \le r < 1$. Действительно, свойство линейности проверяется прямым счётом, а свойство непрерывности следует из оценки $|\Phi_r(f)| \le M(f, \sqrt{r})\, M(g, \sqrt{r})$ (см. представление (9.65)) и замечания, что свойство сходимости последовательностей функций по метрике ρ_{N^q} не слабее свойства равномерной сходимости на компактах внутри U (следствие 3.3).

Применяя к функционалам Φ_r принцип равномерной ограниченности, получаем равностепенную непрерывность этих функционалов при $r \to 1-$, откуда следует непрерывность их предела — функционала Φ.

Единственность функции g в представлении (9.62) следует из тождеств $b_k = \Phi(z^k)$, связывающих коэффициенты Тейлора функции g и функционал Φ для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$. Отметим, что класс A был выбран в качестве класса единственности лишь для того, чтобы интеграл в представлении (9.62) имел смысл.

Для доказательства последнего утверждения теоремы считаем, что последовательность $B = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ обладает тем свойством, что для произвольной функции $f \in N^q$ с разложением (9.29) существует предел в правой части формулы (9.63). Заметим, что функция $f(z) = (1 - z)^{-1}$, $z \in U$, принадлежит классу N^q (на самом деле она принадлежит всем классам H^p с $0 < p < 1$, в чём можно убедиться, используя лемму 9.13). Из условия на последовательность B для функции f следует, что ряд $\sum b_k r^k$ сходится для каждого $0 \le r < 1$. (Более того, из этого условия следует, что сумма ряда $\sum b_k r^k$ имеет конечный предел при $r \to 1-$.) Следовательно, ряд в правой части формулы (9.42) сходится всюду в единичном круге и определяет там голоморфную функцию g. Дальнейшее доказательство свойств непрерывности и линейности функционала, определяемого формулой (9.63), проводим по той же схеме, какая была использована выше для доказательства свойств линейности и непрерывности функционала (9.62). Таким образом, теорема полностью доказана.

9.4.4. Пространства, сопряжённые к пространствам N^q $(q > 1)$ по Кёте и по Абелю

Последние утверждения теорем 9.33 и 9.35 можно переформулировать в нижеследующих терминах.

Определение 9.36 (ср. [32] или [135]). *Пусть S обозначает некоторый (произвольный) класс комплексных последовательностей, а символы l^1 и E обозначают пространства последовательностей, образующих соответственно абсолютно сходящиеся ряды и ряды, суммируемые по Абелю. Множества коэффициентных мультипликаторов $CM(S, l^1)$ и $CM(S, E)$ принято называть пространствами, сопряжёнными к классу S соответственно по Кёте и по Абелю, и обозначать S^K и S^A.*

Относительно обозначения $CM(F, H)$ см. пункт 9.2.1. Из определения непосредственно следует, что классы S^K и S^A — линейные относительно операций покоординатного сложения последовательностей и их умножения на числа. Если дополнительно класс S сам линеен относительно тех же операций, то билинейные формы

$$(a, b)_K = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k b_k, \quad a \in S, \quad b \in S^K$$

и

$$(a, b)_A = \lim_{r \to 1-} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k b_k r^k, \quad a \in S, \quad b \in S^A$$

устанавливают отношение двойственности между линейным пространством S и линейными пространствами S^K и S^A соответственно. Часто, когда S — линейно-топологическое пространство последовательностей, S^K и S^A совпадают с топологически сопряжённым к S пространством S'. Однако, в отличие от топологически сопряжённых пространств пространства, сопряжённые к S по Кёте и по Абелю, никогда не бывают тривиальными — они обязательно содержат стандартные базисные последовательности $\delta_l = (\delta_{lk})_{k \in \mathbb{Z}_+}$, где δ_{lk} обозначает символ Кронеккера.

Из определений сразу же вытекает вложение $S^K \subseteq S^A$. В случае, когда класс S является телом (то есть выдерживает умножение на любую ограниченную последовательность — или, другими словами, $l^\infty \subseteq CM(S, S)$), пространства S^K и S^A совпадают (см. [32]); в общем случае они различаются — например, для класса S постоянных последовательностей.

Наконец, напомним, что классы голоморфных в единичном круге функций мы отождествляем с классами последовательностей тейлоровских коэффициентов этих функций в нуле.

Следствие 9.37. *Пространства, сопряжённые с пространством Привалова N^q $(q>1)$ по Абелю и по Кёте, совпадают и линейно изоморфны топологически сопряжённому пространству $(N^q)'$. Точнее,*

$$(N^q)^K = (N^q)^A \simeq (N^q)',$$

где изоморфизм "$\simeq$" устанавливается по формуле

$$\big(\varPhi(z^k)\big)_{k\in\mathbb{Z}_+} \leftrightarrow \varPhi, \quad \varPhi \in (N^q)'. \tag{9.66}$$

Доказательство. Проверим сначала, что $(N^q)^K \simeq (N^q)'$. Действительно, если последовательность комплексных чисел $B=(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является коэффициентным мультипликатором класса N^q $(q>1)$ в класс l^1, то, согласно последнему утверждению теоремы 9.33, последовательность B определяет по формуле (9.56) непрерывный линейный функционал $\varPhi$ на пространстве N^q, при этом $\varPhi(z^k)=b_k$ для каждого $k\in\mathbb{Z}_+$. Обратно, если $\varPhi$ — непрерывный линейный функционал на пространстве N^q, то, согласно первому утверждению теоремы 9.33, он представляется в виде (9.56) и ряд в правой части этого представления сходится абсолютно (и быстрее любого степенного ряда). Поскольку коэффициенты b_k из этого представления связаны с функционалом $\varPhi$ соотношениями $b_k=\varPhi(z^k)$ для каждого $k\in\mathbb{Z}_+$, то это означает, что каждому непрерывному линейному функционалу $\varPhi$ на пространстве N^q формула (9.66) соотносит коэффициентный мультипликатор N^q в l^1. Тем самым показано, что $(N^q)^K\simeq(N^q)'$.

Аналогично из теоремы 9.35 выводится изоморфность $(N^q)^A$ и $(N^q)'$. Действительно, если $B=(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является коэффициентным мультипликатором из класса N^q в класс E суммируемых по Абелю рядов, то, согласно последнему утверждению теоремы 9.35, функционал $\varPhi$, определённый по формуле (9.63), непрерывен и линеен на пространстве N^q. Так как коэффициенты b_k связаны с этим функционалом равенствами $b_k=\varPhi(z^k)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, то первое изоморфное вложение $(N^q)^A\subseteq(N^q)'$ доказано. Обратно, если $\varPhi$ — непрерывный линейный функционал на пространстве N^q, то, согласно первому утверждению теоремы 9.35, функционал $\varPhi$ имеет представление (9.62). В силу равенства (9.64), справедливо также представление (9.63), и коэффициенты b_k из этого представления связаны с $\varPhi$ соотношениями $b_k=\varPhi(z^k)$ при каждом $k\in\mathbb{Z}_+$. Поэтому последовательность $B=(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является коэффициентным мультипликатором класса N^q в класс E. Тем самым, изоморфизм $(N^q)^A\simeq(N^q)'$ доказан.

Замечание 9.38. Классы голоморфных в единичном круге функций, имеющие тейлоровские коэффициенты из l^1 и E, представляют собой соответственно класс функций с абсолютно сходящимся в замыкании круга $\overline{U}$ рядом Тейлора (голоморфный аналог алгебры Винера) и класс функций, имеющих конечный радиальный граничный предел в точке $\zeta = 1$ (последний класс очень своеобразен — он не связан никакими вложениями ни с одним из известных классов голоморфных функций, кроме класса A голоморфных функций, непрерывных в замкнутом круге $\overline{U}$).

Объединяя доказанные выше результаты о коэффициентных мультипликаторах классов N^q ($q > 1$), то есть теорему 9.20, замечание 9.22 к этой теореме, теоремы 9.33 и 9.35 настоящего параграфа, а также следствие 9.37 из этих теорем, — получаем следующее утверждение.

Следствие 9.39. *Пусть $p > 0$ и $1 < q < +\infty$. Тогда*

$$CM(N^q, A_q^\infty) = CM(N^q, l^1) = CM(N^q, H^p) = CM(N^q, E) \simeq A_q^\infty, \quad (9.67)$$

где изоморфизм «$\simeq$» понимается в смысле сопоставления

$$(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} \leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} b_k z^k, \quad z \in U,$$

но

$$CM(N^q, N^q) \not\simeq A_q^\infty,$$

поскольку тождественно единичная последовательность не может быть последовательностью коэффициентов Тейлора какой бы то ни было функции класса A_q^∞.

Замечание 9.40. С учётом замечания 9.23 к списку (9.67) совпадающих множеств коэффициентных мультипликаторов можно было бы добавить множество $CM(N^q, N^{q'})$ для $q' > q$, а также, например, множество $CM(N^q, l^\infty)$ (что вытекает из способа доказательства необходимости условия теоремы 9.20), и этот список можно продолжать.

9.5. Линейно-топологические свойства пространств N^q $(q > 1)$

Согласно теореме 3.6, пространства N^q ($q > 1$) являются F-пространствами относительно метрики ρ_{N^q} и, следовательно, являются линейно-топологическими пространствами в естественной топологии. В настоящем параграфе изучаются свойства классов N^q ($q > 1$) как линейно-топологических пространств. В общих чертах эти свойства можно охарактеризовать так: пространства N^q ($q > 1$) представляют собой типичные образцы пространств типа (F) — ни локально-ограниченными, ни локально-выпуклыми они не являются (и, в частности, они не нормируемы). Кроме того, в этих пространствах не выполняется теорема Хана–Банаха о продолжении линейных функционалов с линейных подпространств — существует пример собственного линейного замкнутого подпространства, аннулирующегося только тождественно нулевым непрерывным линейным функционалом. Согласно одному результату Дж. Х. Шапиро (см. [122]), отсюда следует невозможность построения базиса Шаудера в пространствах N^q $(q > 1)$, хотя они и являются сепарабельными F-пространствами (см. следствие 2.10). Как пример положительного свойства отметим, что пространства N^q $(q > 1)$ обладают достаточно богатым запасом линейных непрерывных функционалов, чтобы разделять свои точки (см. теоремы 9.33 и 9.35).

9.5.1. Локальная неограниченность пространств N^q $(q > 1)$

Непосредственным следствием из доказательств леммы 9.14 и теоремы 9.20 имеем следующее утверждение.

Теорема 9.41 (Р. Мештрович [104]). *Линейно-топологическое пространство N^q не является локально-ограниченным ни при каком $q > 1$; другими словами, в нём не существует ограниченной (в линейно-топологическом смысле) окрестности нуля.*

Доказательство. В любой окрестности нуля пространства N^q $(q > 1)$ содержится некоторый шар положительного радиуса с центром в нуле, так что для доказательства справедливости утверждения теоремы достаточно показать, что любой шар $B(0, \varepsilon) = \{f \in N^q \mid |f|_{N^q} < \varepsilon\}$ радиуса $\varepsilon > 0$ неограничен в пространстве N^q.

Предположим, что, напротив, некоторый шар $B(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, оказался ограниченным в пространстве N^q. Для произвольного $c > 0$ положим последовательность $(c_l)_{l \in \mathbb{N}}$ тождественно равной c и определим по этой последовательности последовательность функций $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$, как в доказательстве необходимости условия теоремы 9.20. Согласно с доказательством леммы 9.14 (см. особенно неравенство (9.38)), существует такое значение $c > 0$ и такое значение $\alpha > 0$, зависящие, вообще говоря, от ε, что последовательность (αf_l) содержится в шаре $B(0, \varepsilon)$. В силу предположения, шар $B(0, \varepsilon)$ ограничен в пространстве N^q, поэтому последовательность (αf_l) также должна быть ограниченной в пространстве N^q. Поскольку умножение на положительное число является гомеоморфизмом линейно-топологического пространства и линейный непрерывный оператор ограниченные множества переводит в ограниченные, то последовательность (f_l) также будет ограниченной в N^q. Остаётся только заметить, что те же рассуждения, что были использованы при доказательстве необходимости условия теоремы 9.20, применимы и в данном случае. Следовательно, каждый коэффициентный мультипликатор $B = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ класса N^q в класс H^p $(p > 0)$ должен удовлетворять условию

$$\ln |b_k| \leq -c \sqrt[q+1]{k}, \quad k \geq k_0 \in \mathbb{N},$$

аналогичному неравенству (9.48). Выбирая число A как в доказательстве теоремы 9.20, получаем, что каждый коэффициентный мультипликатор

B класса N^q в класс H^p должен удовлетворять неравенству (9.43) с одной и той же постоянной c, одинаковой для всех мультипликаторов (константа A в неравенстве (9.43) по-прежнему может зависеть от B). Однако пример последовательности $b_k = e^{-c\,\sqrt[q+1]{k}/2}$ убеждает в обратном, то есть что не каждый мультипликатор класса N^q в класс H^p удовлетворяет неравенству (9.43) с постоянной c. То, что приведённая последовательность действительно является мультипликатором из N^q в H^p, следует из оценки (9.25) в теореме 9.4. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 9.42. Аналогичное утверждение для класса N_* было доказано Н. Янагихарой в статье [143, следствие из теоремы 2].

9.5.2. Локальная невыпуклость пространства N^q $(q > 1)$

По определению, локальная выпуклость линейно-топологического пространства означает существование базиса выпуклых окрестностей нуля.

Теорема 9.43 (Р. Мештрович [104]). *Пространства N^q $(q > 1)$ не являются локально-выпуклыми в топологии метрики ρ_{N^q}.*

Напомним некоторые ранее встречавшиеся определения и обозначения.

Определение 9.44. *Функция I называется внутренней в круге U, если I голоморфна, ограничена в круге U и радиальные граничные значения I^* функции I (которые существуют, по теореме 1.11, почти всюду на единичной окружности T) равны единице по абсолютной величине почти всюду на T. Внутренняя функция S называется сингулярной, если S не обращается в нуль в круге U. Внутренняя функция B называется произведением Бляшке, если*

$$B(z) = z^\lambda \prod_k \Big[\frac{\bar z_k}{|z_k|}\frac{z_k - z}{1 - \bar z_k z}\Big] \tag{9.68}$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ и некоторой последовательности (z_k) (пустой, конечной или счётной) точек единичного круга U, такой что $\prod |z_k| > 0$.

Можно показать (см. [41, гл. I, §7.1]), что для каждой такой последовательности точек произведение (9.68) определяет голоморфную ограниченную функцию в круге U и радиальные граничные значения B^* этой функции почти всюду на границе T равны единице по абсолютной величине, то есть B является внутренней функцией в круге U. В этом случае функцию (9.68) называют произведением Бляшке, построенным по последовательности $(\underbrace{0,\ldots,0}_{\lambda}, z_1, z_2, \ldots)$.

Из теоремы 1.3 следует, что каждая внутренняя функция I может быть представлена, и единственным способом, в виде

$$I(z) = B(z)S(z), \quad z \in U, \tag{9.69}$$

где B — произведение Бляшке, построенное по нулям функции I, а S — сингулярная внутренняя функция, имеющая представление

$$S(z) = C \exp \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, dq(\theta), \quad z \in U, \tag{9.70}$$

в котором $C \in T$ и q — невозрастающая функция с почти всюду нулевой производной на отрезке $[-\pi, \pi]$. Верно и обратное: если функции B и S определены согласно формулам (9.68) и (9.70), где $C \in T$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, (z_k) — последовательность точек круга U с $\prod |z_k| > 0$ и q — невозрастающая функция с почти всюду нулевой производной на отрезке $[-\pi, \pi]$, то B и S — внутренние в круге U и, следовательно, функция I, определённая по формуле (9.69), также является внутренней в круге U.

Лемма 9.45 (Х. С. Шапиро [121]). *Пусть для внутренней функции S удовлетворяется условие*

$$|S(z)| > c\,(1 - |z|)^N, \quad z \in U, \tag{9.71}$$

с некоторыми положительными постоянными c и N. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве H^2 не существует никаких других, кроме нулевой, функций, ортогональных подпространству SH^2 и в то же время имеющих коэффициенты Тейлора $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ с асимптотикой $O(k^{-1/2-\varepsilon})$ при $k \to +\infty$.

Замечание 9.46. Нетрудно видеть, что внутренние функции S, удовлетворяющие условию (9.71), сингулярны.

Лемма 9.47 (Х. С. Шапиро [121]). *Сингулярная внутренняя функция S обладает свойством (9.71) тогда и только тогда, когда функция q из представления S в виде (9.70) непрерывна и имеет модуль непрерывности*

$$\omega_q(\delta) = \sup_{\substack{0 \le h \le \delta \\ -\pi \le \theta, \theta + h \le \pi}} |q(\theta + h) - q(\theta)|$$

с асимптотикой $O(\delta \ln \delta^{-1})$ при $\delta \to 0+$.

Непостоянные функции с почти всюду нулевой производной и в то же время с модулем непрерывности порядка $O(\delta \ln \delta^{-1})$ при $\delta \to 0+$ можно построить как функции Лебега над множеством Кантора (см. [68]). Другой подход к построению таких функций предложил П. Л. Дюрен в статье [67]. Для дальнейшего изложения будет важно только то, что такие функции существуют.

Доказательство (теоремы). Пусть при некотором $q > 1$ пространство N^q является локально-выпуклым. Тогда для N^q выполнена теорема Хана–Банаха о продолжении непрерывных линейных функционалов с линейных подпространств на всё пространство (см. [114]). Если в пространстве N^q существует собственное линейное замкнутое подпространство, для которого единственным линейным непрерывным функционалом, обращающимся в нуль на этом подпространстве, будет нулевой, то это будет противоречить возможности применения теоремы Хана–Банаха. Действительно, пусть X — такое подпространство. Пусть $f \in N^q \setminus X$. Определим на линейной оболочке $lin\{f, X\}$ вектора f и подпространства X функционал $\varPhi$ равенством $\varPhi(\alpha f + F) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $F \in X$. В силу замкнутости X этот функционал будет линейным и непрерывным на подпространстве $lin\{f, X\}$, и если бы теорема Хана–Банаха была применима в этом случае, то существовал бы непрерывный линейный функционал, определённый на всём пространстве N^q, который продолжал бы $\varPhi$. Так как функционал $\varPhi$ аннулирует X, то по предположению относительно подпространства X продолженный функционал должен был бы быть тождественно нулевым на пространстве N^q, что ведёт к противоречию с определением $\varPhi$.

Итак, для того чтобы доказать теорему, достаточно привести пример собственного линейного замкнутого подпространства X в N^q, для которого аннулятор $Ann(X) = \{\varPhi \in (N^q)' \mid \varPhi(X) = 0\}$ тривиален (состоит из одного нулевого функционала). Пусть S — непостоянная сингулярная внутренняя функция в круге U, удовлетворяющая условию (9.71) леммы 9.45. По лемме 9.47 и замечаниям вслед за ней, такие функции существуют. Положим $X = SN^q = \{Sf \mid f \in N^q\}$ и докажем, что множество X образует собственное линейное подпространство, обладающее всеми требуемыми свойствами.

Пространство N^q является алгеброй относительно операций поточечного сложения и умножения функций, поэтому $X \subseteq N^q$. Свойство замкнутости множества X относительно линейных операций в N^q следует из свойства линейности пространства N^q, то есть множество X образует линейное подпространство в N^q. Свойство замкнутости подпространства X следует из того, что оно является образом полного пространства N^q при изометричном отображении $f \mapsto Sf$, $f \in N^q$ (см. теорему 8.22). Далее, функция, тождественно равная единице, не принадлежит подпространству X. Действительно, если $1 \in SN^q$, то $\exists f \in N^q$, $Sf = 1$, то есть $f = 1/S \in N^q$. Так как $|S^*| = |f^*| = |1/S^*| = 1$ почти всюду на T (см. определение 9.44), то, согласно следствию 2.8, функции S и $f = 1/S$ ограничены единицей по абсолютной величине всюду в круге U, то есть $|S(z)| \le 1$ и $|1/S(z)| \le 1$, $z \in U$. Таким образом, $|S(z)| \equiv 1$ в круге U и по принципу максимума модуля $S(z) \equiv \alpha \in T$, что противоречит непостоянности функции S. Итак, доказано, что X представляет собой собственное линейное замкнутое подпространство в N^q.

Докажем теперь, что линейный непрерывный функционал, определённый на всём пространстве N^q и обращающийся в нуль на подпространстве

SN^q, тождественно равен нулю. Действительно, по теореме 9.35, для любого такого функционала $\varPhi$ существует функция $g \in A_q^\infty$ с разложением (9.42), для которой

$$\varPhi(f) = \lim_{r\to 1-}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})g(e^{-i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in N^q.$$

Так как $Sz^k \in SN^q$, то

$$0 = \varPhi(Sz^k) = \lim_{r\to 1-}\int_{-\pi}^{\pi} S(re^{i\theta})r^k e^{i\theta k} g(e^{-i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} S^*(e^{i\theta})e^{i\theta k} g(e^{-i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}_+;$$

последнее равенство справедливо в силу предельной теоремы Лебега. Таким образом, функция $\overline{g}$, у которой коэффициенты Тейлора $(\overline{b}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ сопряжены с коэффициентами Тейлора функции g, рассматриваемая как элемент пространства H^2, ортогональна каждой функции вида Sz^k и, следовательно, каждой функции из замыкания в гильбертовом пространстве H^2 линейной оболочки функций $\{Sz^k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, то есть ортогональна подпространству SH^2. Согласно лемме 9.45, такое возможно либо тогда, когда функция $\overline{g}$, а следовательно, и функция g тождественно равны нулю, либо тогда, когда коэффициенты Тейлора функции $\overline{g}$ не удовлетворяют условию $\overline{b}_k = O(k^{-1/2-\varepsilon})$ при $k \to +\infty$ ни при каком $\varepsilon > 0$. Последнее невозможно, в силу принадлежности функции g классу A_q^∞ (см. определение 9.6). Отсюда заключаем, что $g = 0$ и $\varPhi = 0$. Тем самым показано, что единственным непрерывным линейным функционалом на пространстве N^q, аннулирующим подпространство SN^q, является нулевой. Таким образом, приходим к противоречию с предположением о локальной выпуклости пространства N^q.

Замечание 9.48. Функцию S, использованную в доказательстве теоремы, можно заменить на любую сингулярную внутреннюю функцию (9.70) с модулем непрерывности плотности порядка $O(\delta^{(q-1)/q})$ при $\delta \to 0+$. В этом случае, как показал Р. Мештрович в своей диссертации [104, гл. 5, следствие 4.4], подпространство SN^q слабо плотно в N^q, что эквивалентно тривиальности аннулятора этого подпространства. Более того, из доказательства теоремы 4.3 в той же диссертации следует, что от сингулярной внутренней функции S достаточно потребовать лишь свойства

$$\ln|S(z)| \geq o\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{1/q} \text{ при } |z| \to 1-,$$

аналогичного условию (9.71) из леммы 9.45.

Замечание 9.49. Локальная невыпуклость пространств N^q $(q > 1)$ была выведена из того, что в этих пространствах не имеет места теорема Хана–Банаха. Более того, было показано существование замкнутого собственного линейного подпространства в N^q $(q > 1)$, для которого любой линейный непрерывный функционал, обращающийся в нуль на этом подпространстве, обязан быть тождественно нулевым и на всём N^q. В частности, точки вне указанного подпространства не отделимы от него с помощью одних непрерывных линейных функционалов. На самом деле свойство отделимости линейными непрерывными функционалами замкнутых линейных подпространств от точек, не лежащих в них, равносильно справедливости теоремы Хана–Банаха (см. [2, замечания к §2 и §3 разд. IV в конце книги]).

9.5.3. Оболочка Фреше пространств N^q $(q > 1)$

В этом пункте вкратце, без точных доказательств, упомянем о других линейно-топологических свойствах пространств И. И. Привалова N^q $(q > 1)$.

В теореме 9.43 было доказано, что F-пространства N^q не являются локально-выпуклыми при $q > 1$; другими словами, не являются пространствами Фреше в терминологии Н. Бурбаки (на самом деле аббревиатура «F-пространство» также обозначает «пространство Фреше», см. [2, замечание в конце книги к §1 разд. III]). Таким образом, возникает вопрос: а как произвольное заданное F-пространство «погрузить» естественным образом в некоторое пространство Фреше так, чтобы это «погружение» было в некотором смысле минимальным? Один из способов построения такого пространства Фреше даёт понятие оболочки Фреше («the Fréchet envelope»).

Определение 9.50. *Пусть E обозначает произвольное пространство типа (F), точки которого разделяются с помощью непрерывных линейных функционалов на E. Пусть E наделено сильнейшей локально-выпуклой топологией μ, дающей то же самое сопряжённое пространство E', что и исходная топология E (такая топология называется топологией Макки для пары (E, E')). Топология μ не превосходит исходную метрическую топологию пространства E (см. [122, предложение 3]), и вследствие того, что E' разделяет точки E, она метризуема с помощью некоторой инвариантной при сдвигах метрики на E. Пополнение по этой метрике пространства E, являющееся пространством Фреше, и называется оболочкой Фреше пространства E (см. [124, разд. 2]).*

Дж. Х. Шапиро предложил и другой, более геометрический способ построения оболочки Фреше. Пусть ρ — абсолютно-монотонная метрика F-пространства E. Пусть V_k — выпуклые оболочки шаров $B(0, 1/k) = \{x \in E \mid \rho(x, 0) < 1/k\}$ радиусов $1/k$ в пространстве E.

Система множеств $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ обладает всеми свойствами базиса окрестностей нуля линейно-топологического пространства, и, следовательно, существует линейная топология в пространстве E, имеющая $\{V_k\}$ своим базисом (см. [88, гл. 2, разд. 2, теорема 1]). Очевидно, что построенная топология локально-выпукла, а так как базис окрестностей нуля счётен, то она и полуметризуема с помощью некоторой инвариантной при сдвигах полуметрики на E (см. [88, гл. 2, разд. 6, теорема 7]). Пополняя пространство E по этой полуметрике, получаем полное полуметрическое локально-выпуклое пространство, которое и будет оболочкой Фреше пространства E, если E' разделяет точки E (см. [122, предложение 3]). Ещё более удобный способ построения оболочек Фреше см. в [124, теорема 1], где можно найти также некоторые примеры построения оболочек Фреше. Относительно работ, посвящённых построению оболочек Фреше локально-ограниченных пространств типа (F) (такие пространства называют квазибанаховыми), см. [72, разд. 2]. Оболочками Фреше таких пространств будут служить пространства типа (B) (в случае, если сопряжённое пространство E' разделяет точки исходного пространства E).

Теорема 9.51 (К. М. Эофф [72]). *Пространства $F_{1/q}$ являются оболочками Фреше пространств И. И. Привалова N^q $(q > 1)$.*

Другой способ погружения пространства типа (F) в пространство Фреше содержится в понятии накрывающего пространства Фреше («the containing Fréchet space»).

Определение 9.52. *Пространство $\widetilde{E}$ называется пространством Фреше, накрывающим E, если*

(1) $\widetilde{E}$ содержит E в качестве своего плотного подмножества;

(2) топология пространства $\widetilde{E}$ индуцирует на E топологию, которая не сильнее топологии E;

(3) любой линейный непрерывный функционал на пространстве $\widetilde{E}$ сужается до линейного непрерывного функционала на пространстве E (следствие свойства (2)) и, обратно, любой линейный непрерывный функционал на пространстве E является сужением некоторого линейного непрерывного функционала над $\widetilde{E}$.

Свойство (3) в определении 9.52 означает, что пространства, топологически сопряжённые к E и $\widetilde{E}$, линейно-изоморфны при естественном отображении, порождённом вложением пространства E в $\widetilde{E}$. Эквивалентность определений 9.50 и 9.52 в случае F-пространств, разделяемых своими сопряжёнными, следует из того факта, что каждая полуметризуемая локально-выпуклая топология пространства E является на самом деле топологией Макки для пары (E, E') (см. [120, разд. IV, §3, теорема 4]).

Н. Янагихара в [142] показал, что пространство F^+ $(= F_1)$ является накрывающим пространством Фреше для пространства Смирнова N^+ $(= N_*)$. Аналогичным образом, из теоремы 9.33 и результатов М. Столла

[132, теорема 4.3] следует, что пространства $F_{1/q}$ являются пространствами Фреше, накрывающими пространства Привалова N^q $(q > 1)$. Таким образом, подход, предложенный К. М. Эоффом в [72], и подход, приведённый в настоящей работе, являются эквивалентными способами описания множества линейных непрерывных функционалов и накрывающих пространств Фреше для пространств И. И. Привалова N^q $(q > 1)$.

Замечание 9.53. Результаты этой главы анонсированы в [33] и опубликованы в [47].

10

Мультипликаторы и линейные функционалы пространства $N \ln N$

В настоящем параграфе аналогично тому, как выше было сделано для пространств Привалова, даётся полное описание коэффициентных мультипликаторов из класса $N \ln N$ в классы Харди H^p и на основании этого получен общий вид непрерывных линейных функционалов на пространстве $N \ln N$. Как следствие основных результатов, доказана неулучшаемость по порядку роста данной в пункте 10.1 оценки коэффициентов Тейлора функций класса $N \ln N$, локальная неограниченность и локальная невыпуклость пространства $N \ln N$, а также найдено накрывающее пространство Фреше для $N \ln N$.

В доказательстве этих результатов используется техника, развитая Н. Янагихарой и Х. О. Кимом в работах [141] и [90] для пространства Смирнова N_* и его собственного подпространства M соответственно. Более того, отправной точкой исследования была идея, что результаты, доказанные Х. О. Кимом для класса M, справедливы на самом деле для более узкого класса $N \ln N$. Таким образом, результаты данного параграфа дают еще одну иллюстрацию общего метода, использованного в предыдущей главе.

10.1. Оценка коэффициентов Тейлора функций класса $N \ln N$

Целью настоящего пункта является доказательство следующей оценки коэффициентов Тейлора функций класса $N \ln N$.

Теорема 10.1. *Для коэффициентов Тейлора функций пространства $N \ln N$ справедлива асимптотическая оценка*

$$\ln_+ |a_n| = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\right) \quad \text{\textit{при}} \quad n \to \infty. \tag{10.1}$$

Доказательство. Пусть голоморфная в круге U функция f удовлетворяет условию

$$\ln(1+M(f,r)) \leq \omega^{-1}\left(\alpha\,\frac{1+r}{1-r}\right) \quad \text{при} \quad r_0 \leq r < 1 \tag{10.2}$$

для некоторых $\alpha > 0$ и $0 \leq r_0 < 1$, где ω^{-1} обозначает функцию, обратную к функции $\omega(t) = t\ln(e+t)$, $t \geq 0$. Согласно неравенствам Коши для коэффициентов Тейлора функции f, справедливы неравенства

$$\ln|a_n| \leq \ln M(f,r) - n\ln r, \quad 0 < r < 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отсюда

$$\ln|a_n| \leq \omega^{-1}\left(\alpha\,\frac{1+r}{1-r}\right) - n\ln r, \quad 0 < r < 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10.3}$$

Проминимизируем по порядку выражение, стоящее справа, приравняв слагаемые друг другу:

$$\omega^{-1}\left(\alpha\,\frac{1+r}{1-r}\right) = n\ln\frac{1}{r}. \tag{10.4}$$

У этого уравнения на интервале $(0,1)$ существует единственный корень $r = r_n$, и нетрудно заметить, что $r_n \to 1$ при $n \to \infty$. Используя известные эквивалентности, видим, что

$$\omega^{-1}\left(\alpha\,\frac{1+r_n}{1-r_n}\right) \sim \frac{2\alpha}{(1-r_n)\ln(e+\frac{2\alpha}{1-r_n})} \sim \frac{2\alpha}{(1-r_n)\ln(e+\frac{1}{1-r_n})}$$

и

$$n\ln\frac{1}{r_n} \sim n(1-r_n) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{10.5}$$

Отсюда и из равенства (10.4) при $r = r_n$, получим

$$\frac{2\alpha}{(1-r_n)\ln(e+\frac{1}{1-r_n})} \sim n(1-r_n) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

или

$$\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^2 \frac{1}{\ln(e+\frac{1}{1-r_n})} \sim \frac{n}{2\alpha} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Так как функция, обратная к функции

$$s = \frac{t^2}{\ln(e+t)}, \quad t \geq 0,$$

эквивалентна при $s \to +\infty$ функции $\sqrt{s\ln(e+s)}$, то

$$\frac{1}{1-r_n} \sim \sqrt{\frac{n}{2\alpha} \ln\Big(e + \frac{n}{2\alpha}\Big)} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то есть

$$1 - r_n \sim \sqrt{\frac{2\alpha}{n \ln(e+n)}} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Итак, подставляя в неравенство (10.3) значение $r = r_n$, учитывая эквивалентность (10.5) и что оба слагаемых в неравенстве (10.3) равны, получаем

$$\ln |a_n| \le b_n \sim 2\sqrt{\frac{2\alpha n}{\ln(e+n)}} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{10.6}$$

Если функция f принадлежит классу $N \ln N$, то для неё справедливо соотношение (следствие 5.5)

$$\omega\big(\ln(1 + M(f,r))\big) = o\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \quad \text{при} \quad r \to 1-,$$

поэтому константа α в оценке (10.2) может быть выбрана сколь угодно малой положительной величиной. Из неравенства (10.6) тогда следует, что $\ln_+ |a_n| = o\big(\sqrt{n/\ln(e+n)}\big)$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

10.2. Коэффициентные мультипликаторы из $N \ln N$ в H^p $(p > 0)$

Следующая лемма является аналогом леммы 9.14.

Лемма 10.2. *Пусть последовательности (r_n), $(\beta_n) \subset [0,1)$ удовлетворяют условию $\beta_n \ln(e + \frac{1}{1-r_n}) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда функции*

$$f_n(z) = \exp\left(\frac{\beta_n}{2}\,\frac{1 + r_n z}{1 - r_n z}\right), \quad z \in U, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10.7}$$

образуют ограниченную последовательность в $N \ln N$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$. Воспользуемся соотношением

$$|f_n(e^{i\theta})| = \exp\left(\frac{\beta_n}{2} P_{r_n}(\theta)\right), \quad |\theta| \le \pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}, \quad 0 \le r < 1, \quad |\theta| \le \pi,$$

— ядро Пуассона в единичном круге U, чтобы оценить характеристики функций λf_n:

$$
\begin{aligned}
|\lambda f_n| &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega\bigl(\ln(1+|\lambda f_n(e^{i\theta})|)\bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi} = \\
&= \Biggl(\int\limits_{-\theta_n}^{\theta_n} + \int\limits_{\theta_n\le|\theta|\le\pi}\Biggr)\omega\Bigl(\ln\bigl(1+|\lambda|\exp\bigl(\tfrac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\bigr)\bigr)\Bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi} \le \\
&\le 4\int\limits_{-\theta_n}^{\theta_n}\omega(\ln 2)\,\frac{d\theta}{2\pi} + 4\int\limits_{-\theta_n}^{\theta_n}\omega\Bigl(\ln_+\bigl[|\lambda|\exp\bigl(\tfrac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\bigr)\bigr]\Bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi} + \\
&\qquad\qquad + \int\limits_{\theta_n\le|\theta|\le\pi}\omega\bigl(\ln(1+|\lambda|\sqrt{e})\bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi},
\end{aligned}
$$

где последовательность $0<\theta_n\le\pi$ выбрана из того соображения, чтобы при $\pi\ge|\theta|\ge\theta_n$ было справедливо $\beta_n P_{r_n}(\theta)\le 1$, а также использованы элементарные неравенства $\ln(1+t)\le\ln 2+\ln_+ t$ и $\omega(t+s)\le 4\bigl(\omega(t)+\omega(s)\bigr)$, $t,s\ge 0$. Так как $P_r(\theta)\le(1-r)(\pi/\theta)^2$, $0\le r<1$, $0<|\theta|\le\pi$ (лемма 9.12), то согласно условию на (β_n) и (r_n), данному в лемме, последовательность (θ_n) можно выбрать сходящейся к нулю (например, $\theta_n=\pi\sqrt{\beta_n(1-r_n)}$). Поэтому, если $|\lambda|\le 1$, то

$$
|\lambda f_n| \le \omega\bigl(\ln(1+|\lambda|\sqrt{e})\bigr) + 4\ln 2\ln(e+\ln 2)\frac{2\theta_n}{2\pi} + 4\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega\bigl(\tfrac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi}.
$$

Оценим отдельно третье слагаемое в последнем неравенстве. Для этого заметим, что

$$
P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}} \le \frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2} = \frac{1+r}{1-r}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{r}\theta}{(1-r)\pi}\right)^2}.
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
\omega\bigl(\tfrac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\bigr) &\le \frac{\beta_n}{2}\,\frac{1+r_n}{1-r_n}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{r_n}\theta}{(1-r_n)\pi}\right)^2}\ln\Biggl(e+\frac{\beta_n}{2}\,\frac{1+r_n}{1-r_n}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{r_n}\theta}{(1-r_n)\pi}\right)^2}\Biggr) \le \\
&\le \frac{\beta_n}{1-r_n}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{r_n}\theta}{(1-r_n)\pi}\right)^2}\ln\Bigl(e+\frac{1}{1-r_n}\Bigr) \quad \text{и, значит,}
\end{aligned}
$$

$$
\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega\bigl(\tfrac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi} \le \frac{\beta_n}{1-r_n}\ln\Bigl(e+\frac{1}{1-r_n}\Bigr)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{r_n}\theta}{(1-r_n)\pi}\right)^2}\,\frac{d\theta}{2\pi}.
$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $\varphi=2\sqrt{r_n}\theta/(\pi(1-r_n))$, откуда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega\bigl(\tfrac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi}\le\frac{\beta_n}{1-r_n}\ln\Bigl(e+\frac{1}{1-r_n}\Bigr)\frac{1-r_n}{4\sqrt{r_n}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi}{1+\varphi^2}\le$$
$$\le\beta_n\ln\Bigl(e+\frac{1}{1-r_n}\Bigr)\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{r_n}}.$$

Если $r_n\ge\frac14$, то последняя оценка даёт

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega\bigl(\tfrac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi}\le\frac{\pi}{2}\beta_n\ln\Bigl(e+\frac{1}{1-r_n}\Bigr),$$

а если $0\le r_n<\frac14$, то $P_{r_n}(\theta)\le\frac{1+r_n}{1-r_n}\le 2$ и, значит, $\frac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\le\beta_n$, откуда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega\bigl(\tfrac{\beta_n}{2}P_{r_n}(\theta)\bigr)\,\frac{d\theta}{2\pi}\le\beta_n\ln(e+\beta_n)\le\beta_n\ln\Bigl(e+\frac{1}{1-r_n}\Bigr),$$

так как $\beta_n\le 1\le 1/(1-r_n)$. Итак, окончательно,

$$|\lambda f_n|\le\omega\bigl(\ln(1+|\lambda|\sqrt{e})\bigr)+\frac{8\ln^2 2}{\pi}\theta_n+\frac{\pi}{2}\beta_n\ln\Bigl(e+\frac{1}{1-r_n}\Bigr).$$

Последние два слагаемых, согласно выбору θ_n и условию на β_n и r_n, стремятся к нулю, поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $n_0\in\mathbb{N}$, что для всех n, начиная с номера n_0, каждое из этих двух слагаемых не превосходит $\varepsilon/3$. Выбирая $\lambda_{n_0}>0$ из условия, чтобы были выполнены $\lambda_{n_0}\le 1$ и $\omega\bigl(\ln(1+\lambda_{n_0}\sqrt{e})\bigr)<\varepsilon/3$, получим, что при $|\lambda|\le\lambda_{n_0}$ и $n\ge n_0$ справедливо неравенство $|\lambda f_n|<\varepsilon$. Так как $N\ln N$ представляет собой F-пространство относительно метрики ρ, то для каждого $n\in\mathbb{N}$, $n<n_0$, найдётся $\lambda_n>0$, что $|\lambda f_n|<\varepsilon$ при $|\lambda|\le\lambda_n$. Полагая $\lambda_0=\min(\lambda_1,\dots,\lambda_{n_0})$, имеем $|\lambda f_n|<\varepsilon$ при $|\lambda|\le\lambda_0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, последовательность (f_n) ограничена в $N\ln N$.

Замечание 10.3. В статье [90, теорема 4.4] было показано, что условие леммы необходимо и достаточно, чтобы последовательность (f_n) была ограниченной в пространстве M, содержащем $N\ln N$ в качестве своего плотного подмножества, при дополнительном условии $r_n\to 1$ при $n\to\infty$. Так как топология пространства M, суженная на $N\ln N$, не сильнее естественной топологии $N\ln N$ (см. доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (3) теоремы 5.1), то условие леммы является также необходимым и достаточным для ограниченности последовательности (f_n) и в топологии пространства $N\ln N$, если только $r_n\to 1$ при $n\to\infty$.

Теорема 10.4. *Для того, чтобы последовательность $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ была коэффициентным мультипликатором из $N\ln N$ в H^p $(0<p\le+\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$b_n = O\left(\exp\left[-c\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\right]\right) \quad \textit{при} \quad n\to\infty \tag{10.8}$$

для некоторого $c>0$.

Замечание 10.5. Из утверждения теоремы видно, что вид коэффициентных мультипликаторов из $N\ln N$ в H^p не зависит от показателя $p>0$.

Доказательство (теоремы). Достаточность условия теоремы очевидна ввиду оценки теоремы 10.1, так как ряд $\sum a_n b_n$ в этом случае сходится абсолютно для любой функции (9.29) из класса $N\ln N$, и поэтому функция (9.30) представляет собой голоморфную внутри и непрерывную на замыкании единичного круга U функцию и, в частности, принадлежит пространству H^∞ ограниченных голоморфных функций в круге U. Искомое утверждение следует тогда из включения $H^\infty\subseteq H^p$ $(0<p\le+\infty)$.

Для доказательства необходимости условия теоремы достаточно показать, что

$$b_n = O\left(\exp\left[-c_n\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\right]\right) \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{10.9}$$

для любой последовательности (c_n), удовлетворяющей условию $c_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$ (лемма 9.16). Без ограничения общности можно считать $c_n\le 1$ при $n\in\mathbb{N}$. Более того, в силу неравенства $c_n\le\max(c_n,1/n^\beta)$, неравенство (10.9) достаточно доказать для последовательностей $c_n\downarrow 0$, $n\to\infty$, удовлетворяющих условию (9.45), где $\beta>0$ будет определено ниже.

Определим последовательности $\beta_n=c_n^2/\ln(e+n)$ и $r_n=1-1/n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Ясно, что $\beta_n\downarrow 0$ и $r_n\uparrow 1$ при $n\to\infty$. Более того, для (β_n) и (r_n) выполнено условие леммы 10.2. Действительно,

$$\beta_n\ln\left(e+\frac{1}{1-r_n}\right)=\frac{c_n^2}{\ln(e+n)}\ln(e+n)=c_n^2\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Следовательно, последовательность функций (f_n), определённая в лемме 10.2, ограничена в пространстве $N\ln N$. Поскольку мультипликатор $B=(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, рассматриваемый как оператор из $N\ln N$ в H^p $(p>0)$, является ограниченным, то последовательность (Bf_n) ограничена в пространстве H^p, то есть $|Bf_n|_{H^p}\le C$, $n\in\mathbb{N}$, для некоторой конечной постоянной C, где $|\cdot|_{H^p}$ обозначает стандартную норму (квазинорму в случае $p<1$) в H^p.

В силу оценки (1.11) имеем

$$|a_k(Bf_n)|\le C^{1/\alpha_p}n^{1/\alpha_p-1}, \quad \text{где} \quad \alpha_p=\min(1,p),$$

и поэтому $\ln|a_k(Bf_n)|\le O(\ln n)$ при $n\to\infty$. С другой стороны, по определению мультипликатора, $a_k(Bf_n)=b_k a_k(f_n)$, что в терминах функций g_c, определённых в пункте 9.1.2, приводит к равенству

$a_k(Bf_n) = b_k r_n^k a_k(g_{\beta_n})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме 9.3 справедливо неравенство $a_k(g_{\beta_n}) \geq 2\sqrt{\beta_n k} + O(\ln \beta_n) + O(\ln k)$ при $n, k \to \infty$. Объединяя полученные оценки, после несложных преобразований, учитывающих неравенства (9.45), получаем

$$\ln |b_k| \leq -2c_n \sqrt{\frac{k}{\ln(e+n)}} + k \ln r_n + O(\ln n) + O(\ln k) \quad \text{при} \quad n, k \to \infty.$$

Полагая в этом неравенстве $n = k$, имеем

$$\ln |b_n| \leq -2c_n \sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}} + n \ln r_n + O(\ln n) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и так как $n \ln r_n \sim n(1 - r_n) = 1 = O(\ln n)$, то

$$\ln |b_n| \leq -2c_n \sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}} + O(\ln n) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Выбирая в неравенствах (9.45) число β положительным и меньшим $1/2$, получаем $\ln n = o\big(c_n \sqrt{n/\ln(e+n)}\big)$ при $n \to \infty$, и, следовательно, для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\ln |b_n| \leq -c_n \sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}} \quad \text{при} \quad n \geq n_0.$$

Полагая $A = \max(0, \ln |b_n| + c_n \sqrt{n/\ln(e+n)}, n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1)$, приходим к неравенству

$$\ln |b_n| \leq A - c_n \sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

что очевидным образом равносильно искомому (10.9).

Следствие 10.6 (из доказательства теоремы). *Пространство $N \ln N$ не является локально-ограниченным; другими словами, никакой шар положительного радиуса в $N \ln N$ не является ограниченным (в линейно-топологическом смысле) множеством.*

Доказательство. Действительно, предположим противное, то есть что шар (можно считать, с центром в нуле) положительного радиуса ε ограничен в $N \ln N$. Положим, как и при доказательстве теоремы 10.4, $\beta_n = c^2/\ln(e+n)$ и $r_n = 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, где $c > 0$, и определим последовательность функций (f_n) по формулам (10.7). Тогда $\beta_n \ln(e + \frac{1}{1-r_n}) = c^2$. Согласно доказательству леммы 10.2, выбирая $c > 0$ достаточно малым, можно найти такое число $\lambda_0 > 0$ и такой натуральный номер n_0, что начиная с этого номера все функции $\lambda_0 f_n$ будут лежать в шаре $B(0, \varepsilon)$ радиуса ε с центром в нуле. Так как шар $B(0, \varepsilon)$, по предположению, ограничен в $N\ln N$ и конечное число функций не влияет на ограниченность множества, то последовательность $(\lambda_0 f_n)$ ограничена. В силу ограниченности линейных операций в $N\ln N$, ограничена и последовательность (f_n). Следуя далее доказательству теоремы 10.4, можно доказать, что любой коэффициентный мультипликатор $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ из $N\ln N$ в H^p имеет оценку

$$b_n = O\left(\exp\left[-c\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\right]\right) \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

что противоречит достаточности условия теоремы 10.4.

10.3. Линейные функционалы на $N\ln N$

Полная характеристика коэффициентных мультипликаторов из $N\ln N$ в H^∞, полученная в предыдущем пункте, позволяет найти общий вид линейных непрерывных функционалов над $N\ln N$.

Теорема 10.7. *Для любого непрерывного линейного функционала ϕ на пространстве $N\ln N$ существует такая единственная функция*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad z\in U, \tag{10.10}$$

с коэффициентами Тейлора, удовлетворяющими условию (10.8), *что*

$$\phi(f) = \lim_{r\to 1-}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})g(e^{-i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n, \tag{10.11}$$

для любой функции $f\in N\ln N$ с разложением (9.29), *причём ряд в правой части* (10.11) *сходится абсолютно и быстрее любого степенного ряда вида $\sum 1/(n+1)^p$, $p>1$.*

Обратно, если функция g имеет разложение (10.10) *с коэффициентами Тейлора, удовлетворяющими условию* (10.8), *то предел и сумма в правой части* (10.11) *существуют и равны для произвольной функции f из пространства $N\ln N$, и функционал ϕ, определяемый формулой* (10.11), *является линейным непрерывным функционалом на пространстве $N\ln N$.*

Для доказательства теоремы понадобится некоторое вспомогательное утверждение, которое доказывается так же, как и аналогичное утверждение для пространств Привалова (см. следствие 3.10).

Лемма 10.8. *Для любой функции $f\in N\ln N$ семейство функций $\{f_\zeta\}_{\zeta\in U}$, где $f_\zeta(z) = f(\zeta z)$, $z\in U$, образует ограниченное множество в $N\ln N$.*

Доказательство (теоремы). Необходимость. Пусть ϕ — непрерывный линейный функционал на $N \ln N$ и f — произвольная функция класса $N \ln N$. Определим функцию h равенством $h(\zeta) = \phi(f_\zeta)$, $\zeta \in U$, где функции f_ζ определены в лемме 10.8. Так как семейство функций $\{f_\zeta\}$ ограничено в $N \ln N$ и функционал ϕ непрерывен и линеен, то h — ограниченная функция в круге U. Для каждого фиксированного $\zeta \in U$ ряд Тейлора функции f_ζ сходится в круге U равномерно, а значит, и в метрике пространства $N \ln N$, поэтому, в силу линейности и непрерывности функционала ϕ, имеем

$$h(\zeta) = \phi(f_\zeta) = \lim_{N\to\infty} \phi\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n \zeta^n z^n\Big) = \\ = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \zeta^n \phi(z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n \zeta^n, \quad \zeta \in U, \tag{10.12}$$

где a_n — коэффициенты Тейлора функции f в нуле и $b_n = \phi(z^n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, причём ряд в правой части (10.12) сходится при каждом $\zeta \in U$. Следовательно, функция h ограничена и голоморфна в единичном круге U, то есть принадлежит пространству H^∞. Кроме того, из представления (10.12) видно, что функция h является образом функции f при мультипликаторе $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Таким образом, доказано, что $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — коэффициентный мультипликатор из $N \ln N$ в H^∞. Согласно теореме 10.4, для последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ выполнено условие (10.8), из которого следует, что ряд $\sum a_n b_n$ сходится (и быстрее любого степенного ряда) для любой функции f с разложением (9.29) (теорема 10.1). По второй теореме Абеля, существует предел

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n. \tag{10.13}$$

Так как $f_r \to f$ при $r \to 1-$ в метрике ρ (теорема 5.7) и функционал ϕ — непрерывен, то $\phi(f) = \lim\limits_{r\to 1-} \phi(f_r) = \lim\limits_{r\to 1-} h(r)$. Для доказательства представления (10.11) осталось заметить равенство (10.12) и равенство

$$h(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n r^n = \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) g(e^{-i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0 \le r < 1, \tag{10.14}$$

являющееся равенством Парсеваля для функций f_r и $\bar{g}$ на единичной окружности T.

Достаточность. Пусть последовательность $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ удовлетворяет условию (10.8) и f — произвольная функция класса $N \ln N$ с разложением (9.29). Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится (теорема 10.1), и поэтому справедливо равенство (10.13).

Определим для каждого $0 \le r < 1$ функционал ϕ_r равенством

$$\phi_r(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n r^n = \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) \, \frac{d\theta}{2\pi},$$

где функция $f \in N\ln N$ имеет разложение (9.29) и g определена формулой (10.10). Очевидно, ϕ_r линеен на пространстве $N\ln N$ для каждого $0 \le r < 1$. Из оценки $|\phi_r(f)| \le M(f,r)M(g,1)$ и того, что сходимость в метрике ρ сильнее равномерной сходимости функций на компактах в U, следует, что каждый ϕ_r непрерывен на $N\ln N$. Кроме того, предел $\lim\limits_{r\to 1-} \phi_r(f) = \lim\limits_{r\to 1-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n r^n$, согласно доказанному выше, существует для каждой функции $f \in N\ln N$. Определим функционал ϕ согласно равенству (10.11). Очевидно, что ϕ линеен, в силу линейности ϕ_r, $0 \le r < 1$. Согласно принципу равномерной ограниченности для F-пространств, ϕ — непрерывен, как поточечный предел линейных непрерывных функционалов. Следовательно, теорема полностью доказана.

Следствие 10.9. *Пространство $N\ln N$ не является локально-выпуклым в топологии метрики ρ.*

Доказательство. Известно (см. [121, теоремы 1, 2 и 3]), что существует непостоянная сингулярная внутренняя функция S, обладающая следующим свойством: для любой функции $g \in H^2$, ортогональной подпространству $SH^2 = \{Sf \mid f \in H^2\}$ и не равной тождественно нулю, её коэффициенты Тейлора b_n не могут удовлетворять условию

$$b_n = O\left(\frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{10.15}$$

ни для какого $\varepsilon > 0$.

Возьмём такую функцию S и рассмотрим в $N\ln N$ линейное подпространство $SN\ln N = \{Sf \mid f \in N\ln N\}$. Так как отображение $f \mapsto Sf$ является изометрией, то $SN\ln N$ — замкнуто, и так как S — непостоянна, то $SN\ln N$ — собственное подпространство ($1 \notin SN\ln N$).

Допустим, что пространство $N\ln N$ локально-выпукло, тогда в $N\ln N$ справедлива теорема Хана–Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов с линейных замкнутых подпространств на всё пространство. В частности, для любого замкнутого собственного линейного подпространства существует нетривиальный линейный непрерывный функционал, равный нулю на этом подпространстве. Поэтому существует линейный непрерывный функционал $\phi \not\equiv 0$ на $N\ln N$, что $\phi(f) = 0$ для всех $f \in SN\ln N$. Согласно доказанной теореме 10.7, функционал ϕ имеет представление в виде (10.11) для некоторой голоморфной в круге функции g с коэффициентами Тейлора (b_n), удовлетворяющими условию

(10.8). Ясно, что $g \in H^2$. Так как $\phi(SN\ln N) = 0$ и справедливо представление (10.11), то для любой функции $f \in H^2$ функция $\bar{g} \in H^2$ с коэффициентами Тейлора $(\bar{b}_n)$ ортогональна Sf, то есть $\bar{g}$ ортогональна подпространству SH^2. Согласно выбору S, отсюда следует, что (10.15) не выполняется ни для какого $\varepsilon > 0$, что противоречит (10.8).

10.4. Некоторые следствия из основных результатов главы

Доказанная выше теорема 10.7 позволяет обосновать неулучшаемость (по порядку) оценки коэффициентов Тейлора функций класса $N\ln N$, данной в пункте 10.1.

Следствие 10.10. *Оценка коэффициентов Тейлора функций класса $N\ln N$, даваемая теоремой 10.1, асимптотически неулучшаема. Более точно, для любой последовательности $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ существует функция $f \in N\ln N$ с разложением* (9.29)*, для которой*

$$a_n \neq O\left(\exp\left[\delta_n\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\right]\right) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Предположим, что существует такая последовательность $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, что для любой функции $f \in N\ln N$ с разложением (9.29) выполнено соотношение

$$a_n = O\left(\exp\left[\delta_n\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\right]\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определим последовательность $b_n = \exp[-\delta_n\sqrt{n/\ln(e+n)}]/(n+1)^2$ для $n \in \mathbb{Z}_+$ и заметим, что ряд $\sum a_n b_n$, в силу предположения, сходится для любой функции $f \in N\ln N$ с разложением (9.29). Определим, кроме того, функцию g по формуле (10.10). Из доказательства достаточности теоремы 10.7 видно, что функционал ϕ, определённый формулой (10.11), линеен и непрерывен на $N\ln N$. Из необходимости условия теоремы 10.7 тогда следует, что последовательность (b_n) удовлетворяет условию (10.8), то есть

$$\frac{1}{(n+1)^2}\exp\left[-\delta_n\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\right] = O\left(\exp\left[-c\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\right]\right)$$

при $n \to \infty$ для некоторого $c > 0$. Логарифмируя неравенство и деля на $\sqrt{n/\ln(e+n)}$, находим

$$-\delta_n = -c + 2\ln(n+1)\sqrt{\frac{\ln(e+n)}{n}} + O\left(\sqrt{\frac{\ln(e+n)}{n}}\right)$$

при $n \to \infty$. Последнее противоречит бесконечной малости δ_n.

Следствие 10.11. *Оценка* (5.12) *равномерного роста функций класса* $N\ln N$*, даваемая следствием 5.5, является наилучшей возможной. Более точно, для любой бесконечно малой при* $r\to 1-$ *функции* $\alpha(r)$, $0\le r<1$, *найдётся такая функция* $f\in N\ln N$, *что*

$$M(f,r)\ne O\left(\exp\Bigl(\omega^{-1}\Bigl[\alpha(r)\frac{1+r}{1-r}\Bigr]\Bigr)\right)\quad \textit{при}\quad r\to 1-\,.$$

Доказательство. Сведём утверждение следствия 10.11 к следствию 10.10. Допустим, что существует такая функция $\alpha(r)$, $0\le r<1$, бесконечно малая при $r\to 1-$, что для любой функции $f\in N\ln N$ справедливо соотношение

$$M(f,r)= O\left(\exp\Bigl(\omega^{-1}\Bigl[\alpha(r)\frac{1+r}{1-r}\Bigr]\Bigr)\right)\quad \text{при}\quad r\to 1-\,.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha(r)$ — выпуклая вверх невозрастающая функция на $[0,1)$. Тогда справедливо асимптотическое неравенство $\ln(1+M(f,r))\le\omega^{-1}\bigl[\alpha(r)\frac{1+r}{1-r}\bigr]+O(1)$ при $r\to 1-$. Аналогично равенству (10.4) из доказательства теоремы 10.1, для каждого $n\in\mathbb{N}$ рассмотрим уравнение

$$\omega^{-1}\Bigl(\alpha(r)\frac{1+r}{1-r}\Bigr)=n\ln\frac{1}{r}, \tag{10.16}$$

которое, как и уравнение (10.4), имеет единственный корень $r=r_n$ на интервале $(0,1)$. Действительно, в силу выпуклости вверх для $\alpha(r)$, левая часть написанного равенства не убывает, а правая убывает, причём при $r\to 0+$ левая часть имеет конечный положительный предел (равный $\alpha(0)$), а правая часть — предел, равный $+\infty$, в то время как при $r\to 1-$ левая часть стремится к положительному (возможно, бесконечному) пределу, а правая — к нулю. Существование искомого корня $r=r_n$ следует теперь из теоремы Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Кроме того, $r_n\to 1-$ при $n\to\infty$. Проводя дальнейшие рассуждения аналогично доказательству теоремы 10.1, для произвольной функции $f\in N\ln N$ с разложением (9.29) получим неравенство вида

$$\ln|a_n|\le b_n+O(1)\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

где $b_n\sim 2\sqrt{\frac{2\alpha(r_n)n}{\ln(e+n)}}$ при $n\to\infty$ — не зависит от выбора функции f, а $O(1)$, вообще говоря, зависит от выбора конкретной функции f. Следовательно, существует такая последовательность $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$, выбор которой зависит только от функции α (можно взять, например, $\delta_n=3\sqrt{2\alpha(r_n)}$), что для любой функции $f\in N\ln N$ с разложением (9.29) справедливо асимптотическое равенство

$$a_n=O\left(\exp\left[\delta_n\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}\,\right]\right)\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

что противоречит утверждению доказанного следствия 10.10. Полученное противоречие доказывает следствие 10.11.

10.5. Накрывающее пространство Фреше для класса $N \ln N$

Как утверждают следствие из теоремы 10.4 и следствие 10.9, пространство $N \ln N$ представляет собой типичный образец F-пространства — оно не является ни локально-ограниченным, ни локально-выпуклым в топологии метрики ρ. Пространство $N \ln N$ имеет сопряжённое пространство, обладающее свойством разделения, поэтому имеет смысл искать накрывающее его пространство Фреше. В пункте 10.1 было показано, что всякая функция пространства $N \ln N$ имеет коэффициенты Тейлора, удовлетворяющие условию (10.1). Обозначим множество голоморфных в U функций f с разложением (9.29), удовлетворяющих условию (10.1), символом $F \ln F$. Тогда

$$N \ln N \subseteq F \ln F.$$

Естественную локально-выпуклую топологию на $F \ln F$ можно ввести разными эквивалентными системами полунорм, например с помощью

$$\left\{|f|'_c = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-c\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}}\right\}_{c>0} \text{ или } \left\{|f|''_c = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |a_n| e^{-c\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}}\right\}_{c>0},$$

где (a_n) обозначает последовательность коэффициентов Тейлора функции $f \in F \ln F$. Можно показать, что принадлежность голоморфной в круге функции f классу $F \ln F$ равносильна условию (5.12) из следствия 5.5. Основываясь на этом результате, в $F \ln F$ можно ввести ещё одну систему полунорм

$$\left\{|f|'''_c = \int_0^1 M(f,r) e^{-\omega^{-1}\left(c\frac{1+r}{1-r}\right)} dr\right\}_{c>0} \text{ или }$$
$$\left\{|f|^{IV}_c = \sup_{0\le r<1} M(f,r) e^{-\omega^{-1}\left(c\frac{1+r}{1-r}\right)}\right\}_{c>0},$$

и можно показать, что эти системы полунорм эквивалентны системам $\left\{|\cdot|'_c\right\}_{c>0}$ и $\left\{|\cdot|''_c\right\}_{c>0}$. Так как топологию, задаваемую этими системами полунорм, можно задать счётным числом полунорм (достаточно оставить, например, лишь полунормы с номерами $c_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$), то эта топология метризуема с помощью инвариантной метрики $\widetilde{\rho}$. Нетрудно показать, что класс $F \ln F$ образует пространство Фреше относительно этой метрики.

Теорема 10.12. *Пространство $F \ln F$ является накрывающим пространством Фреше для F-пространства $N \ln N$.*

Доказательство. Плотность $N \ln N$ в $F \ln F$ следует из плотности многочленов в $F \ln F$. Докажем теперь, что топология пространства $N \ln N$ не слабее локально выпуклой топологии пространства $F \ln F$, суженной на $N\ln N$. Для этого достаточно показать, что единичный шар в любой полунорме $|\cdot|_c^{IV}$, $c>0$, содержит некоторый шар в метрике ρ положительного радиуса с центром в нуле. Действительно, рассмотрим шар $B(0,c)=\{f\in N\ln N \mid |f|<c\}$, тогда, согласно оценке (5.10) из следствия 5.4, имеем

$$\ln(1+M(f,r))\le \omega^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}|f|\right)<\\ <\omega^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}c\right)\quad \text{для любой}\quad f\in B(0,c),$$

откуда

$$M(f,r)<\exp\left[\omega^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}c\right)\right]\quad \text{и}\\ |f|_c^{IV}=\sup_{0\le r<1}M(f,r)e^{-\omega^{-1}\left(c\frac{1+r}{1-r}\right)}<1,\quad f\in B(0,c),$$

то есть шар $B(0,c)$ в метрике ρ радиуса $c>0$ содержится в единичном шаре в полунорме $|\cdot|_c^{IV}$.

Осталось показать, что запас линейных непрерывных функционалов на пространствах $N\ln N$ и $F\ln F$ один и тот же. Для этого определим общий вид непрерывного линейного функционала на $F\ln F$.

Ясно, что если последовательность $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ удовлетворяет условию (10.8) и функция g определена согласно (10.10), то формула (10.11) определяет для любой $f\in F\ln F$ непрерывный линейный функционал ϕ. Это доказывается так же, как соответствующее утверждение в теореме 10.7, с учётом того, что сходимость в пространстве $F\ln F$ влечёт равномерную сходимость на компактах внутри U. Обратное утверждение, то есть что любой непрерывный линейный функционал на $F\ln F$ представляется в виде (10.11), можно доказать так же, как в теореме 10.7, однако здесь можно заметить, что ряд Тейлора каждой функции $f\in F\ln F$ сходится в метрике $\widetilde{\rho}$ к исходной функции f. Действительно, если

$$f_N(z)=\sum_{n=0}^{N}a_nz^n,\quad z\in U,\quad N\in\mathbb{Z}_+,$$

— частичная сумма ряда Тейлора функции $f\in F\ln F$, то

$$|f_N-f|'_c=\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|e^{-c\sqrt{\frac{n}{\ln(e+n)}}}\to 0\quad \text{при}\quad N\to+\infty$$

для любого $c>0$, то есть $f_N\to f$ при $N\to+\infty$ в топологии пространства $F\ln F$. Следовательно, если ϕ — непрерывный линейный функционал на $F\ln F$, то для любой функции $f\in F\ln F$ с разложением (9.29)

$$\phi(f) = \lim_{N\to\infty} \phi\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n, \tag{10.17}$$

где $b_n = \phi(z^n)$ и ряд в правой части (10.17) сходится. В частности, для произвольной последовательности $c_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, подставляя в качестве функции f в равенство (10.17) функцию с коэффициентами Тейлора $\exp\big[c_n\sqrt{n/\ln(e+n)}\,\big]$, имеем, что $b_n = o\big(\exp\big[-c_n\sqrt{n/\ln(e+n)}\,\big]\big)$ при $n \to \infty$. Согласно лемме 9.16, получаем, что последовательность (b_n) удовлетворяет условию (10.8). Определяя функцию g по формуле (10.10) и замечая, что для любой функции $f \in F \ln F$ справедливы равенства (10.13) и (10.14), из представления (10.17) получаем представление (10.11).

Таким образом, запас линейных непрерывных функционалов на пространствах $N \ln N$ и $F \ln F$ одинаков, что и доказывает теорему.

Замечание 10.13. Результаты этой главы опубликованы в [10].

11

Пространства в полуплоскости

В настоящей главе исследуются структурные и линейно-метрические свойства для некоторых F-алгебр голоморфных функций в полуплоскости.

11.1. Предварительные сведения и основные понятия

11.1.1. Историческая справка

Пусть $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ — верхняя полуплоскость.

Интерес к изучению свойств аналитических функций в полуплоскости впервые возник в работах Э. Хилле и Я. Д. Тамаркина, инициированных исследованиями Р. Е. А. Ч. Пэли и Н. Винера преобразований Фурье и представлений функций абсолютно сходящимся интегралом Коши. В частности, в статьях [81], [82] рассматривались классы $H^p(D), p \geq 1$, голоморфных в верхней полуплоскости D функций f, удовлетворяющих условию

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dx < +\infty.$$

Заметим, что эти классы можно считать аналогами классических пространств Харди в единичном круге (см. параграф 1.1 для одномерного случая).

Результаты Э. Хилле и Я. Д. Тамаркина относились к случаю $p \geq 1$ и не могли быть перенесены на случай $p < 1$. Некоторое время спустя, в 1936 году, японский математик Т. Кавата в [87] изучил классы $H^p(D)$ для случая $p < 1$. Выводы Т. Каваты получены с помощью методов, неприменимых в случае $p \geq 1$.

Эти исследования получили значительное и системное развитие в работе В. И. Крылова [30]. В ней были доказаны новые свойства и получены вышеупомянутые результаты одновременно для всех классов $H^p(D)$, $p > 0$.

Дополнительно им был систематически изучен аналог другого классического в случае круга пространства (пространства Островского–Неванлинны, см. параграф 1.1) — а именно, класс $\mathfrak{N}(D)$ голоморфных в D функций f, удовлетворяющих условию

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+ |f(x+iy)|\, dx < +\infty,$$

где $\ln_+ a = \max(\ln a, 0)$, $a > 0$, и $\ln_+ 0 = 0$.

В работе [108] рассматривался класс $N_*(D)$, содержащий все такие голоморфные функции f, что для некоторой функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ выполняется

$$\ln(1 + |f(z)|) \le P[\varphi](z), z \in D, \tag{11.1}$$

где правая часть обозначает интеграл Пуассона:

$$P[\varphi](z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \varphi(t)\, dt, \quad z = x + iy \in D.$$

Для дальнейшего развития этой области японский математик Я. Иида в работе [85] пошёл по пути обобщения понятия пространства Крылова на случай произвольного $q > 0$. Он ввел классы $\mathfrak{N}^q(D)$, $q > 0$, определяемые как множество голоморфных в D функций f, для которых

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+^q |f(x+iy)|\, dx < +\infty.$$

Эти классы являются аналогами классов И. И. Привалова в круге.

Я. Иида также рассмотрел класс $\mathfrak{N}_*(D)$, аналогичный классу $N_*(D)$, который определяется неравенством (11.1) с $\ln_+ |f(z)|$ в левой части.

Начавшееся с середины XX века широкое использование в теории аналитических функций методов функционального анализа привело к распространению функционально-алгебраической точки зрения также на классы $H^p(D), p > 0$, и $\mathfrak{N}(D)$ (см. [83], [31], [70], где подведены некоторые итоги соответствующих исследований). В отличие от классов $H^p(D), p > 0$, классы $\mathfrak{N}^q(D), q > 0$, не образуют линейных пространств, что затрудняет изучение их свойств с точки зрения функционального анализа. В настоящей главе исследуются структурные и линейно-метрические свойства для некоторых F-алгебр голоморфных функций в полуплоскости. Основное внимание уделено следующим классам:

1) классы $M^q(D), q > 0$, определяемые как множество всех голоморфных в D функций, удовлетворяющих условию:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+\sup_{y>0}|f(x+iy)|)\,dx < +\infty. \tag{11.2}$$

Некоторые свойства этих классов в случае $q=1$ изучались в работе [18];

2) классы $N^q(D), q>0$, определяемые как множество всех голоморфных в D функций, удовлетворяющих условию:

$$\sup_{y>0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|f(x+iy)|)\,dx < +\infty \tag{11.3}$$

(см. [108]).

Замечание 11.1. Рассматриваемые классы имеют обобщение, позволяющее определить их аналогично классу $\varphi(N)$ в круге (параграф 1.1). Пусть φ — неотрицательная неубывающая функция неотрицательного аргумента. Определим класс $\varphi(M)$ как множество голоморфных в D функций, для которых выполняется следующее условие:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\ln(1+\sup_{y>0}|f(x+iy)|))\,dx < +\infty.$$

Рассмотрев в качестве φ функцию $t^q, t\geq 0, q>0$, получаем определение классов $M^q(D), q>0$.

Аналогично, класс $\varphi(N)$ определяется как множество голоморфных в D функций, для которых

$$\sup_{y>0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\ln(1+|f(x+iy)|))\,dx < +\infty.$$

11.1.2. Максимальные функции

Определим вертикальную максимальную функцию Mf для функции f в верхней полуплоскости как точную верхнюю грань по всем вертикальным открытым лучам $x=x_0, y>0$, то есть $Mf(x)=\sup\limits_{y>0}|f(x+iy)|$.

Наряду с функцией $Mf(x), x\in\mathbb{R}$, рассмотрим следующие виды максимальных функций:

1) угловую максимальную функцию $M_\alpha f(x) = \sup\limits_{z\in D_\alpha(x)} |f(z)|, \quad x\in\mathbb{R}$, где $D_\alpha(x)$ обозначает угол $\{z=\xi+i\eta\in D \quad | \quad |\xi-x|<\alpha\eta\}$;

2) горизонтальную максимальную функцию Харди–Литтлвуда $g^M(x) = \sup\limits_{I\supset\{x\}} \frac{1}{|I|}\int\limits_I |g(t)|dt$, где I – интервал на $\mathbb{R}$, $|I|$ — длина интервала I и $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

11.1.3. Связи между классами

Прежде всего необходимо заметить, что, в отличие от классов Харди в круге (см., например, [41]), объем классов Харди в полуплоскости не будет монотонно изменяться с изменением p, то есть если мы рассмотрим p_1, p_2 и $f \in H^{p_1}(D)$, то нельзя определенно сразу для всех f утверждать, что $f \in H^{p_2}(D)$ или $f \notin H^{p_2}(D)$. Однако, как и в случае с кругом, выполняется вложение для классов $\mathfrak{N}(D)$, а именно: $\bigcup H^p(D) \subset \mathfrak{N}(D)$ (см. [30]).

Н. Мочизуки в работе [108] показал, что для $1 < p \leq +\infty$ $H^p(D) \not\subset N^1(D)$.

Для класса $M(D)$ интересный результат в своей работе [18] получила Л. М. Ганжула. Она доказала следующие вложения для изучаемых классов:

Лемма 11.2. $N_*(D) \supset M^1(D) \supset \bigcup\limits_{0<p\leq 1} H^p(D)$.

Ещё один результат связан со структурой класса $\mathfrak{N}_*(D)$. Он был получен Я. Иидой в работе [85].

Для каждой неотрицательной, неубывающей и выпуклой функции φ на $\mathbb{R}$, обладающей свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty$, определяется класс H_φ таких голоморфных в D функций f, для которых

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\ln_+ |f(x+iy)|)\, dx < +\infty.$$

Тогда утверждается, что

$$\mathfrak{N}_*(D) = \bigcup H_\varphi,$$

где объединение берется по всем функциям φ с вышеуказанными свойствами. Рассмотрев функцию $\varphi = t^q$, $q > 1$, при $t \geq 0$, и равную нулю при $t < 0$, заметим, что класс H_φ совпадает с классом $\mathfrak{N}^q(D)$. Поэтому для $q > 1$ выполняется вложение $\mathfrak{N}^q(D) \subset \mathfrak{N}_*(D)$.

11.1.4. Известные граничные свойства

Напомним определения вертикальных и угловых граничных значений функции f, определённой в полуплоскости D. Вертикальным граничным значением функции f в граничной точке $x \in \mathbb{R}$ называется предел

$$f^+(x) = \lim_{y\to 0+} f(x+iy),$$

если он существует. Говорят, что функция f имеет в точке $x \in \mathbb{R}$ угловое граничное значение $\hat{f}(x)$, если $\hat{f}(x)$ есть предел функции f при $z \to x$ по любому некасательному пути.

В этом пункте сформулируем известные результаты, касающиеся граничного поведения функций из определённых классов. Первые результаты в этой области получил В. И. Крылов в [30] для классов $H^p(D)$, $p > 0$, и $\mathfrak{N}(D)$.

Теорема 11.3. *Если $f \in H^p(D), p > 0$, то*
(1) она почти везде на действительной оси имеет угловые предельные значения $\hat{f}(x)$;
(2) предельная функция $\hat{f}(x)$ принадлежит классу $L^p(\mathbb{R})$.

Теорема 11.4. *Если $f \in H^p(D), p > 0$, и E есть любое измеримое подмножество $\mathbb{R}$ конечной или бесконечной меры, то*

$$\int\limits_E |f(x+iy)|^p dx \to \int\limits_E |\hat{f}(x)|^p\, dx,\ y \to 0+\,.$$

Теорема 11.5. *Если $f(z) \in H^p(D), p > 0$, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy) - \hat{f}(x)|^p\, dx \to 0,\ y \to 0+\,.$$

Теорема 11.6. *Если $f \in H^p(D), p > 0$, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p\, dx \uparrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^p\, dx,\ y \downarrow 0.$$

Теорема 11.7. *Функция $f \in \mathfrak{N}(D)$ обладает свойствами:*
(1) f почти везде на действительной оси имеет угловые предельные значения $\hat{f}(x)$, при этом для предельных значений имеет место неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+ |\hat{f}(x)|\, dx \le M < +\infty;$$

(2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+ |f(x+iy)|\, dx$ есть невозрастающая функция от y; если $y \downarrow 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+ |f(x+iy)|\, dx \uparrow \lim_{y\to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+ |f(x+iy)|\, dx.$$

Я. Иида обобщил эти результаты на случай произвольного $q > 0$. Для классов Смирнова $N_*(D)$ и $\mathfrak{N}_*(D)$ граничное поведение описали Н. Мочизуки в [108] и Я. Иида в [85].

Теорема 11.8. *Для функции $f \in \mathfrak{N}_*(D)$ справедливо равенство*

$$\lim_{y\to 0+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+ |f(x+iy)|\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+ |\hat{f}(x)|\,dx.$$

Л. М. Ганжула в статье [18] показала, что функции класса $M(D)$ обладают вертикальными граничными пределами и возможен предельный переход под знаком интеграла.

11.1.5. Метрики в классах голоморфных функций

Как уже упоминалось, классы $\mathfrak{N}(D)$ и $\mathfrak{N}^q(D), q>0$, не образуют линейных пространств. Действительно, принадлежность функции f классу $\mathfrak{N}^q(D), q>0$, то есть выполнение свойства

$$\sup_{y>0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln_+^q |f(x+iy)|\,dx < +\infty,$$

не влечет за собой принадлежность функции $2f$ классу $\mathfrak{N}^q(D), q>0$.

Для классов $H^p(D), p>0$, $M^1(D)$ в работах [18], [31] было доказано, что они образуют линейные пространства.

Функция расстояния

$$\rho_{H^p}(f,g) = \|f-g\|_{H^p}, f,g \in H^p(D), p>0,$$

порождаемая характеристикой

$$\begin{gathered}\|f\|_{H^p} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p\,dx\right)^{\alpha_p},\\ \alpha_p = \min(1,1/p), f\in H^p(D), p>0,\end{gathered}$$

превращает класс $H^p(D)$, $p>0$, в полное метрическое пространство (см. [19]).

В классах $M^q(D)$ и $N^q(D)$, $q>0$, можно определить две новые характеристики:

$$\begin{aligned}&\|f\|_{N^q} = \left(\sup_{y>0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|f(x+iy)|)\,dx\right)^{\alpha_q}, f\in N^q(D),\\ &\|g\|_{M^q} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+Mg(x))\,dx\right)^{\alpha_q}, g\in M^q(D),\\ &\alpha_q = \min(1,1/q), q>0.\end{aligned}$$

Тогда определения классов $M^q(D)$ и $N^q(D)$ принимают следующий вид:

Определение 11.9. *Классы $M^q(D)$, $q > 0$, определяются как множество всех голоморфных в D функций f, для которых $\|f\|_{M^q} < +\infty$.*

Определение 11.10. *Классы $N^q(D)$, $q > 0$, определяются как множество всех голоморфных в D функций f, для которых $\|f\|_{N^q} < +\infty$.*

11.1.6. Канонические факторизации

Как и в случае круга (см. результаты, доказанные в [62], [115]), В. И. Крылов в [30] получил факторизационное представление для функций класса $H^p(D)$, $p > 0$.

Теорема 11.11. *Пусть $p > 0$. Тогда любая функция $f \in H^p(D)$ представляется в виде произведения двух функций:*

$$f(z) = b_f(z)g(z),$$

где b_f — произведение Бляшке для функции f:

$$b_f(z) = \prod_{(\nu)} \frac{z - z_\nu}{z - \bar{z}_\nu} \cdot \frac{|z_\nu - i|}{z_\nu - i} \cdot \frac{|z_\nu + i|}{z_\nu + i},$$

по последовательности $\{z_\nu\}$ нулей функции f в D, удовлетворяющей условию

$$\sum_{(\nu)} \frac{y_\nu}{1 + x_\nu^2 + y_\nu^2} < +\infty, \quad z_\nu = x_\nu + iy_\nu, \quad y_\nu > 0$$

сходимости произведения b_f, а функция $g \in H^p(D)$, причём $g(z) \neq 0$, $z \in D$, и почти везде на действительной оси имеет предельные значения, по модулю равные предельным значениям f.

Существует более точное представление для функций классов $H^p(D), p > 0$ (см., например, [31]):

Теорема 11.12. *Всякую функцию $f \in H^p(D)$, $p > 0$, можно представить в форме*

$$f(z) = Ce^{i\alpha z}b(z)d(z)g(z),$$

где
(1) C — постоянная, по модулю равная единице;
(2) $\alpha \geq 0$;
(3) b_f — функция Бляшке, составленная по нулям f в полуплоскости D;
(4)

$$d(z) = \exp \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \log q(t) \frac{1 + tz}{t - z} \frac{dt}{t^2 + 1},$$

$q(t)$ — неотрицательная измеримая функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log q(t)|}{t^2+1}\,dt < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |q(t)|^p\,dt < +\infty;$$

(5)

$$g(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+tz}{t-z}\,d\omega(t),$$

$\omega(t)$ — невозрастающая функция ограниченной вариации в промежутке $(-\infty,+\infty)$ и $\omega'(t) = 0$ почти везде.
Наоборот, всякая функция f, представимая в указанном виде, принадлежит классу $H^p(D), p > 0$.

Аналогичная теорема справедлива для класса Крылова $\mathfrak{N}(D)$:

Теорема 11.13. *Всякая функция $f \in \mathfrak{N}(D)$ представима в виде*

$$f(z) = Ce^{i\alpha z}b(z)d(z)g(z),$$

где
(1) $|C| = 1$;
(2) $\alpha \geq 0$;
(3) b_f — функция Бляшке;
(4)

$$d(z) = \exp \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) \frac{1+tz}{t-z} \frac{dt}{t^2+1},$$

$q(t)$ измерима и такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|q(t)|}{t^2+1}\,dt < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} q_+(t)\,dt < +\infty,$$

причём $q_+(t) = \max(0, q(t))$;
(5)

$$g(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+tz}{t-z}\,d\omega(t),$$

$\omega(t)$ — функция ограниченной вариации с производной, почти везде равной нулю, удовлетворяющая следующему условию: если через $p(t)$ обозначить полную положительную вариацию $\omega(t)$ в промежутке $(-\infty, t]$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)\,dp(t) < +\infty.$$

Наоборот, всякая функция f, представимая в указанном виде, принадлежит классу $\mathfrak{N}(D)$.

11.1.7. Оценки роста

В книге П. Кусиса [31] был доказан следующий результат:

Лемма 11.14. *Если* $f \in H^p(D), p > 0$, *то* $|f(z)| \leq \frac{C}{y^{1/p}}$ *для некоторой константы* C, *зависящей только от* f.

В. И. Крылов в [30] доказал утверждение:

Теорема 11.15. *Если* $f \in H^p(D), p > 0$, *то* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p\,dx$ *есть монотонная невозрастающая функция от* y.

11.2. Структурные свойства максимальных классов

11.2.1. Аналог теоремы Ф. и М. Риссов и другие граничные свойства

Перед формулировкой основного результата докажем лемму, которая является прямым аналогом результата, доказанного в [19, гл. III, теорема 3.6] для гармонических функций.

Лемма 11.16. *Если* $q > 0$ *и* $u(z) \geq 0$ *— субгармонична в* D, *причём* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (Mu(x))^q\,dx < +\infty$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (M_\alpha u(x))^q\,dx \leq E_{q,\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (Mu(x))^q\,dx$$

с константой $E_{q,\alpha}$, *зависящей только от* q *и* α.

Доказательство. Выберем p, $0 < p < q$, и рассмотрим случай $\alpha = 1$. Пусть $z = x + iy \in D_1(t) = \{|x - t| < y\}$. Функция u субгармонична в $\Delta(z, y/2)$ — круге с центром в z и радиусом $y/2$. Применяя неравенство Харди–Литтлвуда, доказанное в [19, лемма 3.7] для гармонических функций и верное с тем же доказательством для субгармонических функций, получим с учетом $|x - t| < y$ оценку

$$|u(z)|^p \leq \frac{4B_p}{\pi y^2} \iint\limits_{\Delta(z,y/2)} |u(\xi + i\eta)|^p\,d\xi d\eta \leq$$
$$\leq \frac{C_p}{y} \int\limits_{|\xi - x| < y/2} (Mu(\xi))^p\,d\xi \leq \frac{C_p}{y} \int\limits_{|\xi - t| < 3y/2} (Mu(\xi))^p\,d\xi,$$

в которой правая часть не превосходит $(3C_p)g^M(t)$, где $g(\xi) = (Mu(\xi))^p$. Таким образом, доказано, что

$$(M_1 u(t))^q \le D_{p,\,q}(g^M(t))^{q/p}.$$

Согласно максимальной теореме Харди–Литтлвуда [19, гл. I, теорема 4.3] и с учетом того, что $q/p > 1$ и $g \in L^{q/p}$ (по условию леммы), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (M_1 u(t))^q\, dt \le D_{p,\,q} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g^M(t))^{q/p}\, dt \le E_{p,\,q} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (Mu(t))^q\, dt.$$

В силу произвольности p, фиксируем $p = q/2$, что доказывает лемму.

В случае $\alpha \ne 1$, получим аналогичные оценки с константами, зависящими также от α. Лемма доказана.

Из доказанной леммы и элементарного неравенства $Mf(x) \le M_\alpha f(x)$ вытекает, в частности, что в определении классов $M^q(D), q > 0$, вертикальную максимальную функцию $Mf(x), x \in \mathbb{R}$, можно заменить угловой максимальной функцией $M_\alpha f(x)$, $x \in \mathbb{R}$; то есть $f \in M^q(D)$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q \left(1 + M_\alpha f(x)\right)\, dx < +\infty$$

для любого $\alpha > 0$.

Теорема 11.17 (аналог теоремы Ф. и М. Риссов). *Пусть* $f \in M^q(D)$, $q > 0$. *Тогда:*
(1) f *имеет* $f^+(x)$ *почти всюду на* $\mathbb{R}$;
(2) граничная функция f^+ *обладает свойством*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q \left(1 + |f^+(x)|\right)\, dx < +\infty;$$

(3) для $f_h(z) = f(z + ih)$, $h > 0$, *выполняется равенство*

$$\lim_{h \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q (1 + M(f_h - f)(x))\, dx = 0. \tag{11.4}$$

Доказательство. Из приведенного доказательства леммы 11.16 следует, что каждая функция f классов $M^q(D), q > 0$, ограничена почти во всех углах с вершинами на действительной оси, биссектрисами, перпендикулярными ей и раствора $2 \operatorname{arctg} \alpha$ для каждого $\alpha > 0$. Поэтому, согласно теореме И. И. Привалова ([41], [38]), каждая функция $f \in M^q(D)$, $q > 0$, имеет некасательные граничные пределы почти во всех точках прямой $\mathbb{R}$; в частности, она имеет $f^+(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$.

Оценивая подынтегральную функцию в (11.4) в виде

$$\ln^q(1 + M(f_h - f)(x)) \le \ln^q(1 + 2Mf(x)) \le 2^q \ln^q(1 + Mf(x)),$$

по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получим

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+\sup_{y>0}|f_h(z)-f(z)|)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0+} \ln^q(1+\sup_{y>0}|f_h(z)-f(z)|)\,dx.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле равна нулю почти всюду на $\mathbb{R}$, в силу голоморфности функции $f \in M^q(D)$, $q > 0$.

11.2.2. Эквивалентные определения классов $M^q(D)$ и $N^q(D)$

Для доказательства основного результата данного пункта нам потребуется следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 11.18. *Всякая субгармоническая функция $v(z) \ge 0$, определённая в D и удовлетворяющая условию $\sup\limits_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^p(z)\,dx < +\infty$, $p > 1$, имеет в D мажоранту $u(z)$ в виде*

$$u(z) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x-t)\hat{v}^p(t)\,dt \right)^{1/p}, \tag{11.5}$$

где $P_y(x-t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{y^2+(x-t)^2}$ – ядро Пуассона в D и $\hat{v} \in L^p(\mathbb{R})$, при этом $\|\hat{v}\|_{L^p} \le \left(\sup\limits_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^p(x+iy)\,dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. По известной теореме для субгармонических функций (см. [19, гл. I, теорема 6.8]), функция v^p имеет гармоническую мажоранту вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_y(x-t)\,d\mu(t)$, где μ — некоторая конечная мера на $\mathbb{R}$. Более того, из доказательства этой теоремы следует, что любая ограниченная субгармоническая функция в полуплоскости $y > y_0$ для некоторого $y_0 > 0$ обладает гармонической мажорантой, представимой в виде

$$u_{y_0}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{y-y_0}(x-t)v^p(t+iy_0)\,dt.$$

По теореме Банаха–Алаоглу, замкнутый единичный шар пространства, сопряженного к банахову пространству, компактен в слабой топологии. В нашем случае, в силу неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^p(t+iy_0)\,dt \le \sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^p(x+iy)\,dx,$$

семейство функций $v(t+iy_0)$ ограничено в $L^p(\mathbb{R})$ величиной

$$\left(\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^p(x+iy)\,dx\right)^{1/p}.$$

Пространством, сопряженным к $L^p(\mathbb{R})$, является пространство $L^{p'}(\mathbb{R})$, где $p' = p/(p-1), p' > 1$ (см. [42, п. 102, гл. 4]). Тогда по теореме Банаха–Алаоглу получаем, что семейство $v(t+iy_0)$ имеет слабый частичный предел $\hat{v} \in L^p(\mathbb{R})$ при $y_0 \to 0+$, $\|\hat{v}\|_{L^p} \le \left(\sup\limits_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^p(x+iy)\,dx\right)^{1/p}$.

Для ядра Пуассона выполняется неравенство $P_y(x-t) \le c_{x,y}/(1+t^2)$, где $c_{x,y}$ — зависящая от x и y постоянная, поэтому $P_y(x-t) \in L^q(\mathbb{R})$ для любого $1 \le q \le +\infty$. Тогда, учитывая существование слабого частичного предела $\hat{v}$ и сходимость $P_{y-y_0}(x-t) \to P_y(x-t)$, $y_0 \to 0+$, в пространстве $L^{p'}(\mathbb{R})$, получаем

$$u_{y_0}(z) \to u(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_y(x-t)\hat{v}^p(t)\,dt, y \to 0+.$$

Теорема 11.19. *Для $q > 1$ множество $M^q(D)$ совпадает с множеством $N^q(D)$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что вложение $M^q(D) \subset N^q(D)$ следует из неравенства $\ln^q(1+|f(x+iy)|) < \ln^q(1+Mf(x))$ и определений пункта 11.1.1. Пусть теперь справедливо (11.3). Применяя лемму к субгармонической функции $v(z) = \ln(1+|f(x+iy)|)$, заключаем, что v имеет гармоническую мажоранту u вида (11.5) с функцией $v \in L^q(\mathbb{R})$ и $\|v\|_{L^q} \le \|f\|_{N^q}$. По лемме из [31, гл. VIII, п. С], для гармонической мажоранты u функции v справедливо неравенство

$$|u(z)| \le \left(\frac{|x|}{y} + 2\right) v^M(0).$$

Используя далее теорему Харди–Литтлвуда ([19, гл. I, теорема 4.3]) о сравнении норм интегрируемых функций с нормами их горизонтальных максимальных функций, получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|M_\alpha v\|_{L^q} \le \|M_\alpha u\|_{L^q} \le (2+\alpha)\|v^M\|_{L^q} \le \\ \le (2+\alpha)A_q\|v\|_{L^q} \le (2+\alpha)A_q\|f\|_{N^q} < +\infty, \end{aligned} \tag{11.6}$$

с некоторой конечной постоянной $A_q > 0$; что заканчивает доказательство теоремы.

11.2.3. Различные вложения

Теорема 11.20. $\bigcup\limits_{0<p\leq q} H^p(D) \subset M^q(D)$.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентное определение классов $H^p(D)$ в терминах вертикальной максимальной функции Mf. А именно: функция f, голоморфная в D, принадлежит $H^p(D), p > 0$, тогда и только тогда, когда $Mf \in L^p(\mathbb{R})$ (см. [31, теорема гл. VIII §C п. 2]). С учетом элементарного неравенства

$$\ln^q(1+t) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^q t^p, \quad t \geq 0, \quad p \leq q,$$

получаем доказываемое вложение.

Аналогично доказывается

Теорема 11.21. $\bigcup\limits_{0<p\leqslant q} H^p(D) \subset N^q(D)$.

Проверим, что при различных значениях $q > 0$ пространства $M^q(D)$ не связаны никакими включениями. Действительно, для функции $f_1(z) = \frac{\exp(z^{-\alpha})}{z^{2/q_1}}$, $0 < q_1 < \frac{1}{\alpha} < q_2$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf_1(x))\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + \frac{\exp(|x|^{-\alpha})}{|x|^{2/q_1}})\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-1} \ln^q(1 + \frac{\exp(|x|^{-\alpha})}{|x|^{2/q_1}})\, dx + \int\limits_{-1}^{1} \ln^q(1 + \frac{\exp(|x|^{-\alpha})}{|x|^{2/q_1}})\, dx +$$

$$+ \int\limits_{1}^{+\infty} \ln^q(1 + \frac{\exp(|x|^{-\alpha})}{|x|^{2/q_1}})\, dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Интегралы I_1 и I_3 сходятся для любых $q \geq q_1$, поскольку их подынтегральные функции эквивалентны $\frac{1}{|x|^{(2q/q_1)}}$ при $|x| \to +\infty$. В силу неравенства $\ln(1+t) \leq \ln 2 + \ln_+ t$ для интеграла I_2 справедлива оценка

$$\int\limits_{-1}^{1} (|x|^{-\alpha} - \frac{2}{q_1} \ln|x|)^q\, dx \leq I_2 \leq \int\limits_{-1}^{1} (\ln 2 + |x|^{-\alpha} - \frac{2}{q_1} \ln|x|)^q\, dx,$$

в которой сходимости интегралов в правой и левой частях полностью зависят от сходимости интеграла для $|x|^{-\alpha q}$. Последний сходится при $q = q_1$ и расходится при $q = q_2$; следовательно, f_1 принадлежит классу $M^{q_1}(D)$ и не принадлежит классу $M^{q_2}(D)$.

С другой стороны, для функции $f_2(z) = z^{-\alpha}, 0 < q_1 < \frac{1}{\alpha} < q_2$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf_2(x))\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |x|^{-\alpha})\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-1} \ln^q(1 + |x|^{-\alpha})\,dx + \int\limits_{-1}^{1} \ln^q(1 + |x|^{-\alpha})\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \ln^q(1 + |x|^{-\alpha})\,dx =$$

$$= I_4 + I_5 + I_6.$$

Интеграл I_5 сходится для всех $q > 0$, а подынтегральные функции интегралов I_4 и I_6 эквивалентны $|x|^{-\alpha q}$ при $|x| \to +\infty$, поэтому f_2 принадлежит классу $M^{q_2}(D)$ и не принадлежит классу $M^{q_1}(D)$.

11.2.4. Оценки роста

Докажем теперь некоторые оценки для функций классов $M^q(D)$ и $N^q(D)$. Неравенство Г. Харди – Дж. И. Литтлвуда (см. [78, лемма 5])

$$u^q(z_0) \le \frac{C_q}{\pi R^2} \iint\limits_{|z-z_0|\le R} u^q(z)dxdy, \quad q > 0, \quad z = x + iy,$$

выполненное для любой неотрицательной субгармонической в $|z - z_0| < R$ функции u с постоянной $C_q < +\infty$, не зависящей от u, позволяет получать оценки логарифма модуля аналитической функции в любой положительной степени (когда $q \ge 1$, постоянную C_q можно взять равной единице).

Теорема 11.22. *Для любой голоморфной в D функции f и любого $q > 0$ справедлива оценка*

$$\ln^q(1 + |f(x + iy)|) \le B_q \frac{1}{2y} \int\limits_{x-y}^{x+y} \ln^q(1 + Mf(\xi))\,d\xi, \quad y > 0,$$

с конечной постоянной B_q, не зависящей от f.

Доказательство. Функция $\ln(1 + |f|)$ является субгармонической в D как композиция субгармонической функции $t = \ln|f(z)|$ и функции $\varphi(t) = \ln(1 + e^t)$, неубывающей и выпуклой вниз на обобщенном промежутке $[-\infty, +\infty)$. Согласно неравенству Г. Харди – Дж. И. Литтлвуда, для любой точки $z = x + iy \in D$ справедливо неравенство

$$\ln^q(1 + |f(z)|) \le \frac{C_q}{\pi y^2} \iint\limits_{|\zeta - z| < y} \ln^q(1 + |f(\zeta)|)d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

с конечной постоянной C_q, зависящей только от $q > 0$. Заменим в этом неравенстве интеграл по кругу $|\zeta - z| < y$ на интеграл по описанному вокруг него квадрату $|\xi - x| < y, |\eta - y| < y$ и оценим $|f(\xi + i\eta)|$ посредством вертикальной максимальной функции $Mf(\xi)$. Тогда имеем

$$\ln^q(1 + |f(z)|) \leq \frac{2C_q}{\pi y} \int\limits_{x-y}^{x+y} \ln^q(1 + Mf(\xi))\, d\xi,$$

что доказывает искомое равенство с постоянной $B_q = 4C_q/\pi$.

Следствие 11.23. *Для любой функции $f \in M^q(D)$, $q > 0$, справедливо неравенство*

$$\ln(1 + |f(z)|) \leq \frac{E_q \|f\|_{M^q}^{\beta_q}}{y^{1/q}}, \quad z = x + iy \in D,$$

где постоянная E_q не зависит от f и $\beta_q = \max(1, 1/q)$.

Доказательство. Заменим интеграл по интервалу $(x - y, x + y)$, участвующий в оценке в теореме 11.22, на интеграл по всей прямой $\mathbb{R}$. Извлекая корень q-ой степени из правой и левой частей полученного неравенства, приходим к доказываемой оценке с постоянной $E_q = (B_q/2)^{1/q}$.

Следствие 11.24. *Для любой функции $f \in M^q(D), q > 0$, имеем асимптотику*

$$\ln(1 + |f(x + iy)|) = o(y^{-1/q}), \text{ при } y \to 0+,$$

равномерную по $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Утверждение вытекает сразу же из неравенства теоремы 11.22 с учетом свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега от функции $\ln^q(1 + Mf)$.

Следствие 11.25. *Каждая функция f класса $M^q(D), q > 0$, сходится к нулю при $z \to \infty$ равномерно в полуплоскости $D_{y_0} = \{x + iy \quad | \quad y \geq y_0\}$ для любого фиксированного $y_0 > 0$.*

Доказательство. В основу доказательства положим оценку значений $|f(z)|$ отдельно для ограниченных значений y и отдельно для больших значений y.

Пользуясь обозначениями следствия 11.23, для любого $\varepsilon > 0$ найдем такое $Y > 0$, что $E_q\|f\|_{M^q}^{\beta_q}/y^{1/q} < \ln(1 + \varepsilon)$ при $y \geq Y$. Далее, используя тот факт, что функция $f \in M^q(D)$, $q > 0$, для этого Y найдем такое $X > 0$, что при $|x| \geq X$ и всех $y \in [-Y, Y]$ интеграл

$$\int\limits_{x-y}^{x+y} \ln^q(1 + Mf(\xi))\, d\xi < \frac{2y_0}{B_q} \ln^q(1 + \varepsilon).$$

Докажем теперь, что при $|z| \geq X + Y$ и $y \geq y_0$ выполнено $|f(z)| < \varepsilon$. Действительно, если $y \geq Y$, то $|f(z)| < \varepsilon$ согласно следствию 11.23, а если $y \leq Y$, то $|x| \geq X$ и поэтому опять $|f(z)| < \varepsilon$ согласно уже теореме 11.22 и тому, что $y \geq y_0$.

Для классов $N^q(D)$, $q \geq 1$, также существует оценка, аналогичная оценке следствия 11.23.

Теорема 11.26. *Для любой функции $f \in N^q(D)$, $q > 0$, справедливо неравенство*

$$\ln(1 + |f(z)|) \leq \frac{G_q \|f\|_{N^q}}{y^{1/q}}, \quad z = x + iy \in D,$$

где постоянная G_q не зависит от f.

Доказательство. Рассмотрим субгармоническую (см. доказательство теоремы 11.22) функцию $u = \ln(1 + |f|)$. Зафиксируем некоторую точку $z_0 = x_0 + iy_0$ в верхней полуплоскости D. Совершим конформное преобразование полуплоскости D на единичный круг $U = \{w \mid |w| < 1\}$, переводящее точку z_0 в начало координат:

$$w = \frac{z_0 - z}{z - \overline{z_0}}, z = \frac{z_0 + \overline{z_0} w}{1 + w}.$$

В плоскости w опишем круг с центром в начале координат и радиуса $\rho < 1$. Тогда, согласно неравенству Харди–Литтлвуда (см. доказательство леммы 11.16), для функции $U(w) = u(\frac{z_0 + \overline{z_0} w}{1+w})$

$$U^q(0) \leq \frac{B_q}{\pi \rho^2} \iint\limits_{|w|<\rho} U^q(w) \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dx\, dy.$$

Перейдем к пределу при $\rho \to 1$, тогда неравенство примет следующий вид:

$$U^q(0) \leq \frac{B_q}{\pi} \iint\limits_{|w|<1} U^q(w) \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dx\, dy.$$

После обратного перехода с круга на полуплоскость получаем

$$\begin{aligned} u^q(z_0) &\leq \frac{B_q}{\pi} \iint\limits_{y>0} u^q(z) \frac{4y_0^2}{[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2]^2}\, dx\, dy \leq \\ &\leq \frac{B_q}{\pi} \iint\limits_{y>0} u^q(z) \frac{4y_0^2}{(y + y_0)^4}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Далее применяем теорему Фубини к правой части неравенства:

$$\ln^q(1+|f(z_0)|) \leq \frac{B_q}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{4y_0^2}{(y + y_0)^4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+|f(x+iy)|)\, dx\, dy \leq \frac{4B_q}{3\pi} \frac{\|f\|_{N^q}}{y_0}.$$

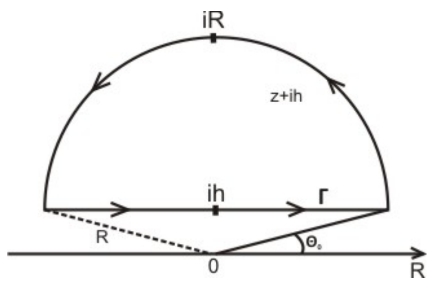
В силу произвольности выбора z_0 получаем доказываемую оценку.

11.2.5. Представления функций из $M^q(D)$

Теорема 11.27. *Пусть* $f \in M^q(D), q > 0$. *Тогда для любого* $h > 0$

$$f(z+ih) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t+ih)\, dt.$$

Доказательство. Применяем теорему Коши.



Пусть Γ_R — контур, показанный на рисунке, $R \to +\infty$, и пусть $R \sin\theta_0 = h$. Тогда:

$$f(z+ih) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - (z+ih)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - ih) - z}\, d\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-R\cos\theta_0}^{R\cos\theta_0} \frac{f(t+ih)\, dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{f(re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - ih - z} iRe^{i\theta}\, d\theta.$$

При всех больших R второй интеграл ограничен числом

$$J = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} |f(Re^{i\theta})| \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right) d\theta.$$

Теперь воспользуемся следствием 11.25 пункта 11.2.4, согласно которому $|f(Re^{i\theta})| \to 0$ в D_h, $h > 0$, при $R \to +\infty$. Поэтому получаем

$$f(z+ih) = \lim_{R' \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-R'}^{R'} \frac{f(t+ih)\, dt}{t-z}.$$

Далее, пусть $\bar{z} + ih$ — вне Γ_R, тогда, снова по теореме Коши,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - ih - \bar{z}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-R\cos\theta_0}^{R\cos\theta_0} \frac{f(t+ih)\,dt}{t - \bar{z}} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - ih - \bar{z}} iRe^{i\theta}\,d\theta.$$

Снова согласно следствию 11.25 пункта 11.2.4, второй интеграл стремится к нулю при $R \to +\infty$. Итак,

$$0 = \lim_{R' \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-R'}^{R'} \frac{f(t+ih)\,dt}{t - \bar{z}}.$$

Вычитая это из предыдущего равенства и используя элементарное тождество

$$\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} = \frac{2iy}{|t-z|^2} = \frac{2iy}{(x-t)^2 + y^2},$$

получаем

$$f(z+ih) = \frac{1}{\pi} \lim_{R' \to +\infty} \int\limits_{-R'}^{R'} \frac{yf(t+ih)\,dt}{(x-t)^2 + y^2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 11.28 (факторизационная теорема). *Пусть $q > 1$. Тогда любая функция $f \in M^q(D)$ представляется в виде произведения двух функций:*

$$f(z) = b_f(z)F(z),$$

где b_f — произведение Бляшке для функции f:

$$b_f(z) = \prod_{(\nu)} \frac{z - z_\nu}{z - \bar{z}_\nu} \cdot \frac{|z_\nu - i|}{z_\nu - i} \cdot \frac{|z_\nu + i|}{z_\nu + i},$$

по последовательности $\{z_\nu\}$ нулей функции f в D, удовлетворяющей условию

$$\sum_{(\nu)} \frac{y_\nu}{1 + x_\nu^2 + y_\nu^2} < +\infty, \quad z_\nu = x_\nu + iy_\nu, \quad y_\nu > 0$$

сходимости b_f, а функция $F \in M^q(D)$ и $F(z) \neq 0, z \in D$. И обратно, если функция f представляется в указанном виде, то она принадлежит классу $M^q(D)$.

Доказательство. Представим функцию $f \in M^q(D)$ в виде

$$f(z) = b_f(z)F(z),$$

где F голоморфна и не имеет нулей в D, и докажем, что функция $F \in M^q(D)$. Рассмотрим конечные произведения Бляшке

$$b_n(z) = \prod_1^n \frac{z - z_\nu}{z - \bar{z}_\nu} \cdot \frac{|z_\nu - i|}{z_\nu - i} \cdot \frac{|z_\nu + i|}{z_\nu + i},$$

в которых нули $z_1, z_2, ..., z_m, ...$ функции f перенумерованы с учетом кратности в порядке возрастания модуля. Обозначим $F_n(z) = \frac{f(z)}{b_n(z)}$, так что последовательность $\{F_n(z)\}$ равномерно сходится к $F(z)$ на компактах из D. Так как $|b_f(z)| \le 1$ для $z = x + iy, y > 0$ и $|b_f(x)| = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ и для каждого n найдем такое $h_{n,\varepsilon} < 1$, что $|b_n(x + ih)| > 1 - \varepsilon$ при $h < h_{n,\varepsilon}$ или, что то же самое, $|F_n(x + ih)| < \frac{|f(x+ih)|}{1-\varepsilon}$. Таким образом,

$$\ln^q(1+|F_n(x+ih)|) \le \ln^q(1+\frac{1}{1-\varepsilon}|f(x+ih)|) \le \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^q \ln^q(1+|f(x+ih)|).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном n, получим неравенство

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |F_n(x + ih)|)\, dx \le \lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |f(x + ih)|)\, dx,$$

верное при всех натуральных n. Замечая, что интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |F_n(x + ih)|)\, dx$ возрастают при уменьшении h, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |F_n(x + ih)|)\, dx \le \lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |f(x + ih)|)\, dx,$$

в котором левая часть определена для всех $h > 0$. В последнем неравенстве на основании леммы Фату переходим к пределу при $n \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |F(x + ih)|)\, dx \le \lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |f(x + ih)|)\, dx. \qquad (11.7)$$

Поскольку предел в правой части неравенства (11.7) существует, то $F \in M^q(D)$ согласно (11.3) и теореме 11.19.

Обратное утверждение следует непосредственно из ограниченности произведения Бляшке в D и определения классов $M^q(D)$. Теорема доказана.

11.3. Метрические свойства классов $M^q(D)$ и $N^q(D)$

11.3.1. $M^q(D)$ как линейные пространства

Как уже говорилось в параграфе 11.1, классы $\mathfrak{N}^q(D)$, $q > 0$, содержат все функции из $H^p(D)$, $p > 0$, но уже не являются линейными пространствами. В отличие от $\mathfrak{N}^q(D)$, пространства $M^q(D), q > 0$, обладают хорошими метрическими свойствами.

Лемма 11.29. *Классы* $M^q(D)$ *являются линейными пространствами для всех* $q > 0$.

Доказательство. Рассмотрим две функции — f и g, принадлежащие классу $M^q(D)$ для некоторого $q > 0$. Вначале докажем, что сумма $f + g$ принадлежит классу $M^q(D), q > 0$. Это следует из элементарных неравенств $M(f+g) \le Mf + Mg$ и $\ln(1+Mf+Mg) \le \ln(1+Mf)+\ln(1+Mg)$. Далее применив интегральное неравенство Минковского в случае $q > 1$:

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a(x) + b(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \le \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a(x)|^q \, dx\right)^{1/q} + \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |b(x)|^q \, dx\right)^{1/q}$$

и неравенство $(t + s)^q \le t^q + s^q, t, s \ge 0$, в случае $0 < q \le 1$, получим искомый результат.

Фиксируем комплексное число α. Принадлежность функции αf классу $M^q(D)$, $q > 0$, следует из элементарного неравенства

$$\ln(1 + |\alpha t|) \le \max(1, |\alpha|) \ln(1 + |t|), \alpha, t \in \mathbb{C}.$$

Аналогичными рассуждениями получается

Лемма 11.30. *Классы* $N^q(D)$ *являются линейными пространствами для всех* $q > 0$.

11.3.2. Квазинорма в классах

Характеристика $\|\cdot\|_{M^q}$, конечная только для функций из $M^q(D), q > 0$, удовлетворяет свойствам квазинормы.

Лемма 11.31. *Величина* $\|f\|_{M^q}$, $f \in M^q(D)$, $q > 0$, *является квазинормой (в смысле К. Иосиды [144, гл. I, §2, определение 2]).*

Доказательство. Проверим выполнение аксиом квазинормы для $\| \cdot \|_{M^q}$:

(1) для любой пары функций f и g из $M^q(D)$ функции $f \pm g$ также принадлежат $M^q(D)$ и

$$\|f \pm g\|_{M^q} \le \|f\|_{M^q} + \|g\|_{M^q};$$

(2) если $\{f_n\} \subset M^q(D), \|f_n\|_{M^q} \to 0$, и $\alpha \in \mathbb{C}$, то $\|\alpha f_n\|_{M^q} \to 0$ при $n \to +\infty$;

(3) если $f \in M^q(D)$, и $\alpha_n \in \mathbb{C}, \alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$, то $\|\alpha_n f\|_{M^q} \to 0$.

Свойство (1) следует из доказательства линейности пространства $M^q(D)$.

Для доказательства свойства (2) заметим, что если f — произвольная функция $M^q(D)$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, то αf также принадлежит классу $M^q(D)$, причём $\|\alpha f\|_{M^q} \leq \max(1, |\alpha|^{\alpha_q})\|f\|_{M^q}$. Поэтому $\|\alpha f_n\|_{M^q} \to 0$ при $n \to \infty$, если $\|f_n\|_{M^q} \to 0$.

Докажем свойство (3). Пусть $\alpha_n \in \mathbb{C}$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, начиная с некоторого номера, $|\alpha_n| \leq 1$, и поэтому имеем

$$\ln\left(1 + M(\alpha_n f)(x)\right) \leq \ln\left(1 + Mf(x)\right)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Если $f \in M^q(D)$, то функция $\ln^q(1 + Mf)$ интегрируема на $\mathbb{R}$ и, следовательно, последовательность $\ln^q(1 + M(\alpha_n f)(x))$ обладает интегрируемой мажорантой. Так как, кроме того, $\ln^q(1+M(\alpha_n f)(x)) \to 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\|\alpha_n f\|_{M^q} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + M(\alpha_n f)(x))\, dx\right]^{\frac{\alpha_q}{q}} \to 0 \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Как и в любом квазинормированном пространстве, в $M^q(D)$ существует естественная инвариантная метрика, порожденная квазинормой:

$$\rho_{M^q}(f, g) = \|f - g\|_{M^q}, \quad f, g \in M^q(D), q > 0,$$

и в топологии, порожденной этой метрикой, $M^q(D)$ представляет собой линейно-топологическое пространство (см. [144, гл. I, §2, предложение 2]).

11.3.3. F-пространства $M^q(D)$

Теорема 11.32. *Пространство $M^q(D)$ является F-пространством относительно метрики ρ_{M^q} (касательно определения F-пространства см. пункт 3.2.1).*

Доказательство. Проверим следующие четыре свойства F-пространства:

(1) метрика ρ инвариантна, т.е. $\rho(x, y) = \rho(x-y, 0)$ для любых $x, y \in X$;

(2) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ и любой последовательности элементов $x_n \in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, выполнено равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha x_n = 0$;

(3) для любого $x \in X$ и любой последовательности чисел $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, выполнено равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n x = 0$;

(4) метрика ρ — полная.

Свойство (1) следует из определения метрики ρ_{M^q}; (2) и (3) входят в определение квазинормы. Поэтому достаточно доказать только полноту $M^q(D)$.

Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $M^q(D)$. Согласно следствию 11.23 пункта 11.2.4 имеем

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le \exp\left(\frac{E_q \|f_n - f_m\|_{M^q}^{\beta_q}}{y^{1/q}}\right) - 1, \quad z = x + iy \in D.$$

В силу фундаментальности $\{f_n\}, \|f_n - f_m\|_{M^q} \to 0$ при $n, m \to +\infty$, и поэтому если $y \ge y_0$, где $y_0 > 0$ – фиксировано, то $f_n(z) - f_m(z) \rightrightarrows 0$ равномерно в полуплоскости $D_{y_0} = \{x + iy \mid y \ge y_0\}$. Согласно теореме Вейерштрасса, существует голоморфная в D функция f, к которой последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно в каждой полуплоскости $D_{y_0}, y_0 > 0$. Докажем, что функция f принадлежит пространству $M^q(D)$ и что $\{f_n\}$ сходится к f в метрике ρ_{M^q}.

Для этого зафиксируем некоторое $y_0 > 0$ и заметим, что $\sup\limits_{y \ge y_0} |f(x + iy)| \le Mf(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Тогда согласно фундаментальности $\{f_n\}$ в метрике ρ_{M^q} имеем

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + \sup_{y \ge y_0} |f_n(x + iy) - f_m(x + iy)|)\, dx\right]^{\alpha_q} \le \|f_n - f_m\|_{M^q} < \varepsilon \tag{11.8}$$

для всех $m, n \ge N(\varepsilon)$. Так как f_m сходятся к f равномерно в D_{y_0}, то подынтегральное выражение в (11.8) сходится к $\ln^q(1 + \sup\limits_{y \ge y_0} |f_n(x + iy) - f(x + iy)|)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и по неравенству Фату

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + \sup_{y \ge y_0} |f_n(x + iy) - f(x + iy)|)\, dx\right]^{\alpha_q} \le \varepsilon, \quad n \ge N(\varepsilon).$$

Устремляя y_0 к 0 и пользуясь опять неравенством Фату, имеем

$$\|f_n - f\|_{M^q} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + M(f_n - f)(x))\, dx\right]^{\alpha_q} \le \varepsilon, \quad \forall n \ge N(\varepsilon),$$

откуда, взяв любой номер $n \ge N(\varepsilon)$, мы видим, что $f_n - f \in M^q(D)$, а значит, в силу линейности класса $M^q(D)$, $f \in M^q(D)$, а также что $\rho_{M^q}(f_n, f) \to 0$ при $n \to +\infty$, то есть f_n сходятся к f в метрике ρ_{M^q}.

Замечание 11.33. Для частного случая $q = 1$ теорема была доказана Л. М. Ганжулой в [18].

Применив вместо оценки следствия 11.23 пункта 11.2.4 оценку теоремы 11.26 того же пункта для классов $N^q(D), q > 1$, и заменив в ходе доказательства максимальную функцию $Mf(x)$ на модуль $|f(x + iy)|$, получим аналогичную теорему для классов $N^q(D)$.

Теорема 11.34. *Пространство $N^q(D)$, $q > 1$, является F-пространством относительно метрики ρ_{N^q}.*

В случае $q = 1$ класс $N^q(D)$ будет лишь полным линейным и метрическим пространством.

11.3.4. $M^q(D)$ как F-алгебры

F-пространство $M^q(D), q > 0$, обладает ещё одной дополнительной структурой — структурой алгебры.

Теорема 11.35. *Каждое $M^q(D), q > 0$, образует F-алгебру, то есть такое F-пространство, в котором введена алгебраическая операция умножения, превращающая $M^q(D)$ в алгебру, и эта операция умножения непрерывна в метрике ρ_{M^q}.*

Доказательство. Первая часть утверждения о том, что $M^q(D), q > 0$, образует F-пространство в метрике ρ_{M^q}, уже доказана в теореме 11.32 предыдущего пункта. Заметим, что операция поточечного умножения функций из $M^q(D)$ не выводит за пределы $M^q(D)$.

Действительно, из элементарного неравенства (2.18) и неравенства треугольника в пространствах $L^q(\mathbb{R})$ вытекает, что

$$\|fg\|_{M^q} \leq \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\ln(1 + Mf(x)) + \ln(1 + Mg(x))]^q \, dx \right\}^{\alpha_q} \leq$$
$$\leq \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x))\, dx \right]^{\alpha_q} + \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mg(x))\, dx \right]^{\alpha_q} =$$
$$= \|f\|_{M^q} + \|g\|_{M^q}, \quad f, g \in M^q(D), \tag{11.9}$$

откуда следует замкнутость $M^q(D)$ относительно операции поточечного умножения функций. Вместе с линейными операциями F-пространства эта операция превращает $M^q(D)$ в алгебру. Таким образом, осталось проверить, что операция умножения непрерывна относительно метрики ρ_{M^q}.

Заметим, что непрерывность умножения по паре аргументов будет доказана, если мы докажем непрерывность по каждому аргументу в отдельности. Действительно, для любых последовательностей $\{f_n\}$ и $\{g_m\}$ из $M^q(D), f_n \to f \in M^q(D)$ и $g_m \to g \in M^q(D)$ при $m, n \to +\infty$, имеем

$$\rho_{M^q}(f_n g_m, fg) = \|(f_n - f)(g_m - g) + f(g_m - g) + (f_n - f)g\|_{M^q} \leq$$
$$\leq \|f_n - f\|_{M^q} + \|g_m - g\|_{M^q} + \|f(g_m - g)\|_{M^q} + \|(f_n - f)g\|_{M^q} =$$
$$= \rho_{M^q}(f_n, f) + \rho_{M^q}(g_m, g) + \rho_{M^q}(fg_m, fg) + \rho_{M^q}(f_n g, fg),$$

согласно неравенству треугольника для $\|\cdot\|_{M^q}$ и (11.9). Отсюда следует, что $f_n g_m \to fg$, если $fg_m \to fg$ и $f_n g \to fg$ при $m, n \to +\infty$.

Поэтому проверим, например, непрерывность по второму аргументу при фиксированном первом, откуда, в силу коммутативности умножения, будет следовать непрерывность и по первому. Итак, пусть $f \in M^q(D), q > 0$ и $g_m \to g$ при $m \to +\infty$ в метрике ρ_{M^q}. Так как функция $\ln^q(1 + Mf)$ интегрируема на $\mathbb{R}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ с мерой $\mu E < \delta$ выполнено соотношение

$$\int\limits_E \ln^q(1 + Mf(x))\, dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha_q}}.$$

Далее, для этого $\delta > 0$ найдётся такое K, что множество $E_K = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad Mf(x) \geq K\}$, в силу неравенства Чебышёва

$$\mu E_K \leq \frac{1}{\ln^q(1+K)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x))\, dx = \frac{\|f\|_{M^q}^{\beta_q}}{\ln^q(1+K)}, \quad K \in \mathbb{R},$$

имеет меру меньше δ. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ имеем цепочку неравенств

$$\|f(g_m - g)\|_{M^q} \leq \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x)M(g_m - g)(x))\, dx\right]^{\alpha_q} \leq$$

$$\left[\int\limits_{E_K} \ln^q(1 + Mf(x)M(g_m - g)(x))\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus E_K} \ln^q(1 + KM(g_m - g)(x))\, dx\right]^{\alpha_q} \leq$$

$$\leq \left\{\int\limits_{E_K} [\ln(1 + Mf(x)) + \ln(1 + M(g_m - g)(x))]^q \; dx\right\}^{\alpha_q} +$$

$$+ K^{q\alpha_q} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + M(g_m - g)(x))\, dx\right]^{\alpha_q} \leq \left[\int\limits_{E_K} \ln^q(1 + Mf(x))\, dx\right]^{\alpha_q} +$$

$$+ \left[\int\limits_{E_K} \ln^q(1 + M(g_m - g)(x))\, dx\right]^{\alpha_q} +$$

$$+ K^{q\alpha_q} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + M(g_m - g)(x))\, dx\right]^{\alpha_q} < \frac{\varepsilon}{2} + (K^{q\alpha_q} + 1)\|g_m - g\|_{M^q}.$$

Выбирая $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ так, чтобы последнее слагаемое было меньше $\varepsilon/2$ для $m \geq M(\varepsilon)$, получаем $\rho_{M^q}(fg_m, fg) = \|f(g_m - g)\|_{M^q} < \varepsilon$, что и означает сходимость fg_m к fg при $m \to +\infty$.

Непрерывность операции умножения, а вместе с ней и вся теорема доказана.

Замечание 11.36. Для случая $q = 1$ теорема была доказана Л. М. Ганжулой в [18].

Как и в случае с F-пространством, аналогичное доказательство с небольшими изменениями верно для класса $N^q(D), q > 1$.

Теорема 11.37. *Каждое $N^q(D), q > 1$, образует F-алгебру относительно метрики ρ_{N^q}.*

11.3.5. Ограниченные множества в $M^q(D)$

Как уже утверждалось в предыдущем параграфе, классы $M^q(D)$ при каждом $q > 0$ образуют F-пространства относительно метрики ρ_{M^q} и, следовательно, являются линейно-топологическими пространствами (см. [2, замечания к §1 разд. IV в конце книги] или [66, гл. II, §1, теорема 12]). Аналогично многомерным пространствам в шаре и поликруге (параграф 3.3), мы изучим структуру ограниченных и вполне ограниченных множеств в пространствах $M^q(D)$.

Теорема 11.38. *Подмножество $L \subseteq M^q(D), q > 0$, ограничено тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) существует такое число $K > 0$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x))\, dx < K \tag{11.10}$$

для любой $f \in L$, то есть множество L ограничено по метрике ρ_{M^q};

(2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\int_E \ln^q(1 + Mf(x))\, dx < \varepsilon$$

для любой $f \in L$ и любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ с лебеговой мерой $\mu E < \delta$, то есть первообразные семейства функций $\ln^q(1+Mf(x))$ равностепенно абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $L \subseteq M^q(D)$, тогда для любого $\eta > 0$ существует такое число $\alpha = \alpha(\eta), 0 < \alpha < 1$, что

$$\rho_{M^q}^{1/\alpha_q}(\alpha f, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+\alpha Mf(x))\,dx < \eta \tag{11.11}$$

для любой $f \in L$.
Поскольку $(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x, 0<\alpha<1, x \ge 0$, то, используя (11.11), получим оценку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+Mf(x))\,dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+\alpha Mf(x))^{\frac{1}{\alpha}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\alpha^q}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+\alpha Mf(x))\,dx < \frac{\eta}{\alpha^q} = K < +\infty$$

для любой функции $f \in L$. Таким образом, множество L ограничено в пространстве $M^q(D)$ относительно $\|\cdot\|_{M^q}$, а следовательно, и относительно метрики ρ_{M^q}, так что условие (1) выполнено.

Чтобы проверить выполнение условия (2), рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Выбирая $\eta = \varepsilon/2^q$, как и выше, находим такое число $\alpha = \alpha(\varepsilon), 0<\alpha<1$, что (11.11) выполнено для всех $f \in L$. Тогда для любого множества $E \subset \mathbb{R}$ конечной меры, с учетом неравенства Минковского в $L^q(E)$, $q \ge 1$, справедливы следующие оценки:

$$\int_E \ln^q(1+Mf(x))\,dx \le \int_E \ln^q\left(\frac{1}{\alpha}+Mf(x)\right)\,dx \le$$
$$\le \int_E \left(\ln\frac{1}{\alpha}+\ln(1+\alpha Mf(x))\right)^q\,dx \le$$
$$\le \left(\left((\mu E)\ln^q\frac{1}{\alpha}\right)^{1/q} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1+\alpha Mf(x))\,dx\right)^{1/q}\right)^q <$$
$$< \left((\mu E)^{1/q}\ln\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon^{1/q}}{2}\right)^q.$$

Если теперь выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $\delta^{1/q}\cdot\ln(1/\alpha) = \varepsilon^{1/q}/2$, то

$$\int_E \ln^q(1+Mf(x))\,dx < \left(\delta^{1/q}\cdot\ln\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon^{1/q}}{2}\right)^q = \left(\frac{\varepsilon^{1/q}}{2}+\frac{\varepsilon^{1/q}}{2}\right)^q = \varepsilon$$

для любой функции $f \in L$ и любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$, $\mu E < \delta$, то есть условие (2) выполнено.

В случае $0 < q < 1$ неравенство Минковского заменяется элементарным неравенством $(a+b)^q \le a^q + b^q, a, b \ge 0$, и все оценки остаются справедливыми (с другими константами).

Достаточность. Пусть для множества L из $M^q(D), q > 0$, выполняются условия (1) и (2). Рассмотрим произвольную окрестность V нуля в $M^q(D)$ и такую шаровую окрестность $B(0,\varepsilon) = \{g \in M^q(D) : \rho_{M^q}(g,0) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, которая содержится в V. Согласно (2), существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\int\limits_E \ln^q(1 + Mf(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{11.12}$$

для любой $f \in L$ и любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}, \mu E < \delta$.

Поскольку выполнено условие (1), то найдётся такая конечная постоянная $K > 0$, что выполнено неравенство (11.10) для всех $f \in L$. В силу неравенства Чебышёва, для меры множества $E_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \ln^q(1 + Mf(x)) > K/\delta\}, f \in L$ справедлива оценка

$$\mu E_f \le \frac{\delta}{K} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x))\,dx < \delta.$$

Тогда в неравенстве (11.12) можно положить $E = E_f$ и

$$Mf(x) < \exp((K/\delta)^{1/q}) - 1 = C,$$

то есть $Mf(x)/C < 1$ для всех $x \in \mathbb{R} \backslash E_f$. Поэтому для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $f \in L$, будет выполнена следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q\left(1 + \alpha Mf(x)\right)\,dx \le \\
&\qquad \le \int\limits_{E_f} \ln^q\left(1 + \alpha Mf(x)\right)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}\backslash E_f} \ln^q\left(1 + \alpha Mf(x)\right)\,dx \le \\
&\qquad \le \int\limits_{E_f} \ln^q\left(1 + Mf(x)\right)\,dx + \int\limits_{E_1} \ln^q\left(1 + \alpha Mf(x)\right)\,dx + \\
&\qquad\qquad + \int\limits_{E_2} \ln^q\left(1 + \alpha Mf(x)\right)\,dx,
\end{aligned} \tag{11.13}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}\backslash E_f = E_1 \cup E_2; \\
&E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid Mf(x) < 1\}; \\
&E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le Mf(x) < C\}.
\end{aligned}$$

Применив элементарное неравенство $1+\beta t \le (1+t)^{2\beta}$, $0 \le t < 1$, $0 < \beta < 1/2$, для второго интеграла в правой части (11.13) и выбирая $\alpha = \min(1/2, (\varepsilon/3K)^{1/q}/2, (2^{(\varepsilon/3K)^{1/q}} - 1)/C)$, получим следующую оценку:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q (1+\alpha Mf(x))\, dx \le \frac{\varepsilon}{3} + (2\alpha)^q K + \frac{\varepsilon}{3K} \int\limits_{E_2} \ln^q (1+1)\, dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q (1+Mf(x))\, dx < \varepsilon.$$

Следовательно, $\alpha L \subseteq B(0,\varepsilon) \subset V$, и множество L ограничено в $M^q(D)$ по определению.

Замечание 11.39. Для случая $q = 1$ теорема была доказана в [18].

11.3.6. Критерий полной ограниченности в $M^q(D)$

Теорема 11.40. *Подмножество L вполне ограничено в пространстве $M^q(D), q > 1$, тогда и только тогда, когда*

(1) L ограничено в $M^q(D)$;

(2) множество функций $\{f^+(x)\}, f \in L$, относительно компактно в топологии сходимости по лебеговой мере μ на прямой;

(3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $A > 0$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} \ln^q(1+Mf(x))\, dx + \int\limits_{A}^{+\infty} \ln^q(1+Mf(x))\, dx < \varepsilon$$

для всех $f \in L$.

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $L \subset M^q(D)$ вполне ограничено, тогда L ограничено, как всякое вполне ограниченное множество(см., например, [66, гл. II, §1, п.8]), и условие (1) необходимо.

Для проверки условия (2) рассмотрим произвольную последовательность функций $\{g_n = f_n^+ \mid f_n \in L\}, n \in \mathbb{N}$, почти всюду на $\mathbb{R}$. Вполне ограниченное множество L относительно компактно в пространстве $M^q(D)$ (см. [66, гл. I, §6, п. 12]), поэтому из последовательности $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой функции $f \in M^q(D)$ по метрике ρ_{M^q}. Из определения классов $M^q(D)$ и неравенства $|f^+(x)| \le Mf(x)$ следует, что последовательность функций $\{\ln(1+|f^+_{n_k} - f^+|)\}$ сходится к нулю в метрике пространства $L^q(\mathbb{R})$. Тогда, согласно [66, гл. III, §3, п. 6], последовательность $\{g_{n_k}\}$ сходится к функции f^+ по мере μ. Таким образом, относительная компактность множества $\{f^+ \mid f \in L\}$ по мере μ проверена.

Докажем выполнение условия (3). По определению вполне ограниченного множества, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ в $M^q(D)$ существует конечное множество функций $\{h_1, ..., h_N\} \subset M^q(D)$, обладающее следующим свойством: для каждой функции $f \in L$ существует такой номер $n, 1 \le n \le N$, что $\|h_n - f\|_{M^q} < \varepsilon/(4 \cdot 3^q)$. В силу принадлежности каждой функции $h_n, 1 \le n \le N$, классу $M^q(D)$ существует такое положительное число $A \in \mathbb{R}$, что неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} \ln^q(1 + Mh_n(x))\,dx + \int\limits_{A}^{+\infty} \ln^q(1 + Mh_n(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 9^q}$$

справедливы для всех $n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le N$. Представляя $|u| = |h_n - (h_n - f)|, 1 \le n \le N$, и используя элементарное неравенство

$$\ln^q(1 + |a - b|) \le 3^q(\ln^q(1 + |a|) + \ln^q(1 + |b|)), \tag{11.14}$$

получаем оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} \ln^q(1 + Mf(x))\,dx \le$$

$$\le 3^q \left(\int\limits_{-\infty}^{-A} \ln^q(1 + Mh_n(x))\,dx + \int\limits_{-\infty}^{-A} \ln^q(1 + M(h_n - f)(x))\,dx \right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int\limits_{A}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x))\,dx \le$$

$$\le 3^q \left(\int\limits_{A}^{+\infty} \ln^q(1 + Mh_n(x))\,dx + \int\limits_{A}^{+\infty} \ln^q(1 + M(h_n - f)(x))\,dx \right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует условие (3).

Достаточность. Пусть для множества L выполнены условия (1), (2) и (3). Поскольку свойство полной ограниченности множества в полном метрическом пространстве равносильно тому, что из любой последовательности точек этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность, рассмотрим произвольную последовательность функций $\{f_n\}, n \in \mathbb{N}$, из множества L. Согласно условию (2), из последовательности $\{f_n^+\} \subseteq \{f^+ \mid f \in L\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}^+\}$, сходящуюся по мере μ к некоторой измеримой на $\mathbb{R}$ функции g. Согласно условию (1) и теореме 11.38 пункта 11.3.5, существует конечная постоянная $K > 0$, что выполнено (11.10) для функций $\{f_{n_k}\}$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q \left(1 + |f^+_{n_k}(x)|\right) dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q \left(1 + Mf_{n_k}(x)\right) dx < K.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to +\infty$, в силу теоремы П. Фату (см. [29, гл. V, §5, п. 2, теорема 8]), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q \left(1 + |g(x)|\right) dx \leq K. \tag{11.15}$$

Опираясь на условие (1) теоремы 11.40 пункта 11.3.6 и условие (2) теоремы 11.38 пункта 11.3.5, на основании неравенства $|f^+(x)| \leq Mf(x)$ заключаем, что первообразные семейства функций $\{\ln^q(1 + |f^+_{n_k}|)\}$ равностепенно абсолютно непрерывны. Так как, согласно (11.15), функция $\ln^q(1 + |g(x)|)$ интегрируема, то, в силу неравенства (11.14), первообразные семейства функций $\{\ln^q(1+|f^+_{n_k} - g|)\}$ также равностепенно абсолютно непрерывны. Теперь, на основании известной предельной теоремы для пространств $L^q(\mathbb{R})$ [66, гл. III, §3, п. 6], получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q \left(1 + |f^+_{n_k}(x) - g(x)|\right) dx \to 0 \text{ при } k \to +\infty,$$

и, в силу определения классов $M^q(D)$ (11.2), заключаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q \left(1 + |f^+_{n_k}(x) - f^+_{n_p}(x)|\right) dx \to 0 \text{ при } k, p \to +\infty.$$

Таким образом, $\|f_{n_k} - f_{n_p}\|^+_{M^q} \to 0$ при $k, p \to +\infty$, откуда, в силу леммы 11.18 пункта 11.2.2, следует, что последовательность $\{f_{n_k}\}$ фундаментальна по метрике ρ_{M^q}. Итак, последовательность $\{f_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, и теорема 11.40 доказана.

Замечание 11.41. В отличие от аналогичного результата для круга и его многомерных обобщений, шара и поликруга, в случае полуплоскости возникает дополнительное условие равносходимости (3). Это условие еще раз подчеркивает, что результаты, справедливые для ограниченных областей, нельзя механически переносить на случай неограниченных областей. Теория функций в полуплоскости несколько тоньше, нежели соответствующая теория функций в круге.

Замечание 11.42. Используя теорему Хинчина–Островского в усиленном варианте Г. Ц. Тумаркина (см. теорему 6.6), можно получить утверждение теоремы 11.40 и в случае $q = 1$.

Замечание 11.43. Результаты этой главы опубликованы в статьях [22], [23], [24], [26], [27] и вошли в диссертацию [25].

12

Линейные изометрии в плоских областях

12.1. Пространства $M^q (q > 0)$ в круге

12.1.1. Структура линейных изометрий пространства $M^q (q > 0)$

Теорема 12.1. *Пусть $q > 0$, $\alpha \in T$ и ϕ — внутренняя функция в круге U. Отображение I вида*

$$(If)(z) = \alpha f(\phi(z)), \quad z \in U, \quad f \in M^q, \tag{12.1}$$

является линейной изометрией пространства M^q тогда и только тогда, когда $\phi(z) = \beta z^k$, $z \in U$, для некоторых $\beta \in T$ и $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение I, заданное формулой (12.1), является линейной изометрией пространства M^q. Докажем, что радиальные граничные значения ϕ^* внутренней функции ϕ, участвующей в определении отображения I, сохраняют меру σ (нормированную линейную меру Лебега) на окружности T, и тем самым сведём доказательство необходимости к теореме 8.37. При этом воспользуемся инвариантностью множеств меры нуль на T относительно операции взятия прообраза при отображении ϕ^* радиальными граничными значениями непостоянной внутренней в круге U функции ϕ (см. [74]).

Рассмотрим сначала подмножество T простейшего вида — открытую дугу K. Функция $\varphi(\gamma) = \chi_K(\gamma) + \varepsilon\chi_{T\setminus K}(\gamma)$, $\gamma \in T$, для каждого $0 < \varepsilon < 1$ представляет собой положительную и ограниченную полунепрерывную снизу функцию на T; здесь, как и обычно, символ χ_E обозначает индикатор множества E на T. Согласно теореме статьи [61], существует ограниченная голоморфная в круге U функция f, для которой $M_{rad}f = |f^*| = \varphi$ почти всюду на T. В частности,

$$|f|_{M^q}^{q/\alpha_q} = \int_T \ln^q(1+M_{rad}f(\gamma))\,\sigma(d\gamma) = \ln^q 2\,\sigma K + \ln^q(1+\varepsilon)\,\sigma(T\setminus K) \tag{12.2}$$

для любого $0 < \varepsilon < 1$, где α_q имеет обычное значение $\min(1, q)$. Так как функция $f(\phi)$ ограничена в круге U, то почти в каждой точке $e^{i\theta}$ единичной окружности T у неё существует радиальный граничный предел $(f(\phi))^*(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r\to 1-} f(\phi(re^{i\theta}))$. Согласно определению внутренней функции, радиальные граничные значения ϕ^* функции ϕ также существуют и равны единице по абсолютной величине почти всюду на окружности T. Таким образом, множество F точек $e^{i\theta} \in T$, для которых выполняются одновременно два условия:

(α) существует $\lim\limits_{r\to 1-} f(\phi(re^{i\theta})) = (f(\phi))^*(e^{i\theta}) \in \mathbb{C}$;

(β) существует $\lim\limits_{r\to 1-} \phi(re^{i\theta}) = \phi^*(e^{i\theta}) \in T$,

имеет полную меру на T.

Для произвольной точки $e^{i\theta} \in F$ кривая $\{\phi(re^{i\theta}),\ 0 \le r < 1\}$ подходит к точке $\phi^*(e^{i\theta}) \in T$ изнутри круга U (так как функция ϕ — непостоянна), поэтому, в силу теоремы Линделёфа, для функции f в точке $\phi^*(e^{i\theta})$ существует угловой граничный предел и при этом он равен $f(\phi^*(e^{i\theta})) = f^*(\phi^*(e^{i\theta})) = (f(\phi))^*(e^{i\theta})$. Согласно определению функций f, φ и инвариантности множеств меры нуль относительно $(\phi^*)^{-1}$, равенство $|(f(\phi))^*| = 1$ выполняется почти всюду на множестве $(\phi^*)^{-1}(K)$. Отсюда

$$|If|_{M^q}^{q/\alpha_q} = \int\limits_T \ln^q(1 + M_{rad}(f(\phi))(\gamma))\,\sigma(d\gamma) \ge$$

$$\ge \int\limits_{(\phi^*)^{-1}K} \ln^q(1 + |(f(\phi))^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma) \ge \ln^q 2\,\sigma(\phi^*)^{-1}K. \quad (12.3)$$

Поскольку отображение I изометрично, из равенств (12.2) и (12.3) имеем

$$\ln^q 2\,\sigma K + \ln^q(1+\varepsilon)\,\sigma(T \setminus K) = |f|_{M^q}^{q/\alpha_q} =$$

$$= |If|_{M^q}^{q/\alpha_q} \ge \ln^q 2\,\sigma(\phi^*)^{-1}K, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

В силу произвольности числа $0 < \varepsilon < 1$, отсюда вытекает неравенство $\sigma K \ge \sigma(\phi^*)^{-1}K$, то есть операция взятия прообраза при отображении ϕ^* не увеличивает меру дуг окружности T.

Покажем, что такое же свойство справедливо для произвольного борелевского подмножества T. Действительно, если E — борелевское множество на T, то, в силу его σ-измеримости, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся не более чем счётное покрытие E непересекающимися открытыми дугами $\{K_l\}$, такое что $\sum\limits_l \sigma K_l < \sigma E + \varepsilon$. Так как $(\phi^*)^{-1}E \subseteq \bigcup\limits_l (\phi^*)^{-1}K_l$ и $\sigma(\phi^*)^{-1}K_l \le \sigma K_l$, то $\sigma(\phi^*)^{-1}E \le \sum\limits_l \sigma(\phi^*)^{-1}K_l \le \sum\limits_l \sigma K_l < \sigma E + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, из последнего неравенства имеем $\sigma(\phi^*)^{-1}E \le \sigma E$.

Переходя к дополнениям множеств относительно T, получаем противоположное неравенство, откуда заключаем, что для произвольного борелевского множества E выполнено $\sigma(\phi^*)^{-1}E = \sigma E$, то есть отображение ϕ^* сохраняет меру σ на T.

Согласно теореме 8.37, функция ϕ радиусы переводит в радиусы и поэтому имеет вид $\phi(z) = R(r)e^{i\Theta(\theta)}$, $z = re^{i\theta} \in U$, $|\theta-\theta_0| < \Delta\theta$, $|r-r_0| < \Delta r$, $\Delta\theta$, $\Delta r > 0$, для некоторых дифференцируемых действительных функций R и Θ, по крайней мере, локально в каждой точке $z_0 = r_0e^{i\theta_0} \in U$, для которой $\phi(z_0) \neq 0$. Выписывая для функции ϕ условия Коши–Римана в полярных координатах, имеем

$$0 = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} = e^{i\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = e^{i\theta}\left(R'(r)e^{i\Theta(\theta)} + \frac{i}{r}R(r)e^{i\Theta(\theta)}i\Theta'(\theta)\right),$$

$$|r-r_0| < \Delta r, \quad |\theta-\theta_0| < \Delta\theta.$$

Сокращая на $e^{i\theta}$ и $e^{i\Theta(\theta)}$ и разделяя переменные r и θ, получаем

$$r\frac{R'(r)}{R(r)} = \Theta'(\theta), \quad |r-r_0| < \Delta r, \quad |\theta-\theta_0| < \Delta\theta,$$

откуда заключаем, что

$$r\frac{R'(r)}{R(r)} \equiv \Theta'(\theta) \equiv c \in \mathbb{R}, \quad |r-r_0| < \Delta r, \quad |\theta-\theta_0| < \Delta\theta.$$

Следовательно, $\Theta(\theta) = c(\theta-\theta_0) + \Theta_0$ и $R(r) = R_0(r/r_0)^c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ и всех $|r-r_0| < \Delta r$ и $|\theta-\theta_0| < \Delta\theta$. Таким образом, $\phi(z) = dz^c$ в некоторой окрестности точки z_0 для некоторых $d \in \mathbb{C}$ и $c \in \mathbb{R}$. По теореме единственности для аналитических функций, такой же вид функция ϕ обязана иметь и во всей области $U \setminus \{0\}$. Так как ϕ голоморфна в U, то необходимо $c = k \in \mathbb{N}$, и поскольку ϕ — внутренняя, то $d = \beta \in T$.

Достаточность. Непосредственно проверяется, что внутренняя функция $\phi(z) = \beta z^k$, $z \in U$, где $\beta \in T$ и $k \in \mathbb{N}$, радиусы переводит в радиусы и её радиальные граничные значения сохраняют меру σ на T (см. также замечание 8.23 к теореме пункта 8.3). Таким образом, выполнены все условия теоремы 8.37 и, следовательно, отображение I, заданное по формуле (12.1), является изометрией пространства M^q при любом $\alpha \in T$.

Замечание 12.2. В доказательстве необходимости условий следствия существенным образом использовалась инвариантность множеств меры нуль на T относительно операции взятия прообраза при отображении ϕ^* радиальными граничными значениями непостоянной внутренней функции ϕ. Неизвестно, справедливо ли аналогичное свойство для шара или поликруга при $n > 1$.

12.1.2. Изометрии вида $f \mapsto \psi f(\phi)$

Сформулированная в замечании 8.42 задача получает здесь полное решение.

Теорема 12.3. *Пусть $q > 0$ и ψ, ϕ — внутренние функции в круге U, причём радиальные граничные значения функции ϕ сохраняют меру σ на T и, кроме того, ϕ удовлетворяет радиальному граничному условию Липшица $|\phi^*(e^{i\theta}) - \phi(re^{i\theta})| \le C(1-r)$, $0 \le r < 1$, с некоторой конечной постоянной $C \ge 0$, одной и той же для почти всех θ из отрезка $[-\pi, \pi]$. Отображение I, заданное по формуле (8.32), является изометрией пространства M^q тогда и только тогда, когда $\psi(z) = \alpha$ и $\phi(z) = \beta z^k$, $z \in U$, для некоторых $\alpha, \beta \in T$ и $k \in \mathbb{N}$.*

Для доказательства последней теоремы понадобится оценка абсолютной величины внутренней функции внутри круга U.

Лемма 12.4. *Пусть ψ — непостоянная внутренняя функция в круге U. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$|\psi(z)| \le 1 - \varepsilon(1 - |z|), \quad z \in U. \tag{12.4}$$

Доказательство. Заметим сначала, что если хотя бы одна из внутренних функций ψ_1 и ψ_2 удовлетворяет неравенству (12.4) с некоторой положительной постоянной ε, то и их произведение будет удовлетворять тому же неравенству с той же постоянной ε. Следовательно, чтобы доказать неравенство (12.4) с некоторым $\varepsilon > 0$ для внутренней функции ψ, достаточно доказать аналогичное неравенство для некоторого внутреннего делителя этой функции (внутренняя функция ψ_1 называется внутренним делителем внутренней функции ψ, если существует такая внутренняя функция ψ_2, что $\psi = \psi_1\psi_2$).

Если $\psi(a) = 0$ для некоторой точки $a \in U$, то внутренним делителем функции ψ будет функция

$$\psi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \quad z \in U,$$

— конформный автоморфизм круга U, переставляющий точки a и 0. Докажем, что для функции ψ_a неравенство (12.4) выполнено, откуда будет следовать такое же неравенство и для функции ψ. Действительно,

$$1 - |\psi_a(z)|^2 = 1 - \frac{(a-z)(\overline{a} - \overline{z})}{(1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{z})} =$$

$$= \frac{1 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2|z|^2 - |a|^2 - |z|^2 + z\overline{a} + a\overline{z}}{|1 - \overline{a}z|^2} =$$

$$= \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{a}z|^2} \ge \frac{1 - |a|^2}{(1 + |a|)^2}(1 - |z|^2) \ge \frac{1 - |a|}{1 + |a|}(1 - |z|).$$

Так как $1-|\psi_a(z)|^2 = (1+|\psi_a(z)|)(1-|\psi_a(z)|) \le 2(1-|\psi_a(z)|)$, то, выбирая $\varepsilon = (1-|a|)/(2(1+|a|))$, получаем искомое неравенство (12.4) для функции ψ_a.

Если внутренняя функция ψ нигде в U в нуль не обращается (то есть она сингулярна), то, по теореме о канонической факторизации (теорема 1.3), существует такая постоянная $C \in T$ и такая невозрастающая на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция q, что

$$\psi(z) = C\exp\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,dq(\theta), \quad z \in U. \tag{12.5}$$

Если, кроме того, функция ψ непостоянна, то непостоянна и функция q. Из представления (12.5) и тождества

$$\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = P(r,e^{i\theta}), \quad z = re^{i\theta}, \quad 0 \le r < 1, \quad -\pi \le \theta \le \pi,$$

получаем

$$|\psi(z)| = \exp\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_r(\varphi-\theta)\,dq(\theta), \quad z = re^{i\varphi}, \quad 0 \le r < 1, \quad -\pi \le \varphi \le \pi,$$

где P_r обозначает ядро Пуассона

$$P_r(\theta) = P(r,e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}, \quad 0 \le r < 1, \quad -\pi \le \theta \le \pi.$$

Оценим ядро P_r снизу как

$$P_r(\theta) \ge \frac{1-r}{1+r}, \quad 0 \le r < 1, \quad -\pi \le \theta \le \pi,$$

откуда, учитывая невозрастание q, получим неравенство

$$|\psi(z)| \le \exp\left[\frac{1-r}{1+r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dq(\theta)\right] \le \exp\left[\frac{1-r}{2}(q(\pi)-q(-\pi))\right], \quad |z| = r < 1,$$

из которого, при надлежащем выборе $\varepsilon > 0$, и следует искомое неравенство (12.4) для функции ψ (можно выбрать ε равным, например, числу $(1-e^{-t})/t$, где $t = (q(-\pi)-q(\pi))/2)$.

Доказательство (теоремы). Необходимость. Покажем сначала, что если существует непрерывная в $\overline{U}$ и голоморфная в U функция f, для которой наименьшая верхняя грань абсолютных значений на радиусе $R_{e^{i\theta}} = \{re^{i\theta},\ 0 \le r < 1\}$ достигается при некотором $0 \le r_0 < 1$, то есть $\sup\limits_{0\le r<1}|f(re^{i\theta})| > |f(e^{i\theta})|$, — для множества значений θ положительной меры на $[-\pi,\pi]$, а для функции $\psi f(\phi)$ это свойство уже нарушается, то есть наименьшая верхняя грань абсолютных значений этой функции на радиусе $R_{e^{i\theta}}$ совпадает с её значением в конце радиуса для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$, то отображение (8.32) не может быть линейной изометрией пространства M^q. Действительно, в силу предположений относительно функции f, равенство $M_{rad}(\psi f(\phi)) = |f(\phi^*)|$ выполняется почти всюду на окружности T и неравенство $(M_{rad}f)(\phi^*) > |f(\phi^*)|$ — на некотором множестве положительной меры (здесь использовалось также свойство инвариантности множеств меры нуль относительно взятия прообраза при отображении ϕ^*). Кроме того, неравенство $(M_{rad}f)(\phi^*) \geq |f(\phi^*)|$ выполнено почти всюду на окружности T, поэтому из формулы замены переменной и инвариантности меры σ при отображении ϕ^* следует, что

$$|f|_{M^q} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \ln^q(1 + M_{rad}f(e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{\alpha_q/q} =$$

$$= \left[\int_{-\pi}^{\pi} \ln^q(1 + M_{rad}f(\phi^*(e^{i\theta}))) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{\alpha_q/q} >$$

$$> \left[\int_{-\pi}^{\pi} \ln^q(1 + |f(\phi^*(e^{i\theta}))|) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{\alpha_q/q} =$$

$$= \left[\int_{-\pi}^{\pi} \ln^q(1 + M_{rad}(\psi f(\phi))(e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{\alpha_q/q} = |If|_{M^q},$$

то есть отображение I, определённое согласно (8.32), не может быть изометрией пространства M^q.

Теперь покажем, что если внутренняя функция ψ непостоянна, то функцию f с описанными выше свойствами действительно можно подобрать, что, с учётом следствия из теоремы пункта 8.5.2, даст необходимость условий доказываемой теоремы. Действительно, если функция ψ непостоянна, то, согласно лемме, существует такое положительное число ε, для которого выполнено неравенство (12.4). Положим функцию f равной $f(z) = e^{z/K}$, $z \in U$, где $K > 0$ будет выбрано позже. Так как наименьшая верхняя грань в выражении (1.1) для максимальной радиальной функции функции f достигается при $r = 0$ и всех $\zeta = e^{i\theta} \in T$ с $\operatorname{Re}\zeta < 0$, то первое из условий на функцию f выполнено для любого $K > 0$. Чтобы удовлетворить второму условию, подберём такое $K > 0$, чтобы отношение

$$\frac{|\psi(re^{i\theta}) f(\phi(re^{i\theta}))|}{|f(\phi^*(e^{i\theta}))|} = \frac{|\psi(re^{i\theta})|}{e^{\operatorname{Re}[\phi^*(e^{i\theta}) - \phi(re^{i\theta})]/K}}$$

было не больше единицы для всех $0 \leq r < 1$ и почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$. Это и будет означать, что наименьшая верхняя грань в определении максимальной радиальной функции для $\psi f(\phi)$ достигается при $r \to 1-$ почти всюду на T. Действительно, согласно предположениям теоремы, существует такая конечная постоянная $C \geq 0$, что неравенство

$$|\phi^*(e^{i\theta}) - \phi(re^{i\theta})| \leq C(1-r),\ 0 \leq r < 1,$$

справедливо для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$. По доказанному выше,

$$\frac{|\psi(re^{i\theta})|}{e^{\mathrm{Re}[\phi^*(e^{i\theta}) - \phi(re^{i\theta})]/K}} \leq (1 - \varepsilon(1-r))\, e^{c(1-r)/K}, \quad 0 \leq r < 1, \tag{12.6}$$

для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$. Выберем такое $K > 0$, чтобы выражение в правой части неравенства (12.6) было не больше 1 при всех $0 \leq r < 1$. Таким образом, искомая функция f найдена.

Следовательно, если отображение вида (8.32) является изометрией пространства M^q, $q > 0$, то функция ψ необходимо постоянная и утверждение теоремы сводится к необходимости теоремы 12.1.

Достаточность условий теоремы следует из достаточности условий теоремы 12.1.

12.1.3. Дополнение к теореме 12.3

Результат предыдущего пункта можно уточнить.

Теорема 12.5. *Пусть $q > 0$, ψ и ϕ — внутренние функции в круге U, причём существует конечная постоянная $C \geq 0$, для которой неравенство $|\phi^*(e^{i\theta}) - \phi(re^{i\theta})| \leq C(1-r)$, $0 \leq r < 1$, выполнено для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$. Отображение I, определённое формулой (8.32), является изометрией пространства M^q тогда и только тогда, когда $\psi(z) = \alpha \in T$ и $\phi(z) = \beta z^k$, $z \in U$, для некоторых $\beta \in T$ и $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, достаточно показать, что из изометричности отображения I в метрике пространства M^q вытекает инвариантность меры σ относительно отображения ϕ^*. В доказательстве этого свойства можно пользоваться теми же рассуждениями, которые были использованы при доказательстве теоремы 8.37.

Действительно, пусть сначала K — открытая дуга единичной окружности T. Согласно теореме статьи [61], для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует голоморфная в круге U функция f, для которой радиальная максимальная функция совпадает почти всюду с абсолютными значениями её радиальных граничных пределов и равна почти всюду на T функции $\varphi(\gamma) = \chi_K(\gamma) + \varepsilon\chi_{T\setminus K}(\gamma)$, $\gamma \in T$, где символ χ_E, как всегда, обозначает индикатор множества E на T. В частности, функция f ограничена (единицей) по абсолютной величине и

$$|f|_{M^q}^{q/\alpha_q} = \int_T \ln^q(1+M_{rad}f(\gamma))\,\sigma(d\gamma) = \ln^q 2\ \sigma K + \ln^q(1+\varepsilon)\ \sigma(T\setminus K),\ 0 < \varepsilon < 1. \tag{12.7}$$

Функция $f(\phi)$ также ограничена в круге U, поэтому для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ у неё должны существовать радиальные граничные значения $(f(\phi))^*(e^{i\theta})$ и, по теореме Линделёфа, эти значения для почти всех θ должны совпадать с $f^*(\phi^*(e^{i\theta}))$ (совпадение имеет место для таких θ, в которых существует радиальный предел функции $f(\phi)$ и существует радиальный предел функции ϕ, причём $\phi^*(e^{i\theta}) \in T$). Кроме того, по определению внутренней функции, для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ существует радиальный граничный предел функции ψ, причём $|\psi^*| = 1$ почти всюду на T. Используя свойство инвариантности множеств меры нуль относительно операции взятия прообраза при отображении ϕ^*, получаем $|(\psi f(\phi))^*(e^{i\theta})| = 1$ для почти всех $e^{i\theta} \in (\phi^*)^{-1}K$. Отсюда

$$|If|_{M^q}^{q/\alpha_q} = \int\limits_T \ln^q(1 + M_{rad}(\psi f(\phi))(\gamma))\,\sigma(d\gamma) \geq$$

$$\geq \int\limits_{(\phi^*)^{-1}K} \ln^q(1 + |(\psi f(\phi))^*(\gamma)|)\,\sigma(d\gamma) = \ln^q 2\,\sigma(\phi^*)^{-1}K. \quad (12.8)$$

Сопоставляя равенства (12.7) и (12.8) и используя свойство изометричности отображения I, имеем

$$\ln^q 2\,\sigma K + \ln^q(1+\varepsilon)\,\sigma(T \setminus K) = |f|_{M^q}^{q/\alpha_q} =$$

$$= |If|_{M^q}^{q/\alpha_q} \geq \ln^q 2\,\sigma(\phi^*)^{-1}K, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

откуда, в силу произвольности $0 < \varepsilon < 1$, получаем $\sigma K \geq \sigma(\phi^*)^{-1}K$.

Покажем теперь, что неравенство $\sigma E \geq \sigma(\phi^*)^{-1}E$ выполняется для произвольного борелевского множества E на T (а не только для открытых дуг). Действительно, если E — произвольное борелевское подмножество T, то, согласно его σ-измеримости, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое покрытие E конечным или счётным числом открытых дуг $\{K_l\}$, для которого $\sum\limits_l \sigma K_l < \sigma E + \varepsilon$. Отсюда

$$\sigma(\phi^*)^{-1}E \leq \sigma \bigcup_l (\phi^*)^{-1}K_l \leq \sum_l \sigma(\phi^*)^{-1}K_l \leq \sum_l \sigma K_l < \sigma E + \varepsilon,$$

что, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, даёт $\sigma(\phi^*)^{-1}E \leq \sigma E$.

Если множество $E \subseteq T$ — борелевское, то таковым будет и дополнение к нему (относительно T). Следовательно, по доказанному выше, $\sigma(\phi^*)^{-1}(T \setminus E) \leq \sigma(T \setminus E)$, откуда $1 - \sigma(\phi^*)^{-1}E \leq 1 - \sigma E$ или $\sigma E \leq \sigma(\phi^*)^{-1}E$, то есть выполнено противоположное к доказанному выше неравенство. Отсюда заключаем, что мера произвольного борелевского множества на T при взятии прообраза относительно отображения ϕ^* сохраняется. Это и означает инвариантность меры σ относительно отображения ϕ^*.

Замечание 12.6. Предположение относительно внутренней функции ϕ, фигурирующее в этой теореме, на самом деле эквивалентно условию Липшица в круге U. Для внутренних функций условие Липшица эквивалентно тому, что они являются произведениями Бляшке с конечным числом сомножителей (см. [149, гл. VII, §7, теорема 47]). Нетрудно заметить, что при доказательстве теоремы использовалось только неравенство

$$\mathrm{Re}[\phi^*(e^{i\theta}) - \phi(re^{i\theta})] \geq -C(1-r), \quad 0 \leq r < 1,$$

которое эквивалентно ограниченности снизу функции $\mathrm{Re}\,\phi'(z)$, $z \in U$. Неизвестно, будет ли это условие для внутренних функций эквивалентно липшицевости в круге U.

12.2. Линейные изометрии пространств в полуплоскости

12.2.1. Известные сведения о линейных изометриях пространств голоморфных функций в полуплоскости

Несмотря на то, что первые описания множества линейных изометрий функциональных пространств появились довольно давно (см. [2, разд. XI], [74]), для пространств в верхней полуплоскости изучение линейных изометрий началось лишь в 1991 году (не считая случая гильбертова пространства $H^2(D)$, подробное изучение неунитарных изометрий которого см. в книге К. Гофмана [83, гл. 7]), то есть более полувека спустя после начала изучения функциональных пространств в полуплоскости. Впервые этим вопросом занялся японский математик Н. Мочизуки в своей работе [108]. Им было получено описание линейных изометрий пространств $H^p(D)$, $p > 0$.

Теорема 12.7. *Пусть A — линейная изометрия пространства $H^p(D)$ на $H^p(D)$, $p > 0$, $p \neq 2$. Тогда A представляется в виде*

$$(Af)(z) = c(\psi'(\Psi(z))))^{1/p} \left(\frac{1}{z+i}\right)^{2/p} \left(\frac{2i}{1-(\psi\circ\Psi)(z)}\right)^{2/p} \times \\ \times f((\Psi^{-1}\circ\psi\circ\Psi)(z))\,(z \in D) \quad (12.9)$$

для $f \in H^p(D)$, где $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, $\Psi(z) = (z-i)(z+i)^{-1}$, $z \in D$, ψ — конформное отображение единичного круга U на себя, и ψ' — производная ψ. Если положить $\varphi = \Psi^{-1}\circ\psi\circ\Psi$, то

$$(Af)(z) = c(\varphi'(z))^{1/p} f(\varphi(z))\,(z \in D). \quad (12.10)$$

12.2.2. Изометрии $N^q(D)$, $q > 1$

Как и в пункте 8.2.3, определим конус в линейном пространстве как множество, замкнутое относительно умножения на положительные числа. Отображение I назовем положительно-однородным, если для него выполняется равенство $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ для всех $\alpha > 0$.

Для следующей теоремы рассмотрим класс $\ln L^q_+(\mathbb{R})$ функций f, для которых выполняется неравенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + |f(x)|)\, dx < +\infty$.

Замечание 12.8. Пространство $N^q(D)$, $q > 1$, посредством вертикальных граничных значений вкладывается в пространство $\ln L^q_+(\mathbb{R})$, но определяемое, так как мы имеем дело со случаем бесконечной меры, сразу условием конечности характеристики (8.9) вместо условия интегрируемости $\ln^q_+ |f|$. (Согласно теореме 11.17 пункта 11.2.1, верной с тем же доказательством для классов $N^q(D)$, $q > 1$, вложение производится согласно $f \in N^q(D) \mapsto [f^+] \in \ln^q_+(\mathbb{R})$.) Это вложение линейно и изометрично, поэтому пространство $N^q(D)$, $q > 1$, можно отождествить с некоторым линейным подпространством пространства $\ln L^q_+(\mathbb{R})$.

Теорема 12.9. *Пусть $q > 1$ и I — произвольная линейная изометрия пространства $N^q(D)$ на себя. Тогда I имеет вид*

$$(If)(z) = cf(z + a),\ z \in D,\ f \in N^q(D), \tag{12.11}$$

где $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, и $a \in \mathbb{R}$.

Обратно, если I имеет вид (12.11) для некоторого $a \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, то I — линейная изометрия пространства $N^q(D)$ на себя.

Доказательство. Предположим, что I — линейная изометрия пространства $N^q(D)$. Заметим, что всякое линейное отображение I также и положительно-однородно. Как было показано ранее (см. замечание в начале этого пункта), пространство $N^q(D)$, $q > 1$, линейно и изометрично вкладывается в пространство $\ln L^q_+(\mathbb{R})$. Обозначим образ этого вложения как $\widetilde{N^q}(D)$, $q > 1$. Тогда $\widetilde{N^q}(D)$ является линейным замкнутым подпространством пространства $\ln L^q_+(\mathbb{R})$, что следует из линейности, изометричности и полноты пространства $N^q(D)$, $q > 1$. В частности, $\widetilde{N^q}(D)$ является конусом. Положив $C = \widetilde{N^q}(D)$, заметим, что любая линейная изометрия I пространства $N^q(D)$, $q > 1$, естественным образом индуцирует линейную, а значит, и положительно-однородную изометрию $\widetilde{I}$ конуса C в $\ln L^q_+(\mathbb{R})$. Согласно лемме 8.20, отображение $\widetilde{I}$ является линейной изометрией одновременно двух пространств — $L^{q+1}(\mathbb{R})$ и $L^{q+2}(\mathbb{R})$. Возвращаясь обратно к пространству $N^q(D)$, $q > 1$, находим, что I является линейной изометрией одновременно двух пространств Харди — $H^{q+1}(D)$ и $H^{q+2}(D)$. Применяя теорему 12.7 к $p = q+1$ и $p = q+2$, получаем, что отображение I имеет вид (12.10) и для $p = q + 1$, и для $p = q + 2$ (с одной и той же функцией φ — в этом можно убедиться, подставляя в (12.10) функции $f(z)$ вида $(z+i)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$). Такое может быть только в случае, если $\varphi' = 1$ и $\varphi(z) = z + a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Так как $H^p(D) \cap N^q(D)$ плотно в $N^q(D)$ и сходимость в $N^q(D)$ не слабее равномерной сходимости на компактах из D (теорема 11.26), то отображение I сохраняет вид (12.11) на всем $N^q(D)$.

Обратное утверждение тривиально.

Замечание 12.10. Результаты этой главы вошли в диссертации [25] и [46].

13

Пространства гармонических функций

Эффективный способ изучения малых классов Харди h^p, $p > 0$, гармонических функций в единичном круге комплексной плоскости (представленный в широко известных монографиях [41], [70]) состоит в давнишнем, принадлежащем М. Риссу (1927 г.), наблюдении: гармонические функции классов h^p, $p > 1$, являются действительными частями аналитических функций больших классов Харди H^p, $p > 1$, и это позволяет воспользоваться глубокими результатами и широко разработанными методами теории классов H^p аналитических функций (см. [41], [70]). Хорошо известно также, что это свойство перестаёт быть справедливым в случае $0 < p \leq 1$, и типичным примером служит так называемое ядро Пуассона — принадлежащая малому классу h^1 функция

$$p(z) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}, \quad |z| < 1, \tag{13.1}$$

которая является действительной частью функции $(1+z)(1-z)^{-1}$, не принадлежащей классу H^1. Более того, гармонические функции малых классов h^p, $0 < p < 1$, могут иметь во многих смыслах очень плохое поведение (например, не обладать радиальными пределами почти во всех граничных точках, что невозможно для аналитических функций больших классов Харди H^p, $0 < p < 1$). Поэтому уже давно (см., например, пионерную в этом направлении работу [59]) стали изучать подмножества в h^p, $p > 0$, элементы которых представляют собой действительные части функций пространств H^p, $p > 0$. В настоящей главе указывается новый подход к изучению таких подмножеств в h^p, $p > 0$, позволяющий рассматривать их как F-пространства относительно естественных инвариантных метрик и изучать в них различные линейно-топологические свойства. Аналогичный подход использован в статье [8] при изучении пространств аналитических функций.

13.1. Основные обозначения и определения

Символом U обозначим открытый единичный круг $|z| < 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а символом T — его границу $|z| = 1$. Для произвольной точки $e^{i\theta} \in T$ и произвольного числа $\alpha > 1$ рассмотрим в U угловую область $D_\alpha(\theta) = \{z \in U; |z - e^{i\theta}| < \alpha(1 - |z|)\}$ с вершиной в $e^{i\theta}$. Для произвольной комплексной функции $u(z)$, определённой в U, величины $\sup\limits_{0\le r<1} |u(re^{i\theta})| = (Mu)(e^{i\theta})$ и $\sup\limits_{z\in D_\alpha(\theta)} |u(z)| = (M_\alpha u)(e^{i\theta})$ называют радиальной максимальной функцией и угловой максимальной функцией в точке $e^{i\theta} \in T$ соответственно.

Если функция $u(z)$ непрерывна в круге U, то для произвольных чисел $p > 0$ и $\alpha > 1$ обозначим

$$\|u\|_p = \sup_{0\le r<1} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p \,\frac{d\theta}{2\pi}\right]^{1/p}, \tag{13.2}$$

$$\|u\|_p^* = \left[\int_{-\pi}^{\pi} (Mu)^p(e^{i\theta}) \,\frac{d\theta}{2\pi}\right]^{1/p}, \tag{13.3}$$

$$\|u\|_{p,\alpha} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} (M_\alpha u)^p(e^{i\theta}) \,\frac{d\theta}{2\pi}\right]^{1/p}. \tag{13.4}$$

Из определений (13.2)–(13.4) непосредственно следует, что

$$\|u\|_p \le \|u\|_p^* \le \|u\|_{p,\alpha} \tag{13.5}$$

для всех $p > 0$ и $\alpha > 1$, и неравенства считаются формальными в случае бесконечности какой-либо из величин (13.2)–(13.4). С другой стороны, классическая максимальная теорема Харди–Литтлвуда [77] утверждает, что для аналитической функции f в круге U условие $\|f\|_p < +\infty$ для всех $p > 0$ равносильно свойству $\|f\|_p^* < +\infty$. Если функция $u(z)$ — гармоническая в U, то, согласно основной теореме статьи [91], для любых $p > 0$ и $\alpha > 1$ можно указать такую универсальную положительную постоянную $A_{p,\alpha}$, что

$$\|u\|_{p,\alpha} \le A_{p,\alpha}\, \|u\|_p^*, \tag{13.6}$$

и неравенство считается формальным, если правая часть бесконечна.

Гармоническую в круге U функцию $u(z)$ относят к малому классу Харди h^p, $p > 0$, если $\|u\|_p < +\infty$. Аналитическую в круге U функцию $f(z)$ относят к большому классу Харди H^p, $p > 0$, если $\|f\|_p < +\infty$, а последнее равносильно тому, что $u, v \in h^p$, $p > 0$, где $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in U$ (см. [70, §1.1]).

Определение 13.1. *Гармоническую функцию $u(z)$, определённую в круге U, отнесём к классу h^p_{max}, $p > 0$, если $\|u\|^*_p < +\infty$, так что вложение $h^p_{max} \subseteq h^p$ справедливо для всех $p > 0$.*

Нетрудно доказать также, исходя из определения (13.3), строгие вложения $h^{p_1}_{max} \subset h^{p_2}_{max}$ для всех $0 < p_2 < p_1$.

Замечание 13.2. Отмеченная выше максимальная теорема Харди–Литтлвуда показывает, что необходимость введения максимального аналога H^p_{max}, $p > 0$, для класса H^p, $p > 0$, отпадает, поскольку $H^p_{max} = H^p$, $p > 0$, хотя в вопросах метрического характера эквивалентное определение приводит к совершенно другой метрике и другой метрической структуре класса H^p.

Теорема 13.3. *Функция $u(z)$ принадлежит классу h^p_{max}, $p > 0$, в том и только в том случае, когда она представима в виде $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ для некоторой функции $f(z)$ класса H^p, $p > 0$. При этом, если функция f в таком представлении нормирована условием $\operatorname{Im} f(0) = 0$, то*

$$\|f\|_p \le C_p \|u\|^*_p \tag{13.7}$$

с некоторой постоянной $C_p > 0$, не зависящей от u.

Замечание 13.4. В частном случае $p = 1$ этот результат сформулирован и доказан в [31, гл. VIII, §D, п. 2]. Похожий результат для функций, определённых в полуплоскости, отмечен в [73, §8, теорема 9 и следствие 2].

Доказательство. Согласно определению 13.1, формулам (13.3), (13.4) и неравенствам (13.5) и (13.6), функция $u(z) \in h^p_{max}$, $p > 0$, тогда и только тогда, когда $\|u\|_{p,\alpha} < +\infty$ для $p > 0$ и всех $\alpha > 1$. Для гармонической функции $u(z)$ в круге U существует единственная с точностью до аддитивной постоянной сопряжённая гармоническая функция $v(z)$ такая, что функция $u(z) + iv(z) = f(z)$ голоморфна в U. Если функцию $v(z)$ нормировать условием $v(0) = 0$, то в силу основного результата статьи [59] получим неравенство

$$\|f\|_p \le C_{p,\alpha} \|u\|_{p,\alpha}, \tag{13.8}$$

справедливое для всех $p > 0$ и $\alpha > 1$ с некоторой постоянной $C_{p,\alpha} > 0$, не зависящей от $u(z)$ и $v(z)$. Поэтому с учётом изложенного в начале доказательства утверждения заключаем, что $\|f\|_p < +\infty$ и $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $z \in U$, для функции $f \in H^p$, $p > 0$. Неравенство (13.7) следует из неравенства (13.8) подстановкой в него неравенства (13.6).

Следствие 13.5. *Для любого $p > 0$ существует такая конечная постоянная $C_p > 0$, что*

$$|u(z)| \le C_p \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^{1/p} \|u\|^*_p, \quad z \in U, \tag{13.9}$$

для любой функции $u(z) \in h^p_{max}$, $p > 0$.

Доказательство. По теореме 13.3, для любой функции $u(z) \in h^p_{max}$, $p > 0$, найдём такую голоморфную функцию $f \in H^p$, $p > 0$, удовлетворяющую оценке (13.7) с постоянной $C_p > 0$, не зависящей от $u(z)$, что $u = \operatorname{Re} f$. Известная оценка модуля функции класса H^p (см., например, [41, гл. II, §3, п. 1]) имеет вид

$$|f(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{1/p} \|f\|_p, \quad z \in U, \tag{13.10}$$

откуда, с учётом неравенства $|u(z)| \leq |f(z)|$ и оценки (13.7), получаем (13.9).

Другое следствие теоремы 13.3 связано с понятием углового предела функции $u(z)$ в граничной точке $e^{i\theta}$. Так называют значение $w \in \overline{\mathbb{C}}$, которое является пределом функции $u(z)$, когда z стремится к $e^{i\theta}$, оставаясь в каждой области $D_\alpha(\theta)$, $\alpha > 1$, одно и то же для всех $D_\alpha(\theta)$, $\alpha > 1$, и которое обозначается $w = u(e^{i\theta})$.

Следствие 13.6. *Произвольная функция $u(z)$ класса h^p_{max}, $p > 0$, обладает конечными угловыми пределами $u(e^{i\theta})$ для почти всех точек $e^{i\theta} \in T$.*

Доказательство. Согласно теореме 13.3, любая функция $u \in h^p_{max}$, $p > 0$, имеет представление $u = \operatorname{Re} f$, $f \in H^p$, $p > 0$. Так как функции классов H^p, $p > 0$, обладают конечными угловыми пределами почти всюду на T (см., например, [41]), то утверждение следствия 13.6 справедливо на основании непрерывности операции взятия действительной части комплексного числа.

Замечание 13.7. Выше отмечалось, что функции классов h^p, $p > 1$, являются действительными частями функций классов H^p, $p > 1$, так что утверждения теоремы 13.3 и следствий 13.5 и 13.6 доставляют новую информацию только в случае $0 < p \leq 1$.

13.2. Соотношения между классами h^p и h^p_{max}, $p > 0$

Согласно упомянутой в начале главы теореме М. Рисса, при любом $p > 1$ условия $\|u\|_p < +\infty$ и $\|v\|_p < +\infty$ для любой пары сопряжённых гармонических в U функций $u(z)$ и $v(z)$ равносильны. Так как при этом функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ принадлежит классу H^p, $p > 1$, то по максимальной теореме Харди–Литтлвуда ([77]) имеем $\|u\|^*_p < +\infty$. Таким образом, при $p > 1$ классы h^p и h^p_{max} совпадают (как множества функций). Это утверждение становится неверным уже при $p = 1$, как показывает пример функции (13.1). Справедлива, однако, следующая теорема.

Теорема 13.8. *Любая функция $u(z)$ класса h^1, а также её сопряжённая функция $v(z)$ принадлежит каждому из классов h^p_{max}, $0 < p < 1$. Если,* *дополнительно, функция* $v(z)$ *нормирована условием* $v(0) = 0$, *то неравенства*

$$\|u\|_p^* \le K_p \|u\|_1, \quad \|v\|_p^* \le K_p \|u\|_1 \tag{13.11}$$

справедливы с некоторой конечной постоянной K_p, *зависящей только от* p, $0 < p < 1$.

Доказательство. Известная теорема Колмогорова (см., например, [31, гл. V, §D, п. 5]) утверждает, что для любой гармонической функции $u(z)$, представимой в круге U интегралом Пуассона–Лебега, голоморфная функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ принадлежит классам H^p для любого p, $0 < p < 1$, где $v(z)$ — сопряжённая к $u(z)$ функция с $v(0) = 0$; при этом $\|f\|_p \le L_p \|u\|_1$ с конечной постоянной $L_p > 0$, зависящей только от p. В статье [55, с. 29]) отмечено, что утверждение теоремы Колмогорова остаётся справедливым для произвольной функции u класса h^1, поскольку в её доказательстве интеграл Пуассона–Лебега можно заменить интегралом Пуассона–Стилтьеса (как хорошо известно, эквивалентным условием принадлежности гармонической функции классу h^1 является представимость её в виде интеграла Пуассона–Стилтьеса). Согласно максимальной теореме Харди–Литтлвуда, имеем оценку $\|f\|_p^* \le D_p \|f\|_p$ с постоянной $D_p > 0$, зависящей только от p. Объединяя обе эти оценки и учитывая неравенства $|u(z)| \le |f(z)|$, $|v(z)| \le |f(z)|$, $z \in U$, получаем (13.11) с $K_p = L_p \cdot D_p$.

В заключение отметим, что в [129] рассматривались некоторые классы $\widetilde{h}^p$, $0 < p \le 1$, промежуточные между h^p_{max} и h^p.

13.3. Топологические свойства классов h^p_{max}, $p > 0$

Стандартной техникой проверяется, что вводимая формулой (13.3) числовая характеристика $\|u\|_p^*$ определяет в классах h^p_{max}, $p > 0$, инвариантную метрику

$$\rho_p^*(u_1, u_2) = \left(\|u_1 - u_2\|_p^*\right)^{\alpha_p}, \quad u_1, u_2 \in h^p_{max},\ \ p > 0,\ \ \alpha_p = \min(1, p),$$

превращающую каждый класс h^p_{max}, $p > 0$, в метрическое пространство (удовлетворение функции ρ_p^* аксиомам метрики непосредственно следует из неравенства треугольника в пространствах $L^p(-\pi, \pi)$, $p > 0$).

Отметим, что метрику в классах h^p_{max} можно ввести также посредством угловой числовой характеристики (13.4) в виде

$$\rho_{p,\alpha}(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_{p,\alpha}^{\alpha_p}, \quad u_1, u_2 \in h^p_{max},\ \ p > 0,\ \ \alpha_p = \min(1, p).$$

Однако, в силу неравенства (13.6), метрики ρ_p^* и $\rho_{p,\alpha}$ для любого $\alpha > 1$ эквивалентны по Липшицу, а значит, они топологически эквивалентны и задают одинаковые равномерные и липшицевы структуры.

Так как, по определению, гармоническая функция $u(z)$, $z \in U$, принадлежит классу h^p_{max}, $p > 0$, тогда и только тогда, когда $\|u\|^*_p = \rho^*_p(u, 0) < +\infty$, то из неравенства треугольника для метрики ρ^*_p и свойства абсолютной однородности характеристики $\|\cdot\|^*_p$ следует, что метрические пространства h^p_{max}, $p > 0$, замкнуты относительно операций поточечного сложения функций и умножения функций на действительное число. Таким образом, классы h^p_{max}, $p > 0$, образуют линейно-метрические пространства над полем действительных чисел, то есть такие линейные и одновременно метрические пространства, в которых линейные операции непрерывны относительно метрик.

Рассматривая классы H^p, $p > 0$, как метрические пространства с естественными метриками $\rho_p(f, g) = \|f - g\|_p^{\alpha_p}$, $f, g \in H^p$, $\alpha_p = \min(1, p)$, докажем следующий результат.

Теорема 13.9. *Для любого $p > 0$ пространство h^p_{max} изоморфно некоторому замкнутому линейному подпространству пространства Харди H^p, $p > 0$, и, следовательно, представляет собой F-пространство (B-пространство при $p \geq 1$) относительно метрики ρ^*_p (относительно нормы $\|\cdot\|^*_p$ при $p \geq 1$), и сходимость в метрике ρ^*_p сильнее равномерной сходимости на компактах круга U.*

Замечание 13.10. Как и в замечании 13.7, отметим, что новую информацию теорема 13.9 доставляет только в случае $0 < p \leq 1$.

Доказательство. Согласно теореме 13.3, каждой функции $u \in h^p_{max}$, $p > 0$, можно поставить в соответствие однозначно определённую функцию $f \in H^p$, $p > 0$, с условием $\operatorname{Im} f(0) = 0$. Обозначая множество таких функций через H^p_0, заметим, что, в силу оценки (13.7) для $\|f\|_p$ и $\|u\|^*_p$, это соответствие непрерывно. Так как, по максимальной теореме Харди–Литтлвуда, справедлива и обратная оценка $\|u\|^*_p \leq D_p \|f\|_p$, то пространство h^p_{max} в действительности изоморфно (в линейном и топологическом смыслах) подпространству H^p_0 пространства H^p, что доказывает первое утверждение теоремы 13.9. Учитывая, что пространство H^p, $p > 0$ (а следовательно, и любое его замкнутое линейное подпространство) является F-пространством (B-пространством при $p \geq 1$) относительно метрики ρ_p (нормы $\|\cdot\|_p$ при $p \geq 1$), приходим ко второму утверждению теоремы 13.9. Утверждение о равномерной сходимости следует из определения метрики ρ^*_p и оценки (13.9) в следствии 13.5.

Приводимую ниже теорему можно считать аналогом для пространств h^p_{max}, $p > 0$, известной теоремы Ф. Рисса о граничной сходимости в среднем функций пространств H^p (см., например, [41, гл. II, §4, п. 1]).

Теорема 13.11. *Для любой функции $u \in h^p_{max}$, $p > 0$, функции u_r, $0 \leq r < 1$, определяемые формулой $u_r(z) = u(rz)$, $z \in U$, $0 \leq r < 1$, сходятся при $r \to 1-$ к исходной функции u в метрике ρ^*_p.*

Доказательство. Пусть $u \in h^p_{max}$, $p > 0$. Согласно теореме 13.3, существует такая аналитическая функция f класса H^p, $p > 0$, что $u = \operatorname{Re} f$. Так как для любой функции $f \in H^p$, $p > 0$, справедлива теорема Ф. Рисса (см. [41, гл. II, §4, п. 1]), то $\|f_r - f\|_p \to 0$ при $r \to 1-$, где f_r, $0 \le r < 1$, определены как $f_r(z) = f(rz)$, $z \in U$. Тогда для $u_r = \operatorname{Re} f_r$, $0 \le r < 1$, на основании максимальной теоремы Харди–Литтлвуда, имеем $\|u_r - u\|^*_p \le \|f_r - f\|^*_p \le D_p\|f_r - f\|_p \to 0$ при $r \to 1-$, то есть функции u_r, $0 \le r < 1$, сходятся к функции u при $r \to 1-$ в метрике ρ^*_p.

Следствие 13.12. *Гармонические полиномы двух переменных плотны в пространствах h^p_{max}, $p > 0$, и F-пространства h^p_{max}, $p > 0$ — сепарабельны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию h^p_{max}, $p > 0$, и произвольное число $\varepsilon > 0$, и докажем сначала существование гармонического полинома $P(z) = P(x, y)$, который приближает функцию u в метрике ρ^*_p с точностью, не превосходящей ε. Опираясь на теорему 13.3, находим функцию $f \in H^p$, $p > 0$, у которой $\operatorname{Re} f = u$. Так как алгебраические многочлены комплексного переменного плотны в H^p, $p > 0$, то для числа $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен $Q(z)$, что $\|f - Q\|_p \le \varepsilon/D_p$, где D_p — положительная постоянная в оценке $\|u\|^*_p \le D_p\|f\|_p$, $f \in H^p$, $u = \operatorname{Re} f$, $p > 0$, по максимальной теореме Харди–Литтлвуда. Поэтому $\|u - \operatorname{Re} Q\|^*_p \le D_p\|f - Q\|_p \le \varepsilon$ и $P = \operatorname{Re} Q$ – искомый полином, что доказывает первое утверждение следствия 13.12. Второе его утверждение, с учётом теоремы 13.9, является прямым следствием известных утверждений о том, что произвольный гармонический полином равномерно на замыкании $\overline{U}$ (а значит, и в метрике пространства h^p_{max}, $p > 0$) приближается гармоническими многочленами с рациональными коэффициентами, множество которых счётно.

Замечание 13.13. Аналог теоремы 13.11 для пространств h^p, $p > 0$, не имеет места уже при $p = 1$, как показывает пример функции (13.1); при $p = 1$ не справедлив также аналог следствия 13.12. Однако положение восстанавливается при $p > 1$, в силу отмеченной выше эквивалентности характеристик $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|^*_p$.

13.4. Критерии компактности в пространствах h^p_{max}, $p > 0$

Определяемая формулой (13.3) характеристика $\|\cdot\|^*_p$ является абсолютно однородной, так что понятие ограниченности подмножества пространства h^p_{max}, $p > 0$, в линейно-топологическом смысле эквивалентно понятию ограниченности в метрике ρ^*_p. Свойство же полной ограниченности множества в h^p_{max}, $p > 0$, описывается следующей теоремой.

Теорема 13.14. *Для того чтобы множество* $L \subseteq h^p_{max}$, $p > 0$, *было вполне ограниченным относительно метрики* ρ^*_p, *необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:*

(1) L *ограничено в метрике* ρ^*_p*;*
(2) функции u_r, $0 \le r < 1$, *определённые в теореме 13.11, сходятся к функции* u *при* $r \to 1-$ *относительно метрики* ρ^*_p *равномерно по* $u \in L$.

Доказательство. Необходимость. Ограниченность вполне ограниченного множества есть общий факт теории метрических пространств, так что условие (1) необходимо.

Чтобы установить необходимость условия (2), выберем любое $\varepsilon > 0$ и найдём, согласно условию полной ограниченности множества L, конечную $\varepsilon/3$-сеть для L, то есть такое конечное множество $K = \{u_1, \dots, u_N\} \subseteq \subseteq L$, что для любой функции $u \in L$ найдётся такая $u_k \in K$, $1 \le k \le N$, что $\rho^*_p(u_k, u) \le \varepsilon/3$. По теореме 13.11, для этого $\varepsilon > 0$ найдётся также число $r_0 \in [0, 1)$ такое, что неравенство $\rho^*_p((u_k)_r, u_k) \le \varepsilon/3$ выполнено при $r \in [r_0, 1)$ для всех k, $1 \le k \le N$, где функции $(u_k)_r$, $0 \le r < 1$, определяются формулой $(u_k)_r(z) = u_k(rz)$, $z \in U$. С другой стороны, в силу оценок $\|u_r\|^*_p \le \|u\|^*_p$, $u \in h^p_{max}$, $p > 0$, $0 \le r < 1$, и неравенства треугольника для метрики ρ^*_p, имеем

$$\rho^*_p(u_r, u) \le \rho^*_p(u_r, (u_k)_r) + \rho^*_p((u_k)_r, u_k) + \rho^*_p(u_k, u) \le 2\rho^*_p(u_k, u) + \rho^*_p((u_k)_r, u_k)$$

для любой $u \in L$ и любого $1 \le k \le N$. Если номер k подобран так, что $\rho^*_p(u_k, u) \le \varepsilon/3$, и если $r \in [r_0, 1)$, то, по доказанному выше, получаем оценку $\rho^*_p(u_r, u) \le 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ для всех $u \in L$ и любого $r \in [r_0, 1)$, то есть $u_r \to u$ в метрике ρ^*_p при $r \to 1-$ равномерно по $u \in L$.

Достаточность. Предположим, что для множества $L \subseteq h^p_{max}$, $p > 0$, выполнены условия (1) и (2) теоремы. Тогда, согласно теореме 13.3, ограниченным в H^p будет множество функций $\widetilde{L} = \{f \in H^p;\ \operatorname{Re} f \in L$ и $\operatorname{Im} f(0) = 0\}$ и, в силу неравенства (13.10), семейство $\widetilde{L}$ равномерно ограничено на компактах круга U. В силу критерия Монтеля, множество $\widetilde{L}$ относительно компактно, а значит, и вполне ограничено в метрике равномерной сходимости на компактах из U. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, найдём, согласно условию (2), такое $r_0 \in [0, 1)$, что для всех $u \in L$ выполнено $\rho^*_p(u_{r_0}, u) \le \varepsilon/2$ (где $u_{r_0}(z) = u(r_0 z)$, $z \in U$). Так как семейство $\widetilde{L}$ вполне ограничено в метрике равномерной сходимости на компактах в U, то для него существует конечная $(\varepsilon/2)^{1/\alpha_p}$-сеть ($\alpha_p = \min(1, p)$) в норме $\|f\|_{\infty, r_0} = \max\limits_{|z| \le r_0} |f(z)|$, то есть существует такой набор функций $\{f_1, \dots, f_N\} \subseteq \widetilde{L}$, что для любой функции $f \in \widetilde{L}$ найдётся номер k, $1 \le k \le N$, при котором $\|f - f_k\|_{\infty, r_0} \le (\varepsilon/2)^{1/\alpha_p}$.

Итак, пусть $u \in L$. Найдём для неё такую функцию $f \in \widetilde{L}$, что $\operatorname{Re} f = u$, и выберем номер k, $1 \le k \le N$, так, чтобы было выполнено $\|f - f_k\|_{\infty, r_0} \le (\varepsilon/2)^{1/\alpha_p}$. Тогда

$$\rho^*_p(u, (\operatorname{Re} f_k)_{r_0}) \le \rho^*_p(u, u_{r_0}) + \rho^*_p(u_{r_0}, (\operatorname{Re} f_k)_{r_0}) \le$$
$$\le \rho^*_p(u, u_{r_0}) + \|f_k - f\|^{\alpha_p}_{\infty, r_0} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

то есть показано, что функции $u_k = (\operatorname{Re} f_k)_{r_0}$, $1 \le k \le N$, образуют ε-сеть множества L в метрике ρ^*_p. Поскольку конечная ε-сеть построена для любого $\varepsilon > 0$, то множество L вполне ограничено.

Следствие 13.15. *Утверждение теоремы 13.11 имеет место равномерно на любом компактном множестве функций из h^p_{max}, $p > 0$.*

Критерий компактности в пространствах h^p_{max}, $p > 0$, можно сформулировать и в другой форме. Напомним, что условие полной ограниченности множества в полном метрическом пространстве равносильно его относительной компактности (то есть компактности его замыкания).

Теорема 13.16. *Множество L вполне ограничено в пространстве h^p_{max}, $p > 0$, тогда и только тогда, когда*

(1) L ограничено в метрике ρ^*_p;

(2) интегралы семейства функций $\{(Mu)^p(e^{i\theta}),\ \theta \in [-\pi, \pi]\}_{u \in L}$ равностепенно абсолютно непрерывны на $[-\pi, \pi]$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int\limits_e (Mu)^p(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} < \varepsilon, \quad u \in L,$$

для любого множества e на $[-\pi, \pi]$ лебеговой меры меньше δ; и

(3) для любой последовательности $(u_n) \subseteq L$ существует подпоследовательность $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$, для которой $M(u_{n_k} - u_{n_m}) \to 0$ при $k, m \to \infty$ по мере.

Доказательство. Необходимость условия (1) проверяется так же, как в теореме 13.14.

Чтобы показать необходимость условия (2), предположим, напротив, что интегралы семейства функций $\{(Mu)^p(e^{i\theta}),\ -\pi \le \theta \le \pi\}_{u \in L}$ не являются равностепенно абсолютно непрерывными на $[-\pi, \pi]$. Тогда найдётся некоторая последовательность функций $(Mu_n)^p$, $(u_n) \subseteq L$, этого семейства — такая, что она сама и любая её подпоследовательность не имеют равностепенно абсолютно непрерывных интегралов. Согласно условию полной ограниченности множества L, существует подпоследовательность (u_{n_k}) последовательности (u_n), сходящаяся к некоторой функции $u \in h^p_{max}$ в метрике ρ^*_p. Отсюда, в силу неравенства Чебышёва,

$$meas\{M(u_{n_k} - u) \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [M(u_{n_k} - u)]^p(e^{i\theta})\,d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{\varepsilon^p}\left(\|u_{n_k} - u\|_p^*\right)^{p/\alpha_p} \to 0 \text{ при } k \to \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

так что последовательность $(Mu_{n_k})(e^{i\theta})$ сходится к $Mu(e^{i\theta})$ при $k \to \infty$ по мере на отрезке $[-\pi, \pi]$. Выбирая, если это необходимо, подпоследовательность, можем считать, что $\lim\limits_{k\to\infty} Mu_{n_k}(e^{i\theta}) = Mu(e^{i\theta})$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$. С другой стороны, из сходимости (u_{n_k}) к u при $k \to \infty$ в метрике ρ_p^* и свойства непрерывности характеристики $\|\cdot\|_p^*$ относительно метрики ρ_p^*, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_p^* = \|u\|_p^*$, то есть

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (Mu_{n_k})^p(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (Mu)^p(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{13.12}$$

В соответствии с общей предельной теоремой (теоремой Витали; см., например, [41, введение]), утверждение (13.12) имеет место тогда и только тогда, когда последовательность $(Mu_{n_k})^p$ обладает равностепенно абсолютно непрерывными интегралами, что противоречит выбору последовательности (u_n).

Наконец, условие (3) следует из рассуждений, подобных использованным в процессе доказательства необходимости условия (2) (см. выше неравенство Чебышёва).

Достаточность. Чтобы проверить полную ограниченность множества в метрическом пространстве, достаточно показать, что из любой последовательности его элементов можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Итак, пусть (u_n) — некоторая последовательность функций множества L. Используя свойство (3), выделим из неё такую подпоследовательность (u_{n_k}), чтобы $M(u_{n_k} - u_{n_m}) \to 0$ при $k, m \to \infty$ по мере на множестве T. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можем считать, что $M(u_{n_k} - u_{n_m}) \to 0$ при $k, m \to \infty$ почти всюду на множестве T. В силу элементарного неравенства $(a+b)^p \le 2^p(a^p + b^p)$, $a, b, p \ge 0$, имеем оценку $\left[M(u_{n_k} - u_{n_m})\right]^p \le 2^p\left[(Mu_{n_k})^p + (Mu_{n_m})^p\right]$, из которой, согласно условию (2), заключаем, что двойная последовательность $\left(M(u_{n_k} - u_{n_m})^p\right)$ функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ обладает равностепенно абсолютно непрерывными интегралами. В силу предельной теоремы [41, введение], имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[M(u_{n_k} - u_{n_m})\right]^p(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} \to 0 \text{ при } k, m \to \infty$$

или $\|u_{n_k} - u_{n_m}\|_p^* \to 0$ при $k, m \to \infty$, что и означает фундаментальность последовательности (u_{n_k}) в метрике ρ_p^*.

Замечание 13.17. В приведённом доказательстве достаточности не использовано условие (1), но оно вытекает из условия (2).

Замечание 13.18. При $p>1$, в силу теоремы М. Рисса и максимальной теоремы Харди–Литтлвуда, нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_p^*$ эквивалентны на $h^p = h^p_{max}$. Поэтому понятия полной ограниченности в порождённых ими топологиях равносильны. Кроме того, пространства h^p при $p>1$ изометрически изоморфны пространствам L^p на отрезке $[-\pi,\pi]$ с нормированной мерой Лебега. Принимая во внимание критерий полной ограниченности в классах L^p (см. [66, гл. III, §3, теорема 6]), получим, что множество L вполне ограничено в h^p_{max}, $p>1$, если и только если оно ограничено, интегралы семейства функций $\{|u^*(e^{i\theta})|^p,\ \theta\in[-\pi,\pi]\}_{u\in L}$, где u^* — радиальные пределы функций $u\in L$, равностепенно абсолютно непрерывны на $[-\pi,\pi]$, а семейство функций $\{u^*(e^{i\theta}),\ \theta\in[-\pi,\pi]\}_{u\in L}$ — относительно компактно в топологии сходимости по мере на отрезке $[-\pi,\pi]$. Отметим, что в этом критерии, по сравнению с теоремой 13.16, ослаблены условия (2) и (3). Это означает, что из условия равностепенной абсолютной непрерывности интегралов p-ых степеней радиальных пределов функций некоторого множества функций класса h^p, $p>1$, и относительной компактности этих радиальных пределов по мере следуют более сильные свойства равностепенной абсолютной непрерывности интегралов p-ых степеней радиальных (и даже угловых, если теорему 13.16 формулировать в терминах угловых максимальных функций) максимальных функций этого множества и относительной компактности по мере функций этого множества, равномерной на радиусах!

С другой стороны, этот «ослабленный» критерий компактности не может быть распространён на случай $0<p\le 1$, как показывает пример последовательности $u_n(z)=p(z^n)$, $z\in U$, где $p(z)$ — функция класса h^1, заданная формулой (13.1).

С последним замечанием созвучно наблюдение, что известная теорема Хинчина–Островского (см. теорему 6.1) не может быть прямо перенесена со случая аналитических функций класса Островского–Неванлинны N^1 на гармонические функции класса h^1 (в чём убеждает простой пример последовательности $u_n(z)=(-1)^n p(z)$, $z\in U$, где функция $p(z)$ определена формулой (13.1)). Теорема 13.16, однако, позволяет получить некий аналог этой теоремы.

Теорема 13.19. *Пусть (u_n) — последовательность гармонических в круге U функций класса h^1, ограниченная в нуле и удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_n^+(re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\le C,\quad 0\le r<1, \tag{13.13}$$

для некоторой конечной постоянной $C\ge 0$ и сходящаяся при $n\to\infty$ равномерно почти на каждом радиусе круга U (u_n^+ здесь означает положительную часть функции u_n). Тогда при $n\to\infty$ функции u_n сходятся равномерно на компактах в U к некоторой гармонической функции

u, также принадлежащей классу h^1, причём сходимость имеет место также и в метрике любого пространства h^p_{max}, $0 < p < 1$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что первое условие теоремы эквивалентно условию $\sup\limits_n \|u_n\|_1 < +\infty$.

Действительно, интегралы

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_n(re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} = u_n(0), \quad 0 \le r < 1,$$

по свойству среднего значения гармонических функций и условию теоремы, ограничены по n и $0 \le r < 1$, следовательно, ограничены и интегралы

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u_n(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_n^+(re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi} u_n(re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0 \le r < 1.$$

Переходя к точной верхней грани по r, получаем искомую ограниченность характеристик $\|u_n\|_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Для любого $0 < p < 1$, согласно теореме 13.8, ограничены и характеристики $\|u_n\|_p^*$, $n \in \mathbb{N}$, то есть выполнено условие (1) теоремы 13.16. С помощью неравенства Гёльдера нетрудно показывается, что из ограниченности интегралов некоторого семейства функций в большей степени следует равностепенная абсолютная непрерывность интегралов этого семейства в меньшей степени, так что для последовательности (u_n) выполнено и условие (2) теоремы 13.16. Наконец, условие (3) теоремы 13.16 доставляется вторым условием доказываемой теоремы. По теореме 13.16, последовательность (u_n) относительно компактна в пространстве h^p_{max}, $0 < p < 1$. Выделим из неё подпоследовательность (u_{n_k}), сходящуюся в метрике ρ_p^* к некоторой функции $u \in h^p_{max}$. Согласно теореме 13.9, эта сходимость равномерна на любом компакте из U. Полагая в (13.13) $n = n_k$ и устремляя $k \to \infty$, при фиксированном $0 \le r < 1$, имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} \le C, \quad 0 \le r < 1,$$

и $u(0) = \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}(0)$ — конечная величина. Как и в начале доказательства, отсюда следует, что функция u принадлежит пространству h^1.

Осталось показать, что вся последовательность (u_n) сходится к этой функции u.

Действительно, предположим, что некоторая подпоследовательность $(u_{n'_m})$ последовательности (u_n) обладает свойством $\rho_p^*(u_{n'_m}, u) \ge \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Выделим, в силу доказанного свойства относительной компактности (u_n), подпоследовательность $(u_{n''_l}) \subseteq (u_{n'_m})$, сходящуюся к некоторой функции v пространства h^p_{max} в метрике ρ_p^*. Поскольку, согласно условию теоремы, $M(u_{n_k} - u_{n_l''}) \to 0$ при $k, l \to \infty$ почти всюду на T, то, ограничиваясь в определении радиальной максимальной функции M точной верхней гранью до некоторого предела и пользуясь равномерной сходимостью u_{n_k} и $u_{n_l''}$ к u и v соответственно на любом компакте из U, имеем $\sup\limits_{0 \le r \le r_0} |u(re^{i\theta}) - v(re^{i\theta})| = 0$ для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$, $0 \le r_0 < 1$, то есть $u = v$ на почти всех радиусах круга $|z| \le r_0$. Так как функции u и v на круге $|z| \le r_0$ непрерывны, то заключаем, что $u \equiv v$ на любом круге $|z| \le r_0$, $0 \le r_0 < 1$. В силу произвольности $0 \le r_0 < 1$, $u \equiv v$ всюду в круге U, что противоречит предположению $\rho_p^*(u_{n_m'}, u) \ge \varepsilon$ и тому, что $\rho_p^*(u_{n_l''}, v) \to 0$ при $l \to \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему 13.19.

Замечание 13.20. Утверждение о сходимости в метриках пространств h^p_{max}, $0 < p < 1$, не может быть усилено до утверждения о сходимости в норме пространства h^1, как показывает пример последовательности функций $u_n(z) = p(ze^{i\alpha_n})$, $z \in U$, где (α_n) — произвольная бесконечно малая последовательность действительных не равных нулю чисел и функция $p(z)$ определена при помощи (13.1).

Замечание 13.21. Аналог теоремы 13.19 справедлив для функций классов h^p_{max}, $0 < p < 1$, если условие (13.13) заменить на условие ограниченности (u_n) в пространствах h^p_{max} и утверждение о сходимости в метриках пространств h^p_{max} для $0 < p < 1$ — на утверждение о сходимости в метриках пространств $h^{p'}_{max}$ для любого p', $0 < p' < p$.

Замечание 13.22. В силу отмеченной в начале раздела 13.3 эквивалентности метрик ρ_p^* и $\rho_{p,\alpha}$, утверждения теорем 13.9–13.19 остаются справедливыми, если в них метрики ρ_p^* заменить на метрики $\rho_{p,\alpha}$ при всех $\alpha > 1$.

Замечание 13.23. Результаты этой главы опубликованы в [11], [12] и [15].

14

Некоторые гипотезы

Дальнейшее изучение максимальных пространств M^q $(0 < q < 1)$ в многомерном и одномерном случаях представляется нам перспективным и плодотворным по следующим причинам. Во-первых, как мы установили ранее, в обоих случаях неизучавшиеся объекты (более широкие, чем пространство N Островского–Неванлинны) обладают хорошими функциональными свойствами; в частности, они образуют F-алгебры в отличие от пространства N. Во-вторых, функции пространств M^q $(q > 0)$ имеют почти всюду на границе конечные допустимые граничные значения и граничные функции принадлежат $\ln_+^q L$-пространствам. Наконец, как будет отмечено ниже, пространства M^q $(0 < q < 1)$ связаны с другими известными метрическими пространствами, обобщающими пространство N, что позволяет сделать некоторые заключения о структуре нулевых множеств функций из M^q $(0 < q < 1)$ и о факторизационных представлениях функций этих классов.

14.1. Связь пространств M^q $(0 < q < 1)$ с пространствами Неванлинны – М. М. Джрбашяна $\mathscr{N}_\alpha$, $\alpha > -1$

Используя терминологию статьи [55], рассмотрим

Определение 14.1. *Классом Неванлинны–Джрбашяна $\mathscr{N}_\alpha$, $\alpha > -1$ – фиксировано, в области G назовают множество всех голоморфных в G функций $f(z)$, для которых*

$$\frac{1}{c_{\alpha,G}} \int\limits_G \ln_+ |f(z)|(1 - |z|)^\alpha \, \omega(dz) < +\infty,$$

где

$$c_{\alpha,G} = \int\limits_G (1-|z|)^\alpha\,\omega(dz),$$

ω — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$ и $1-|z|$ в случае поликруга означает $(1-|z_1|)\dots(1-|z_n|)$.

Известно (см. [55]), что при $\alpha\to-1+$ определение 14.1 переходит в определение 1.8 класса Островского–Неванлинны N и что классы $\mathscr{N}_\alpha$ не убывают по α. Таким образом, классы $\mathscr{N}_\alpha$ можно считать телесными аналогами и одновременно обобщениями класса Островского–Неванлинны.

Поскольку интегрирование по мере $\omega(dz)$ разбивается на интегрирование по радиальным направлениям r (с некоторым весом) и по граничной мере $\sigma(d\gamma)$ в представлении $z=r\gamma$, $\gamma\in\Gamma$, $r=|z|$ (в случае поликруга такое представление понимается покоординатно), то определение максимальных классов M^q оказывается связанным не только с определением 1.8 класса N, но и с определением 14.1. Так, в определении 1.8 после интегрирования по $\sigma(d\gamma)$ (то есть взятия L^1-нормы) берется L^p-норма по r при $p=+\infty$, а в определении 1.10 классов M^q сначала берется L^∞-норма по r, а потом L^1-норма по $\sigma(d\gamma)$, и аналогично в определении 14.1 по радиусу берется та же L^1-норма, но с весом $(1-r)^\alpha$, зависящим от параметра α. Поэтому можно ожидать, что классы M^q должны быть как-то связаны с классами $\mathscr{N}_\alpha$ при некотором α. Это ожидание подтверждается следующей теоремой.

Теорема 14.2. *В случае $G=B_n$ вложение*

$$M^q(B_n)\subseteq\mathscr{N}_{n(1/q-1)-1}(B_n)$$

справедливо для любого q, $0<q<1$.

Доказательство. В статье [86] для произвольной измеримой в B_n функции F и любых $0<q<p<+\infty$ доказана оценка

$$\left(\int\limits_{S_n}\int\limits_0^1 |F(r\gamma)|^p(1-r^2)^{n(p/q-1)-1}r\,dr\sigma(d\gamma)\right)^{1/p}\le c_\beta\left(\int\limits_{S_n}\bigl(M_\beta F(\gamma)\bigr)^q\,\sigma(d\gamma)\right)^{1/q}, \tag{14.1}$$

свидетельствующая, что оценки интегралов по области с весами посредством граничного интеграла от допустимой максимальной функции не зависят от аналитической природы оцениваемых функций, а зависят только от геометрии допустимых областей. Здесь, как обычно, M_β обозначает допустимую максимальную функцию с $\beta>1$, а c_β — конечная постоянная, зависящая лишь от β, n, p, q.

Так как $\omega(dz)=2n\omega(B_n)r^{2n-1}\,dr\,\sigma(d\gamma)$, $z=r\gamma$, $r=|z|$, и $r^{2n-1}\le r$, $1-r\le 1-r^2$, то, положив в (14.1) $p=1$ и $F(z)=\ln_+|f(z)|$, получим для любого $0<q<1$ и произвольной голоморфной в B_n функции $f(z)$ неравенство

$$\int\limits_{B_n} \ln_+|f(z)|(1-|z|)^{n(1/q-1)-1}\,\omega(dz) \le c_\beta\Biggl(\int\limits_{S_n} \ln_+^q M_\beta f(\gamma)\,\sigma(d\gamma)\Biggr)^{1/q}, \quad (14.2)$$

в котором $\beta>1$ и c_β — некоторая конечная постоянная, зависящая только от β, n и q.

Так как, согласно основной теореме статьи [91], допустимая максимальная функция в среднем q-ого порядка оценивается через радиальную максимальную функцию, то на основании (14.2) заключаем, что если f принадлежит классу M^q, $0<q<1$, в шаре (то есть конечна правая часть в (14.2)), то она принадлежит классу Неванлинны–Джрбашяна $\mathscr{N}_\alpha$ с $\alpha=n(1/q-1)-1$ в шаре (поскольку конечна левая часть в (14.2)), и искомое включение доказано.

14.2. Пространства M^q $(0<q<1)$ в круге

Установленная в параграфе 14.1 связь классов M^q, $0<q<1$, с классами Неванлинны–Джрбашяна позволяет получить неполные характеристики нулей функций классов M^q, $0<q<1$, в круге и факторизацию функций этих классов, аналогичную канонической факторизации (теорема 1.3).

14.2.1. Свойство нулей функций классов M^q, $0<q<1$, в круге

Напомним некоторые известные результаты, касающиеся структуры нулевых множеств классов Неванлинны–Джрбашяна в круге U (ср. [54], [55]).

Известно, что последовательность (z_k) точек круга U есть последовательность нулей некоторой функции класса $\mathscr{N}_\alpha$, $\alpha>-1$, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{2+\alpha}<+\infty. \quad (14.3)$$

При $\alpha=-1$ условие (14.3) совпадает с классическим критерием Бляшке $\sum(1-|z_k|)<+\infty$ сходимости произведения $\prod|z_k|$ из теоремы 1.3. Необходимость условия (14.3) установлена Р. Неванлинной в [37]. Как следствие этого результата и теоремы 14.2 получаем следующее утверждение.

Теорема 14.3. *Необходимым условием, чтобы последовательность (z_k) была множеством нулей некоторой функции из M^q, $0<q<1$, является условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1/q}<+\infty. \quad (14.4)$$

Замечание 14.4. Неизвестно, будет ли условие (14.4) достаточным для того, чтобы последовательность (z_k) была последовательностью нулей некоторой функции класса M^q, $0 < q < 1$. Для классов $\mathcal{N}_\alpha$, $\alpha > -1$, достаточность условия (14.3) показывается с помощью известных произведений М. М. Джрбашяна

$$\pi_m(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \bar{z}_k \exp \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j+1} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{j+1} \tag{14.5}$$

(при $z_k = 0$ заменяем сомножитель произведения на z), которые при $m > \alpha$ принадлежат классу $\mathcal{N}_\alpha$ (см. [54]). Неизвестно, принадлежат ли эти произведения классу M^q, $0 < q < 1$, когда $\alpha = 1/q - 2$.

Замечание 14.5. В статье [20] для многомерных классов $\mathcal{N}_\alpha(B_n)$, $\alpha > -1$, доказано, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы $(n-1)$-мерное аналитическое подмногообразие $Z \subset B_n$ было нулевым множеством класса $\mathcal{N}_\alpha(B_n)$, $\alpha > -1$, является сходимость

$$\int\limits_Z (dist(z, S_n))^{2+\alpha}\, H_{2n-2}(dz) < +\infty,$$

где H_{2n-2} — $(2n-2)$-мерная мера Хаусдорфа. Соответственно, получаем многомерное обобщение теоремы 14.3: *необходимым условием для того, чтобы $(n-1)$-мерное аналитическое подмногообразие $Z \subset B_n$ было нулевым множеством некоторой функции класса $M^q(B_n)$, $0 < q < 1$, является сходимость*

$$\int\limits_Z (dist(z, S_n))^{1/q}\, H_{2n-2}(dz) < +\infty.$$

14.2.2. Факторизация функций пространств M^q, $0 < q < 1$, в круге

Как было указано в пункте 14.2.1, бесконечное произведение (14.5), построенное по нулям функции $f(z)$ класса $\mathcal{N}_\alpha$, $\alpha > -1$, в круге U при $m > \alpha$ является функцией класса $\mathcal{N}_\alpha$, имеющей в точности такие же нули, как исходная функция $f(z)$. Более того, если

$$f(z) = \pi_m(z, z_k) g(z), \tag{14.6}$$

где $g(z)$ — голоморфная функция, не обращающаяся в нуль в круге U, то $g \in \mathcal{N}_\alpha$ (см. [54]). Таким образом, представление (14.6) полностью решает проблему факторизации функций класса $\mathcal{N}_\alpha$, $\alpha > -1$.

Как следствие этой факторизационной теоремы получаем такой вариант факторизации для классов M^q, $0 < q < 1$.

Теорема 14.6. *Пусть функция f принадлежит классу M^q, $0 < q < 1$, в круге U. Тогда*

$$f(z) = \pi_m(z, z_k)g(z), \tag{14.7}$$

где $m > 1/q - 2$, (z_k) — последовательность нулей функции f, записанных с учетом их кратности, и g — голоморфная функция в круге, не обращающаяся в нуль.

Замечание 14.7. Неизвестно, будет ли функция g из представления (14.7) принадлежать классу M^q, $0 < q < 1$.

Список литературы

1. *Александров А.Б.* Существование внутренних функций в шаре // Матем. сб. 1982. 118, 2. С. 147–163.
2. *Банах С.С.* Курс функціонального аналіза (Лінійні операції). Київ: Радянська школа, 1948.
3. *Банах С.С.* Теория линейных операций. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
4. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
5. *Гаврилов В.И., Захарян В.С.* Конформная инвариантность и характеристическое свойство граничных значений функций класса M // Докл. АН Арм. 1992. 93, 3. С. 105–109.
6. *Гаврилов В.И., Субботин А.В.* Линейные и метрические свойства пространства $N \log N$ голоморфных функций нескольких переменных // Матер. конф. «Вопросы функц. анал. и матем. физики». Баку: Чашыоглы, 1999. С. 240–251.
7. *Гаврилов В.И., Субботин А.В.* Линейные изометрии пространства $N \log N$ голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Матер. конф. «Вопросы функц. анал. и матем. физики». Баку: Чашыоглы, 1999. С. 237–240.
8. *Гаврилов В.И., Субботин А.В.* F-алгебры голоморфных функций в шаре, содержащие класс Неванлинны // Mathematica Montisnigri. 2000. XII. С. 17–31.
9. *Гаврилов В.И., Субботин А.В.* Линейные и метрические свойства F-алгебры $N \log N$ голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Mathematica Montisnigri. 2002. XV. С. 13–32.
10. *Гаврилов В.И., Субботин А.В.* Мультипликаторы и функционалы одномерной F-алгебры $N \log N$ // Труды Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казанское мат. общество «Геом. теория функций, краевые задачи и их прилож.». Матер. междунар. науч. конф. Казань: Изд-во Каз. мат. общества, 2002. С. 97–113.
11. *Гаврилов В.И., Захарян В.С., Субботин А.В.* Линейно-топологические свойства максимальных пространств Харди гармонических функций в круге // Докл. Нац. Акад. Наук Арм. 2002. 102, 3. С. 203–210.

12. *Гаврилов В.И., Захарян В.С., Субботин А.В.* Критерии компактности в пространствах h^p_{max}, $p > 0$ // Докл. Нац. Акад. Наук Арм. 2002. 102, 4. С. 293–300.
13. *Гаврилов В.И., Павичевич Ж., Субботин А.В.* Многомерная теорема Хинчина–Островского // Mathematica Montisnigri. 2003. XVI. С. 3–11.
14. *Гаврилов В.И., Субботин А.В.* Максимальная версия теоремы Хинчина–Островского и приложения // Докл. АН. 2005. 405, 2. С. 158–160.
15. *Гаврилов В.И., Субботин А.В.* Сходимость последовательностей гармонических функций в пространствах h^p_{max} // Вестник МУ. 2005. Сер. 1: Мат. Мех., 3. С. 44–47.
16. *Гаврилов В.И., Субботин А.В.* Характеристика граничных значений функций класса Неванлинны и его подклассов в шаре и поликруге // Вестник МУ. 2006. Сер. 1: Мат. Мех., 5. С. 16–20.
17. *Ганжула Л.М.* Об одной F-алгебре голоморфных функций в верхней полуплоскости // Зим. мат. шк. «Соврем. методы теории функций и смеж. пробл. прикл. мат. и мех.» (Тез. докл.). Воронеж, 1995.
18. *Ганжула Л.М.* Об одной F-алгебре голоморфных функций в верхней полуплоскости // Mathematica Montisnigri. 2000. XII. С. 33–45.
19. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
20. *Даутов Ш.А., Хенкин Г.М.* Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений $\bar{\partial}$-уравнения // Матем. сб. 1978. 107, 2. С. 163–174.
21. *Евграфов М.А.* Поведение степенного ряда для функций класса H_δ на границе круга сходимости // Изв. Акад. Наук СССР. 1952. Сер. Мат., 16. С. 481–492.
22. *Ефимов Д.А., Субботин А.В.* Некоторые F-пространства голоморфных функций в полуплоскости // Труды 24 конф. мол. ученых мех.-мат. ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2002. С. 71–73.
23. *Ефимов Д.А., Субботин А.В.* Некоторые F-алгебры голоморфных функций в полуплоскости // Mathematica Montisnigri. 2003. XVI. С. 69–81.
24. *Ефимов Д.А.* Об F-алгебрах голоморфных функций в полуплоскости, определяемых посредством максимальной функции // Докл. РАН. 2007. 416, 6. С. 732–734.
25. *Ефимов Д.А.* Структурные и линейно-метрические свойства максимальных F-алгебр голоморфных функций в полуплоскости. Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007.
26. *Ефимов Д.А.* Структурные свойства в классах голоморфных функций в полуплоскости // Мат. заметки. 2008. 83, 5. С. 661–666.
27. *Ефимов Д.А.* Критерии ограниченных и вполне ограниченных множеств в F-алгебрах голоморфных функций, характеризуемых посредством максимальных функций, в полуплоскости // Вестник МУ. 2008. 2. С. 23–27.
28. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
29. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука: Главная ред. физ.-мат. литературы, 1981.
30. *Крылов В.И.* О функциях, регулярных в полуплоскости // Матем. сб. 1939. 6 (48), 1. С. 95–137.
31. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984.
32. *Левшина Г.Д.* О коэффициентных мультипликаторах липшицевых функций // Мат. заметки. 1992. 52, 5. С. 68–77.

33. *Мештрович Р., Субботин А.В.* Мультипликаторы и линейные функционалы пространств И. И. Привалова голоморфных функций в круге // Докл. АН. 1999. 365, 4. С. 452–454.
34. *Майер Ж.* Группы изометрий в банаховых пространствах аналитических функций. Дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1979.
35. *Майер Ж.* Изометрии в пространствах аналитических функций с ограниченной производной // Докл. АН СССР. 1980. 250, 3. С. 551–553.
36. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
37. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.; Ленинград: Гостехиздат, 1941.
38. *Привалов И.И.* Обобщение теоремы Fatou // Матем. сб. 1924. 31. С. 232–235.
39. *Привалов И.И.* Субгармонические функции. М.: Г.Т.-Т.И., 1937.
40. *Привалов И.И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. М.: Изд-во МУ, 1941.
41. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. Второе издание [40]. М.: ГИТТЛ, 1950.
German translated: *Priwalow I.I.* Randeigenschaften analytischer Funktionen. Berlin: VEB Deutscher Verlag Der Wissenschaften, 1956.
42. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 5. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1969.
43. *Станев М.А.* Сюръективные изометрии банаховых пространств медленно растущих голоморфных функций в шаре // Докл. АН. 1994. 334, 6. С. 702–704.
44. *Субботин А.В.* Функциональные свойства пространств Привалова голоморфных функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1999. 65, 2. С. 280–288.
45. *Субботин А.В.* Группы линейных изометрий пространств И.И.Привалова голоморфных функций нескольких переменных // Докл. АН. 1999. 367, 4. С. 451–453.
46. *Субботин А.В.* Линейно-метрические свойства пространств И. И. Привалова голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1999.
47. *Субботин А.В.* Коэффициентные мультипликаторы и линейные функционалы пространств И. И. Привалова в круге. МГУ им. М. В. Ломоносова. М., 1999. Рукопись деп. в ВИНИТИ РАН, №2340–В99.
48. *Субботин А.В.* Изометрии пространств Привалова голоморфных функций нескольких переменных // Труды сем. им. И. Г. Петровского. 2006. 25. С. 299–313.
49. *Субботин А.В.* Группы линейных изометрий пространств M^q голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Мат. заметки. 2008. 83, 3. С. 477–479.
50. *Тумаркин Г.Ц.* О равномерной сходимости некоторых последовательностей функций // Докл. АН СССР. 1955. 105, 6. С. 1151–1154.
51. *Фридман Г.А.* К проблеме коэффициентов функций классов H_δ // Докл. АН СССР. 1949. 65, 6. 805–808.
52. *Фукс Б.А.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1963.

53. *Хинчин А.Я.* О последовательностях аналитических функций // Матем. сб. 1924. 31, 1. С. 147–151.
54. *Шамоян Ф.А.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН АрмССР. Мат. 1978. 13, 5–6. С. 405–422.
55. *Шведенко С.В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Мат. анализ (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). 1985. Т. 23. С. 3–124.
56. *Ahern P.R., Shneider R.* Isometries of H^∞ // Duke Math. J. 1975. 42, 2. P. 321–326.
57. *Berg C.* Integral representation of some functions related to the Gamma function // Mediterranian J. Math. 2004. 1. P. 433–439.
58. *Bourbaki N.* Éléments de mathématique. Livre V. Espaces Vectoriels Topologiques. Paris: Hermann&C^o, 1956.
Рус. пер.: *Бурбаки Н.* Элементы математики. Топологические векторные пространства. М.: Иностранная литература, 1959.
59. *Burkholder D.L., Gundy R.F., Silverstein M.L.* A maximal function characterization of the class H^p // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. 157, 1. P. 137–153.
60. *Calderon A.P., Zygmund A.* Note on the Boundary Values of Functions of Several Complex Variables // Ann. Math. Studies. 1950. 25. P. 45–65.
61. *Choe B.R., Kim H.O.* On the boundary behavior of functions holomorphic on the ball // Complex variables Theory Appl. 1992. 20, 1–4. P. 53–61.
62. *Choa J.S., Kim H.O.* Composition operators between Nevanlinna-type spaces // J. Math. Anal. Appl. 2001. 257. P. 378–402.
63. *Davis C.S.* Ph.D. Thesis. University of Wisconsin, Madison, 1972.
64. *Davis C.S.* Iterated limits in $N^*(U^n)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. 178. P. 139–146.
65. *Day H.M.* The spaces L^p with $0 < p < 1$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1940. 46. P. 810–823.
66. *Dunford N., Schwartz J.T.* Linear Operators. Part I. General Theory. N.Y.; L.: Interscience Publishers, 1958.
Рус. пер.: *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Иностранная литература, 1962.
67. *Duren P.L.* Smoothness of functions generated by Riesz products // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. 16. P. 1263–1268.
68. *Duren P.L., Romberg B.W., Shields A.L.* Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$ // J. Reine Angew. Math. 1969. 238. P. 32–60.
69. *Duren P.L., Shields A.* Coefficient multipliers of H^p and B^p spaces // Pac. J. Math. 1970. 32, 1. P. 69–78.
70. *Duren P.L.* Theory of H^p spaces. N.Y.; L.: Academic Press, 1970.
71. *El-Gebeily M., Wolfe J.* Isometries of disc algebra // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. 93, 4. P. 697–702.
72. *Eoff C.M.* Fréchet envelopes of certain algebras of analytic functions // Michigan Math. J. 1988. 35. P. 413–426.
73. *Fefferman C., Stein E.M.* H^p spaces of several variables // Acta Math. 1972. 129. P. 137–193.
74. *Forelli F.* The isometries of H^p // Canadian J. Math. 1964. 16, 4. P. 721–728.
75. *Forelli F.* A theorem on isometries and application of it to the isometries of $H^p(S)$ for $2 < p < +\infty$ // Canadian J. Math. 1973. 25, 2. P. 284–289.

76. *Gamelin T.W.* Uniform algebras. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1969.
Рус. пер.: *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
77. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* A maximal theorem with function-theoretic applications // Acta Math. 1930. 54, 1–2. P. 81–116.
78. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some properties of conjugate functions // J. Reine Angew. Math. 1932. 167. P. 405–423.
79. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some properties of fractional integrals // II. Math. Z. 1932. 34. P. 403–439.
80. *Hayman W.K., Kennedy P.B.* Subharmonic functions. Vol. I. L. M. S. Monographs. L.; N.Y.; San Francisco: Academic Press, 1976.
Рус. пер.: *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
81. *Hille E., Tamarkin J.D.* On a Teorema of Paley and Wiener // Annals of Mathematics. 1933. 34, 2. P. 606–614.
82. *Hille E., Tamarkin J.D.* On the absolute integrability of Fourier transforms // Fund. Math. 1934. 25. P. 329–352.
83. *Hoffman K.* Banach spaces of analytic functions. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1962.
Рус. пер.: *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
84. *Iida Y., Mochizuki N.* Isometries of some F-algebras of holomorpic functions // Arch. Math. 1998. 71. P. 297–300.
85. *Iida Y.* Nevanlinna-type spaces on the upper half plane // Nihonkai Math. J. 2001. 12, 2. P. 113–121.
86. *Jawerth B., Torchinsky A.* On a Hardy and Littlewood imbedding theorem // Michigan Math. J. 1984. 31. P. 131–137.
87. *Kawata T.* On analytic functions regular in the half-plane // Jap. J. Math. 1937. XIII, 3–4. P. 421–430.
88. *Kelley J.L., Namioka I. et al.* Linear Topological Spaces. Princeton, NJ; Toronto; N.Y.; L.: D. Van Nostrand Company Inc., 1963.
89. *Kim H.O.* On closed maximal ideals of M // Proc. Jap. Acad. 1986. 62, ser.A, 9. P. 343–346.
90. *Kim H.O.* On an F-algebra of holomorphic functions // Can. J. Math. 1988. 40, 3. P. 718–741.
91. *Kim H.O., Park Y.Y.* Maximal functions of plurisubharmonic functions // Tsukuba J. Math. 1992. 16, 1. P. 11–18.
92. *Koranyi A.* Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. 135. P. 507–516.
93. *Koranyi A.* A remark on boundary values of functions of several complex variables // Lecture Notes in Math. 1970. 155. P. 115–121.
94. *Koranyi A., Vagi S.* Isometries of H^p spaces of bounded symmetric domains // Canadian J. Math. 1976. 28, 2. P. 334–340.
95. *Landsberg M.* Lineare topologische Räume, die niecht lokalkonvex sind // Math. Z. 1956. 65. P. 104–112.
96. *Lamperti J.* On the isometries of certain function spaces // Pacific J. Math. 1958. 8, 3. P. 459–466.
97. *Leew K., Rudin W.* Extreme points and extremum problems in H^1 // Pacific J. Math. 1958. 8. P. 467–485.

98. *Leew K.* The isometries of H^1. Mimeographed Note. Stanford, 1960.
99. *Leew K., Rudin W., Wermer J.* The isometries of some functional spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. 11. P. 694–698.
100. *Léw E.* A construction of inner functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Invent. Math. 1982. 67, 2. P. 223–229.
101. *Livingstone A.E.* The space H^p, $0 < p < 1$, is not normable // Pacific J. Math. 1953. 3. P. 613–616.
102. *Meštrović R., Pavićević Ž.* Remarks on some classes of holomorphic functions // Mathematica Montisnigri. 1996. VII. P. 29–34.
103. *Meštrović R., Pavićević Ž.* Topologies on some subspaces of the Smirnov class // International Congress of Mathematicians. Berlin, 1998.
104. *Meštrović R.* Topološke i F-algebre holomorfnih funkcija. Doktorska disertacija (на серб. яз.). Podgorica: Univerzitet Crne Gore, 1999.
105. *Meštrović R., Pavićević Ž.* Privalov spaces on the unit disc: research monograph. Podgorica: University of Montenegro, 2009.
106. *Meyer P.A.* Probability and potentials. Whaltham, MA; Toronto; L.: Blaisdell publishing company, English translated, 1965.
Рус. пер.: *Мейер П.А.* Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
107. *Mochizuki N.* Algebras of holomorphic functions between H^p and N_* // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. 105, 4. P. 898–902.
108. *Mochizuki N.* Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane // Hokk. Math. J. 1991. 20. P. 609–620.
109. *Nagasawa M.* Isomorphism between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions // Kōdai Math. Sem. Reports. 1959. 11, 4. P. 182–188.
110. *Nevanlinna F., Nevanlinna R.* Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie // Acta Soc. Sc. Fennicae. 1922. 50, 5.
111. *Nevanlinna R.* Über eine Klasse meromorpher Funktionen // Math. Ann. 1924. 92. P. 145–154.
112. *Ostrowski A.* Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie // Acta litt. ac. scient. regiae univ. hung. Francisco-Josephinae. 1923. 1, f.2. P. 1–8.
113. *Riesz F.* Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Zeit. 1923. 18, 1/2 Heft. P. 87–95.
114. *Robertson A.P., Robertson W.J.* Topological Vector Spaces. Cambridge University Press, 1964.
Рус. пер.: *Робертсон А.П., Робертсон В.Дж.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
115. *Rosenblum M., Rovnyak J.* Topics in Hardy Classes and Univalent Functions. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verlag, 1994.
116. *Rudin W.* Function theory in polydiscs. Math. Lecture Note Series. N.Y.; Amsterdam: W.A. Benjamin Inc., 1969.
Рус. пер.: *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
117. *Rudin W.* L^p-isometries and equimeasurability // Indiana Univ. Math. J. 1976. 25, 3. P. 215–228.
118. *Rudin W.* Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1980.
Рус. пер.: *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.

119. *Schwartz L.* Analyse Mathématique. Paris: I. Hermann, 1967.
Рус. пер.: *Шварц Л.* Анализ. Т. I. М.: Мир, 1972.
120. *Shaeffer H. H.* Topological vector spaces. N.Y.; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1971.
121. *Shapiro H.S.* Weakly invertible elements in certain function spaces, and generators in l_1 // Michigan Math. J. 1964. 11. P. 161–165.
122. *Shapiro J.H.* Extension of linear functionals on F-spaces with bases // Duke Math. J. 1970. 37. P. 639–645.
123. *Shapiro J.H., Shields A.* Unusual topological properties of the Nevanlinna class // Amer. J. Math. 1975. 97. P. 915–936.
124. *Shapiro J.H.* Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on Hardy and Bergman spaces // Duke Math. J. 1976. 43. P. 187–202.
125. *Shneider R.B.* Isometries of $H^p(U^n)$ // Canadian J. Math. 1973. 25, 1. P. 92–95.
126. *Shoenberg I.J.* Metric spaces and completely monotonic functions // Ann. Math. 1938. 39, 4. P. 811–841.
127. *Smirnoff V.I.* Sur les valeurs limits des fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle // Journ. Soc. Phys.-Math. Leningr. 1930. II, fasc. 2.
128. *Smirnov V.I.* Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachment // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. физ.-мат. 1932. VII, 3. P. 337–372.
129. *Stoll M.* Properties of the space $\widetilde{h}^p$ $(0 < p \leq 1)$ of harmonic functions on the disc // Arch. Math. 1974. 25, 6. P. 613–618.
130. *Stoll M.* Harmonic majorants for plurisubharmonic functions on bounded symmetric domains with applications to the spaces H_Φ and N_* // J. Reine Angew. Math. 1976. 282. P. 80–87.
131. *Stoll M.* The space N_* of holomorphic functions on bounded symmetric domains // Ann. Polon. Math. 1976. 32, 1. P. 95–110.
132. *Stoll M.* Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions // Ann. Polon. Math. 1977. 35, 2. P. 139–158.
133. *Stephenson K.* Isometries of the Nevanlinna class // Indiana Univ. J. Math. 1977. 26, 2. P. 307–314.
134. *Taylor A.E.* Weak convergence in the spaces H^p // Duke Math. J. 1950. 17. P. 409–418.
135. *Taylor A.E.* Banach spaces of functions analytic in the unit circle // I. Studia Math. 1950. 11. P. 145–170.
136. *Taylor A.E.* Banach spaces of functions analytic in the unit circle // II. Studia Math. 1951. 12. P. 25–50.
137. *Taylor G.D.* A note on the growth of functions in H^p // Illinois J. Math. 1968. 12. P. 171–174.
138. *Tomaszewski B.* Interpolation and inner maps that preserve measure // J. Func. Anal. 1984. 55, 1. P. 63–67.
139. *Tung S.H.* Harnack's inequalities on the classical Cartan domains // Pacific J. Math. 1966. 16. P. 373–378.
140. *Yanagihara N.* Bounded subsets of some spaces of holomorphic functions // Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo. 1973. 23.
141. *Yanagihara N.* Multipliers and linear functionals for N^+ // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. 180. P. 449–461.
142. *Yanagihara N.* The containing Fréchet space for N^+ // Duke Math. J. 1973. 40, 1. P. 93–103.

143. *Yanagihara N.* Mean growth and Taylor coefficients of some classes of functions // Ann. Polon. Math. 1974. 30. P. 37–48.
144. *Yoshida K.* Functional Analysis. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1965.
Рус. пер.: *Йосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
145. *Zayed A.I.* Topological vector spaces of analytic functions // Complex Variables Theory and Appl. 1983. 2. P. 27–50.
146. *Zayed A.I.* Recoverability of some classes of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. 87. P. 493–498.
147. *Zygmund A.* On the Summability of Multiple Fourier Series // Amer. J. Math. 1947. 69, 4. P. 836–850.
148. *Zygmund A.* A Remark on Functions of Several Complex Variables // Acta Sci. Math. (Szeged). 1950. 12. P. 66–68.
149. *Zygmund A.* Trigonometric Series. Vol. I. Cambridge University Press, 1959.
Рус. пер.: *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965.

Научное издание

Гаврилов Валериан Иванович
Субботин Алексей Владимирович
Ефимов Дмитрий Александрович

Граничные свойства аналитических функций
(дальнейший вклад)

Редактор-корректор *Е.А. Босина*
Художник *Н.Н. Аникушин*
Художественный редактор *Г.Д. Колоскова*
Технический редактор *З.С. Кондрашова*
Компьютерная верстка *Д.А. Ефимов*

Подписано в печать 31.07.12. Формат $60 \times 90\,{}^1/_{16}$.
Бумага офс. № 1. Офсетная печать. Усл. печ. л. 16,5.
Уч.-изд. л. 12,14. Тираж 500 экз. Изд. № 9687. Заказ №.
Ордена “Знак Почета”
Издательство Московского университета.
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.
Тел.: 629-50-91. Факс: 697-66-71.
E-mail: secretary-msu-press@yandex.ru
Сайт Издательства МГУ: www.msu.ru/depts/MSUPubl2005
Интернет-магазин: www.msupublishing.ru
Адрес отдела реализации:
Москва, ул. Хохлова, 11 (Воробьевы горы, МГУ).
E-mail: izd-mgu@yandex.ru Тел.: (495) 939-34-93

Теория граничных свойств аналитических функций — область современной математики, где тесно переплетены методы комплексного и действительного анализа, функционального анализа, топологии и дифференциальной геометрии.

В книгу включены результаты, установленные авторами, а также коллегами, по двум направлениям теории: 1) по распространению на многомерный случай достижений одномерной теории, не получивших еще такого обобщения, и 2) в рассмотрении новых для обоих случаев объектов теории.

Из результатов первой группы отметим распространение на голоморфные функции нескольких комплексных переменных одномерных классов аналитических функций, рассмотренных И. И. Приваловым в 1941 году, за которыми — по инициативе авторов — в современной математической литературе установилось название «пространства и F-алгебры Привалова».

Из результатов второй группы укажем на обнаруженные первыми двумя авторами F-алгебры аналитических функций, содержащие классическое пространство Островского-Неванлинны: их функции обладают почти всюду на границе конечными допустимыми пределами, образующими достаточно «гладкие» граничные функции, что позволяет авторам считать дальнейшее изучение теории перспективным.

diefimov@gmail.com
awsubbotin@mail.ru

МГУ

Издательство
Московского
университета

ISBN 978-5-211-06379-2

9 785211 063792