Казанский федеральный университет

Шурыгин В.В., Шурыгин В.В. (мл.)

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ III.

Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия».
Часть III.
Многомерные пространства.
Гиперповерхности второго порядка.

Казань — 2013

**УДК 514.1**

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

*методической комиссии Института математики и механики*
*Протокол № 6 от 13 июня 2013 года*

*заседания кафедры геометрии*
*Протокол № 8 от 28 мая 2013 года*

*Научный редактор:*
доктор физ.-мат. наук, доцент Сосов Е.Н.

*Рецензенты:*
доктор физ.-мат. наук, профессор КФУ Насыров С.Р.,
доктор физ.-мат. наук, профессор ТвГУ Шелехов А.М.

**Шурыгин Вадим Васильевич, Шурыгин Вадим Вадимович.**
**Аналитическая геометрия III. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть III. Многомерные пространства. Гиперповерхности второго порядка.** Учебное пособие / В.В. Шурыгин, В.В. Шурыгин (мл.). – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – 160 с.

Учебное пособие предназначено для студентов I курса Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

# 1 Аффинное пространство

**Определение.** *Аффинным пространством размерности* $n$ *над полем* $\mathbf{R}$ *вещественных чисел называется тройка* $(\mathcal{A}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$, *состоящая из некоторого множества* $\mathcal{A}_n$, *элементы которого называются точками, векторного пространства* $\mathbf{V}_n$ *и отображения* $\psi : \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n \to \mathbf{V}_n$, *относящего упорядоченной паре точек* $\{A, B\}$ *множества* $\mathcal{A}_n$ *некоторый вектор из* $\mathbf{V}_n$, *обозначаемый* $\overrightarrow{AB}$, *такого, что выполняются следующие две аксиомы:*

1°. *Для любых* $A \in \mathcal{A}_n$ *и* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ *существует единственная точка* $B$ *такая, что* $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

2°. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *для любых* $A, B, C \in \mathcal{A}$ *(равенство треугольника).*

Для обозначения аффинного пространства будем использовать один символ $\mathcal{A}_n$. Векторное пространство $\mathbf{V}_n$ называется *ассоциированным* с аффинным пространством $\mathcal{A}_n$. В ситуации применения аксиомы 1° будем говорить, что вектор $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ *отложен* от точки $A$. При рассмотрении $n$-мерного аффинного пространства будем использовать и другую терминологию, принятую для геометрического трехмерного пространства.

Из определения аффинного пространства легко выводятся следующие два соотношения:

1) $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$; 2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Для их доказательства достаточно записать равенство треугольника 2° сначала при $B = C = A$, а затем при $C = A$.

**Примеры.**

1. Пусть $\mathbf{V}_n$ — произвольное векторное пространство размерности $n$. Положим

$$\psi : \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \longmapsto \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathbf{V}_n.$$

Тройка $(\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$ является аффинным пространством.

2. В частности, взяв арифметическое (числовое) векторное пространство $\mathbf{R}^n$, получим арифметическое аффинное пространство $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \psi)$, обозначаемое для краткости просто $\mathbf{R}^n$.

## 1.1 Плоскости в аффинном пространстве

**Определение.** *Пусть* $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ *— подпространство в векторном пространстве* $\mathbf{V}_n$*, ассоциированном с аффинным пространством* $\mathcal{A}_n$*. Плоскостью размерности* $m$ *(*$m$*-плоскостью) в* $\mathcal{A}_n$ *с направляющим подпространством* $\mathbf{L}_m$*, проходящей через точку* $M_0$*, называется следующее подмножество в* $\mathcal{A}_n$*:*

$$\pi = \{M \in \mathcal{A}_n \mid \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{L}_m\}. \tag{1}$$

Обозначать $m$-плоскость, определенную соотношением (1), будем следующим образом: $\{M_0, \mathbf{L}_m\}$.

**Предложение.** *Пусть задана* $m$*-плоскость* $\pi = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *и* $M_1 \in \pi$*. Тогда* $\{M_1, \mathbf{L}_m\} = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$*, т. е.* $m$*-плоскость* $\pi$ *с направляющим подпространством* $\mathbf{L}_m$ *однозначно определяется любой своей точкой.*

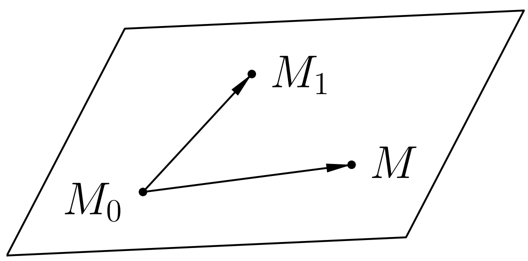



Рис. 1.

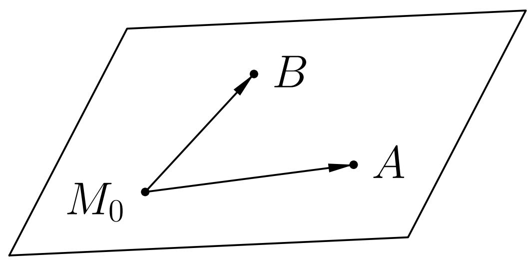



Рис. 2.

**Доказательство.** Поскольку $\overrightarrow{M_0M_1} \in \mathbf{L}_m$ и $(\mathbf{V}_n, +)$ — группа по сложению, то

$$M \in \{M_1, \mathbf{L}_m\} \iff \overrightarrow{M_1M} \in \mathbf{L}_m \iff \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M} \in \mathbf{L}_m \iff$$
$$\iff \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{L}_m \iff M \in \{M_0, \mathbf{L}_m\}.$$

$\square$

**Предложение.** *Пусть* $\pi = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *— $m$-плоскость в аффинном пространстве* $(\mathcal{A}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$ *и* $\psi_\pi = \psi|\pi \times \pi : \pi \times \pi \to \mathbf{V}_n$ *— ограничение отображения* $\psi$ *на* $\pi \times \pi$. *Тогда*

1) $\psi_\pi(\pi \times \pi) \subset \mathbf{L}_m$ *и, следовательно,* $\psi_\pi : \pi \times \pi \to \mathbf{L}_m$.

2) *Тройка* $(\pi, \mathbf{L}_m, \psi_\pi)$ *— аффинное пространство размерности* $m$.

**Доказательство.** 1) Если $A, B \in \pi$, то $\overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{M_0B} \in \mathbf{L}_m$ и, следовательно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0B} - \overrightarrow{M_0A} \in \mathbf{L}_m$.

2) Пусть $A \in \pi$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_m$. Тогда существует (по аксиоме $1^\circ$) единственная точка $B \in \mathcal{A}_n$ такая, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$. Но $\overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{AB} \in \mathbf{L}_m$ и, следовательно, $B \in \pi$. Таким образом, аксиома $1^\circ$ выполняется для $\pi$. Аксиома $2^\circ$ выполняется для точек, принадлежащих плоскости $\pi$, поскольку она выполняется для всех точек аффинного пространства $\mathcal{A}_n$. $\square$

**Определение.** *Подмножество* $\pi \subset \mathcal{A}_n$ *такое, что для некоторого* $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$ *тройка* $(\pi, \mathbf{L}_m, \psi_\pi)$ *является аффинным пространством, называется $m$-мерным подпространством в* $\mathcal{A}_n$.

Из доказанного выше предложения следует, что $m$-мерными подпространствами в $\mathcal{A}_n$ являются $m$-плоскости этого пространства и только они.

**Замечание.** В определении $m$-плоскости размерность $m$ принимает значения $m = 0, 1, \ldots, n$. При этом, 0-плоскость в $\mathcal{A}_n$ (0-мерное аффинное подпространство) — это точка, 1-плоскость называется *прямой*, $(n-1)$-плоскость называется *гиперплоскостью*, $n$-плоскость совпадает со всем пространством $\mathcal{A}_n$.

**Способы задания $m$-плоскостей.**

В зависимости от того, как задано подпространство $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$, получаем следующие два основных способа задания $m$-плоскости $\pi = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$.

**1.** Пусть $\mathbf{L}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, где $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ — базис в $\mathbf{L}_m$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $M \in \mathcal{A}_n$, а $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0$. Тогда

$$M \in \{M_0, \mathbf{L}_m\} \iff \overrightarrow{M_0M} = t^\alpha \mathbf{a}_\alpha \iff \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t^\alpha \mathbf{a}_\alpha,$$

где $\alpha = 1, \ldots, m$. Отсюда получаем следующее уравнение $m$-плоскости

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha, \tag{2}$$

где $t^1$, ..., $t^m$ — вещественные параметры, принимающие произвольные значения.

Пусть в пространстве $\mathcal{A}_n$ задана аффинная система координат, определяемая репером $\{O, \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда уравнение (2) эквивалентно системе уравнений

$$x^i = x^i_0 + t^\alpha a^i_\alpha, \tag{3}$$

где $\mathbf{a}_\alpha = a^i_\alpha \mathbf{e}_i$, которая в матричной записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1_0 \\ x^2_0 \\ \vdots \\ x^n_0 \end{pmatrix} + t^1 \begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \\ \vdots \\ a^n_1 \end{pmatrix} + \ldots + t^m \begin{pmatrix} a^1_m \\ a^2_m \\ \vdots \\ a^n_m \end{pmatrix}. \tag{3$'$}$$

Уравнения (2) и (3) называются *параметрическими уравнениями $m$-плоскости*.

В частности, прямая $\ell$ пространства $\mathcal{A}_n$ задается уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \iff x^i = x^i_0 + ta^i. \tag{4}$$

Вектор $\mathbf{a}$ называется направляющим вектором прямой $\ell$.

**Замечание.** Если точка $M$ принадлежит $m$-плоскости $\pi$, имеющей параметрическое уравнение (2), то ее радиус-вектор $\mathbf{r}_M$ удовлетворяет соотношению $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + t^\alpha_M \mathbf{a}_\alpha$. При этом числа $\{t^\alpha_M\}$ являются координатами точки $M$ в аффинном пространстве $\pi$ относительно репера $\{M_0, \mathbf{a}_\alpha\}$. Эти координаты $\{t^\alpha_M\}$ называются *внутренними* координатами точки $M$.

**2.** Пусть $\mathrm{Ann}(\mathbf{L}_m) = \mathcal{L}\{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}^{n-m}\}$ — аннулятор подпространства $\mathbf{L}_m$, заданный как линейная оболочка своего базиса $\{\widetilde{\mathbf{b}}^a\}$, $a = 1, \ldots, n-m$. Тогда $M \in \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{\mathbf{b}}^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad a = 1, \ldots, n-m. \tag{5}$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{b}}^a = b^a_i \widetilde{\mathbf{e}}^i$, где $\{\widetilde{\mathbf{e}}^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — базис в $\mathbf{V}^*_n$, сопряженный базису $\{\mathbf{e}_i\}$. Тогда система уравнений (5) эквивалентна следующей:

$$b^a_i(x^i - x^i_0) = 0, \quad a = 1, \ldots, n-m. \tag{6}$$

Раскрывая скобки в (6), получаем систему линейных уравнений

$$b^a_i x^i + b^a_{n+1} = 0, \quad a = 1, \ldots, n-m, \tag{7}$$

где $b^a_{n+1} = -b^a_i x^i_0$. Таким образом, $m$-плоскость в пространстве $\mathcal{A}_n$ задается системой из $n-m$ линейных уравнений ранга $n-m$. Очевидно, имеет место и обратное утверждение, а именно:

**Предложение.** *Совместная система* (7) *из $n-m$ линейных* (*неоднородных*) *уравнений ранга $n-m$ для координат $\{x^i\}$ точки $M$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$ аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ задает $m$-плоскость в $\mathcal{A}_n$.*

*В частности, одно линейное уравнение*

$$b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n + b_{n+1} = 0 \tag{8}$$

*задает гиперплоскость* $\pi_{n-1}$ *в* $\mathcal{A}_n$. *При этом* $\widetilde{\mathbf{b}} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ *— линейная форма, аннулирующая направляющее подпространство* $\mathbf{L}_{n-1}$ *гиперплоскости* $\pi_{n-1}$.

**Доказательство.** Действительно, общее решение системы (7) имеет вид (3) и определяет $m$-плоскость с направляющим подпространством $\mathbf{L}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, где $\mathbf{a}_\alpha = a^i_\alpha \mathbf{e}_i$, проходящую через точку $M_0$ с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = x^i_0 \mathbf{e}_i$. $\square$

Из этого предложения следует, что всякая совместная система линейных уравнений ранга $n - m$ относительно $n$ переменных $x^1, \ldots, x^n$ задает $m$-плоскость в аффинном пространстве $\mathbf{R}^n$.

**Предложение.** *Пусть* $S \subset \mathcal{A}_n$ *— произвольное подмножество,* $\widetilde{S} = \{\overrightarrow{AB} \in \mathbf{V}_n \mid A, B \in S\}$ *— множество векторов, начала и концы которых принадлежат множеству* $S$, *а* $M_0 \in S$ *— произвольная точка. Плоскость*

$$\pi(S) = \{M_0, \mathcal{L}(\widetilde{S})\} \tag{9}$$

*содержит подмножество* $S$ *и содержится в любой другой плоскости* $\pi'$, *содержащей* $S$.

**Доказательство.** Пусть $M \in S$. Поскольку $\mathcal{L}(\widetilde{S}) \supset \widetilde{S} \ni \overrightarrow{M_0M}$, то $\pi(S) \ni M$. Если какая-то другая плоскость $\pi'$ содержит все точки из множества $S$, то ее направляющее подпространство $\mathbf{L}(\pi')$ содержит все векторы из $\widetilde{S}$, то есть, $\mathbf{L}(\pi') \supset \mathcal{L}(\widetilde{S})$. Следовательно, $\pi' \supset \pi(S)$. $\square$

**Определение.** *Плоскость* $\pi(S)$ *называется плоскостью, натянутой на подмножество* $S$.

Очевидно, размерность плоскости $\pi(S)$ равна рангу системы векторов $\widetilde{S}$ (это подмножество может быть и бесконечным). В частности, для конечного набора точек $M_0, M_1, \ldots, M_k$ размерность натянутой на него плоскости равна рангу системы векторов $\{\overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k}\}$. Говорят, что точки $M_0, M_1, \ldots, M_k$

находятся *в общем положении*, если размерность натянутой на них плоскости равна $k$.

В случае точек общего положения $M_0, M_1, \dots, M_k$ параметрическое уравнение натянутой на них плоскости имеет вид (2): $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$, где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0$, а $\mathbf{a}_\alpha = \overrightarrow{M_0 M_\alpha}$. В частности, уравнение прямой $\ell$, проходящей через две (различные) точки $M_0$ и $M_1$, имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0). \tag{10}$$

При этом множество точек

$$[M_0 M_1] = \{M \in \ell \,|\, t_M \in [0;1]\}$$

называется *отрезком* с концами $M_0$ и $M_1$.

**Определение.** *Простым отношением трех точек $A$, $B$ и $C$ аффинного пространства $\mathcal{A}_n$, лежащих на прямой $\ell$ этого пространства и таких, что $B \neq C$, называется следующее число:*

$$(ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Если известны точки $A$, $B$ и простое отношение $(ABC) = \lambda$, то радиус-вектор и координаты точки $C$ находятся следующим образом:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1+\lambda} \iff x^i_C = \frac{x^i_A + \lambda x^i_B}{1+\lambda}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Формулы (11) выводятся также как и в случае аффинных пространств малых размерностей (см. [26], с. 18).

**Определение.** *Пусть дана гиперплоскость $\pi_{n-1}$. Будем говорить, что две (различные) точки $P$ и $Q$ лежат по одну сторону от $\pi_{n-1}$, если отрезок $[PQ]$ не содержит точек, принадлежащих $\pi_{n-1}$ : $[PQ] \cap \pi_{n-1} = \varnothing$. В противном случае говорим, что точки $P$ и $Q$ лежат по разные стороны от $\pi_{n-1}$.*

**Задача 1.** Пусть гиперплоскость $\pi_{n-1} \subset \mathcal{A}_n$ имеет уравнение (8). Определим функцию $f : \mathcal{A}_n \to \mathbf{R}$ формулой $f(M) = b_1 x^1_M + \ldots + b_n x^n_M + b_{n+1}$. Доказать, что точки $P$ и $Q$ лежат по одну сторону от $\pi_{n-1}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{sgn}(f(P)) = \operatorname{sgn}(f(Q))$. Таким образом, у гиперплоскости в аффинном пространстве имеется две стороны: по одну сторону гиперплоскости функция $f(M)$ принимает положительные значения, а по другую — отрицательные.

## 1.2 Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве

Пусть заданы две плоскости $\pi_m$ и $\pi'_k$ в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$. Рассмотрим возможные случаи их взаимного расположения.

**1.** $\pi_m \cap \pi'_k \neq \varnothing$.

**Предложение.** *Если плоскости* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *и* $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\}$ *в пространстве* $\mathcal{A}_n$ *имеют непустое пересечение, то они пересекаются по плоскости. А именно, если* $\pi_m \cap \pi'_k \ni A$, *то* $\pi_m \cap \pi'_k = \{A, \mathbf{L}_m \cap \mathbf{L}'_k\}$.

**Доказательство.** Действительно, $B \in \pi_m \cap \pi'_k$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{AB}$ принадлежит каждому из подпространств $\mathbf{L}_m$ и $\mathbf{L}'_k$, что эквивалентно тому, что он принадлежит подпространству, являющемуся их пересечением. □

Пусть плоскости $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ и $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\}$ заданы соответственно параметрическими уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m$, и $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_0 + u^a \mathbf{b}_a$, $a = 1, \ldots, k$. Радиус-вектор всякой точки $M \in \pi_m \cap \pi'_k$ имеет два набора внутренних координат $\{t^\alpha\}$ и $\{u^a\}$. При этом $\mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}'_0 + u^a \mathbf{b}_a$. Отсюда следует, что внутренние координаты точки $M$ удовлетворяют векторному уравнению

$$t^\alpha \mathbf{a}_\alpha - u^a \mathbf{b}_a = \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 \tag{12}$$

или эквивалентной ему системе уравнений в координатах

$$a^i_\alpha t^\alpha - b^i_a u^a = {x'}^i_0 - x^i_0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Уравнение (12) совместно тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 \in \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}. \tag{14}$$

В результате получаем следующее

**Предложение.** *Плоскости* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *и* $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\}$ *в пространстве* $\mathcal{A}_n$ *имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 \in \mathbf{L}_m + \mathbf{L}'_k. \tag{15}$$

**Решение системы уравнений (13).**

Предположим, что система уравнений (13) совместна, то есть выполняется условие (14). Тогда ранг $r$ системы уравнений (13) равен рангу системы векторов

$$\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) = \dim(\mathbf{L}_m + \mathbf{L}'_k).$$

Решения системы уравнений (13) представляют собой векторы

$$\{t^1, \ldots, t^m; u^1, \ldots, u^k\}$$

из числового пространства $\mathbf{R}^{m+k}$. Всякому частному решению $\{t^\alpha_0; u^a_0\}$ системы уравнений (13) соответствует точка $M''_0$ из пересечения $\pi_m \cap \pi'_k$, имеющая радиус-вектор $\mathbf{r}''_0 = \mathbf{r}_0 + t^\alpha_0 \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}'_0 + u^a_0 \mathbf{b}_a$. Всякое решение $\{t^\alpha_1; u^a_1\}$ однородной системы уравнений

$$a^i_\alpha t^\alpha - b^i_a u^a = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

соответствующей системе (12), определяет вектор из пересечения $\mathbf{L}_m \cap \mathbf{L}'_k$. Если $\{t^\alpha_A; u^a_A\}$, $A = 1, \ldots, m + k - r$, — фундаментальная система решений (см. [14], §§ 11, 12) системы (16), то

$\mathbf{L}_m \cap \mathbf{L}'_k$ представляет собой линейную оболочку системы векторов $\mathbf{c}_A = t^\alpha_A \mathbf{a}_\alpha = u^a_A \mathbf{b}_a$, $A = 1, \ldots, m+k-r$. Отсюда следует, что плоскость $\pi_m \cap \pi'_k$ имеет следующее параметрическое уравнение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}''_0 + v^A \mathbf{c}_A.$$

В случае, когда требуется найти пересечение конкретных плоскостей, достаточно вычислить только части $\{u^1, \ldots, u^k\}$ решений $\{t^1, \ldots, t^m; u^1, \ldots, u^k\}$ систем (13) и (16). При этом получаются параметрические уравнения $u^a = u^a_0 + \lambda^A u^a_A$ плоскости $\pi_m \cap \pi'_k$ в аффинном пространстве $\pi'_k$. При их подстановке в уравнения $x^i = x'^i_0 + u^a b^i_a$ плоскости $\pi'_k$ получаются окончательные уравнения $x^i = x'^i_0 + u^a_0 b^i_a + \lambda^A (u^a_A b^i_a)$ плоскости $\pi_m \cap \pi'_k$ в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$.

Рассмотрим пример.

**Задача 2.** Найти пересечение двух 3-плоскостей $\pi$ и $\pi'$ в $\mathbf{R}^5$, заданных уравнениями

$$\pi: \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\pi': \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Преобразуем расширенную матрицу системы уравнений (13) для данной задачи

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -5 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Уравнения $\pi \cap \pi'$ в $\pi'$ находятся из последнего уравнения преобразованной системы $-2u^1 - 2u^2 - u^3 = 1$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку плоскость $\pi \cap \pi'$, рассматриваемая как подмножество в аффинном пространстве $\pi'$ с координатами $\{u^1, u^2, u^3\}$, задается одним уравнением $-2u^1 - 2u^2 - u^3 = 1$, то $\pi \cap \pi'$ — гиперплоскость в $\pi'$. $\rhd$

**2.** $\pi_m \cap \pi'_k = \varnothing$.

**Определение.** *Пусть даны две плоскости* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *и* $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\}$ *и, для определенности,* $m \leqslant k$.

*Плоскости* $\pi_m$ *и* $\pi'_k$ *называются параллельными в строгом смысле слова* $(\pi_m \| \pi'_k)$, *если* $\pi_m \cap \pi'_k = \varnothing$ *и* $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{L}'_k$.

*Плоскости* $\pi_m$ *и* $\pi'_k$ *называются скрещивающимися, если* $\pi_m \cap \pi'_k = \varnothing$ *и* $\mathbf{L}'_k \cap \mathbf{L}_m = \{\mathbf{0}\}$.

Имеет место следующее очевидное

**Предложение.** 1) *Если* $m$*-плоскость* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *параллельна* $k$*-плоскости* $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\}$, *где* $m \leqslant k$, *то* $\pi_m$ *содержится в некоторой* $k$*-плоскости* $\pi''_k$, *параллельной* $\pi'_k$. *Эта* $k$*-плоскость имеет следующий вид:* $\pi''_k = \{M_0, \mathbf{L}'_k\}$.

2) *Если плоскости* $\pi_m$ *и* $\pi'_k$ *скрещиваются, то они лежат в параллельных* $(k+m)$*-плоскостях* $\pi^1_{k+m} = \{M_0, \mathbf{L}'_k \oplus \mathbf{L}_m\}$ *и* $\pi^2_{k+m} = \{M'_0, \mathbf{L}'_k \oplus \mathbf{L}_m\}$.

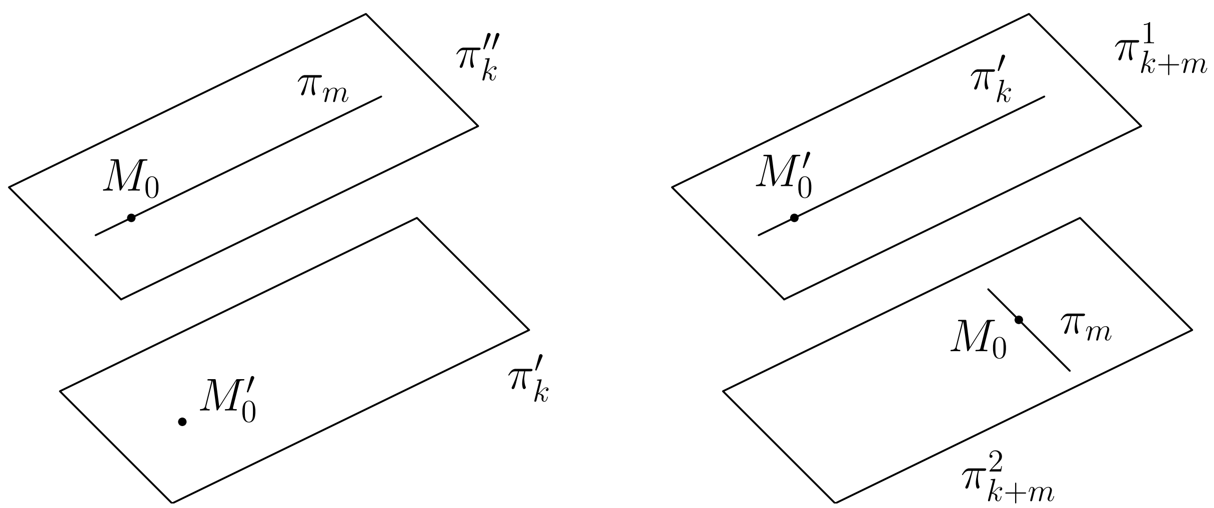



Рис. 3.

Из условия (15) следует, что если $\pi_m$ и $\pi'_k$ скрещиваются, то $\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 \notin \mathbf{L}_m \oplus \mathbf{L}'_k$. Так как $\dim(\mathbf{L}_m \oplus \mathbf{L}'_k) = m + k$, то $1 + m + k \leqslant n$. Следовательно, сумма размерностей скрещивающихся плоскостей не может превышать $n - 1$. Поэтому в $\mathcal{A}_4$ могут скрещиваться две прямые или прямая и 2-плоскость, в $\mathcal{A}_5$, кроме того, могут скрещиваться прямая и 3-плоскость или две 2-плоскости.

Общая ситуация описывается следующим предложением.

**Предложение.** *Пусть* $\pi_m \cap \pi'_k = \varnothing$, *а* $\mathbf{L}'_k \cap \mathbf{L}_m = \mathbf{L}''_p$, *где* $p > 0$, $p < m$, $p < k$. *Тогда обе плоскости* $\pi_m$ *и* $\pi'_k$ *параллельны* $p$-*плоскости* $\pi''_p = \{M_1, \mathbf{L}''_p\}$, *где* $M_1$ — *середина отрезка* $[M_0 M'_0]$, *и не существует плоскости* $\pi_q$, *где* $q < k$, $q < m$, *размерности большей* $p$ *параллельной каждой из плоскостей* $\pi_m$ *и* $\pi'_k$.

**Задача 3.** Показать, что плоскости $\pi_m$ и $\pi'_k$ из предыдущего предложения содержат параллельные $p$-плоскости $\alpha_p$ и $\beta_p$, скрещивающиеся плоскости $\widetilde{\alpha}_{m-p}$ и $\widetilde{\beta}_{k-p}$ и при этом $\pi_m$ натянута на $\alpha_p$ и $\widetilde{\alpha}_{m-p}$, а $\pi'_k$ натянута на $\beta_p$ и $\widetilde{\beta}_{k-p}$.

**Указание.** Рассмотреть прямые дополнения подпространства $\mathbf{L}''_p$ в $\mathbf{L}'_k$ и в $\mathbf{L}_m$. $\triangleright$

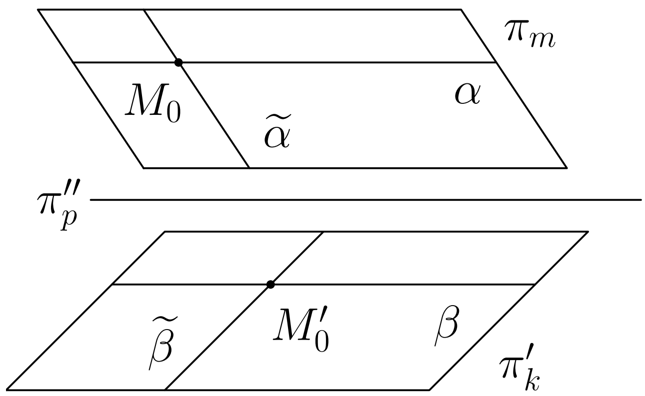



Рис. 4.

### 1.3 Аффинные отображения

Пусть $(\mathcal{A}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$ и $(\mathcal{A}'_m, \mathbf{V}'_m, \psi')$ — аффинные пространства, а $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ — некоторое отображение. Рассмотрим точки $A, B, C, D \in \mathcal{A}_n$ такие, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Пусть $A' = \alpha(A)$, $B' = \alpha(B)$, $C' = \alpha(C)$, $D' = \alpha(D)$. При этом, вообще говоря, $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{C'D'}$, то есть отображение $\alpha$ не определяет никакого отображения из $\mathbf{V}_n$ в $\mathbf{V}'_m$.

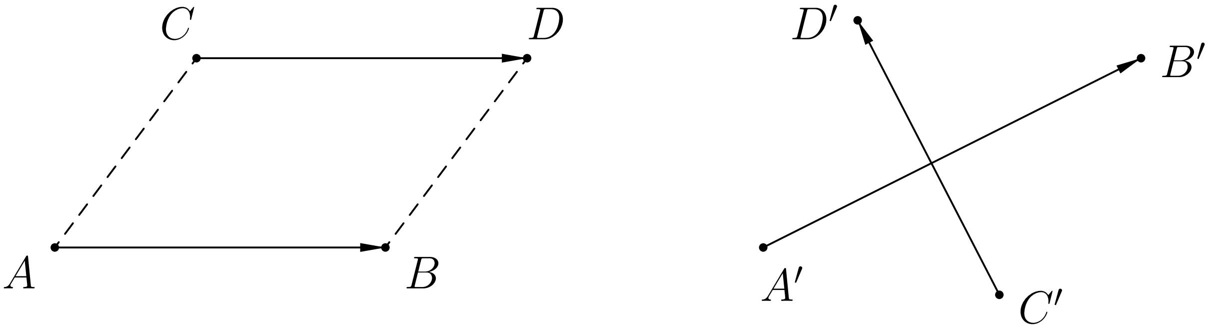



Рис. 5.

**Определение.** *Отображение* $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ *называется аффинным отображением (морфизмом аффинных пространств), если оно индуцирует линейное отображение из* $\mathbf{V}_n$ *в* $\mathbf{V}'_m$, *точнее, если существует линейное отображение*

$$\widehat{\alpha} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}'_m$$

*такое, что*

$$\widehat{\alpha}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\alpha(A)\alpha(B)} \quad \textit{для} \quad \textit{любых} \ A, B \in \mathcal{A}_n \,.$$

Из этого определения следует,что аффинное отображение $\alpha$ однозначно определяется образом $O' = \alpha(O)$ любой одной точки $O \in \mathcal{A}_n$ и линейным отображением $\widehat{\alpha}$.

Действительно, пусть $M \in \mathcal{A}_n$ — произвольная точка и пусть $M' = \alpha(M)$. Тогда $\overrightarrow{O'M'} = \widehat{\alpha}(\overrightarrow{OM})$.

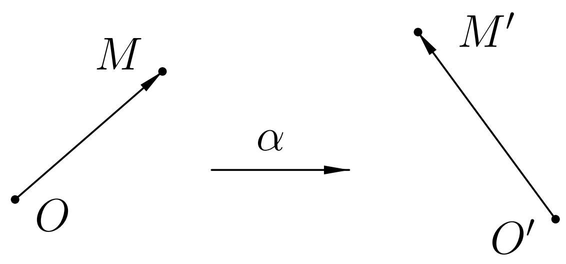



Рис. 6.

Как следствие, получаем

**Предложение.** *Образ* $\alpha(\pi_k)$ *плоскости* $\pi_k = \{M_0, \mathbf{L}_k\} \subset \mathcal{A}_n$ *при аффинном отображении* $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ *представляет со-*

*бой плоскость* $\pi'_p = \{\alpha(M_0), \widehat{\alpha}(\mathbf{L}_k)\} \subset \mathcal{A}'_m$ *размерности* $p = \dim \widehat{\alpha}(\mathbf{L}_k) \leqslant k$.

*В частности, образом аффинного пространства* $\mathcal{A}_n$ *при аффинном отображении* $\alpha$ *является плоскость* $\{\alpha(M_0), \mathrm{im}(\widehat{\alpha})\} \subset \mathcal{A}'_m$.

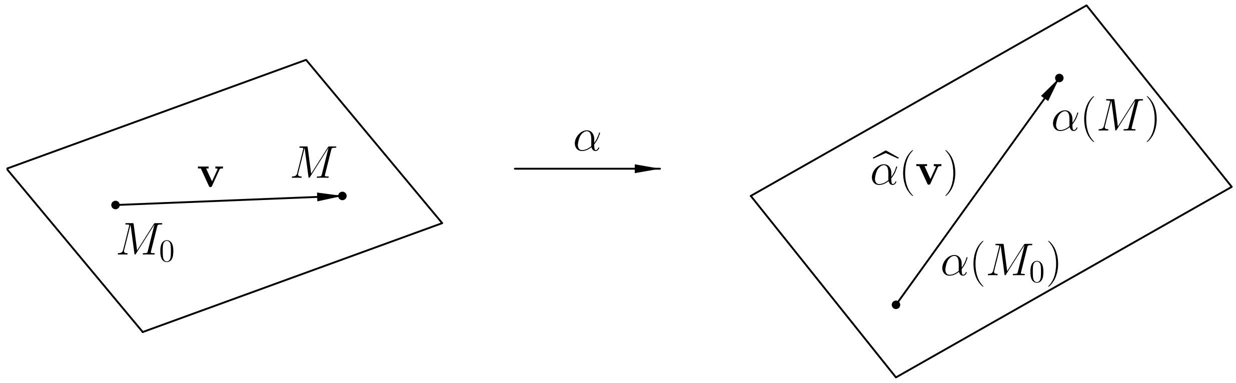



Рис. 7.

Если $\mathrm{im}(\widehat{\alpha}) = \mathbf{V}'_m$, то $\alpha$ сюръективно (отображает пространство $\mathcal{A}_n$ на все пространство $\mathcal{A}'_m$).

Если $\mathrm{im}(\widehat{\alpha}) = \mathbf{0}$, то $\alpha$ отображает пространство $\mathcal{A}_n$ в одну точку пространства $\mathcal{A}'_m$.

**Предложение.** *Прообраз* $\alpha^{-1}(\pi'_k)$ *плоскости* $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\} \subset \mathcal{A}'_m$ *при аффинном отображении* $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ *является либо пустым множеством, либо плоскостью с направляющим подпространством* $\alpha^{-1}(\mathbf{L}'_k)$.

**Доказательство.** Пусть $\alpha^{-1}(\pi'_k) \neq \varnothing$ и $M_0 \in \alpha^{-1}(\pi'_k)$. Тогда $\alpha^{-1}(\pi'_k) = \{M_0, \widehat{\alpha}^{-1}(\mathbf{L}'_k)\}$. $\square$

Отметим частные случаи этого предложения: 1) $\alpha^{-1}(\mathcal{A}'_m) = \mathcal{A}_n$, 2) если $M' \in \alpha(\mathcal{A}_n)$, то $\alpha^{-1}(M') \subset \mathcal{A}_n$ — плоскость.

**Предложение.** *Пусть* $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ *и* $\beta : \mathcal{A}'_m \to \mathcal{A}''_k$ *— аффинные отображения. Тогда композиция* $\beta \circ \alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}''_k$ *— аффинное отображение.*

**Доказательство.** Очевидно, $\widehat{\beta \circ \alpha} = \widehat{\beta} \circ \widehat{\alpha}$.

**Определение.** *Аффинное отображение* $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ *называется изоморфизмом аффинных пространств, если* $\alpha$ *— биекция* (*взаимно однозначное отображение на все пространство* $\mathcal{A}'_m$).

Если $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ — изоморфизм, то $\widehat{\alpha} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}'_m$ — взаимно однозначное отображение на все пространство $\mathbf{V}'_m$, то есть изоморфизм векторных пространств. Отсюда следует, что $n = m$. В этом случае $\alpha^{-1} : \mathcal{A}'_m \to \mathcal{A}_n$ — тоже изоморфизм аффинных пространств. В частности, соответствие $h : \mathcal{A}_n \ni M \mapsto \{x^i_M\} \in \mathbf{R}^n$, относящее точке $M$ набор ее координат относительно репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ в $\mathcal{A}_n$, — изоморфизм аффинных пространств.

**Аффинные отображения в координатах.**

Пусть $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ — аффинное отображение, $\{O; \mathbf{e}_i\}$ — репер в $\mathcal{A}_n$. Всякая точка $M \in \mathcal{A}_n$ определяется своим радиус-вектором $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i$. Пусть $O' = \alpha(O)$ и $M' = \alpha(M)$. Имеем:

$$\overrightarrow{O'M'} = \widehat{\alpha}(\overrightarrow{OM}) = \widehat{\alpha}(x^i \mathbf{e}_i) = x^i \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i).$$

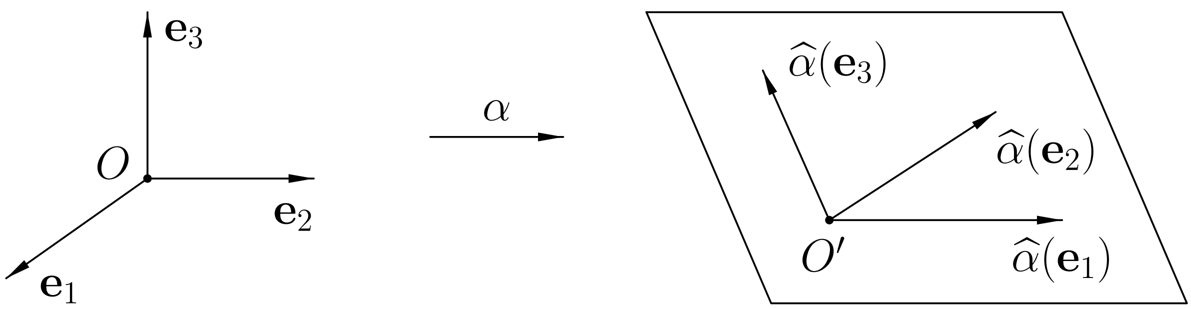



Рис. 8.

Таким образом, для того, чтобы найти точку $M' = \alpha(M)$, надо отложить от точки $O' = \alpha(O)$ вектор $x^i \mathbf{e}'_i$, где $\mathbf{e}'_i = \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i)$.

В частном случае, когда $\alpha$ — изоморфизм, набор $\{\mathbf{e}'_i\}$ является базисом в $\mathbf{V}'_n$. В результате получаем следующее

**Предложение.** *Изоморфизм аффинных пространств* $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_n$ *устанавливает соответствие (взаимно однозначное) между точками, имеющими одинаковые координаты относительно реперов* $\{O; \mathbf{e}_i\}$ *и* $\{O' = \alpha(O); \mathbf{e}'_i = \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i)\}$.

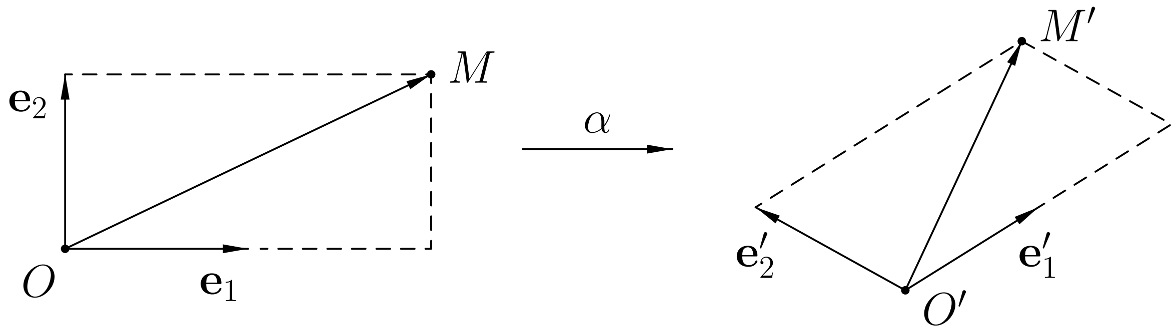



Рис. 9.

Изоморфизм между двумя аффинными пространствами $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}'_n$ одной размерности может быть задан выбором произвольных реперов $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$ в этих пространствах и установлением соответствия между точками, имеющими одинаковые координаты по отношению к этим реперам.

Пусть теперь $\{Q; \mathbf{f}_a\}$, $a, b, \ldots = 1, \ldots, m$, — произвольный репер в $\mathcal{A}'_m$. Найдем соответствие между координатами $\{x^i\}$ точки $M$ относительно репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и координатами $\{y^a\}$ точки $M'$ относительно репера $\{Q; \mathbf{f}_a\}$. Радиус-векторы точек $M$ и $M'$ имеют вид $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM} = x^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{r}_{M'} = \overrightarrow{QM'} = y^a\mathbf{f}_a$. Поэтому $\mathbf{r}_{M'} = \overrightarrow{QM'} = \overrightarrow{QO'} + \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{QO'} + \widehat{\alpha}(\overrightarrow{OM}) = b^a\mathbf{f}_a + x^i\alpha^a_i\mathbf{f}_a$, где $b^a\mathbf{f}_a = \overrightarrow{QO'}$, $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i) = \alpha^a_i\mathbf{f}_a$, то есть $\{b^a\}$ — координаты точки $O'$ относительно репера $\{Q; \mathbf{f}_a\}$, а $(\alpha^a_i)$ — матрица линейного отображения $\widehat{\alpha}$ по отношению к базисам $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_a\}$.

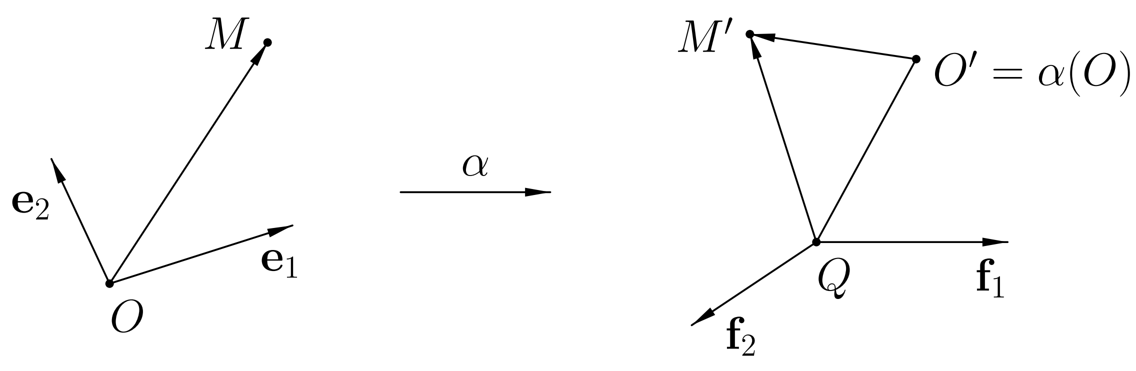



Рис. 10.

В результате получаем следующие уравнения для аффинного отображения $\alpha$:

$$y^a = \alpha_i^a x^i + b^a \tag{17}$$

или, в матричном виде,

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{18}$$

**Замечание.** Нетрудно заметить, что в случае, когда $\alpha$ — изоморфизм, уравнения (17) могут рассматриваться как преобразование координат в пространстве $\mathcal{A}'_n$ при переходе от репера $\{O' = \alpha(O); \mathbf{e}'_i = \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i)\}$ к реперу $\{Q; \mathbf{f}_a\}$.

**Определение.** *Изоморфизм $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ на себя называется аффинным преобразованием пространства $\mathcal{A}_n$.*

Аффинные преобразования называют также *аффинными движениями* или просто движениями, если не возникает двусмысленности (аффинные движения можно рассматривать и в евклидовых пространствах).

При рассмотрении аффинного движения $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ естественно рассматривать координаты точек $M \in \mathcal{A}_n$ и их образов $\alpha(M) \in \mathcal{A}_n$ относительно одного и того же репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$. Из (17) следует, что в координатах, определяемых аффинным репером $\{O; \mathbf{e}_i\}$, аффинное движение $\alpha$ задается уравнениями:

$$y^j = \alpha_i^j x^i + b^j, \quad \det(\alpha_i^j) \neq 0. \tag{19}$$

Множество $GA(\mathcal{A}_n)$ всех аффинных преобразований пространства $\mathcal{A}_n$ образует группу относительно композиции преобразований.

**Замечание.** В соответствии с рассмотренным ранее случаем изоморфизма аффинных пространств одной размерности аффинное движение $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ переводит точку $M$, имеющую координаты $\{x^i\}$ относительно некоторого репера $\{O;\mathbf{e}_i\}$, в точку $M'$, имеющую такие же координаты $\{x^i\}$ относительно репера $\{O';\mathbf{e}'_i\}$, где $O'=\alpha(O)$, а $\mathbf{e}'_i=\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i)=\alpha^j_i\mathbf{e}_j$.

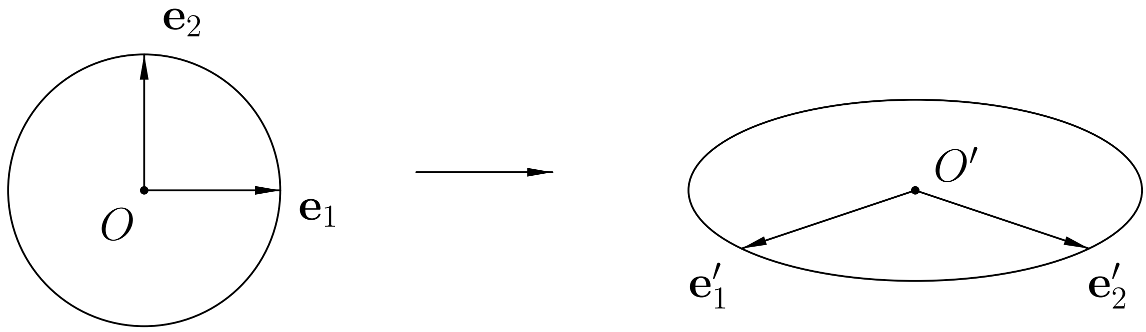



Рис. 11.

**Задача 4.** Доказать, что аффинное движение $\alpha$ пространства $\mathcal{A}_n$ переводит всякий набор точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$, находящихся в общем положении, в набор точек $M'_0, M'_1, \ldots, M'_n$, также находящихся в общем положении, и для любых двух наборов $M_0, M_1, \ldots, M_n$ и $M'_0, M'_1, \ldots, M'_n$ точек, находящихся в общем положении, существует единственное аффинное движение, переводящее точку $M_p$ в точку $M'_p$ для всех $p=0,1,\ldots,n$.

**Решение.** Движение $\alpha$ переводит репер $\{M_0;\overrightarrow{M_0M_i}\}$ в репер $\{M'_0;\overrightarrow{M'_0M'_i}\}$. $\rhd$

**Предмет аффинной геометрии.**

Аффинная геометрия изучает свойства объектов в аффинных пространствах, которые остаются неизменными при аффинных преобразованиях.

Свойства и характеристики объектов, не изменяющиеся при преобразованиях, называются *инвариантными*.

**Основной инвариант аффинной геометрии.**

Всякое аффинное преобразование пространства $\mathcal{A}_n$ сохраняет простое отношение $(ABC)$ трех точек $A$, $B$ и $C$, лежащих на одной прямой $\ell$.

Действительно, $(ABC)=\lambda \implies \overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB} \implies \overrightarrow{A'C'}=$

$\lambda\overrightarrow{C'B'}$ (так как $\widehat{\alpha}$ — линейное отображение) $\implies$ $(A'B'C') = \lambda$.

**Замечание.** Соответствие, относящее точке $M$ аффинного пространства ее координаты $\{x^i\}$ относительно репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$, представляет собой изоморфизм аффинных пространств $h : \mathcal{A}_n \to \mathbf{R}^n$. Пусть $h' : \mathcal{A}_n \to \mathbf{R}^n$ — отображение, относящее точке $M$ ее координаты $\{x^{i'}\}$ относительно другого репера $\{O'; \mathbf{e}_{i'}\}$, тогда преобразование координат $x^i = p^i_{i'} x^{i'} + b^i$ представляет собой аффинное преобразование $h \circ (h')^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[rr, "h \circ (h')^{-1}"] & & \mathbf{R}^n \\
& \mathcal{A}_n \arrow[ul, "h'"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

**Задача 5.** Найти аффинное преобразование $\alpha$ плоскости $\mathcal{A}_2$, переводящее точки $A(-2; 1)$, $B(0; 2)$ и $C(1; 3)$ соответственно в точки $A'(-2; -3)$, $B'(2; 9)$ и $C'(1; 13)$.

**Решение.** Преобразование $\alpha$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Подставляя в (20) координаты данных точек, получим систему уравнений относительно 6-ти неизвестных $\alpha^1_1$, $\alpha^1_2$, $\alpha^2_1$, $\alpha^2_2$, $b^1$, $b^2$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Систему уравнений (21) можно решать обычным способом методом Гаусса [14], однако лучше сначала найти линейное отображение (изоморфизм) $\widehat{\alpha}$. Отображение $\widehat{\alpha}$ переводит векторы $\overrightarrow{AB} = \{2;1\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{3;2\}$ соответственно в векторы $\overrightarrow{A'B'} = \{4;12\}$ и $\overrightarrow{A'C'} = \{3;16\}$, поэтому для нахождения матрицы $(\alpha_i^j)$ получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Далее, вектор $(b^1, b^2)$ может быть найден из любого из соотношений (20), например,

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Окончательный результат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$\triangleright$

**Метод нахождения уравнений образов геометрических множеств при аффинном преобразовании.**

Пусть задано аффинное преобразование $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ с уравнениями

$$y^j = \alpha_i^j x^i + b^j$$

и некоторое множество точек $\Phi \subset \mathcal{A}_n$, определенное уравнениями

$$F_1(x^i) = 0, \ \ldots, \ F_k(x^i) = 0. \tag{22}$$

Для того, чтобы найти уравнения, определяющие образ $\Phi' = \alpha(\Phi)$ множества $\Phi$, проведем следующие рассуждения. Точка $M$

с координатами $(x^i)$ принадлежит множеству $\Phi$ тогда и только тогда, когда точка $M'$ с координатами $(y^j = \alpha^j_i x^i + b^j)$ принадлежит множеству $\Phi'$. Пусть обратное преобразование $\alpha^{-1}$ задается уравнениями

$$x^i = \beta^i_j y^j + c^i. \tag{23}$$

Тогда предыдущую фразу можно переформулировать следующим образом: точка $M'$ с координатами $(y^j)$ принадлежит множеству $\Phi'$ тогда и только тогда, когда точка $M$ с координатами $(x^i = \beta^i_j y^j + c^i)$ принадлежит множеству $\Phi$. Поэтому для нахождения уравнений, определяющих образ множества $\Phi$, следует подставить уравнения (23) обратного преобразования в уравнения (22).

**Задача 6.** Какими уравнениями задаются образы прямой $\ell$ с уравнением $x^1+2x^2-3=0$ и параболы $\Phi$ с уравнением $(x^2)^2 = x^1$ при аффинном преобразовании

$$\begin{cases} y^1 = 2x^1 + 3x^2 - 1 \\ y^2 = x^1 + 2x^2 + 3\ ? \end{cases}$$

**Решение.** Перепишем уравнения аффинного преобразования в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование $\alpha^{-1}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x^1 = 2y^1 - 3y^2 + 11 \\ x^2 = -y^1 + 2y^2 - 7. \end{cases} \tag{24}$$

Подставляя уравнения (24) в уравнения прямой $\ell$ и параболы $\Phi$, получим уравнения их образов при аффинном преобразовании $\alpha$, а именно,

$$\begin{aligned}
\alpha(\ell):&\ \ (2y^1 - 3y^2 + 11) + 2(-y^1 + 2y^2 - 7) - 3 = 0,\\
\alpha(\Phi):&\ \ (-y^1 + 2y^2 - 7)^2 = 2y^1 - 3y^2 + 11.
\end{aligned}$$

$\triangleright$

**Задача 7.** Найти инвариантные прямые аффинного преобразования $\alpha$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

для линейного оператора $\widehat{\alpha}$, находим его собственные значения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$. Собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям, являются направляющими векторами инвариантных прямых. Вектор $\mathbf{a}_1$, соответствующий значению $\lambda_1 = 3$, является решением уравнения $(7-3)a^1 - a^2 = 0$. Поэтому $\mathbf{a}_1 = \{1; 4\}$. Отсюда следует, что первая инвариантная прямая имеет уравнение $4x^1 - x^2 + A_3 = 0$. Поскольку прямая $\ell$ инвариантна относительно преобразования $\alpha$ тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно преобразования $\alpha^{-1}$, то для нахождения первой инвариантной прямой подставим выражения

$$\begin{cases} y^1 = 7x^1 - x^2 + 1 \\ y^2 = 4x^1 + 2x^2 + 4 \end{cases}$$

в уравнение $4y^1 - y^2 + A_3 = 0$. Получаем $4(7x^1 - x^2 + 1) - (4x^1 + 2x^2 + 4) + A_3 = 0$ или $24x^1 - 6x^2 + A_3 = 0$. Для того, чтобы прямые $4x^1 - x^2 + A_3 = 0$ и $24x^1 - 6x^2 + A_3 = 0$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы $A_3 = 6A_3$, что эквивалентно равенству $A_3 = 0$. Таким образом, первому собственному значению соответствует одна инвариантная прямая $4x^1 - x^2 = 0$.

Инвариантная прямая, соответствующая собственному значению $\lambda_2 = 6$, имеет уравнение $x^1 - x^2 + A_3 = 0$. При преобразовании $\alpha^{-1}$ она переходит в прямую с уравнением $(7x^1 - x^2 + 1) - (4x^1 + 2x^2 + 4) + A_3 = 0$ или $3x^1 - 3x^2 - 3 + A_3 = 0$. Отсюда $-3 + A_3 = 3A_3$ и $A_3 = -\frac{3}{2}$. Таким образом, второму собственному значению соответствует одна инвариантная прямая $2x^1 - 2x^2 - 3 = 0$. $\triangleright$

Аффинные преобразования могут успешно применяться при решении некоторых задач евклидовой геометрии.

**Задача 8.** Доказать, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей.

**Решение.** Аффинным преобразованием всякая трапеция может быть переведена в равнобочную, для которой утверждение выполняется очевидным образом. $\triangleright$

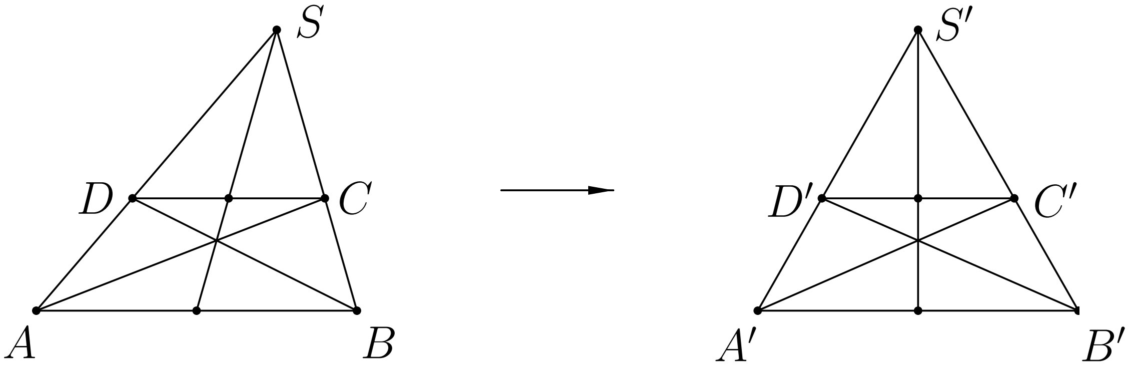



Рис. 12.

**Задача 9.** Около эллипса описан ромб. Доказать, что вершины ромба лежат на осях эллипса.

**Решение.** Пусть $\Phi$ — эллипс, имеющий уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

и $R$ — ромб, описанный около эллипса $\Phi$. При аффинном преобразовании $x' = \dfrac{x}{a}$, $y' = \dfrac{y}{b}$ эллипс $\Phi$ переходит в окружность $\Phi'$ с уравнением $x^2 + y^2 = 1$. При этом ромб $R$ переходит в параллелограмм $R'$, описанный около окружности $\Phi'$. Но всякий параллелограмм, описанный около окружности, очевидно, является ромбом. Таким образом, $R'$ — ромб. Диагонали ромба $R'$ являются парой взаимно ортогональных диаметров окружности $\Phi'$. Отсюда, в частности, следует, что эти диаметры сопряжены относительно окружности $\Phi'$ (каждый из этих диаметров, очевидно, делит пополам хорды, параллельные другому диаметру). Но тогда и диагонали ромба $R$ — сопряженные диаметры эллипса $\Phi$ (при аффинном преобразовании центр эллипса $\Phi$ переходит в центр окружности $\Phi'$, следовательно, диаметры переходят в диаметры; кроме того, сопряженность диаметров, очевидно, сохраняется). Поскольку, помимо этого, диагонали ромба $R$ взаимно ортогональны, они являются осями симметрии эллипса $\Phi$. $\triangleright$

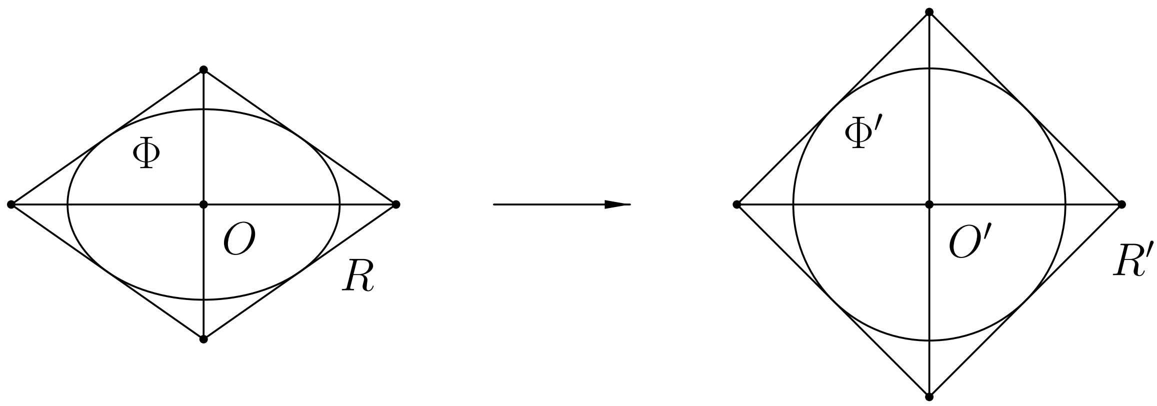



Рис. 13.

**Задача 10.** Из каждой вершины треугольника $ABC$ проведены по две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части и образующие шестиугольник $KLMNPQ$. Доказать, что диагонали этого шестиугольника, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

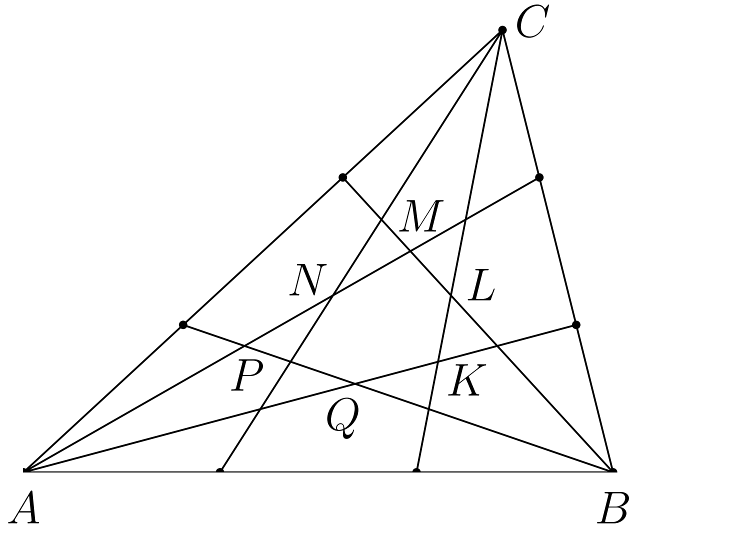


Рис. 14.

**Решение.** Применяя аффинное преобразование, переведем треугольник $ABC$ в равносторонний и воспользуемся тем, что медианы равностороннего треугольника являются его осями симметрии. $\triangleright$

**Задача 11.** Четыре диагонали выпуклого пятиугольника соответственно параллельны четырем его сторонам. Доказать, что пятая сторона также параллельна пятой диагонали.

**Решение.** Обозначим вершины пятиугольника буквами $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, а векторы сторон и диагоналей, противоположных вершине $A_i$, соответственно, $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{d}_i$. Пусть $\mathbf{a}_i \| \mathbf{d}_i$ при $i = 2, 3, 4, 5$. Применим к пятиугольнику аффинное преобразование, переводящее треугольник $A_1A_2A_4$ в равнобедренный. Для простоты сохраним обозначения вершин, сторон и диагоналей у преобразованного пятиугольника такими же, какими они были у исходного. При этом, очевидно, преобразованный пятиугольник будет симметричен относительно высоты, проходящей через вершину $A_4$, в частности, четырехугольник $A_1A_2A_3A_5$ будет являться равнобедренной трапецией. Из соображений симметрии, поскольку $\mathbf{a}_2 \| \mathbf{d}_2$, то $\mathbf{a}_1 \| \mathbf{d}_1$. $\triangleright$

**Замечание.** Некоторые из рассмотренных выше задач (например, задачи 9 и 11) по своей формулировке являются задачами аффинной геометрии. Но при их решении применялись методы евклидовой геометрии. Правомерность использования методов евклидовой геометрии при решении аффинных задач объясняется тем, что можно либо аффинным изоморфизмом отобразить рассматриваемое аффинное пространство на некоторое евклидово пространство, либо ввести в этом аффинном пространстве произвольное евклидово скалярное произведение. При этом не происходит никакого нарушения аффинной структуры этого пространства.

Еще одним примером использования евклидовой техники при решении аффинной задачи может служить следующая теорема Сильвестра (см. [5], п. 9.14.25, [10], гл. 4, §7, гл. 12, §3).

**Задача 12. (Теорема Сильвестра).** Пусть на плоскости заданы $n$ точек, не лежащих на одной прямой. Доказать, что существует прямая, на которой лежат ровно две из этих точек.

**Решение.** Введем обозначения $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ для множества данных точек и $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ для множества прямых, на которых лежат по крайней мере две точки из множества $P$. Рассмотрим затем множество пар $(\ell_j, P_i)$, состоящих из прямой $\ell_j \in L$ и точки $P_i \in P$, не лежащей на этой прямой. Пусть $d_{ij}$ — расстояние от $P_i$ до $\ell_j$. Пусть при некоторых $i = i_0$, $j = j_0$ величина $d_{ij}$ принимает минимальное значение. Тогда прямая $\ell_{j_0}$ удовлетворяет условиям задачи. Действительно, пусть точка $Q$ — основание перпендикуляра, опущенного из $P_{i_0}$ на $\ell_{j_0}$. Если прямая $\ell_{j_0}$ содержит хотя бы три точки из множества $P$, то две из них лежат по одну сторону от точки $Q$. Пусть это точки $P_{i_1}$ и $P_{i_2}$, причем $P_{i_1}$ лежит дальше от $Q$. Пусть точка $H$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $P_{i_2}$ на прямую $P_{i_1}P_{i_0}$, $\alpha = \angle P_{i_0}P_{i_2}Q$, $\beta = \angle P_{i_2}P_{i_0}H$. Поскольку угол $\alpha$ — внешний для треугольника $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_0}$, имеет место неравенство $\alpha > \beta$. Но тогда $P_{i_2}H = P_{i_2}P_{i_0}\sin\beta < P_{i_2}P_{i_0}\sin\alpha = P_{i_0}Q$, что противоречит минимальности $P_{i_0}Q$. ▷

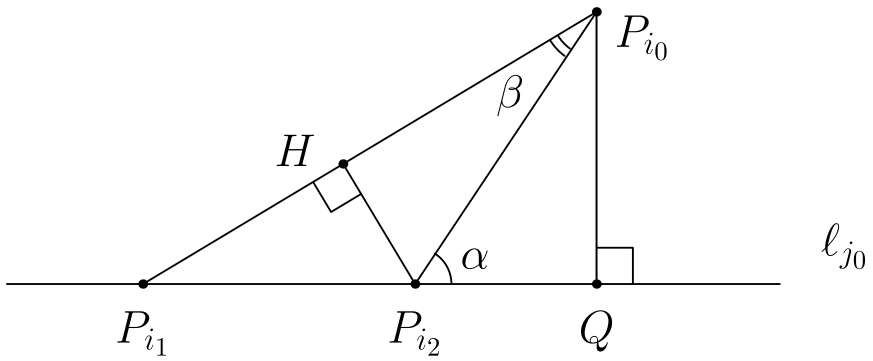



Рис. 15.

Указанное доказательство приведено в §7 главы 4 книги [10]. В этой же книге (гл. 12, §3) приведено гораздо более трудное доказательство, использующее средства только аффинной геометрии.

**Задача 13.** Доказать, что для всякого аффинного преобразования евклидовой плоскости найдется пара перпендикулярных прямых, переходящих в перпендикулярные.

**Решение.** Пусть при аффинном преобразовании $\alpha$ некоторая окружность $\Phi$ переходит в эллипс $\Phi'$ и пусть $\ell_1$ и $\ell_2$ — пара взаимно ортогональных сопряженных диаметров эллипса $\Phi'$. Тогда прямые $\alpha^{-1}(\ell_1)$ и $\alpha^{-1}(\ell_2)$ являются сопряженными диаметрами окружности $\Phi$, следовательно, они перпендикулярны. ▷

**Задача 14.** Доказать, что аффинное преобразование евклидовой плоскости можно представить в виде композиции движения и двух сжатий (растяжений) к двум перпендикулярным прямым.

**Решение.** Пусть в обозначениях предыдущей задачи окружность $\Phi$ имеет единичный радиус, $O$ — ее центр, а $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ —

направляющие векторы прямых $\alpha^{-1}(\ell_1)$ и $\alpha^{-1}(\ell_2)$. Пусть, далее, $\mathbf{e}_1' = \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_1)$ и $\mathbf{e}_2' = \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_2)$, а $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1'/|\mathbf{e}_1'|$ и $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2'/|\mathbf{e}_2'|$. Пусть $O' = \alpha(O)$ — центр эллипса $\Phi'$. Тогда искомое движение переводит репер $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в репер $\{O'; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, а последующие сжатия (растяжения) переводят репер $\{O'; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ в репер $\{O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$. $\triangleright$

Аффинная и евклидова геометрии не являются изолированными теориями. Нижеследующая задача демонстрирует тот факт, что параллельное проектирование одной плоскости трехмерного евклидова пространства на другую является аффинным отображением. Это позволяет рассматривать аффинную геометрию двумерной плоскости как часть евклидовой геометрии трехмерного пространства.

**Задача 15.** Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$ заданы две плоскости $\pi = \{M_0, \mathbf{L}_2\}$, $\pi' = \{M_0', \mathbf{L}_2'\}$ и вектор $\mathbf{v}$, не принадлежащий ни одному из подпространств $\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{L}_2'$.

а) Показать, что отображение $\alpha$, относящее точке $M \in \pi$ точку $M' \in \pi'$ такую, что $\overrightarrow{MM'} \| \mathbf{v}$, является аффинным изоморфизмом.

б) Отображение $\alpha$ является изоморфизмом евклидовых плоскостей только в двух случаях: 1) $\mathbf{L}_2 \| \mathbf{L}_2'$; 2) вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен одной из биссектральных плоскостей двугранного угла, образованного плоскостями $\pi$ и $\pi'$.

**Решение.** Если плоскости $\pi$ и $\pi'$ параллельны, то отображение $\alpha$ является ограничением параллельного переноса пространства $\mathcal{E}_3$ на вектор, коллинеарный вектору $\mathbf{v}$.

Пусть теперь плоскости не параллельны и $\ell$ — линия их пересечения. Выберем в плоскости $\pi$ ортонормированный репер $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ такой, что $O \in \ell$, $\mathbf{e}_1 \| \ell$. Тогда $\alpha(O) = O$, $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$, а $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{v}$ для некоторого $\lambda$. Отображение $\widehat{\alpha}$ является изоморфизмом евклидовых векторных пространств тогда и только тогда, когда вектор $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_2)$ перпендикулярен $\mathbf{e}_1$ и имеет единичную длину. В этом случае отображение $\alpha$ будет являться ограничением симметрии пространства $\mathcal{E}_3$ относительно плоскости, содержащей в себе прямую $\ell$ и параллельной вектору $\mathbf{e}_2 + \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_2)$. $\triangleright$

## 1.4 Комплексификация вещественных векторных и аффинных пространств

*Полем* называется тройка $(\mathbf{F}, +, \cdot)$, состоящая из непустого множества $\mathbf{F}$ и двух операций: сложения $+ : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ и умножения $\cdot : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ таких, что $(\mathbf{F}, +)$ — коммутативная группа с нейтральным элементом $0$, $(\mathbf{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ — коммутативная группа, а умножение дистрибутивно по отношению к сложению. Примером поля может служить, например, множество $\mathbf{F}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ остатков при делении на простое число $p$ с операциями сложения и умножения, определенными следующим образом: $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} \cdot \overline{b}$ равны соответственно остаткам от деления на $p$ чисел $a + b$ и $ab$.

Если в определениях векторного и аффинного пространств заменить поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ на произвольное другое поле $\mathbf{F}$, то получатся соответственно определения векторного $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ и аффинного $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ пространств над полем $\mathbf{F}$. При этом сохраняют смысл такие понятия, введенные ранее для аффинного пространства над полем $\mathbf{R}$, как линейная зависимость и независимость векторов, базис, репер, координаты, подпространство, $m$-плоскость, линейное отображение, аффинное отображение.

**Задача 16.** Доказать, что трехмерное аффинное пространство $\mathcal{A}_3(\mathbf{F}_2)$ над полем $\mathbf{F}_2$ состоит из восьми элементов и найти все прямые и все плоскости этого пространства.

**Указание.** Воспользоваться тем, что каждая из трех координат точки или вектора может принимать ровно два значения $\overline{0}$ и $\overline{1}$. $\triangleright$

Аналогично случаю поля вещественных чисел $\mathbf{R}$, для любого поля $\mathbf{F}$ определены векторное и аффинное пространства над $\mathbf{F}$, элементами которых являются строки длины $n$, состоящие из элементов этого поля. Эти пространства обозначаются символом $\mathbf{F}^n$.

Объектами нашего интереса в этом параграфе будут векторные и аффинные пространства над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ (комплексные векторные и аффинные пространства).

**Предложение.** *Пусть* $\mathbf{V}_n(\mathbf{C}) = (\mathbf{V}, +, \cdot\,)$ *— комплексное векторное пространство размерности* $n$, *где* $\cdot : \mathbf{C} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *— операция умножения элементов из* $\mathbf{V}$ *на комплексные числа, и пусть* $\cdot' : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *— операция умножения элементов из* $\mathbf{V}$ *на вещественные числа (ограничение операции* $\cdot$ *на подмножество* $\mathbf{R} \times \mathbf{V}$*). Тогда* $\mathbf{V}^{\mathbf{R}}_{2n} = (\mathbf{V}, +, \cdot'\,)$ *— вещественное векторное пространство размерности* $2n$.

**Доказательство.** Если $\{\mathbf{e}_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, — базис в $\mathbf{V}_n(\mathbf{C})$, то $2n$ векторов $\{\mathbf{e}_k, i\mathbf{e}_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, линейно независимы с вещественными коэффициентами. Действительно, если $a^k\mathbf{e}_k + b^k(i\mathbf{e}_k) = \mathbf{0}$, то $(a^k + ib^k)\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ и, следовательно, $a^k + ib^k = 0 \in \mathbf{C}$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Но тогда $a^k, b^k = 0 \in \mathbf{R}$ для всех $k = 1, \ldots, n$. При этом если $\mathbf{v} = v^k\mathbf{e}_k$, $v^k \in \mathbf{C}$, то $\mathbf{v} = (a^k + ib^k)\mathbf{e}_k$, где $v^k = a^k + ib^k$, Но тогда $\mathbf{v} = a^k\mathbf{e}_k + b^k(i\mathbf{e}_k)$. $\square$

**Определение.** *Векторное пространство* $\mathbf{V}^{\mathbf{R}}_{2n} = (\mathbf{V}, +, \cdot'\,)$ *называется овеществлением комплексного векторного пространства* $\mathbf{V}_n(\mathbf{C}) = (\mathbf{V}, +, \cdot\,)$.

*Аффинное пространство* $\mathcal{A}^{\mathbf{R}}_{2n} = (\mathcal{A}, \mathbf{V}^{\mathbf{R}}_{2n}, \psi)$ *называется овеществлением комплексного аффинного пространства* $\mathcal{A}_n(\mathbf{C}) =$

$(\mathcal{A}, \mathbf{V}_n(\mathbf{C}), \psi)$.

Переход к овеществлениям позволяет считать, что комплексные векторные и аффинные пространства являются одновременно и вещественными векторными и (соответственно) аффинными пространствами.

**Пример.** Пусть в комплексном аффинном пространстве $\mathcal{A}_2(\mathbf{C})$ в (комплексных) координатах $\{z^1, z^2\}$, определяемых некоторым репером $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, задано множество точек $\Phi$, координаты которых удовлетворяют уравнению $(z^1)^2 + (z^2)^2 = 1$. В (вещественных) координатах $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ в пространстве $\mathcal{A}_4^{\mathbf{R}}$, определяемых репером $\{O, \mathbf{e}_1, i\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, i\mathbf{e}_2\}$, это же множество $\Phi$ задается системой уравнений

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 1, \quad x^1x^2 + x^3x^4 = 0.$$

**Определение.** *Комплексификацией $n$-мерного вещественного векторного пространства $\mathbf{V}_n$ называется пара $(\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}, \varphi)$, состоящая из $n$-мерного комплексного векторного пространства $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ и линейного отображения $\varphi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ такого, что $\mathbf{C}$-линейная оболочка $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(\mathrm{im}(\varphi))$ образа пространства $\mathbf{V}_n$ совпадает со всем пространством $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$.*

*При этом начальное вещественное пространство $\mathbf{V}_n$ отождествляется с его образом при отображении $\varphi$: $\mathbf{V}_n \equiv \mathrm{im}(\varphi) = \varphi(\mathbf{V}_n) \subset \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$, $\mathbf{v} \equiv \varphi(\mathbf{v})$.*

Из этого определения следует, что если $\{\mathbf{e}_k\}$ — базис в $\mathbf{V}_n$, то $\{\varphi(\mathbf{e}_k) \equiv \mathbf{e}_k\}$ — базис в $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$.

Переход к комплексификации позволяет считать, что координаты векторов могут принимать не только вещественные, но и комплексные значения.

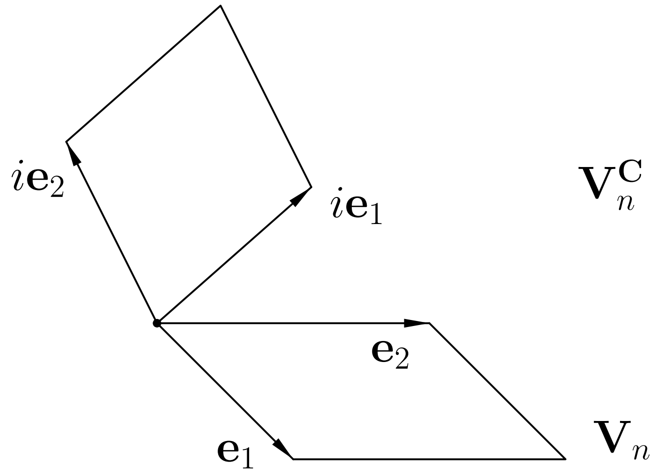



Рис. 16.

Очевидно, что для любого векторного пространства $\mathbf{V}_n$ существует комплексификация. Для ее построения достаточно взять некоторое комплексное векторное пространство $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$, выбрать произвольные базисы $\{\mathbf{e}_k\}$ в $\mathbf{V}_n$ и $\{\mathbf{e}'_k\}$ в $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ и определить отображение $\varphi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ следующим образом: $\varphi(v^k \mathbf{e}_k) = v^k \mathbf{e}'_k$.

**Определение.** *Комплексификацией $n$-мерного вещественного аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ называется пара $(\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}, \alpha)$, состоящая из $n$-мерного комплексного аффинного пространства $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ и аффинного отображения $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ такого, что пара $(\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}, \widehat{\alpha} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}})$, где $\mathbf{V}_n$ и $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ — векторные пространства, ассоциированные соответственно с $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, является комплексификацией векторного пространства $\mathbf{V}_n$.*

*При этом начальное вещественное аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ отождествляется с его образом $\alpha(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$.*

Очевидно, что для любого аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ существует комплексификация. Для ее построения достаточно взять произвольное комплексное аффинное пространство $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, выбрать произвольные реперы $\{O; \mathbf{e}_k\}$ в $\mathcal{A}_n$ и $\{O'; \mathbf{e}'_k\}$ в $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ и взять отображение $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, относящее точке $M$ с координатами $(x^k)$ относительно репера $\{O; \mathbf{e}_k\}$ точку $M'$, имеющую такие же (вещественные) координаты относительно репера $\{O'; \mathbf{e}'_k\}$.

Переход к комплексификации позволяет считать, что координаты точек в изучаемом аффинном пространстве могут принимать не только вещественные, но и комплексные значения.

**Замечания.** 1. Всякое линейное отображение $\beta : \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}_m$ однозначно продолжается до $\mathbf{C}$-линейного отображения $\beta^{\mathbf{C}} : \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}} \to \mathbf{W}_m^{\mathbf{C}}$. В координатах отображения $\beta$ и $\beta^{\mathbf{C}}$ имеют один и тот же вид $y^a = \beta_k^a x^k$, где $(\beta_k^a)$ — вещественная матрица. Аналогично, всякое аффинное отображение $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ однозначно продолжается до аффинного отображения $\alpha^{\mathbf{C}} : \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}} \to \mathcal{A}'^{\mathbf{C}}_m$. В координатах отображения $\alpha$ и $\alpha^{\mathbf{C}}$ определяются одними и теми же уравнениями $y^a = \alpha_k^a x^k + b^a$, $a = 1, \ldots, m$, где $(\alpha_k^a)$ — вещественная матрица, а $b^a$ — вещественные числа.

2. При комплексификации векторного пространства $\mathbf{V}_n$ комплексифицируются и все его подпространства, а при комплексификации аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ комплексифицируются все его плоскости. При этом $m$-плоскость и ее комплексификация задаются одними и теми же системами уравнений $a_k^u x^k + b^u = 0$, $u = 1, \ldots, n-m$, где $(a_k^u)$ — вещественная матрица, а $b^u$ — вещественные числа.

**Определения.** *Соответствие, которое относит каждому вещественному векторному пространству* $\mathbf{V}_n$ *некоторую его комплексификацию* $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$, *а всякому линейному отображению* $\beta$ *его продолжение* $\beta^{\mathbf{C}}$ *таким образом, что выполняются условия* $(\beta_1 \circ \beta_2)^{\mathbf{C}} = \beta_1^{\mathbf{C}} \circ \beta_2^{\mathbf{C}}$, $\mathrm{id}^{\mathbf{C}} = \mathrm{id}$, *называется функтором комплексификации векторных пространств.*

*Соответствие, которое относит каждому вещественному аффинному пространству* $\mathcal{A}_n$ *некоторую его комплексификацию* $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, *а всякому аффинному отображению* $\alpha$ *его продолжение* $\alpha^{\mathbf{C}}$ *таким образом, что выполняются условия* $(\alpha_1 \circ \alpha_2)^{\mathbf{C}} =$

$\alpha_1^{\mathbf{C}} \circ \alpha_2^{\mathbf{C}}$, $\mathrm{id}^{\mathbf{C}} = \mathrm{id}$, *называется функтором комплексификации аффинных пространств.*

Функтор комплексификации комплексифицирует сразу все векторные (аффинные) пространства. Для построения функтора нужно указать некоторую стандартную схему комплексификации. Приведем примеры функторов комплексификации.

**Функтор комплексификации векторных пространств.**

На прямой сумме

$$\mathbf{V}_n \oplus \mathbf{V}_n = \{\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \,|\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n\}$$

введем операцию умножения векторов на комплексные числа

$$\cdot : \mathbf{C} \otimes (\mathbf{V}_n \oplus \mathbf{V}_n) \to \mathbf{V}_n \oplus \mathbf{V}_n,$$

полагая

$$(a + ib)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (a\mathbf{x} - b\mathbf{y}) \oplus (b\mathbf{x} + a\mathbf{y}).$$

Легко проверяется, что тройка $(\mathbf{V}_n \oplus \mathbf{V}_n, +, \,\cdot\,)$ удовлетворяет всем аксиомам комплексного векторного пространства. Мономорфизм вещественных векторных пространств

$$\varphi : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \oplus \mathbf{0} \in \mathbf{V}_n \oplus \mathbf{V}_n$$

позволяет отождествить пространство $\mathbf{V}_n$ с вещественным подпространством $\varphi(\mathbf{V}_n) = \{\mathbf{x}\oplus\mathbf{0} \,|\, \mathbf{x} \in \mathbf{V}_n\} \subset \mathbf{V}_n\oplus\mathbf{V}_n$, отождествляя $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}\oplus\mathbf{0}$. При этом $i\cdot(\mathbf{x}\oplus\mathbf{0}) = \mathbf{0}\oplus\mathbf{x}$, откуда $\mathbf{x}\oplus\mathbf{y} = \mathbf{x}+i\mathbf{y}$. Таким образом, $(\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}} = \mathbf{V}_n\oplus\mathbf{V}_n, \varphi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n\oplus\mathbf{V}_n)$ — комплексификация пространства $\mathbf{V}_n$.

**Функтор комплексификации аффинных пространств.**

При построении функтора комплексификации аффинных пространств $(\mathcal{A}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$ сначала нужно выбрать некоторый фуктор комплексификации векторных пространств. Считаем, что это уже осуществлено. Множество $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}} \supset \mathcal{A}_n$ построим, исходя из того, что каждая точка $M \in \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ является концом некоторого вектора $\overrightarrow{AM} = \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$, начало которого лежит в $\mathcal{A}_n$. Поскольку точка $A$ при этом может быть выбрана произвольно, то точке $M \in \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ однозначно соответствует класс векторов $\{\overrightarrow{BM} \mid B \in \mathcal{A}_n\}$. Поэтому к определению комплексификации $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ можно подойти следующим образом. На прямом произведении $\mathcal{A}_n \times \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ введем отношение эквивалентности $\{A, \mathbf{v}\} \sim \{B, \mathbf{u}\}$, если $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \mathbf{u}$, и положим $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}} = (\mathcal{A}_n \times \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}})/\sim$ (см. рис. 17).

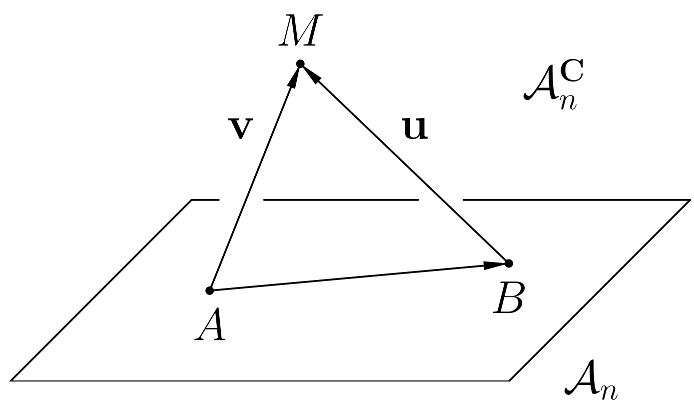



Рис. 17.

Отображение $\psi^{\mathbf{C}}$, относящее паре точек $M, N \in \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ вектор $\overrightarrow{MN} \in \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$, определяется следующим образом: если точки $M$ и $N$ задаются соответственно парами $\{A, \mathbf{v}\}$ и $\{B, \mathbf{w}\}$, то $\overrightarrow{MN} = -\mathbf{v} + \overrightarrow{AB} + \mathbf{w}$ (см. рис. 18).

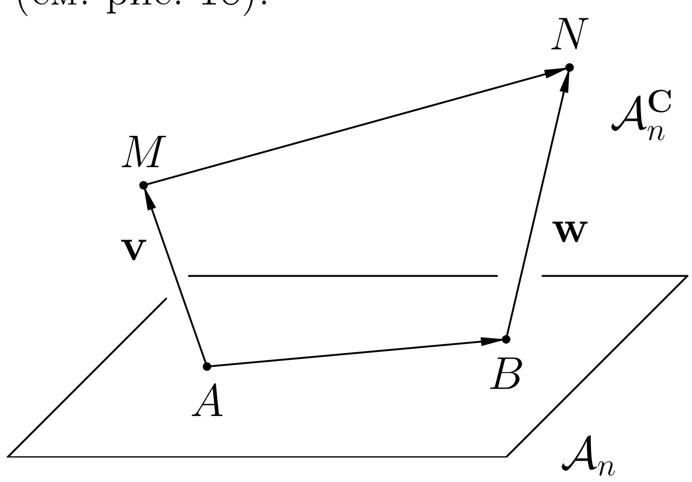



Рис. 18.

Корректность определения отображения $\psi^{\mathbf{C}}$ доказывается следующим образом. Если $\{A', \mathbf{v}'\}$ и $\{B', \mathbf{w}'\}$ — другие две пары, задающие точки $M$ и $N$ соответственно, то $-\mathbf{v}' + \overrightarrow{A'B'} + \mathbf{w}' = (-\mathbf{v} + \overrightarrow{AA'}) + \overrightarrow{A'B'} + (\overrightarrow{B'B} + \mathbf{w}) = -\mathbf{v} + \overrightarrow{AB} + \mathbf{w}$ (см. рис. 19).

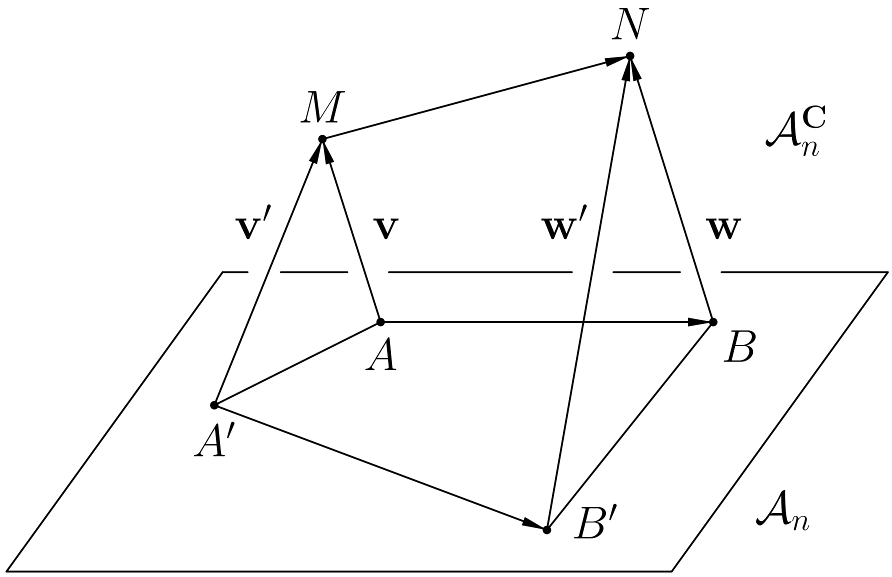



Рис. 19.

**Рекомендуемая литература:** [16], Лекция 19; [1], Гл. XI, XII; [2], Гл. IV, §§24–28; [12], Гл. 4, §1.

**Задачи и упражнения:** [20], 1297, 1298, 1299, 1300, 1308, 1310, 1311, 1312, 1313, 1317, 1318, 1319, 1320, 1321, 1322, 1328, 1337, 1338, 1340, 1341; [23], 920, 921, 922, 923, 924, 926, 927, 928, 936, 940, 943, 946, 948; [4], 814, 815, 816, 817, 818, 819, 821, 822, 823, 824, 825, 844, 845, 846, 853.

## 2 Евклидово аффинное пространство

**Определение.** *Евклидовым аффинным пространством называется аффинное пространство $\mathcal{E}_n$, ассоциированное с евклидовым векторным пространством $(\mathbf{E}_n, g)$.*

Билинейная форма

$$g : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \ni \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R},$$

относящая паре векторов их скалярное произведение, называется *основной* или *метрической* формой евклидова пространства $\mathbf{E}_n$. Эта форма по определению удовлетворяет двум условиям: 1) она симметрична, то есть $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_n$, 2) квадратичная форма

$$\mathbf{E}_n \ni \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}$$

положительно определена, то есть $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ при любом $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ и $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**Предложение.** *Пусть $(\mathbf{E}_n, g)$ — евклидово пространство, а $\mathbf{E}_m \subset \mathbf{E}_n$ — подпространство и $g'$ — ограничение формы $g$ на подпространство $\mathbf{E}_m$, то есть $g'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_m$. Тогда $(\mathbf{E}_m, g')$ — евклидово пространство.*

**Доказательство** очевидно: $g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ и $g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

**Определение.** *Пусть $(\mathbf{E}_n, g)$ и $(\mathbf{E}'_n, g')$ — евклидовы векторные пространства. Изоморфизм векторных пространств $\varphi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$ называется изоморфизмом евклидовых векторных пространств, если*

$$g'(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_n.$$

*Если существует изоморфизм евклидовых векторных пространств $\varphi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$, то евклидовы векторные пространства $(\mathbf{E}_n, g)$ и $(\mathbf{E}'_n, g')$ называются изоморфными.*

**Предложение.** *Любые два евклидовы векторные пространства* $(\mathbf{E}_n, g)$ *и* $(\mathbf{E}'_n, g')$ *одной размерности изоморфны.*

**Доказательство.** Выберем в этих пространствах ортонормированные базисы $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}'_i\}$ и рассмотрим линейное отображение

$$\varphi : \mathbf{E}_n \ni \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \longmapsto \mathbf{x}' = x^i \mathbf{e}'_i \in \mathbf{E}'_n.$$

Очевидно $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$. $\square$

Множество $O(\mathbf{E}_n)$ всех изоморфизмов $\varphi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_n$ евклидова пространства $\mathbf{E}_n$ на себя образует группу относительно композиции, являющуюся подгруппой в группе $GL(\mathbf{E}_n)$ всех линейных изоморфизмов пространства $\mathbf{E}_n$ на себя. Действительно, если $\varphi, \theta \in O(\mathbf{E}_n)$, то для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_n$ выполняется

$$\begin{aligned} g((\varphi \circ \theta)(\mathbf{x}), (\varphi \circ \theta)(\mathbf{y})) = g(\varphi(\theta(\mathbf{x})), \varphi(\theta(\mathbf{y}))) = \\ = g(\theta(\mathbf{x}), \theta(\mathbf{y})) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{25}$$

Пусть $\varphi \in O(\mathbf{E}_n)$ и $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{E}_n$, тогда $\delta_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\varphi(\mathbf{e}_i), \varphi(\mathbf{e}_j)) = (\varphi_i^m \mathbf{e}_m, \varphi_j^k \mathbf{e}_k) = \varphi_i^m \varphi_j^k \delta_{mk} = \sum_{k=1}^n \varphi_i^k \varphi_j^k$, что эквивалентно тому, что $\Phi = (\varphi_i^k)$ — ортогональная матрица ($\Phi^\top \Phi = E$, столбцы матрицы $\Phi$ образуют ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$).

**Определение.** *Пусть* $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$ *и* $(\mathcal{E}'_n, \mathbf{E}'_n, \psi')$ *— евклидовы аффинные пространства. Изоморфизм аффинных пространств* $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_n$ *называется изоморфизмом евклидовых аффинных пространств, если ассоциированный изоморфизм векторных пространств* $\widehat{\alpha} : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$ *является изоморфизмом евклидовых векторных пространств.*

**Предложение.** *Любые два евклидовы аффинные пространства* $\mathcal{E}_n$ *и* $\mathcal{E}'_n$ *одной размерности изоморфны.*

**Доказательство.** Выберем в пространствах $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}'_n$ ортонормированные реперы $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$ и установим соответствие между точками, имеющими одинаковые координаты по отношению к этим реперам. □

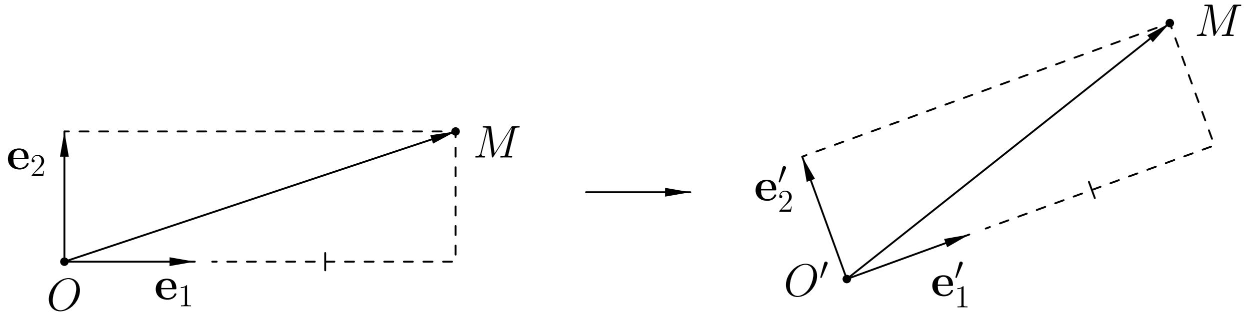



Рис. 20.

**Предложение.** *Пусть* $\{\mathbf{e}_i\}$ *— базис (не обязательно ортонормированный) в евклидовом пространстве* $\mathbf{E}_n$ *и* $(g_{ij})$ *— матрица скалярного произведения в этом базисе* $(g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))$*. Тогда*

$$\det(g_{ij}) > 0. \tag{26}$$

**Доказательство.** Выберем некоторый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ в пространстве $\mathbf{E}_n$, и пусть $\mathbf{e}_{i'} = p^i_{i'}\mathbf{e}_i$. Обозначим $G = (g_{ij})$, $G' = (g_{i'j'})$, $P = (p^i_{i'})$. Как было выяснено ранее (см. [27], с. 10), $G' = P^\top G P$, откуда $\det G' = \det P^\top \det G \det P$. Поскольку $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ — ортонормированный базис и, следовательно, $\det G' = 1$, а $\det P^\top = \det P$, то $(\det G)(\det P)^2 = 1$, что и доказывает предложение. □

**Предложение (неравенство Коши-Буняковского).** *Для любых двух векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *евклидова пространства* $\mathbf{E}_n$ *выполняется неравенство*

$$-|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \tag{27}$$

**Доказательство.**

1) Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы и $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, то соотношение (27) принимает вид

$$-|\lambda||\mathbf{x}||\mathbf{x}| \leqslant \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leqslant |\lambda||\mathbf{x}||\mathbf{x}|$$

и выполняется очевидным образом (одно из неравенств оказывается равенством).

2) Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы, то они образуют базис в двумерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}_2 = \mathcal{L}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset \mathbf{E}_n$. Тогда по предыдущему предложению

$$\det \begin{pmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{x}) & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}) & (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} > 0 \iff$$
$$\iff (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 > 0 \iff |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 > (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2.$$

$\square$

**Следствие.** *В формуле* (27) *равенство может иметь место только в случае, когда* $\mathbf{x} \| \mathbf{y}$. $\square$

При $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ из (27) следует, что

$$-1 \leqslant \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \leqslant 1,$$

поэтому существует единственное число $\theta \in [0; \pi]$ такое, что

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}. \tag{28}$$

**Определение.** *Число* $\theta \in [0; \pi]$, *однозначно определяемое формулой* (28), *называется углом между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *евклидова пространства* $\mathbf{E}_n$.

**Определение.** *Пусть* $\mathcal{E}_n$ — *евклидово аффинное пространство и* $A, B \in \mathcal{E}_n$. *Число*

$$\mathrm{dist}\,(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

*называется расстоянием между точками* $A$ *и* $B$.

**Предложение.** $\mathrm{dist}\,(A, B) = 0 \iff A = B$. $\square$

**Предложение.** *Имеет место следующее неравенство, называемое «неравенством треугольника»:*

$$\mathrm{dist}\,(A, B) + \mathrm{dist}\,(B, C) \geqslant \mathrm{dist}\,(A, C).$$

**Доказательство.** Воспользуемся свойствами скалярного произведения и неравенством Коши-Буняковского. Имеем: $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + |\overrightarrow{BC}|^2 \leqslant |\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|^2 = (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|)^2$. $\square$

**Движения евклидова аффинного пространства $\mathcal{E}_n$.**

**Определение.** *Движением евклидова аффинного пространства $\mathcal{E}_n$ называется изоморфизм евклидовых аффинных пространств $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$.*

В соответствии со свойствами движений аффинных пространств, движение евклидова аффинного пространства $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ переводит точку $M$, имеющую координаты $\{x^i\}$ относительно некоторого ортонормированного репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$, в точку $M'$, имеющую такие же координаты $\{x^i\}$ относительно ортонормированного репера $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$, где $O' = \alpha(O)$, а $\mathbf{e}'_i = \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i) = \alpha_i^j \mathbf{e}_j$.

Множество $GO(\mathcal{E}_n)$ всех движений евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ образует группу относительно композиции, являющуюся подгруппой в группе $GA(\mathcal{E}_n)$ всех аффинных движений пространства $\mathcal{E}_n$. Действительно, если $\alpha, \beta \in GO(\mathcal{E}_n)$, то $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in O(\mathbf{E}_n)$ и, следовательно (см. (25)), $\widehat{\alpha \circ \beta} = \widehat{\alpha} \circ \widehat{\beta} \in O(\mathbf{E}_n)$.

В системе координат в пространстве $\mathcal{E}_n$, определяемой ортонормированным репером $\{O; \mathbf{e}_i\}$, движение $\alpha \in GO(\mathcal{E}_n)$ имеет уравнения

$$y^i = a_k^i x^k + b^i,$$

где $(a_k^i)$ — ортогональная матрица (см. с. 41).

В частности, движение $\alpha$ евклидовой плоскости $\mathcal{E}_n$, сохраняющее ориентацию, имеет следующие уравнения в прямоугольной системе координат:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi$. Движение евклидовой плоскости $\mathcal{E}_n$, не сохраняющее ориентацию, имеет уравнения:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

**Замечание.** Соответствие, относящее точке $M \in \mathcal{E}_n$ ее координаты $\{x^i\}$ относительно ортонормированного репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$, представляет собой изоморфизм евклидовых аффинных пространств $h : \mathcal{E}_n \to \mathbf{R}^n$. Преобразование $x^i = p^i_{i'} x^{i'} + b^i$ прямоугольных координат в $\mathcal{E}_n$ представляет собой евклидово движение $h \circ (h')^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[rr, "h \circ (h')^{-1}"] & & \mathbf{R}^n \\ & \mathcal{E}_n \arrow[ul, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

**Проекция вектора на подпространство.**

Пусть $m$-мерное подпространство $\mathbf{E}_m$ в $\mathbf{E}_n$ задано как линейная оболочка своего базиса: $\mathbf{E}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$. Всякий вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ однозначно представляется в виде суммы $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_m$, $\mathbf{z} \in \mathbf{E}_m^\perp$. Вектор $\mathbf{y}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $\mathbf{E}_m$. Вектор $\mathbf{z}$ при этом называют *ортогональной составляющей*. Поскольку $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_m$, то этот вектор можно разложить по базису $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ подпространства $\mathbf{E}_m$: $\mathbf{y} = y^\alpha \mathbf{a}_\alpha$. Таким образом, для нахождения вектора $\mathbf{y}$ нужно найти числа $y^\alpha$, удовлетворяющие соотношению

$$\mathbf{x} = y^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{z}, \tag{29}$$

где $\mathbf{z} \in \mathbf{E}_m^\perp$. Умножая скалярно равенство (29) на $\mathbf{a}_\beta$, получаем систему уравнений для координат $y^\alpha$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}_\beta) = y^\alpha g_{\alpha\beta}, \quad \text{где} \quad g_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta). \tag{30}$$

Так как матрица $(g_{\alpha\beta})$ скалярного произведения векторов базиса пространства $\mathbf{E}_m$ невырождена, система (30) имеет единственное решение. Это решение, например, может быть найдено следующим образом:

$$y^\alpha = g^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_\beta),$$

где $(g^{\alpha\beta})$ — матрица, обратная матрице $g_{\alpha\beta}$.

Проекцию $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $\mathbf{E}_m$ будем обозначать следующим образом: $\mathbf{y} = \mathrm{pr}_{\mathbf{E}_m}\mathbf{x}$.

**Угол между вектором и подпространством.**

**Определение.** *Углом между вектором* $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ *и подпространством* $\mathbf{E}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *называется наименьший из углов, образуемых вектором* $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ *с векторами, принадлежащими подпространству* $\mathbf{E}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$.

Этот угол совпадает с углом между вектором $\mathbf{x}$ и проекцией $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $\mathbf{E}_m$. Для доказательства того, что угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ меньше угла между $\mathbf{x}$ и любым вектором $\mathbf{u} \in \mathbf{E}_m$, неколлинеарным вектору $\mathbf{y}$, достаточно рассмотреть трехмерное подпространство $\mathbf{E}_3 = \mathcal{L}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}\}$, для которого этот результат уже известен.

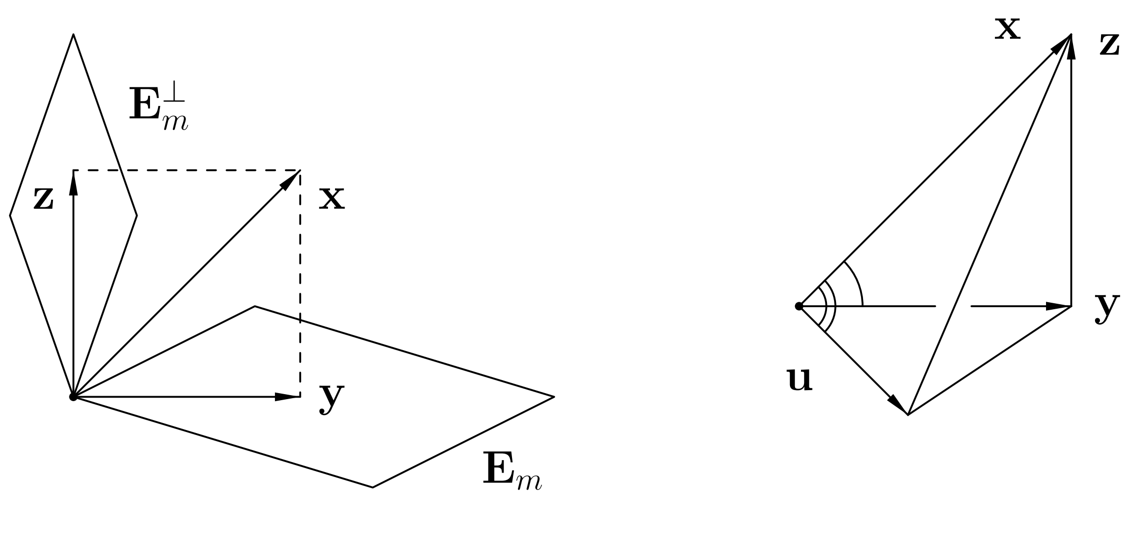



Рис. 21.

**Расстояние от точки до $m$-плоскости в $\mathcal{E}_n$.**

**Определение.** *Расстоянием* $\operatorname{dist}(A, \pi_m)$ *от точки* $A \in \mathcal{E}_n$ *до* $m$*-плоскости* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{E}_m\}$ *называется наименьшее из расстояний от точки* $A$ *до точек из* $\pi_m$*.*

Существует единственная точка $B \in \pi_m$ такая, что вектор $\overrightarrow{AB}$ ортогонален $\mathbf{E}_m$ — это единственная точка пересечения плоскостей $\pi_m$ и $\pi'_{n-m} = \{A, \mathbf{E}_m^{\perp}\}$. Покажем, что $\operatorname{dist}(A, \pi_m) = |\overrightarrow{AB}|$. Действительно, для любой другой точки $C \in \pi_m$ имеем: $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 > \overrightarrow{AB}^2$, поскольку $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Поскольку $\overrightarrow{AB} = \operatorname{pr}_{\mathbf{E}_m^{\perp}} \overrightarrow{AM_0}$, то

$$\operatorname{dist}(A, \pi_m) = |\operatorname{pr}_{\mathbf{E}_m^{\perp}} \overrightarrow{AM_0}|.$$

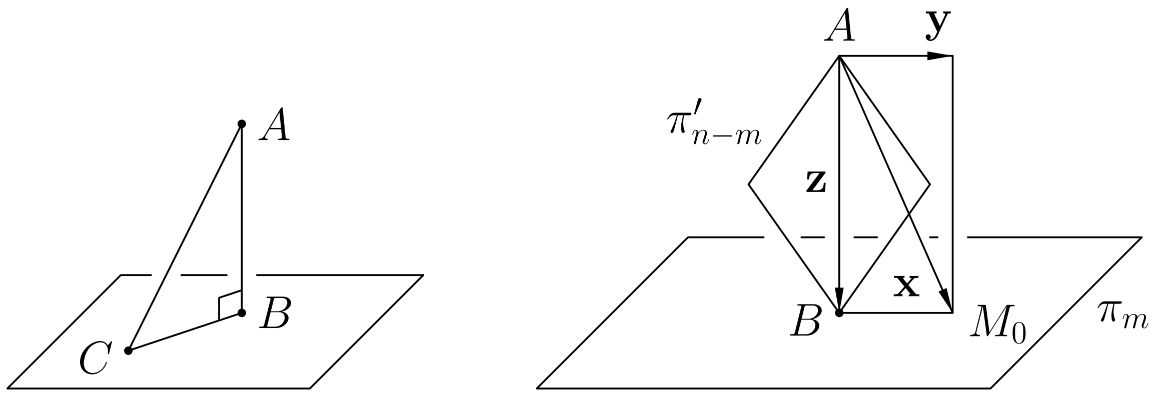



Рис. 22.

Если $m$-плоскость $\pi_m$ с направляющим подпространством $\mathbf{E}_m$ задана системой из $n - m$ линейных уравнений

$$b_i^a x^i + b_{n+1}^a = 0, \quad a = 1, \ldots, n - m, \tag{31}$$

относительно системы координат в $\mathcal{E}_n$, определяемой ортонормированным репером, то

$$\mathbf{E}_m^{\perp} = \mathcal{L}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}\}, \quad \text{где} \quad \mathbf{b}_a = \sum_{i=1}^{n} b_i^a \mathbf{e}_i.$$

В частности, для гиперплоскости $\pi_{n-1}$, заданной уравнением

$$A_i x^i + A_{n+1} = 0, \tag{32}$$

вектор с координатами $\{A_1, \ldots, A_n\}$ является нормальным вектором (ненулевым вектором из одномерного подпространства, ортогонального к направляющему подпространству гиперплоскости). Поэтому, рассуждая аналогично случаю пространства размерности 3, получим следующую формулу для расстояния от точки $M(x^i_M)$ до гиперплоскости (32):

$$\operatorname{dist}(A, \pi_{n-1}) = \frac{|A_i x^i_M + A_{n+1}|}{\sqrt{A_1^2 + \ldots + A_n^2}}.$$

**Форма объема.**

**Определение.** *Отображение*

$$\varepsilon : \underbrace{\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \times \ldots \times \mathbf{V}_n}_{p} \ni \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\} \ \mapsto \ \varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) \in \mathbf{R}$$

*называется полилинейным ($p$-линейным), если оно линейно по каждому из $p$ его аргументов.*

В координатах, определяемых базисом $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathbf{V}_n$, получаем $\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = \varepsilon(x_1^{i_1}\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, x_p^{i_p}\mathbf{e}_{i_p}) = \varepsilon_{i_1 \ldots i_p} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p}$, где $\varepsilon_{i_1 \ldots i_p} = \varepsilon(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p})$. Числа $\varepsilon_{i_1 \ldots i_p}$ называются координатами отображения $\varepsilon$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Поскольку каждый индекс $i_1, \ldots, i_p$ у координат $\varepsilon_{i_1 \ldots i_p}$ может принимать любое значение от 1 до $n$, то общее количество координат у отображения $\varepsilon$ равно $n^p$.

**Определение.** *Полилинейное отображение*

$$\varepsilon : \underbrace{\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \times \ldots \times \mathbf{V}_n}_{p} \to \mathbf{R}$$

*называется кососимметричным (внешней $p$-формой), если при перестановке аргументов $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ с помощью подстановки*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix} \qquad (33)$$

*значение отображения $\varepsilon$ умножается на знак этой подстановки:*

$$\varepsilon(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p). \tag{34}$$

Условие (34) эквивалентно тому, что $\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ меняет знак при перестановке любых двух аргументов (это соответствует транспозициям $\sigma = (ij)$).

Раскладывая аргументы в соотношении (34) по базису, получим, что для выполнения условия (34) достаточно, чтобы оно выполнялось при подстановке в качестве аргументов всевозможных комбинаций базисных векторов. Таким образом, полилинейное отображение $\varepsilon$ кососимметрично тогда и только тогда, когда число $\varepsilon_{i_1 \ldots i_p}$ меняет знак при перестановке любых двух индексов. При этом, в частности, $\varepsilon_{i_1 \ldots i_p}$ равняется нулю, если какие-то два индекса совпадают.

Нас будут интересовать кососимметричные отображения $n$ аргументов — внешние $n$-формы. Пусть $\varepsilon$ — некоторая внешняя $n$-форма. Тогда для произвольной подстановки (33) выполняется

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \operatorname{sgn}(\sigma)\varepsilon_{12 \ldots n} \tag{35}$$

и $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = 0$, если среди индексов $i_1, \ldots, i_n$ есть одинаковые. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) &= \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\varepsilon_{12 \ldots n} x_1^{\sigma(1)} \ldots x_n^{\sigma(n)} = \varepsilon_{12 \ldots n} \det(x_k^i). \end{aligned} \tag{36}$$

Таким образом, всякая внешняя $n$-форма определяется одним числом $\varepsilon_{12 \ldots n}$, и всякие две внешние $n$-формы пропорциональны. Поэтому векторное пространство $\Lambda^n(\mathbf{V}_n)$ всех внешних $n$-форм на векторном пространстве $\mathbf{V}_n$ имеет размерность 1.

Из (36) вытекает следующая формула преобразования координаты $\varepsilon_{12\ldots n}$ при замене базиса $\mathbf{e}_{i'} = p^i_{i'}\mathbf{e}_i$:

$$\varepsilon_{1'2'\ldots n'} = \varepsilon(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = \varepsilon_{12\ldots n} \det(p^i_{i'}).$$

**Определение.** *Формой объема на ориентированном евклидовом векторном пространстве $\mathbf{E}_n$ называется внешняя $n$-форма $\varepsilon$ на $\mathbf{E}_n$ такая, что $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для всякого правого ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$.*

**Определение.** *Параллелепипедом ($n$-мерным) в векторном пространстве $\mathbf{V}_n$, построенном на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, называется следующее подмножество в $\mathbf{V}_n$:*

$$\mathrm{P}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n \,|\, \mathbf{x} = t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^n\mathbf{a}_n,\ 0 \leqslant t^1, \ldots, t^n \leqslant 1\}.$$

*Значение формы объема $\varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ называется ориентированным объемом $n$-мерного параллелепипеда $\mathrm{P}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ в ориентированном евклидовом векторном пространстве $\mathbf{E}_n$.*

*Число*

$$\mathrm{vol}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = |\varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)| \tag{37}$$

*называется объемом $n$-мерного параллелепипеда $\mathrm{P}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ в $\mathbf{E}_n$.*

Поскольку при смене ориентации в $\mathbf{E}_n$ форма объема меняется на противоположную, то понятие объема параллелепипеда сохраняет свой смысл и в неориентированном пространстве.

Выбирая одну из двух возможных $n$-форм на $\mathbf{E}_n$, удовлетворяющих условию $|\varepsilon_{12\ldots n}| = 1$ в ортонормированных базисах, мы тем самым определяем ориентацию в $\mathbf{E}_n$, по отношению к которой эта форма будет формой объема.

**Свойства формы объема.**

$1^\circ$. $\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) > 0 \iff \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — правый базис,
$\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) < 0 \iff \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — левый базис,

$\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = 0 \iff$ векторы $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ линейно зависимы.

Это свойство является прямым следствием формулы (36).

$$2^\circ. \quad \varepsilon(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det \|(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_\ell)\|. \tag{38}$$

Здесь и ниже для матрицы с компонентами $a_{ij}$ используется обозначение $\|a_{ij}\|$.

**Доказательство.** Аналогично случаю трехмерного пространства, переходя к координатам, определяемым правым ортонормированным базисом, имеем:

$$\det \|(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_\ell)\| = \det \Big\| \sum_{i=1}^{n} u_k^i v_\ell^i \Big\| =$$
$$= \det(\|u_k^i\| \cdot \|v_\ell^j\|^\top) = \det \|u_k^i\| \cdot \det \|v_\ell^j\|. \ \square$$

$$3^\circ. \quad (\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n))^2 = \det \|(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_\ell)\|. \tag{39}$$

**Доказательство.** Достаточно положить в (38) $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i$. $\square$

$4^\circ$. $\quad (\varepsilon_{i_1 \ldots i_n})^2 = \det(g_{ij})$.

**Доказательство.** Достаточно подставить $\mathbf{x}_k = \mathbf{e}_k$ в формулу (39). $\square$

$5^\circ$. На всяком ориентированном подпространстве $\mathbf{E}_m \subset \mathbf{E}_n$, $n \geqslant m \geqslant 1$, возникает своя форма объема. Объем $m$-мерного параллелепипеда в $\mathbf{E}_n$ поэтому можно вычислять, используя формулу (39):

$$\operatorname{vol}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = \sqrt{\det \mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)}, \tag{40}$$

где

$$\mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_m) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_m) \end{pmatrix}$$

— матрица, составленная из скалярных произведений векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, называемая *матрицей Грама.*

**Замечания.**

1. По формуле (40) можно вычислять объемы в том числе и $n$-мерных параллелепипедов.

2. Из формулы (40) следует, что $\det \mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_m$ линейно зависимы.

6°. Предположим, что пространство $\mathbf{E}_n$ разложено в прямую сумму

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_m \oplus \mathbf{E}_m^{\perp}, \text{ где } \mathbf{E}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\},\ \mathbf{E}_m^{\perp} = \mathcal{L}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}\}.$$

Тогда

$$\mathrm{vol}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}) = \mathrm{vol}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) \cdot \mathrm{vol}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}).$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулой (40), которая справедлива при любом $m = 1, \ldots, n$. Из того, что $(\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{b}_a) = 0$ для всех $\alpha = 1, \ldots m$ и всех $b = 1, \ldots, n - m$, получаем

$$\mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}) = \\ = \begin{pmatrix} \mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) & 0 \\ 0 & \mathrm{G}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}) \end{pmatrix},$$

откуда и следует результат. $\square$

**Формула для вычисления расстояния от точки до $m$-плоскости.**

Пусть заданы точка $M_1$ с радиус-вектором $\mathbf{r}_1$ и $m$-плоскость $\pi_m$, имеющая параметрические уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$. Расстояние от $M_1$ до $\pi_m$ находится как «высота» $(m + 1)$-мерного параллелепипеда $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$, основанием которого является $m$-мерный параллелепипед $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$:

$$\mathrm{dist}(M_1, \pi_m) = \frac{\sqrt{\det \mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)}}{\sqrt{\det \mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)}}.$$

Действительно, определитель $\det \mathrm{G}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ не изменится, если заменить точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ на $M_0'(\mathbf{r}_0') \in \pi_m$ с радиус-вектором $\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}_0 + \lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ такую, что $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0') \perp \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$. Для нахождения коэффициентов $\lambda_\alpha$ нужно решить систему уравнений

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 - \lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, m,$$

или

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_\beta) = \lambda^\alpha (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta), \quad \beta = 1, \ldots, m. \tag{41}$$

Поскольку матрица системы уравнений (41) — это матрица Грама линейно независимого набора векторов $\mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m$, эта система имеет единственное решение.

**Векторное произведение в $\mathbf{E}_n$.**

Канонический изоморфизм $\mathbf{E}_n \cong \mathbf{E}_n^*$, $\mathbf{x} \mapsto \widetilde{\mathbf{x}}$, где $\widetilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, позволяет определить аналог векторного произведения в $\mathbf{E}_n$.

Фиксируя в форме объема $\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ первые $n-1$ аргументов $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{a}_{n-1}$, а последний оставляя произвольным: $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, получим линейную форму

$$\widetilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}).$$

Форме $\widetilde{\mathbf{b}} \in \mathbf{E}_n^*$ в каноническом изоморфизме соответствует некоторый вектор $\mathbf{b} \in \mathbf{E}_n$. В результате получаем отображение

$$\widetilde{\varepsilon} : \underbrace{\mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \times \ldots \times \mathbf{E}_n}_{n-1} \ni \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\} \mapsto \mathbf{b} \in \mathbf{E}_n,$$

где

$$(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}). \tag{42}$$

**Определение.** *Вектор* $\mathbf{b}$, *однозначно определяемый соотношением* (42), *называется векторным произведением векторов* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$.

*Векторное произведение обозначается следующим образом:*

$$\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}].$$

**Свойства векторного произведения.**

$1^\circ$. Отображение $\widetilde{\varepsilon} : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \times \ldots \times \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_n$ полилинейно и кососимметрично.

Это свойство вытекает из полилинейности и кососимметричности формы объема. Детали доказательства остаются в качестве упражнения.

$2^\circ$. Если $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]$, то $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_k) = 0$, $k = 1, \dots, n-1$.

Для доказательства этого свойства достаточно подставить $\mathbf{x} = \mathbf{a}_k$ в формулу (42).

$3^\circ$. Если векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ линейно независимы и $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]$, то $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ — правый базис.

**Доказательство.** Действительно, из (42) следует, что

$$\varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|^2 > 0.$$

$\square$

$4^\circ$. $|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]| = \mathrm{vol}\,(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]$. Применяя формулу (42) и учитывая свойство $6^\circ$ формы объема, получаем что $|\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}) = \mathrm{vol}\,(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}) = \mathrm{vol}\,(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \cdot |\mathbf{b}|$. $\square$

$5^\circ$. В системе координат, определяемой правым ортонормированным базисом,

$$[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}] = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{n-1}^1 & \mathbf{e}_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n-1}^n & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}. \qquad (43)$$

**Доказательство.** Умножив вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]$ скалярно на вектор $\mathbf{e}_i$, получим

$$b^i = (\mathbf{b}, \mathbf{e}_i) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{e}_i) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{n-1}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^i & a_2^i & \dots & a_{n-1}^i & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n-1}^n & 0 \end{vmatrix},$$

что очевидно совпадает с $i$-той координатой вектора, стоящего в правой части равенства (43).

6°. В произвольной системе координат в $\mathbf{E}_n$ координаты вектора $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]$ вычисляются следующим образом:

$$b^j = \widetilde{\varepsilon}_{i_1 \dots i_{n-1} \cdot}{}^{j} a_1^{i_1} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\varepsilon}_{i_1 \dots i_{n-1} \cdot}{}^{j} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1} k} g^{kj}.$$

**Доказательство.** Поскольку $\widetilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x})$, то

$$b_k = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1} k} a_1^{i_1} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}}$$

и

$$b^j = b_k g^{kj} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1} j} g^{jm} a_1^{i_1} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}}.$$

$\square$

**Поведение объемов при аффинных преобразованиях.**

Пусть аффинное преобразование $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_k\}$ задано уравнениями $y^i = \alpha^i_j x^j + b^i$. Объем $\operatorname{vol}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ $n$-мерного параллелепипеда $\mathrm{P}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ в соответствии с формулой (37) равен $|\det(u^j_k)|$. При аффинном преобразовании $\alpha$ параллелепипед $\mathrm{P}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ переходит в параллелепипед $\mathrm{P}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, где $\mathbf{v}_k = \widehat{\alpha}(\mathbf{u}_k)$, $v^i_k = \alpha^i_j u^j_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) &= |\det(v^i_k)| = |\det(\alpha^i_j u^j_k)| = \\ &= |\det(\alpha^i_j)| \cdot |\det(u^\ell_k)| = |\det(\alpha^i_j)| \cdot \operatorname{vol}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n). \end{aligned}$$

Таким образом, для $n$-мерных тел в $\mathcal{E}_n$, для которых определено понятие объема (например, для многогранников), справедливо следующее предложение.

**Предложение.** *Пусть при аффинном преобразовании* $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ *$n$-мерное тело* $\Phi \subset \mathcal{E}_n$ *переходит в тело* $\Phi'$. *Тогда отношение объемов* $\mathrm{vol}\,(\Phi')/\mathrm{vol}\,(\Phi)$ *есть величина постоянная для данного аффинного преобразования* $\alpha$, *равная объему образа* $\alpha(C)$ *$n$-мерного куба $C$ с ребром единичной длины.*

Ребра $n$-мерного куба $C$, выходящие из одной точки, представляют собой векторы $\{\mathbf{e}_k\}$ ортонормированного репера $\{O; \mathbf{e}_k\}$. В системе координат, определяемой этим репером, куб $C$ задается системой неравенств $0 \leqslant x^i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

**Определение.** *Аффинное преобразование* $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ *называется эквиаффинным, если при этом преобразовании объемы тел не изменяются.*

Аффинное преобразование $\alpha$ является эквиаффинным тогда и только тогда, когда в системе координат, определяемой ортонормированным репером, $|\det(\alpha^i_j)| = 1$.

**Задача 17.** Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины противоположных ребер тетраэдра, делит его объем пополам.

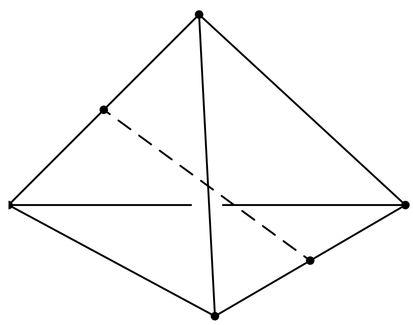


Рис. 23.

**Решение.** Всякий тетраэдр можно перевести аффинным преобразованием в правильный тетраэдр. Поскольку отношение объемов тел сохраняется при аффинных преобразованиях, то задачу достаточно решить для правильного тетраэдра. Но прямая, соединяющая середины противоположных ребер правильного тетраэдра, является его осью симметрии. $\triangleright$

**Задача 18.** Доказать, что площадь треугольника, сторонами которого являются два сопряженных полудиаметра эллипса и хорда, соединяющая их концы, не зависит от выбора диаметров.

**Решение.** Пусть эллипс задан уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. При аффинном преобразовании

$$x'=\frac{x}{a},\quad y'=\frac{y}{b}$$

этот эллипс переходит в окружность с уравнением $x^2+y^2=1$. Всякий треугольник $OAB$ описанного в задаче вида при этом переходит в равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами длины 1. Отсюда следует что площадь треугольника $OAB$ равна $ab/2$. $\triangleright$

**Задача 19.** Около эллипса описан четырехугольник. Доказать, что сумма площадей двух треугольников, имеющих общей вершиной центр эллипса, а основаниями соответственно две противоположные стороны четырехугольника, равна сумме площадей двух других таких треугольников.

**Решение.** Для решения задачи нужно аффинным преобразованием перевести эллипс в окружность и воспользоваться свойствами четырехугольника, описанного около окружности. $\triangleright$

**Рекомендуемая литература:** [12], Гл. 4; [21], Гл. II, §§1, 2, 4, Гл. III; [1], Гл. XVI.

**Задачи и упражнения:** [20], 1366, 1367, 1370, 1371, 1374, 1377, 1402, 1403; [23], 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 971, 981, 1003; [4], 867, 873, 881, 882, 887, 888, 892.

# 3 Гиперповерхности второго порядка в аффинном пространстве

Рассматриваем аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ вместе с некоторой его комплексификацией $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$.

**Определение.** *Гиперповерхностью второго порядка в* $\mathcal{A}_n$ *называется множество точек* $\Phi \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, *которое в системе координат, определяемой некоторым аффинным репером* $\{O; \mathbf{e}_i\}$ *пространства* $\mathcal{A}_n$, *задается уравнением второй степени*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x^i)^2 + \sum_{i<j}^{n} 2a_{ij}x^i x^j + \sum_{i=1}^{n} 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0. \qquad (44)$$

Множество $\Phi \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, очевидно, не является пустым. Придавая всем, кроме одной, координатам произвольные значения (из $\mathbf{C}$), получим квадратное (или линейное) уравнение, которое разрешимо над $\mathbf{C}$.

Многочлен в левой части уравнения (44) будем обозначать для краткости $F(x^k)$ или $F(x^1, \ldots, x^n)$.

Множество $\Phi$ при $n = 2$ называется кривой второго порядка, а при $n = 3$ — поверхностью второго порядка. Уравнение кривой второго порядка в $\mathcal{A}_2$ имеет вид

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0, \quad (45)$$

а уравнение поверхности второго порядка в $\mathcal{A}_3$ вид

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + \\ + 2a_{23}x^2x^3 + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0.$$

Полагая, по определению, что $a_{ji} = a_{ij}$ при $j > i$, уравнение (44) можно переписать в виде

$$a_{ij}x^ix^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0, \qquad a_{ij},\ a_{i\,n+1} \in \mathbf{R}. \qquad (46)$$

Каждое произведение $x^k x^\ell$ при фиксированных значениях индексов $k \neq \ell$ встречается в сумме $a_{ij}x^i x^j$ в уравнении (46) два раза: $x^k x^\ell$ с коэффициентом $a_{k\ell}$ и $x^\ell x^k$ с коэффициентом $a_{\ell k}$. Например, $x^2x^5$ содержится в слагаемых $a_{25}x^2x^5$ и $a_{52}x^5x^2$.

В дальнейшем всегда будем считать, что поверхность задана уравнением (46), в котором $a_{ij} = a_{ji}$. Кроме того, будем также всегда полагать, что $a_{n+1\,j} = a_{j\,n+1}$. Тогда из коэффициентов уравнения (46) можно составить две следующие симметричные матрицы: $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ и $\widetilde{A} = (a_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n+1$. Матрица $A = (a_{ij})$ состоит из коэффициентов при $x^i x^j$, а в матрице $\widetilde{A} = (a_{\alpha\beta})$ присутствуют все коэффициенты. Например, при $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что матрицы $A$ и $\widetilde{A}$ являются матрицами некоторых квадратичных форм, ассоциированных с уравнением (46).

**Преобразование коэффициентов уравнения (46) при замене аффинного репера.**

Отметим, что предметом исследования в настоящий момент является уравнение (46), а не определяемое им множество точек. Мы не будем осуществлять никаких действий с уравнением в той системе координат, в которой оно рассматривается. Например, умножение многочлена $F(x^k)$ в левой части уравнения (46) на ненулевое вещественное число не изменяет множество $\Phi$, но изменяет само уравнение. Отметим также, что в настоящий момент мы считаем неизвестным, как именно связаны между собой уравнение и определяемое им множество точек.

Рассмотрим новую систему координат в $\mathcal{A}_n$, определяемую репером $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$. При переходе к новому реперу координаты точек в $\mathcal{A}_n$ преобразуются следующим образом:

$$x^i = p^i_{i'} x^{i'} + b^i. \tag{47}$$

Подставляя выражения (47) в уравнение (46), получим уравнение $F'(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) = 0$ гиперповерхности $\Phi$ в новой системе координат. Имеем

$$\begin{gathered}F(x^k) = a_{ij} x^i x^j + 2a_{i\,n+1} x^i + a_{n+1\,n+1} = \\ a_{ij}(p^i_{i'} x^{i'} + b^i)(p^j_{j'} x^{j'} + b^j) + 2a_{i\,n+1}(p^i_{i'} x^{i'} + b^i) + a_{n+1\,n+1} = \\ (a_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'}) x^{i'} x^{j'} + (a_{ij} p^i_{i'} x^{i'} b^j + a_{ij} b^i p^j_{j'} x^{j'} + 2a_{i\,n+1} p^i_{i'} x^{i'}) + \\ + (a_{ij} b^i b^j + 2a_{i\,n+1} b^i + a_{n+1\,n+1}) = \\ = a_{i'j'} x^{i'} x^{j'} + 2a_{i'\,(n+1)'} x^{i'} + a_{(n+1)'\,(n+1)'} = F(x^{k'}).\end{gathered}$$

Собирая подобные члены (учитывая симметричность матрицы $(a_{ij})$ и меняя индексы суммирования в случае необходимости), получим

$$\begin{gathered}a_{i'j'} = a_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'}, \quad a_{i'\,(n+1)'} = (a_{ij} b^j + a_{i\,n+1}) p^i_{i'}, \\ a_{(n+1)'\,(n+1)'} = F(b^1, \ldots, b^n).\end{gathered} \tag{48}$$

Отметим, что при вычислении коэффициента $a_{i'\,(n+1)'}$ мы пользовались тем, что индекс суммирования не имеет конкретного значения, и поэтому его можно заменять на любой другой с той же областью определения: $a_{ij} b^i c^j = a_{k\ell} b^k c^\ell$. По этой причине индексы суммирования называют также «немыми» индексами. При этом один и тот же индекс не может использоваться два раза как индекс суммирования в одном и том же выражении. При вычислении коэффициента $a_{i'\,(n+1)'}$ учитывается следующее:

$$a_{ij} b^i p^j_{j'} x^{j'} = a_{k\ell} b^k p^\ell_{\ell'} x^{\ell'} = a_{ji} b^j p^i_{i'} x^{i'} = a_{ij} p^i_{i'} x^{i'} b^j.$$

Из формул (48) вытекают следующие утверждения.

**Следствие 1.** *Степень уравнения* (46) *инвариантна относительно преобразования координат.*

**Следствие 2.** *Формулой* $\varphi(\mathbf{u}) = a_{ij}u^i u^j$ *инвариантно (независимо от выбора системы координат) определяется квадратичная форма на векторном пространстве* $\mathbf{V}_n$*, ассоциированном с аффинным пространством* $\mathcal{A}_n$*.*

**Доказательство.** Из первой формулы (48) получаем

$$a_{i'j'}u^{i'}u^{j'} = (a_{ij}p^i_{i'}p^j_{j'})u^{i'}u^{j'} = a_{ij}(p^i_{i'}u^{i'})(p^j_{j'}u^{j'}) = a_{ij}u^i u^j.$$

□

Отметим необходимый для дальнейшего частный случай формул (48). Если преобразование координат имеет вид

$$x^i = x^{i'} + b^i,$$

то есть, если осуществляется только перенос начала координат, то коэффициенты уравнения (46) преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered} a_{i'j'} = a_{ij}, \quad a_{i'\,(n+1)'} = a_{ij}b^j + a_{i\,n+1}, \\ a_{(n+1)'\,(n+1)'} = F(b^1, \ldots, b^n). \end{gathered} \tag{49}$$

Оказывается, матрица $\widetilde{A} = (a_{\alpha\beta})$ является матрицей квадратичной формы, определенной на некотором $(n+1)$-мерном векторном пространстве. Она является матрицей, аналогичной матрице $A = (a_{ij})$ для уравнения некоторой гиперповерхности в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве, а именно, матрица $\widetilde{A}$ ассоциирована с уравнением конуса $\widetilde{\Phi}$ в $\mathcal{A}_{n+1}$, направляющей которого является поверхность $\Phi$. Это уравнение имеет вид $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$. В случае кривой второго порядка с уравнением (45)

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0$$

соответствующая поверхность $\widetilde{\Phi}$ в трехмерном пространстве задается уравнением

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{33}(x^3)^2 = 0.$$

Рассмотрим указанную конструкцию подробнее в общем виде.

Поместим аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ как гиперплоскость $\pi_n$ в некоторое аффинное пространство $\mathcal{A}_{n+1}$, т. е. осуществим некоторый изоморфизм

$$\varphi : \mathcal{A}_n \to \pi_n \subset \mathcal{A}_{n+1}.$$

При этом

$$\varphi^{\mathbf{C}} : \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}} \to \pi_n^{\mathbf{C}} \subset \mathcal{A}_{n+1}^{\mathbf{C}}.$$

В качестве пространства $\mathcal{A}_{n+1}$ можно взять, например, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n \oplus \mathbf{R}$. Далее, выберем и зафиксируем точку $Q \in \mathcal{A}_{n+1}$, не принадлежащую гиперплоскости $\pi_n$. В случае пространства $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n \oplus \mathbf{R}$ можно взять $Q = 0$ и $\pi_n = \mathbf{V}_n \oplus 1$. Реперу $\{O; \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, в пространстве $\mathcal{A}_n \equiv \pi_n$ сопоставим репер $\{Q; \mathbf{e}_\alpha\} = \{Q; \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{n+1} = \overrightarrow{QO}\}$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, в пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$.

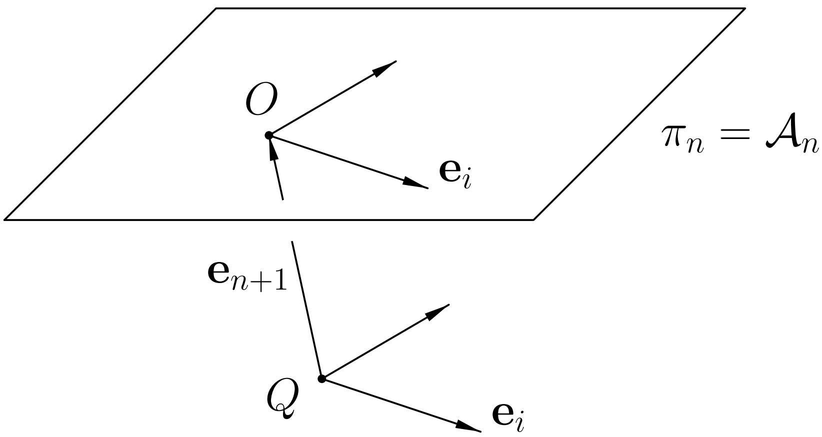



Рис. 24.

При этом в системе координат, определяемой репером $\{Q; \mathbf{e}_\alpha\}$, гиперплоскость $\pi_n$ будет иметь уравнение $x^{n+1} = 1$, а произвольная точка $M \in \pi_n$ будет иметь координаты $(x^1, \ldots, x^n; x^{n+1} = 1)$, где $(x^1, \ldots, x^n)$ — координаты этой точки по отношению к реперу $\{O; \mathbf{e}_i\}$. Гиперповерхность $\Phi \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, рассматриваемая как подмножество в $\mathcal{A}^{\mathbf{C}}_{n+1}$, задается системой уравнений

$$x^{n+1} = 1, \quad a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0, \tag{50}$$

которая эквивалентна системе уравнений

$$x^{n+1} = 1, \quad a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i x^{n+1} + a_{n+1\,n+1}x^{n+1}x^{n+1} = 0. \tag{51}$$

Второе из уравнений системы (50) задает в пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$ гиперповерхность $\overline{\Phi}$, называемую *цилиндром* с направляющей $(n-1)$-мерной поверхностью $\Phi$. Второе из уравнений системы (51) имеет вид $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ и является однородным. Если этому уравнению удовлетворяет некоторый набор чисел $(x^\alpha_0)$, то и набор $(tx^\alpha_0)$ при всяком $t \in \mathbf{R}$ также будет ему удовлетворять. Таким образом, вместе с каждой точкой $M_0$ гиперповерхность $\widetilde{\Phi}$ содержит всю прямую $QM_0$. Гиперповерхность $\widetilde{\Phi}$ называется *конусом* с вершиной $Q$ и направляющей $(n-1)$-мерной поверхностью $\Phi$.

Гиперповерхность $\Phi$ при этом представляется в виде пересечения $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi_n$.

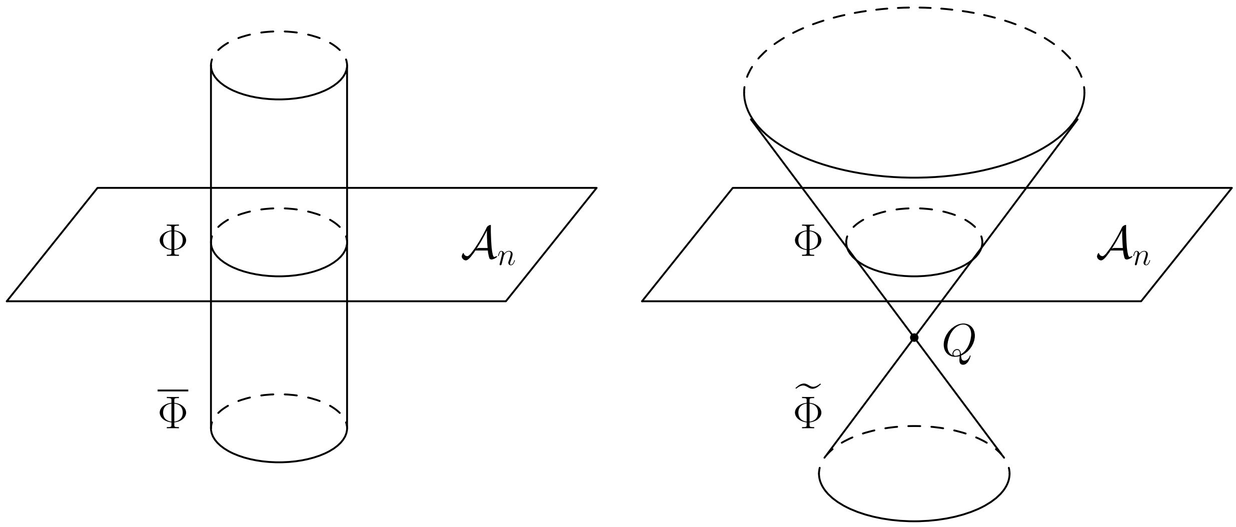



Рис. 25.

Переходу (47) от репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ к реперу $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$ в пространстве $\mathcal{A}_n$ в пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$ соответствует переход от репера

$\{Q; \mathbf{e}_\alpha\}$ к реперу $\{Q; \mathbf{e}_{\alpha'}\}$, где преобразование базиса $\mathbf{e}_{\alpha'} = \widetilde{p}^\alpha_{\alpha'}\mathbf{e}_\alpha$ имеет вид:

$$\mathbf{e}_{i'} = p^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{(n+1)'} = b^i\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1}\,. \tag{52}$$

Действительно, $\mathbf{e}_{(n+1)'} = \overrightarrow{QO'} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OO'} = \mathbf{e}_{n+1} + \overrightarrow{OO'}$.

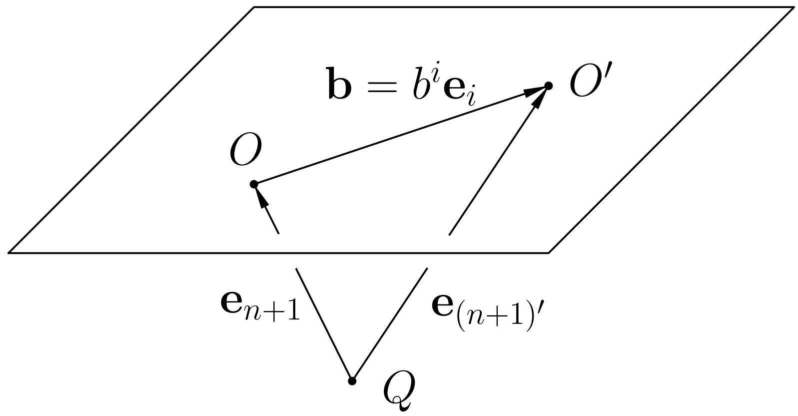



Рис. 26.

Из уравнений (52) следует, что матрица $\widetilde{P} = (\widetilde{p}^\alpha_{\alpha'})$ преобразования базиса имеет следующий вид: $\widetilde{p}^i_{i'} = p^i_{i'}$, $\widetilde{p}^{n+1}_{i'} = 0$, $\widetilde{p}^i_{(n+1)'} = b^i$, $\widetilde{p}^{n+1}_{(n+1)'} = 1$, то есть,

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} & & & b^1 \\ & P & & \vdots \\ & & & b^n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $P = (p^i_{i'})$. При $n = 2$ матрица $\widetilde{P}$ имеет вид

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} p^1_{1'} & p^1_{2'} & b^1 \\ p^2_{1'} & p^2_{2'} & b^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразованию репера (52) соответствует преобразование координат $x^\alpha = \widetilde{p}^\alpha_{\alpha'}x^{\alpha'}$ (начало репера не изменяется) в пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$, имеющее вид

$$x^i = p^i_{i'}x^{i'} + b^i x^{(n+1)'}, \quad x^{n+1} = x^{(n+1)'}\,. \tag{53}$$

При $n = 2$ это преобразование имеет вид

$$x^1 = p^1_{1'}x^{1'} + p^1_{2'}x^{2'} + b^1x^{3'}, \quad x^2 = p^2_{1'}x^{1'} + p^2_{2'}x^{2'} + b^2x^{3'}, \quad x^3 = x^{3'}.$$

Матрицы $\widetilde{A} = (a_{\alpha\beta})$ и $\widetilde{A}' = (a_{\alpha'\beta'})$, составленные соответственно из коэффициентов уравнений $F(x^k) = 0$ и $F'(x^{k'}) = 0$, определяющих гиперповерхность $\Phi$ в двух различных системах координат, являются одновременно и матрицами, составленными из коэффициентов при произведениях $x^\alpha x^\beta$ и $x^{\alpha'}x^{\beta'}$ в уравнениях гиперповерхности $\widetilde{\Phi}$. Однако, поскольку связь между уравнениями гиперповерхностей и самими гиперповерхностями не является однозначной, а также, поскольку конус $\widetilde{\Phi}$ может содержать прямолинейные образующие, параллельные гиперплоскости $\pi_n$, мы не можем отсюда сразу заключить, что $\widetilde{\varphi}(\mathbf{w}) = a_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$ — квадратичная форма на $\mathbf{V}_{n+1}$, не зависящая от выбора системы координат в $\mathcal{A}_n$.

Координаты вектора $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_{n+1}$ при преобразовании координат (53) преобразуются по такому же закону (53), поскольку начало репера в $\mathcal{A}_{n+1}$ не изменяется, то есть, $w^\alpha = \widetilde{p}^\alpha_{\alpha'}w^{\alpha'}$:

$$w^i = p^i_{i'}w^{i'} + b^i w^{(n+1)'}, \quad w^{n+1} = w^{(n+1)'}. \tag{54}$$

Подставляя в $a_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$ выражения (54) и учитывая (48), получаем:

$$\begin{gathered}
a_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta = a_{ij}w^iw^j + 2a_{i\,n+1}w^iw^{n+1} + a_{n+1\,n+1}w^{n+1}w^{n+1} = \\
= a_{ij}(p^i_{i'}w^{i'} + b^iw^{(n+1)'})(p^j_{j'}w^{j'} + b^jw^{(n+1)'}) + \\
+ 2a_{i\,n+1}(p^i_{i'}w^{i'} + b^iw^{(n+1)'})w^{(n+1)'} + a_{n+1\,n+1}w^{(n+1)'}w^{(n+1)'} = \\
= (a_{ij}p^i_{i'}p^j_{j'})w^{i'}w^{j'} + 2(a_{ij}b^j + a_{i\,n+1})p^i_{i'}w^{i'}w^{(n+1)'} + \\
+ (a_{ij}b^ib^j + 2a_{i\,n+1}b^i + a_{n+1\,n+1})w^{(n+1)'}w^{(n+1)'} = \\
= a_{i'j'}w^{i'}w^{j'} + 2a_{i'\,(n+1)'}w^{i'}w^{(n+1)'} + a_{n+1\,n+1}w^{(n+1)'}w^{(n+1)'} = \\
= a_{\alpha'\beta'}w^{\alpha'}w^{\beta'}.
\end{gathered}$$

Таким образом, $\widetilde{\varphi}(\mathbf{w}) = a_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$ — корректно определенная квадратичная форма.

**Аффинные инварианты уравнения гиперповерхности в $\mathcal{A}_n$.**

**Определение.** *Аффинным инвариантом уравнения* (46) *гиперповерхности второго порядка в пространстве $\mathcal{A}_n$ называется всякая функция $I(a_{11}, \ldots, a_{n+1\,n+1})$ от коэффициентов этого уравнения, значение которой не меняется при замене аффинного репера в $\mathcal{A}_n$.*

Как следствие предыдущих рассуждений, получаем:

**Предложение.** *Инварианты квадратичных форм $\varphi$ и $\widetilde{\varphi}$, ассоциированных с уравнением* (46) *гиперповерхности второго порядка, а именно, ранги, сигнатуры, положительные и отрицательные индексы инерции, являются аффинными инвариантами этого уравнения. Кроме того, инвариантами являются знаки определителей* $\det A$ *и* $\det \widetilde{A}$.

Так, уравнения эллипса, гиперболы и параболы

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad y^2 = 2px$$

различаются значениями инвариантов, соответствующих квадратичным формам $\varphi$

$$x^2 + y^2, \quad x^2 - y^2, \quad y^2.$$

Квадратичные формы $\widetilde{\varphi}$

$$x^2 + y^2 - z^2, \quad x^2 - y^2 - z^2, \quad y^2 - 2pxz$$

для них оказываются эквивалентными (с точностью до знака).

**Пересечение гиперповерхности второго порядка с прямой.**

Рассмотрим прямую $\ell$ в $\mathcal{A}_n$ с направляющим вектором $\mathbf{v}$, проходящую через точку $M_0$. Эта прямая имеет следующие уравнения: $x^i = x_0^i + tv^i$. Для выяснения расположения прямой $\ell$

по отношению к гиперповерхности Φ подставим ее уравнения в уравнение гиперповерхности. В результате получаем следующее уравнение относительно неизвестных значений параметра $t$:

$$a_{ij}(x_0^i + tv^i)(x_0^j + tv^j) + 2a_{i\,n+1}(x_0^i + tv^i) + a_{n+1\,n+1} = 0. \qquad (55)$$

Каждому решению этого уравнения $t = t_1$ соответствует общая точка прямой $\ell$ и гиперповерхности Φ с координатами $x^i = x_0^i + t_1 v^i$. После приведения подобных членов уравнение (56) принимает вид

$$(a_{ij}v^i v^j)\, t^2 + 2(a_{ij}x_0^j v^i + a_{i\,n+1}v^i)\, t + F(x_0^k) = 0. \qquad (56)$$

Коэффициент при $t$ в первой степени в уравнении (56) можно представить в виде $F_i(x_0^k)v^i$, где $F_i(x^k) = 2(a_{ij}x^j + a_{i\,n+1}) = \partial F/\partial x^i$, после чего уравнение (56) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{v})t^2 + F_i(x_0^k)v^i t + F(x_0^k) = 0. \qquad (57)$$

**Замечание.** Вышеуказанные частные производные $\partial F/\partial x^i$ определяются формально как операторы на кольце многочленов

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathbf{R}[x^1, \dots, x^n] \to \mathbf{R}[x^1, \dots, x^n]$$

и не требуют для своего определения средств математического анализа. При этом нужно иметь в виду, что аргументы функций $F(x^i)$ в рамках наших рассмотрений могут принимать и комплексные значения (см., напр., [11]).

**Определение.** *Вектор* $\mathbf{v}$ *называется асимптотическим вектором квадратичной формы* $\varphi$, *если* $\varphi(\mathbf{v}) = 0$. *Прямая* $\ell$ *называется прямой асимптотического направления относительно гиперповерхности второго порядка* Φ, *если ее направляющий вектор* $\mathbf{v}$ *является асимптотическим вектором квадратичной формы* $\varphi$, *ассоциированной с уравнением этой гиперповерхности, то есть если* $a_{ij}v^i v^j = 0$.

**Первый случай: прямая $\ell$ имеет асимптотическое направление.**

В этом случае уравнение (57) принимает вид

$$F_i(x_0^k)v^i t + F(x_0^k) = 0. \tag{58}$$

Отсюда следует, что в зависимости от того, равны нулю или нет коэффициенты уравнения (58), возможны следующие три случая расположения прямая $\ell$ относительно гиперповерхности $\Phi$.

1) Если $F_i(x_0^k)v^i \neq 0$, то прямая $\ell$ имеет одну общую точку с гиперповерхностью $\Phi$. Этот случай нужно отличать от того случая, когда две точки пересечения прямой и гиперповерхности совпадают, и прямая *касается* гиперповерхности (см. с. 75).

2) Если $F_i(x_0^k)v^i = 0$, а $F(x_0^k) \neq 0$, то $\ell \cap \Phi = \varnothing$. При этом у прямой и гиперповерхности нет ни одной общей точки в $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, ни вещественной, ни комплексной.

3) Если $F_i(x_0^k)v^i = F(x_0^k) = 0$, то прямая $\ell$ целиком лежит на гиперповерхности $\Phi$.

Приведем примеры рассмотренных трех случаев расположения прямой асимптотического направления по отношению к гиперповерхности второго порядка.

**Примеры.** Направление $\mathbf{a} = \{1; 0; 1\}$ является асимптотическим для однополостного гиперболоида $\Phi$: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Прямая $\ell_1$: $x = z + 1$, $y = 0$ с направляющим вектором $\mathbf{a}$ имеет одну общую точку $(1; 0; 0)$ с $\Phi$; прямая $\ell_2$: $x = z$, $y = 0$ с направляющим вектором $\mathbf{a}$ не имеет ни одной общей точки с $\Phi$; прямая $\ell_3$: $x = z$, $y = 1$ с направляющим вектором $\mathbf{a}$ целиком лежит на гиперболоиде $\Phi$.

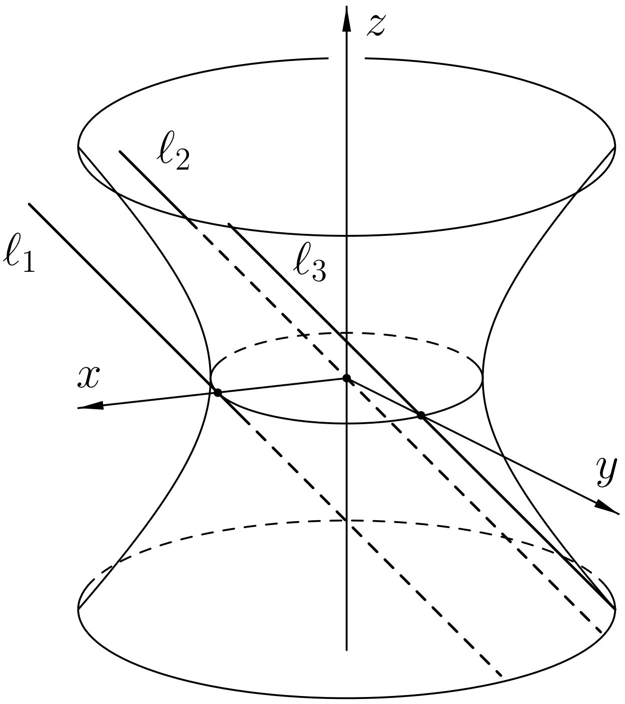



Рис. 27.

**Второй случай: прямая $\ell$ имеет неасимптотическое направление.**

В этом случае уравнение (57) имеет два решения $t_1$ и $t_2$, которые могут быть вещественными или комплексными сопряженными. Этим значениям параметра соответствуют две точки пересечения $M_1$ и $M_2$ прямой $\ell$ и гиперповерхности $\Phi$. Эти точки $M_1$ и $M_2$ принадлежат комплексификации $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, то есть, в общем случае они могут не принадлежать пространству $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$.

**Определение.** *Отрезок $M_1M_2$ называется хордой гиперповерхности $\Phi$. Хордой называют также и всю прямую $M_1M_2$.*

Нас будет интересовать точка $A$, являющаяся серединой хорды. Пусть $t_A$ — это значение параметра $t$, соответствующее этой точке. Тогда $t_A = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$.

Хорда $M_1M_2$ имеет уравнения $x^i = x_0^i + tv^i$, где $(x_0^i)$ — координаты точки $M_0$, через которую мы проводили прямую $\ell$ в направлении вектора $\mathbf{v}$. Точка $M_0$ выполняет функцию начала координат на этой прямой (в этой точке координата $t$ принимает значение, равное нулю). Это совершенно произвольная точка прямой $\ell$, на которую изначально не накладывается никаких ограничений. Сейчас мы можем потребовать, чтобы точка $M_0$ совпадала с точкой $A$. В этом случае $t_A = 0$ и, следовательно, $\frac{1}{2}(t_1 + t_2) = 0$. Но тогда, по теореме Виета для квадратного уравнения (57), имеет место следующее соотношение:

$$F_i(x_0^k)v^i = 0 \qquad \text{или} \qquad (a_{ij}x_0^j + a_{i\,n+1})v^i = 0.$$

Таким образом, если некоторая хорда гиперповерхности $\Phi$ имеет неасимптотическое направление $\mathbf{v}$, то ее середина удовлетворяет уравнению

$$(a_{ij}x^j + a_{i\,n+1})v^i = 0. \tag{59}$$

**Определение.** *Точка $C$ называется центром гиперповерхности $\Phi$, если все хорды, проходящие через эту точку, делятся в ней пополам, то есть если $C$ — центр симметрии гиперповерхности $\Phi$.*

Всегда можно выбрать $n$ линейно независимых неасимптотических векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Например, если $\mathbf{e}_{\hat{\imath}}$ — базис в $\mathbf{V}_n$, в котором квадратичная форма $\varphi$ имеет канонический вид

$$\varphi = \sum_{\hat{k}=\hat{1}}^{\hat{r}} \pm(x^{\hat{k}})^2,$$

то можно взять $\mathbf{v}_k = \mathbf{e}_{\hat{k}}$ при $k = 1, \ldots, r$ и $\mathbf{v}_k = \mathbf{e}_{\hat{k}} + \mathbf{e}_{\hat{1}}$ при $k = r + 1, \ldots, n$. Подставляя каждый из этих векторов в уравнение (59), приходим к тому, что координаты $x_C^i$ центра $C$, если он существует, удовлетворяют системе уравнений

$$(a_{ij}x_C^j + a_{i\,n+1})v_k^i = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{60}$$

Так как матрица $(v_k^i)$ невырождена, то система уравнений (60) эквивалентна следующей:

$$a_{ij}x^j + a_{i\,n+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{61}$$

которую можно также записать в виде

$$F_i(x^j) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Система уравнений (61) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) \neq 0$, то есть когда $\operatorname{rank}\varphi = n$. В этом случае гиперповерхность $\Phi$ имеет единственный центр $C$.

**Определение.** *Гиперповерхность* $\Phi$ *называется центральной, если*

$$\det(a_{ij}) \neq 0.$$

Если гиперповерхность $\Phi$ не является центральной, то либо она не имеет ни одного центра (когда система (61) не совместна), либо все центры гиперповерхности образуют $m$-мерную плоскость, где $m = n - \operatorname{rank}\varphi$.

**Задача 20.** Найти центр поверхности в трехмерном аффинном пространстве, заданной уравнением $4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$.

**Решение.** Матрица $(a_{\alpha\beta})$ для этой поверхности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты системы уравнений для нахождения центра стоят в первых трех строках. Сама система имеет следующий вид

$$\begin{aligned} &2y + 2z = 0 \\ &2x - 2 = 0 \\ &2x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Система совместна и общее ее решение имеет вид $x = 1$, $y = -t$, $z = t$. Таким образом, указанная поверхность имеет целую прямую центров. $\triangleright$

**Перенос начала координат в центр гиперповерхности.**

Пусть точка $C(x^i_C)$ — некоторый центр гиперповерхности $\Phi$ (могут быть и другие центры, то есть единственность центра не предполагается). Перенесем начало координат в точку $C$. Уравнения соответствующего преобразования координат имеют вид $x^i = x^{i'} + x^i_C$. Из формул преобразования коэффициентов уравнения гиперповерхности (49) следует, что в новой системе координат

$$a_{i'\,(n+1)'} = a_{ij}x^j_C + a_{i\,n+1} = 0.$$

Отсюда вытекает следующее предложение.

**Предложение.** *Если начало координат находится в центре гиперповерхности второго порядка $\Phi$, то уравнение гиперповерхности не содержит членов первой степени, то есть имеет вид*

$$a_{ij}x^ix^j + a_{n+1\,n+1} = 0. \tag{62}$$

**Задача 21.** Какое уравнение будет иметь поверхность из предыдущей задачи, если перенести начало координат в один из ее центров?

**Решение.** Выберем центр $C$ поверхности, имеющий координаты $(1; 0; 0)$. При переносе начала координат в этот центр коэффициенты при членах второй степени остаются теми же самыми, коэффициенты при членах первой степени становятся равными нулю, свободный член вычисляется по формуле (49), которая в данном случае принимает вид $a_{44} = F(x_C, y_C, z_C) = F(1, 0, 0) = -1$. Таким образом, после переноса начала координат в центр, уравнение поверхности принимает вид $4xy + 4xz - 1 = 0$. Нетрудно заметить, что после преобразования координат $x' = x$,

$y' = 4(y+z)$, $z' = z$ уравнение поверхности принимает вид $x'y' = 1$. Следовательно, эта поверхность представляет собой гиперболический цилиндр. $\rhd$

Вектор $\mathbf{v}$ является асимптотическим для гиперповерхности (62), если $a_{ij}v^iv^j = 0$. Если при этом в уравнении (62) коэффициент $a_{n+1\,n+1}$ отличен от нуля, то прямая $\ell$ с уравнениями $x^i = v^it$, имеющая асимптотическое направление и проходящая через центр $C$, не имеет с $\Phi$ ни одной общей точки (ни комплексной, ни вещественной). Множество точек всех таких прямых образует гиперповерхность второго порядка $\Psi$ с уравнением

$$a_{ij}x^ix^j = 0. \tag{63}$$

**Определение.** *Гиперповерхность* $\Psi$ *с уравнением* (63) *называется асимптотическим конусом гиперповерхности* $\Phi$.

**Пример.** Конус $\Psi$, имеющий уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, является асимптотическим конусом гиперболоидов с уравнениями $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (см. [27], с. 108–109).

**Диаметральные плоскости.**

Пусть $\mathbf{v}$ — фиксированный неасимптотический вектор гиперповерхности второго порядка $\Phi$. Середина всякой хорды, имеющей направляющий вектор $\mathbf{v}$, удовлетворяет уравнению (59):

$$(a_{ij}x^j + a_{i\,n+1})v^i = 0. \tag{64}$$

Нетрудно показать, что и любая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (64), является серединой некоторой хорды с направляющим вектором $\mathbf{v}$. Действительно, пусть $(x_0^i)$ — решение уравнения (64). Через точку $M_0$ с координатами $(x_0^i)$ проведем прямую с направляющим вектором $\mathbf{v}$. Уравнение этой прямой имеет вид $x^i = x_0^i + tv^i$. При условии $(a_{ij}x_0^j + a_{i\,n+1})v^i = 0$ уравнение (56) принимает вид

$$(a_{ij}v^iv^j)\,t^2 + F(x_0^k) = 0.$$

Это уравнение имеет два решения $t_1$ и $t_2$ (вообще говоря, комплексных) таких, что $t_2 = -t_1$.

**Определение.** *Гиперплоскость* $D(\mathbf{v})$*, имеющая уравнение* (64)*, называется диаметральной гиперплоскостью, сопряженной неасимптотическому направлению* $\mathbf{v}$.

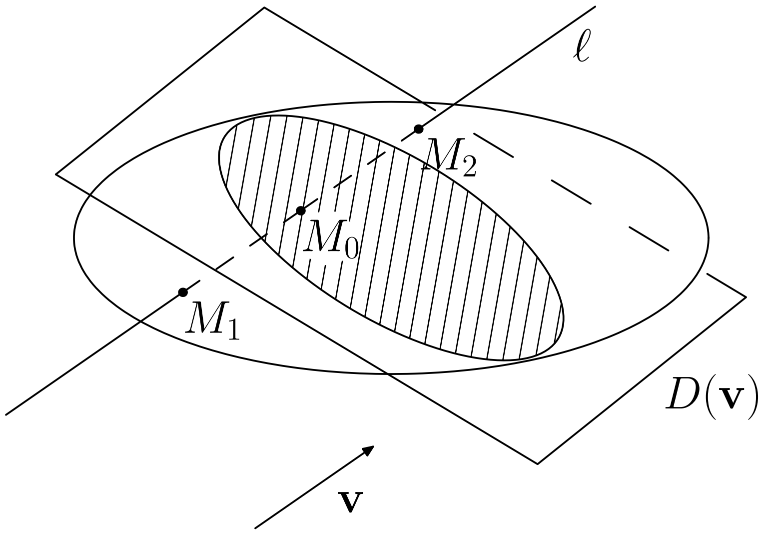



Рис. 28.

Направляющее пространство этой гиперплоскости определяется уравнением $a_{ij}v^i x^j = 0$. Вектор $\mathbf{u}$ принадлежит гиперплоскости $D(\mathbf{v})$ тогда и только тогда, когда $a_{ij}v^i u^j = 0$.

**Замечание.** Уравнение (64) диаметральной плоскости сохраняет смысл и в случае асимптотического вектора $\mathbf{v}$, если этот вектор не принадлежит ядру симметричной билинейной формы $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = a_{ij}u^i w^j$, то есть если $c_j = a_{ij}v^i$ не является нулевой линейной формой (хотя бы одно из чисел $c_1, \ldots, c_n$ отлично от нуля).

Симметричная билинейная форма $\psi$, ассоциированная с квадратичной формой $\varphi$, имеет вид (см., например, [12], Гл. 1, § 4)

$$\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})).$$

При этом $\varphi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, и если в координатах $\varphi(\mathbf{u}) = a_{ij}u^i u^j$, то $\psi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a_{ij}u^iv^j$.

Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называются *сопряженными относительно квадратичной формы* $\varphi(\mathbf{u}) = a_{ij}u^iu^j$, если $\psi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a_{ij}u^iv^j = 0$.

**Определение.** *Векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *называются сопряженными относительно гиперповерхности* $\Phi$*, если они сопряжены относительно квадратичной формы* $\varphi$*, ассоциированной с уравнением этой гиперповерхности, то есть если* $a_{ij}u^iv^j = 0$.

**Свойства диаметральных плоскостей.**

1°. Если гиперповерхность $\Phi$ имеет центр $C$, то этот центр лежит на всякой диаметральной гиперплоскости $D(\mathbf{v})$.

2°. Вектор $\mathbf{u}$ принадлежит направляющему подпространству $\mathbf{V}_{n-1}(D(\mathbf{v}))$ диаметральной гиперплоскости $D(\mathbf{v})$ тогда и только тогда, когда он сопряжен вектору $\mathbf{v}$ относительно гиперповерхности $\Phi$.

Действительно, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_{n-1}(D(\mathbf{v}))$ тогда и только тогда, когда набор его координат $\{u^j\}$ является решением однородного уравнения $a_{ij}v^ix^j = 0$, соответствующего неоднородному уравнению (64). $\square$

**Касательные гиперплоскости гиперповерхности второго порядка.**

**Определение.** *В том случае, когда корни* $t_1$ *и* $t_2$ *уравнения* (57) *совпадают, то единственная общая точка гиперповерхности* $\Phi$ *и прямой* $\ell$ *называется двойной точкой пересечения* $\ell$ *и* $\Phi$.

Рассмотрим случай, когда точка $M_0(x_0^i)$ принадлежит гиперповерхности $\Phi$, а прямая $\ell$ проходит через точку $M_0$. В этом случае уравнение прямой $\ell$ можно представить в виде $x^i = x_0^i + v^it$. Поскольку $M_0(x_0^i) \in \Phi$, то $F(x_0^i) = 0$, и уравнение (57) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{v})t^2 + F_i(x_0^k)v^it = 0. \qquad (65)$$

Точка $M_0(x_0^i)$ является *двойной* точкой пересечения $\ell$ и $\Phi$ тогда и только тогда, когда уравнение (65) имеет два совпадающих корня $t_1 = t_2 = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$F_i(x_0^k)v^i = 0 \quad \text{или} \quad (a_{ij}x_0^j + a_{i\,n+1})v^i = 0. \tag{66}$$

**Предложение.** Набор чисел $\{F_1(x_0^k), \ldots, F_n(x_0^k)\}$ при замене системы координат $x^i = p^i_{i'}x^{i'} + b^i$ в $\mathcal{A}_n$ преобразуется по закону $F_{i'}(x_0^{k'}) = p^i_{i'}F_i(x_0^k)$ и, следовательно, определяет некоторую линейную форму $\nabla F(M_0)$.

**Доказательство.** Пусть дана дифференцируемая функция $z = \Phi(y^1, \ldots, y^n)$ и набор дифференцируемых функций

$$y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n),\ \ldots,\ y^n = f^n(x^1, \ldots, x^n).$$

Подставляя переменные $y^i$ в выражение для функции $z = \Phi(y^i)$, получим функцию

$$z = \Psi(x^1, \ldots, x^n) = \Phi(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^n)).$$

По правилу дифференцирования сложной функции ([8], Т. 1, Гл. 8)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial y^1}\frac{\partial f^1}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial y^k}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}. \tag{67}$$

В последнем равенстве мы используем правило сокращенной записи суммирования. Применяя формулу (67) к многочлену $F$, определяющему гиперповерхность второго порядка, и преобразованию координат, получим

$$F_{i'} = \frac{\partial F}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = F_i p^i_{i'}.$$

□

**Задача 22.** Доказать это предложение непосредственно, используя формулы (48).

**Определение.** *Точка $M_0$ гиперповерхности $\Phi$ называется неособой, если линейная форма $\nabla F(M_0)$ не является нулевой. В противном случае точка $M_0$ называется особой.*

Если точка $M_0$ неособая, то множество $T_{M_0}\Phi$ векторов $\mathbf{v}$, удовлетворяющих уравнению (66), является подпространством размерности $n-1$ в $\mathbf{V}_n$.

**Определение.** *Подпространство $T_{M_0}\Phi$ называется касательным векторным пространством гиперповерхности $\Phi$ в точке $M_0$. Гиперплоскость $\pi_{M_0}\Phi$, проходящая через неособую точку $M_0$ гиперповерхности $\Phi$ и имеющая направляющее подпространство $T_{M_0}\Phi$, называется касательной гиперплоскостью гиперповерхности $\Phi$ в точке $M_0$.*

Из (66) следует, что касательная гиперплоскость $\pi_{M_0}\Phi$ имеет уравнение

$$F_i(x_0^k)(x^i - x_0^i) = 0 \quad \text{или} \quad (a_{ij}x_0^j + a_{i\,n+1})(x^i - x_0^i) = 0. \qquad (68)$$

**Свойства касательных гиперплоскостей гиперповерхности второго порядка.**

1°. Если гиперповерхность $\Phi$ имеет центр $C(x_C^i)$, то $\mathbf{v} \in T_{M_0}\Phi$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{v}$ и $\overrightarrow{CM_0}$ сопряжены относительно $\Phi$.

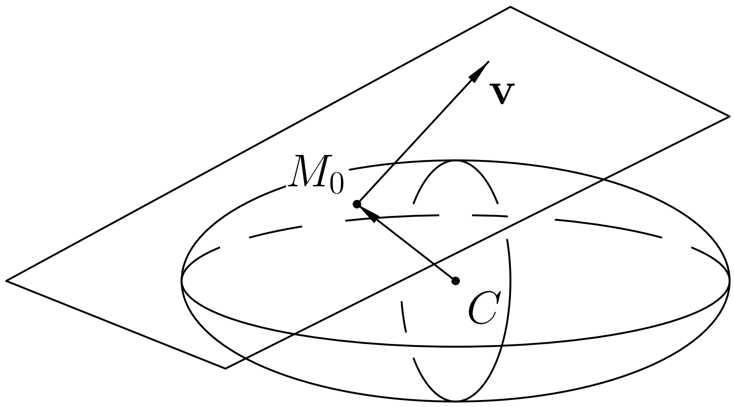



Рис. 29.

**Доказательство.** Поскольку $C(x_C^i)$ — центр гиперповерхности $\Phi$, то $a_{ij}x_C^j + a_{i\,n+1} = 0$. Поэтому для любого вектора $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ выполняется соотношение $(a_{ij}x_C^j + a_{i\,n+1})v^i = 0$ (означающее, что центр принадлежит диаметральной гиперплоскости, сопряженной направлению $\mathbf{v}$). Вычитая это соотношение из уравнения (66) касательного векторного пространства гиперповерхности $\Phi$ в точке $M_0$, получим уравнение $a_{ij}(x_0^j - x_C^j)v^i = 0$, эквивалентное уравнению (66). $\square$

Из этого свойства следует, что касательное пространство $T_{M_0}\Phi$ и касательная гиперплоскость $\pi_{M_0}\Phi$ гиперповерхности, имеющей центр, могут быть заданы соответственно следующими уравнениями:

$$a_{ij}(x_0^j - x_C^j)v^i = 0 \quad \text{и} \quad a_{ij}(x_0^j - x_C^j)(x^i - x_0^i) = 0. \tag{69}$$

В частности, если начало координат является центром гиперповерхности $\Phi$ (при этом $C = O$, $x_C^j = 0$) и $\Phi$ имеет уравнение (62), то касательная гиперплоскость $\pi_{M_0}\Phi$ имеет уравнение

$$a_{ij}x_0^j x^i + a_{n+1\,n+1} = 0. \tag{70}$$

Действительно, из формулы (62) следует, что $-a_{ij}x_0^j x_0^i = a_{n+1\,n+1}$, и второе из уравнений (69) принимает вид (70).

**Пример.** Из формулы (70) сразу следует, что касательные плоскости гиперболоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ([27], с. 106) имеют уравнения $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} - \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$.

2°. Если прямая $\ell$ асимптотического направления $\mathbf{v}$ целиком расположена на гиперповерхности $\Phi$, то она принадлежит касательной гиперплоскости $\pi_M\Phi$ в каждой своей точке $M$.

**Доказательство.** В этом случае $\varphi(\mathbf{v}) = 0$ и уравнение (65), задающее общие точки гиперповерхности и прямой, принимает вид $F_i(x_0^k)v^i t = 0$. $\square$

3°. Пересечение $\Phi \cap \pi_{M_0}\Phi$ гиперповерхности $\Phi$ со своей касательной гиперплоскостью $\pi_{M_0}\Phi$ предствляет собой конус в гиперплоскости $\pi_{M_0}\Phi$ с вершиной в точке $M_0$.

**Доказательство.** Перенесем начало координат в точку $M_0$, тогда координаты этой точки будут нулевыми: $x_0^i = 0$. Подставив $x_0^i = 0$ в уравнение (46) гиперповерхности $\Phi$, получим $a_{n+1\,n+1} = 0$. Поэтому уравнение гиперповерхности примет вид $a_{ij}x^ix^j + 2a_{i\,n+1}x^i = 0$. Подставив $x_0^i = 0$ в уравнение (68) касательной гиперплоскости $\pi_{M_0}\Phi$, получим уравнение $a_{i\,n+1}x^i = 0$. Таким образом, пересечение $\pi_{M_0}\Phi \cap \Phi$ задается системой уравнений

$$a_{ij}x^ix^j + 2a_{i\,n+1}x^i = 0, \quad a_{i\,n+1}x^i = 0,$$

которая эквивалентна следующей системе

$$a_{ij}x^ix^j = 0, \quad a_{i\,n+1}x^i = 0. \qquad \square$$

**Примеры.** Касательные плоскости однополостных гиперболоидов и гиперболических параболоидов в $\mathcal{A}_3$ пересекают эти поверхности по прямолинейным образующим.

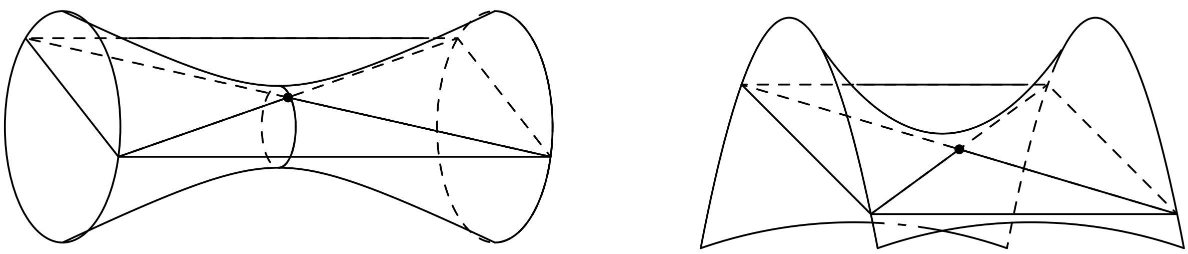


Рис. 30.

Касательные плоскости цилиндров и конусов в $\mathcal{A}_3$ касаются этих поверхностей вдоль прямолинейных образующих. Вершины конусов — особые точки этих поверхностей. Касательные плоскости в таких точках не определены.

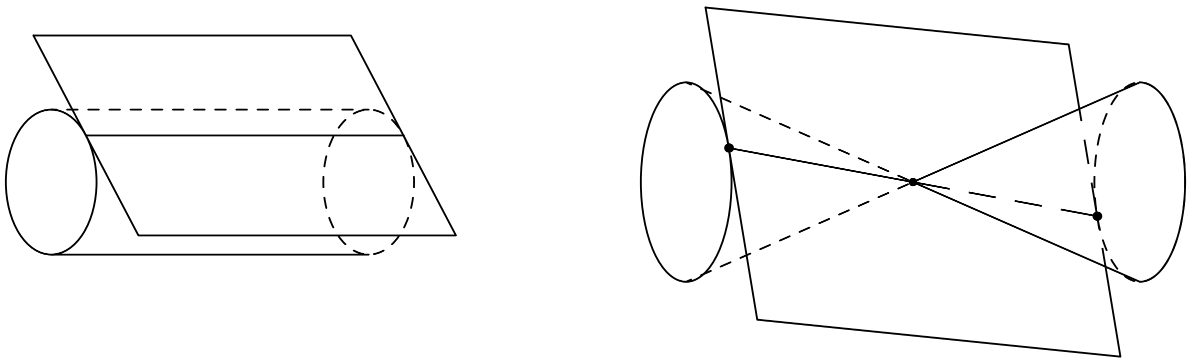


Рис. 31.

**Определение.** *Прямая $\ell$, проходящая через неособую точку $M_0$ гиперповерхности $\Phi$ и лежащая в касательной плоскости $\pi_{M_0}(\Phi)$, называется касательной прямой гиперповерхности $\Phi$.*

Если касательная прямая $\ell$ имеет неасимптотическое направление в точке касания $M_0$, то точка $M_0$ является двойной точкой пересечения $\ell$ и $\Phi$.

**Задача 23.** Пусть прямая $\ell$ пересекает гиперповерхность $\Phi$ в особой точке $M_0$. Доказать, что если эта прямая имеет асимптотическое направление, то она целиком лежит на гиперповерхности, а если неасимптотическое — то пересекает гиперповерхность в единственной точке $M_0$ (двойной).

**Решение.** Для доказательства следует воспользоваться формулой (65). $\triangleright$

**Пересечение гиперповерхности второго порядка с $m$-плоскостью.**

Пусть в пространстве $\mathcal{A}_n$ заданы гиперповерхность второго порядка $\Phi$, имеющая уравнение

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0, \tag{71}$$

и $m$-плоскость $\pi_m$ с параметрическими уравнениями

$$x^i = b^i_A y^A + b^i, \tag{72}$$

где $\{y^A\}$ — координаты в $\pi_m$, определяемые некоторым репером $\{M_0; \mathbf{b}_A\}$, $A, B = 1, \ldots, m$. Подставив уравнения (72) в уравнение (71), получим следующее уравнение, которому удовлетворяют координаты $\{y^A\}$ общих точек $m$-плоскости $\pi_m$ и гиперповерхности $\Phi$:

$$a_{ij}(b^i_A y^A + b^i)(b^j_B y^B + b^j) + 2a_{i\,n+1}(b^i_A y^A + b^i) + a_{n+1\,n+1} = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$(a_{ij}(b^i_A b^j_B) y^A y^B + 2(a_{i\,n+1} b^j + a_{n+1\,n+1}) b^i_A y^A +$$
$$+ \ a_{ij} b^i b^j + 2a_{i\,n+1} b^i + a_{n+1\,n+1} = 0.$$

Таким образом, пересечение $\pi_m \cap \Phi$, как подмножество плоскости $\pi_m$, определяется уравнением

$$c_{AB} y^A y^B + 2c_{A\,m+1} y^A + c_{m+1\,m+1} = 0 \tag{73}$$

в репере $\{M_0; \mathbf{b}_A\}$. Если квадратичная форма $c_{AB}u^A u^B$, являющаяся ограничением квадратичной формы $\varphi$ на направляющее подпространство $\mathbf{V}_m$ $m$-плоскости $\pi_m$, не является нулевой, то уравнение (73) задает гиперповерхность второго порядка в $m$-мерном аффинном пространстве $\pi_m$. Если квадратичная форма $c_{AB}u^A u^B$ нулевая, то уравнение (73) задает либо плоскость размерности $m-1$, либо пустое множество (если все коэффициенты $c_{A\,m+1}$, $A = 1, \ldots, m$, равны нулю, а $c_{m+1\,m+1} \neq 0$).

**Примеры.** Плоскость $z = 0$ пересекает гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ по эллипсу $x^2 + y^2 = 1$; плоскость $x - y = 2$ пересекает гиперболический цилиндр $x^2 - y^2 = 1$ по прямой $x = 5/4$, $y = -3/4$; плоскость $x - y = 0$ не имеет с гиперболическим цилиндром $x^2 - y^2 = 1$ общих точек (ни вещественных, ни комплексных).

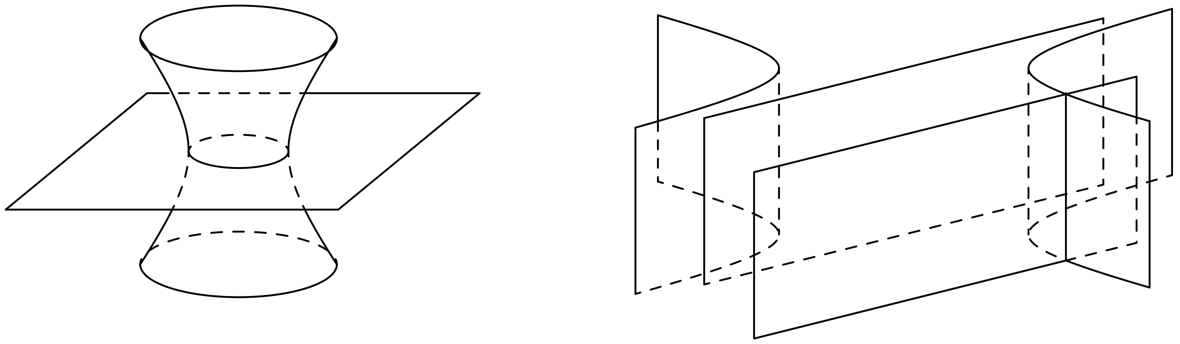


Рис. 32.

Рекомендуемая литература и задачи к настоящему параграфу указаны в конце параграфа 4.

# 4 Классификация гиперповерхностей второго порядка в аффинном пространстве

Под классификацией гиперповерхностей второго порядка в $\mathcal{A}_n$ понимается определение всех гиперповерхностей второго порядка в $\mathcal{A}_n$ с точностью до аффинного преобразования. Если при аффинном преобразовании $\alpha$, устанавливающем соответствие между точками, имеющими одинаковые координаты по отношению к реперам $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$, гиперповерхность $\Phi$ переходит в гиперповерхность $\Phi'$, то гиперповерхность $\Phi'$ в системе координат, определяемой репером $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$, будет иметь такое же уравнение, как и гиперповерхность $\Phi$ в системе координат, определяемой репером $\{O; \mathbf{e}_i\}$. Поэтому для классификации гиперповерхностей второго порядка в $\mathcal{A}_n$ нужно классифицировать уравнения (46) таких гиперповерхностей, считая два уравнения эквивалентными, если одно из них может быть переведено в другое заменой аффинного репера и умножением, если необходимо, на ненулевое вещественное число.

Рассмотрим подробно классификацию кривых второго порядка на аффинной плоскости $\mathcal{A}_2$.

Выбирая канонический базис и умножая, если необходимо, уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0,$$

на $(-1)$, квадратичную форму $\varphi$, ассоциированную с этим уравнением, можно привести к одному из следующих трех видов [12]:

$$\text{I. } (v^1)^2 + (v^2)^2; \qquad \text{II. } (v^1)^2 - (v^2)^2; \qquad \text{III. } (v^1)^2.$$

Кривые, для которых форма $\varphi$ приводится либо к виду I, либо к виду II, являются *центральными*. Рассмотрим последовательно все возможные случаи.

I. Кривые, для которых квадратичная форма $\varphi$ приводится к виду I, называются *кривыми эллиптического типа.*

Перенося в этом случае начало координат в центр кривой, получим уравнение

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + a'_{33} = 0. \tag{74}$$

Если $a'_{33} \neq 0$, то осуществим преобразование координат $x^i = \sqrt{|a'_{33}|}x^{i'}$ и затем поделим преобразованное уравнение кривой на $a'_{33}$. В результате могут получиться следующие три уравнения (штрихи у индексов опускаем; рядом с уравнениями указаны названия кривых, задаваемых этими уравнениями):

1°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ (эллипс).

2°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = -1$ (мнимый эллипс).

3°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ (пара мнимых пересекающихся прямых).

Мнимые прямые в случае 3° имеют уравнения $x^1 = \pm ix^2$, они пересекаются в вещественной точке $O(0,0)$.

II. Кривые, для которых квадратичная форма $\varphi$ приводится к виду II, называются *кривыми гиперболического типа.*

Перенося в этом случае начало координат в центр кривой и осуществляя далее преобразования координат, аналогичные случаю I, приведем уравнение кривой к одному из следующих видов:

4°. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$ (гипербола).

5°. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ (пара вещественных пересекающихся прямых).

Пересекающиеся прямые в случае 5° имеют уравнения $x^1 = \pm x^2$.

III. Кривые, для которых квадратичная форма $\varphi$ приводится к виду III, называются *кривыми параболического типа.*

После того, как выбран базис, в котором квадратичная форма

$\varphi$ имеет канонический вид $(v^1)^2$, уравнение кривой принимает вид
$$(x^1)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0. \tag{75}$$
Выделяя полный квадрат, уравнение (75) можно переписать в виде
$$(x^1 + a_{13})^2 + 2\left(a_{23}x^2 + \frac{1}{2}a_{33} - \frac{1}{2}(a_{13})^2\right) = 0.$$

a) Если $a_{23} \neq 0$, то преобразованием координат
$$x^{1'} = x^1 + a_{13}, \quad x^{2'} = -\left(a_{23}x^2 + \frac{1}{2}a_{33} - \frac{1}{2}(a_{13})^2\right),$$
уравнение приводится к виду

6°. $(x^1)^2 = 2x^2$ (парабола).

b) Если $a_{23} = 0$, то преобразованием координат
$$x^{1'} = x^1 + a_{13}, \quad x^{2'} = x^2,$$
уравнение приводится к виду
$$(x^1)^2 + a'_{33} = 0.$$
Если $a'_{33} \neq 0$, то, как и выше, осуществим преобразование координат $x^i = \sqrt{|a'_{33}|}x^{i'}$ и затем поделим преобразованное уравнение кривой на $a'_{33}$. В результате получим одно из следующих трех уравнений:

7°. $(x^1)^2 = 1$ (пара вещественных параллельных прямых).

8°. $(x^1)^2 = -1$ (пара мнимых параллельных прямых).

9°. $(x^1)^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

Пара совпадающих прямых, например, возникает при пересечении цилиндра с касательной плоскостью.

Уравнения 1°–9° называются *каноническими.*

**Теорема 1.** *Специальным выбором репера в $\mathcal{A}_2$ и умножением, если необходимо, на вещественное число всякое уравнение* *кривой второго порядка можно привести к одному и только одному виду из списка* $1^\circ$*–*$9^\circ$.

**Доказательство.** Остается только доказать, что одно и то же уравнение нельзя привести к двум различным видам из списка $1^\circ$–$9^\circ$. Для этого достаточно убедиться, что любые два уравнения из списка $1^\circ$–$9^\circ$ отличаются значениями аффинных инвариантов. Уравнения, принадлежащие разным типам I, II, III, отличаются рангами и сигнатурой квадратичной формы $\varphi$. Уравнения, принадлежащие к одному типу, отличаются рангами и сигнатурой квадратичной формы $\widetilde{\varphi}$. Например, с уравнениями $1^\circ$, $2^\circ$ и $3^\circ$ ассоциированы, соответственно, следующие квадратичные формы $\widetilde{\varphi}$: $(u^1)^2 + (u^2)^2 - (u^3)^2$, $(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$ и $(u^1)^2 + (u^2)^2$. $\square$

**Предложение.** *Два уравнения*

$$a_{ij}x^ix^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0, \tag{76}$$

$$b_{ij}x^ix^j + 2b_{i\,n+1}x^i + b_{n+1\,n+1} = 0 \tag{77}$$

*задают одно и то же множество точек в* $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ *тогда и только тогда, когда они пропорциональны.*

**Доказательство.** Пусть первое уравнение задает гиперповерхность $\Phi$, а второе — гиперповерхность $\Psi$. Если уравнения пропорциональны, то, очевидно, $\Phi = \Psi$.

Пусть теперь $\Phi = \Psi$. Докажем, что коэффициенты уравнений (76) и (77) пропорциональны.

Ясно, что если это утверждение имеет место в одной системе координат, то оно справедливо и для любой другой системы координат. Выберем систему координат в $\mathcal{A}_n$ следующим образом. Базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в ассоциированном пространстве $\mathbf{V}_n$ выберем так, чтобы векторы $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, не являлись асимптотическими для квадратичной формы $a_{ij}v^iv^j$. Тогда, очевидно, эти векторы не будут являться асимптотическими и для квадратичной формы $b_{ij}v^iv^j$ (это следует из того, что прямая неасимптотического направления пересекает гиперповерхность в паре, возможно совпадающих, точек). В качестве начала координат возьмем точку, не лежащую на гиперповерхности. Это можно сделать, например, потому что произвольная прямая с направляющим вектором $\mathbf{e}_1$ имеет с гиперповерхностью не более двух общих точек.

Заметим теперь, что для любой прямой $\ell$ имеет место равенство $\Phi\cap\ell = \Psi\cap\ell$. Выбрав прямую $\ell$ с уравнениями $x^1 = t$, $x^i = 0$ при $i = 2, \ldots, n$, получим совпадающие множества точек, задаваемые квадратными уравнениями $a_{11}t^2 + 2a_{1\,n+1}t + a_{n+1\,n+1} = 0$ и $b_{11}t^2 + 2b_{1\,n+1}t + b_{n+1\,n+1} = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{a_{1\,n+1}}{b_{1\,n+1}} = \frac{a_{n+1\,n+1}}{b_{n+1\,n+1}} = \lambda.$$

Действительно, если два квадратных уравнения относительно $t$ имеют одни и те же корни $t_1$ и $t_2$, то они пропорциональны: $a(t - t_1)(t - t_2) = 0$ и $b(t - t_1)(t - t_2) = 0$. Аналогично,

$$\frac{a_{kk}}{b_{kk}} = \frac{a_{k\,n+1}}{b_{k\,n+1}} = \frac{a_{n+1\,n+1}}{b_{n+1\,n+1}} = \lambda$$

для всех $k = 2, \ldots, n$.

Остается показать, что для всех пар $(k, m)$, $k \neq m$,

$$\frac{a_{km}}{b_{km}} = \lambda.$$

Выберем прямую с уравнениями $x^k = t$, $x^m = t$, $x^i = 0$ при $i \neq k, m$. Получим совпадающие множества точек, задаваемые квадратными уравнениями $(a_{kk}+2a_{km}+a_{mm})t^2+2(a_{k\,n+1}+a_{m\,n+1})t+a_{n+1\,n+1} = 0$ и $(b_{kk}+2b_{km}+b_{mm})t^2+2(b_{k\,n+1}+b_{m\,n+1})t+b_{n+1\,n+1} = 0$. Отсюда имеем

$$\frac{a_{kk} + 2a_{km} + a_{mm}}{b_{kk} + 2b_{km} + b_{mm}} = \frac{a_{n+1\,n+1}}{b_{n+1\,n+1}} = \lambda.$$

Но тогда $a_{kk} + 2a_{km} + a_{mm} = \lambda(b_{kk} + 2b_{km} + b_{mm})$, откуда после сокращения получаем $a_{km} = \lambda b_{km}$. $\square$

**Определение.** *Две гиперповерхности второго порядка $\Phi$ и $\Psi$ в $\mathcal{A}_n$ называются аффинно эквивалентными, если существует аффинное движение $\alpha \in GA(\mathcal{A}_n)$, при котором $\alpha(\Phi) = \Psi$ в $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$.*

**Теорема 2.** 1) *Всякая кривая второго порядка $\Phi$ в $\mathcal{A}_2$ может быть задана одним и только одним уравнением из списка $1^\circ$–$9^\circ$.*

2) *Две кривые второго порядка в $\mathcal{A}_2$ аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых аффинных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из списка $1^\circ$–$9^\circ$.*

**Доказательство.** Первое утверждение следует из доказанного выше предложения. Докажем второе.

Если уравнение кривой $\Phi$ в репере $\{O; \mathbf{e}_i\}$ совпадает с уравнением кривой $\Psi$ в репере $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$, то аффинное преобразование $\alpha : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, определяемое условиями: $\alpha(O) = O'$, $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$, переводит $\Phi$ в $\Psi$.

Обратно, пусть кривая $\Phi$ имеет в репере $\{O; \mathbf{e}_i\}$ некоторое уравнение $F(x^1, x^2) = 0$ из списка $1^\circ$–$9^\circ$ и $\alpha(\Phi) = \Psi$ при некотором аффинном преобразовании $\alpha : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$. Тогда кривая $\Psi$ в репере $\{\alpha(O); \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i)\}$ имеет то же самое уравнение $F(x^1, x^2) = 0$. $\square$

Аналогичная теорема имеет место для поверхностей 2-го порядка в $\mathcal{A}_3$ (в скобках указываем принятые названия поверхностей).

**Теорема 3.** 1) *Всякая поверхность второго порядка $\Phi$ в $\mathcal{A}_3$ может быть задана одним и только одним уравнением из следующего ниже списка из 17-ти уравнений $1^\circ$–$17^\circ$.*

2) *Две поверхности второго порядка в $\mathcal{A}_3$ аффинно эквива-*

*лентны тогда и только тогда, когда в некоторых аффинных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из списка* $1^\circ$–$17^\circ$.

I. Центральные поверхности. Ассоциированная квадратичная форма $\varphi$ приводится к виду $(v^1)^2 + (v^2)^2 \pm (v^3)^2$.

$1^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ (эллипсоид).

$2^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1$ (мнимый эллипсоид).

$3^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ (мнимый конус).

$4^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 1$ (однополостный гиперболоид).

$5^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1$ (двуполостный гиперболоид).

$6^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ (вещественный конус).

II. Параболоиды. Ассоциированная квадратичная форма $\varphi$ приводится к виду $(v^1)^2 \pm (v^2)^2$. Форма $\widetilde{\varphi}$ невырождена (определитель $\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$).

$7^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 2x^3$ (эллиптический параболоид).

$8^\circ$. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 2x^3$ (гиперболический параболоид).

III. Ассоциированная квадратичная форма $\varphi$ приводится к виду $(v^1)^2 \pm (v^2)^2$. Форма $\widetilde{\varphi}$ вырождена ($\det(a_{\alpha\beta}) = 0$).

$9^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ (эллиптический цилиндр).

$10^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = -1$ (мнимый эллиптический цилиндр).

$11^\circ$. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ (пара мнимых пересекающихся плоскостей).

$12^\circ$. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$ (гиперболический цилиндр).

$13^\circ$. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ (пара вещественных пересекающихся плоскостей).

IV. Ассоциированная квадратичная форма $\varphi$ приводится к виду $(v^1)^2$.

$14^\circ$. $(x^1)^2 = 2x^2$ (параболический цилиндр).

$15^\circ$. $(x^1)^2 = 1$ (пара вещественных параллельных плоскостей).

16°. $(x^1)^2 = -1$ (пара мнимых параллельных плоскостей).

17°. $(x^1)^2 = 0$ (пара вещественных совпадающих плоскостей).

**Доказательство.** Список уравнений 1°–17° получается в результате процедуры, совершенно аналогичной той, что была осуществлена при выводе списка уравнений кривых второго порядка в Теореме 1. Все эти уравнения отличаются одно от другого значениями аффинных инвариантов. $\square$

Распространяя рассуждения, использованные при рассмотрении кривых и поверхностей второго порядка, на случай гиперповерхностей второго порядка в пространстве $\mathcal{A}_n$, получим следующий результат.

**Теорема 4.** *В пространстве $\mathcal{A}_n$, выбирая подходящий репер, уравнение всякой гиперповерхности можно привести к виду*

$$\sum_{i=1}^{p}(x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q}(x^i)^2 - 2ax^{p+q+1} + b = 0, \quad p \geqslant q,$$

*где:*

*если* $\operatorname{rank}\varphi = n$, *то* $a = 0$, $b = 0, \pm 1$;

*если* $\operatorname{rank}\varphi = m$, $m < n$, $\operatorname{rank}\widetilde{\varphi} = m + 2$, *то* $a = 1$, $b = 0$;

*если* $\operatorname{rank}\varphi = m$, $m < n$, $p > q$, $\operatorname{rank}\widetilde{\varphi} = m + 1$, *то* $a = 0$, $b = \pm 1$;

*если* $\operatorname{rank}\varphi = m$, $m < n$, $p = q$, $\operatorname{rank}\widetilde{\varphi} = m + 1$, *то* $a = 0$, $b = 1$;

*если* $\operatorname{rank}\varphi = m$, $m < n$, $\operatorname{rank}\widetilde{\varphi} = m$, *то* $a = 0$, $b = 0$.

**Замечание.** Аффинный репер, по отношению к которому гиперповерхность второго порядка имеет каноническое уравнение, определяется не однозначно. Например, эллипс $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ сохраняет каноническое уравнение при замене координат $x^1 = x^{1'}\cos\alpha - x^{2'}\sin\alpha$, $x^2 = x^{1'}\sin\alpha + x^{2'}\cos\alpha$.

**Задача 24.** Определить вид поверхности

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^1x^2 + x^2x^3 + 2x^1 - x^2 - 2x^3 - 4 = 0 \qquad (78)$$

в аффинном пространстве $\mathcal{A}_3$ и найти преобразование аффинного репера, приводящее уравнение этой поверхности к каноническому виду.

**Решение.** Применим метод Лагранжа (см., например, [7], Гл. IV, §5; [12], Гл. I, §4) последовательного выделения полных квадратов. Соберем в уравнении (78) все члены, содержащие $x^1$ и дополним их до полного квадрата. Тогда уравнение примет вид

$$\Big((x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^1x^2 + 2x^1 - 2x^2 + 1\Big) + x^2x^3 + x^2 - 2x^3 - 5 = 0.$$

Осуществим преобразование координат (для удобства новые координаты будем обозначать другими коренными буквами) $y^1 = x^1 - x^2 + 1$, $y^2 = x^2$, $y^3 = x^3$. В новой системе координат уравнение принимает вид

$$(y^1)^2 + y^2y^3 + y^2 - 2y^3 - 5 = 0. \qquad (79)$$

В уравнение (79) переменная $y^1$ входит только в квадрате, а квадратов других переменных нет. Поэтому применим преобразование координат, при котором они появляются. Стандартным является следующее преобразование: $y^1 = z^1$, $y^2 = z^2 + z^3$, $y^3 = z^2 - z^3$. При этом уравнение принимает вид $(z^1)^2 + (z^2)^2 - (z^3)^2 - z^2 + 3z^3 - 5 = 0$. Соберем теперь все члены, содержащие $z^2$, и дополняем их до полного квадрата. Затем осуществим то же самое с членами, содержащими $z^3$. Получаем

$$(z^1)^2 + \left((z^2)^2 - z^2 + \frac{1}{4}\right) - \left((z^3)^2 - 3z^3 + \frac{9}{4}\right) - 3 = 0.$$

После преобразования координат $w^1 = z^1$, $w^2 = z^2 - 1/2$, $w^3 = z^3 - 3/2$ уравнение принимает вид $(w^1)^2 + (w^2)^2 - (w^3)^2 - 3 = 0$.

Полагая окончательно $x^{1'} = \sqrt{3}w^1$, $x^{2'} = \sqrt{3}w^2$, $x^{3'} = \sqrt{3}w^3$, после деления на 3 получим каноническое уравнение

$$(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 = 1. \tag{80}$$

Уравнение (80) является уравнением однополостного гиперболоида. Выражая последовательно $x^{i'}$ через $w^i$, затем через $z^i$, $y^i$ и $x^i$, получим преобразование координат, приводящее уравнение (78) к виду (80):

$$\begin{aligned} x^{1'} &= \sqrt{3}(x^1 - x^2 + 1), \\ x^{2'} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + x^3 - 1), \\ x^{3'} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - x^3 - 3). \end{aligned}$$

$\triangleright$

**Задача 25.** В аффинном пространстве $\mathcal{A}_3$ даны три попарно скрещивающиеся прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$, направляющие векторы которых линейно независимы. Доказать, что множество $\Phi$ точек, принадлежащих прямым $\ell$, пересекающим одновременно все три прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$, представляет собой однополостный гиперболоид.

**Решение.** Скрещивающиеся прямые $\ell_1$ с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1\mathbf{a}_1$ и $\ell_2$ с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t^2\mathbf{a}_2$ лежат в параллельных плоскостях $\ell_1 \subset \pi_1$ с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2$ и $\ell_2 \subset \pi_2$ с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2$. Три пары таких плоскостей для данных прямых $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$ ограничивают параллелепипед. Принимая одну из вершин этого параллелепипеда за начало координат, а векторы его ребер за базис в $\mathbf{V}_3$, ассоциированном с $\mathcal{A}_3$, получим репер в $\mathcal{A}_3$. В системе координат, определяемой этим репером, данные прямые будут иметь уравнения $\ell_1$: $x^2 = x^3 = 0$, $\ell_2$: $x^1 = 0$, $x^3 = 1$, а $\ell_3$: $x^1 = 1$, $x^2 = 1$.

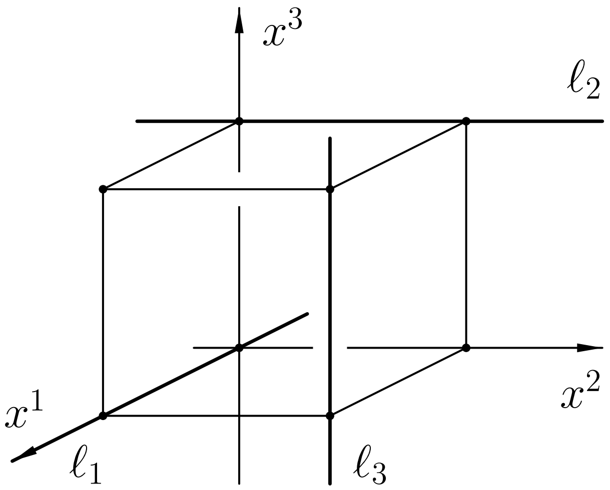



Рис. 33.

Точка $M(x_0^1; x_0^2; x_0^3)$ принадлежит множеству $\Phi$ тогда и только тогда, когда три плоскости $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$, проходящие через $M$ и одну из прямых $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$, принадлежат одному пучку (пересекаются по прямой $\ell$, пересекающей все три данные прямые). Эти три плоскости имеют соответственно уравнения

$$\begin{aligned} &\alpha_1: \ x_0^3 x^2 - x_0^2 x^3 = 0, \\ &\alpha_2: \ (1 - x_0^3)x^1 + x_0^1 x^3 - x_0^1 = 0 \\ &\alpha_3: \ (1 - x_0^2)x^1 + (x_0^1 - 1)x^2 - 1 + x_0^2 - x_0^1. \end{aligned} \tag{81}$$

По построению, плоскости $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$ пересекаются (их пересечение содержит точку $M$), поэтому они будут пересекаться по прямой тогда и только тогда, когда определитель матрицы из коэффициентов при $x^1$, $x^2$, $x^3$ в системе уравнений (81) равен нулю, то есть когда

$$\begin{vmatrix} 0 & x_0^3 & -x_0^2 \\ 1 - x_0^3 & 0 & x_0^1 \\ 1 - x_0^2 & x_0^1 - 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим, что $M(x_0^1; x_0^2; x_0^3) \in \Phi$ тогда и только тогда, когда $x_0^1 x_0^2 - x_0^1 x_0^3 + x_0^2 x_0^3 - x_0^2 = 0$, то есть тогда и только тогда, когда координаты точки $M$ удовлетворяют уравнению $x^1x^2 - x^1x^3 + x^2x^3 - x^2 = 0$. Остается только убедиться, что этим уравнением определяется однополостный гиперболоид. $\rhd$

**Задача 26.** В аффинном пространстве $\mathcal{A}_3$ даны три попарно скрещивающиеся прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$, направляющие векторы которых линейно зависимы. Доказать, что множество $\Phi$ точек, принадлежащих прямым $\ell$, пересекающим одновременно все три прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$, представляет собой гиперболический параболоид.

**Решение.** Пусть $\ell_4$ — некоторая прямая, пересекающая каждую из прямых $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$ соответственно в точках $O$, $A$ и $B$. Будем считать, что прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$ занумерованы так, что точка $A$ лежит между $O$ и $B$. В $\mathcal{A}_3$ выберем такой репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$, что $\mathbf{e}_1$ — направляющий вектор прямой $\ell_1$, $\mathbf{e}_2$ — направляющий вектор прямой $\ell_2$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ — направляющий вектор прямой $\ell_3$. В системе координат, определяемой этим репером, прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и $\ell_3$ имеют соответственно уравнения $\ell_1$: $x^2 = x^3 = 0$, $\ell_2$: $x^1 = 0$, $x^3 = 1$, $\ell_3$: $x^1 = t$, $x^2 = t$, $x^3 = b$, где $\overrightarrow{OB} = b\mathbf{e}_3$.

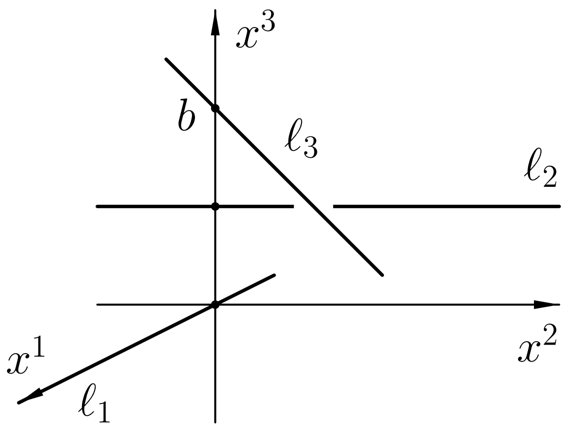



Рис. 34.

Далее решение продолжается как в предыдущей задаче. $\rhd$

**Рекомендуемая литература:** [1], Гл. XVIII; [2], Гл. V, §§37, 38; [12], Гл. 5, §2.

**Задачи и упражнения:** [4], 792, 793, 1751, 1752, 688, 689, 690, 691, 692, 694, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 719, 720, 1720, 1721, 1723, 1730, 1737, 1738, 1741, 1742.

# 5 Гиперповерхности второго порядка в евклидовом аффинном пространстве $\mathcal{E}_n$

Настоящий параграф посвящен классификации гиперповерхностей второго порядка в евклидовом аффинном пространстве.

Пусть

$$\psi : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \ni \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}$$

— симметричная билинейная форма и

$$\varphi : \mathbf{E}_n \ni \mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}$$

— соответствующая ей квадратичная форма.

**Определение.** *Ненулевой вектор* $\mathbf{w}$ *в евклидовом векторном пространстве* $\mathbf{E}_n$ *называется вектором главного направления для квадратичной формы* $\varphi$, *если всякий вектор* $\mathbf{x}$, *ортогональный вектору* $\mathbf{w}$, *сопряжен вектору* $\mathbf{w}$ *относительно формы* $\varphi$, *т.е., если* $g(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0$, *то* $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0$.

**Определение.** *Ортонормированный базис* $\{\mathbf{e}_i\}$ *в евклидовом векторном пространстве* $\mathbf{E}_n$ *называется каноническим для квадратичной формы* $\varphi$, *если векторы этого базиса сопряжены относительно* $\varphi$. *В каноническом базисе квадратичная форма* $\varphi$ *имеет вид*

$$\varphi(\mathbf{v}) = a_{11}(v^1)^2 + a_{22}(v^2)^2 + \ldots + a_{nn}(v^n)^2, \tag{82}$$

*в котором отсутствуют члены с произведениями* $v^i v^j$ *при* $i \neq j$. *Вид* (82) *квадратичной формы* $\varphi$ *также называется каноническим.*

**Теорема 5.** *Для всякой квадратичной формы* $\varphi$ *в евклидовом векторном пространстве* $\mathbf{E}_n$ *существует канонический базис.*

*Коэффициенты* $a_{11}$, $a_{22}$, $\ldots$, $a_{nn}$ *в каноническом виде формы* $\varphi$ *с точностью до перестановок не зависят от выбора канонического базиса.*

**Доказательство.** Векторы канонического базиса для квадратичной формы $\varphi$ являются векторами главных направлений для этой формы. Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — канонический базис и вектор $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ ортогонален вектору $\mathbf{e}_1$. Тогда $v^1 = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = 0$. Следовательно, $\mathbf{v} = \sum_{i=2}^{n} v^i\mathbf{e}_i$ и $\psi(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) = \sum_{i=2}^{n} a_{1i}v^i = 0$ поскольку $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, для нахождения канонического базиса для формы $\varphi$ нужно найти векторы главных направлений этой формы.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — произвольный базис в $\mathbf{E}_n$, и форма $\varphi$ в этом базисе имеет вид $\varphi(\mathbf{v}) = a_{ij}v^iv^j$. Вектор $\mathbf{w}$ является вектором главного направления, если равенство $g_{ij}w^ix^j = 0$ влечет равенство $a_{ij}w^ix^j = 0$. В этом случае система двух уравнений

$$g_{ij}w^ix^j = 0, \quad a_{ij}w^ix^j = 0$$

относительно $x^j$ имеет ранг 1. Это возможно только тогда, когда эти уравнения пропорциональны, то есть когда найдется такое число $\lambda$, что выполняются соотношения

$$a_{ij}w^i = \lambda g_{ij}w^i, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{83}$$

Отсюда следует, что координаты $w^i$ всякого вектора $\mathbf{w}$, имеющего главное направление для квадратичной формы $\varphi$, удовлетворяют системе линейных уравнений

$$(a_{ij} - \lambda g_{ij})w^i = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{84}$$

Однородная система линейных уравнений (84) может иметь ненулевое решение только в случае, когда ранг ее матрицы $(a_{ij} - \lambda g_{ij})$ не превосходит $n - 1$. Необходимым и достаточным условием этого является обращение в нуль определителя этой матрицы:

$$\det(a_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0. \tag{85}$$

**Определение.** *Уравнение* (85) *называется характеристическим уравнением квадратичной формы* $\varphi$ *в базисе* $\{\mathbf{e}_i\}$.

При $n = 2$ соотношения (83) принимают вид

$$\begin{cases} a_{11}w^1 + a_{21}w^2 = \lambda(g_{11}w^1 + g_{21}w^2) \\ a_{12}w^1 + a_{22}w^2 = \lambda(g_{12}w^1 + g_{21}w^2), \end{cases}$$

откуда получается система уравнений, которым должен удовлетворять вектор $\mathbf{w}$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda g_{11})w^1 + (a_{21} - \lambda g_{21})w^2 = 0 \\ (a_{12} - \lambda g_{12})w^1 + (a_{22} - \lambda g_{22})w^2 = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для квадратичной формы $\varphi$ при этом имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda g_{11} & a_{21} - \lambda g_{21} \\ a_{12} - \lambda g_{12} & a_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

**Свойства корней характеристического уравнения.**

$1^\circ$. Корни характеристического уравнения не зависят от выбора базиса $\mathbf{e}_i$.

Действительно, матрица $(a_{ij} - \lambda g_{ij})$ является матрицей квадратичной формы $\varphi(\mathbf{v}) - \lambda|\mathbf{v}|^2$. При замене базиса $\mathbf{e}_{i'} = p^i_{i'}\mathbf{e}_i$ эта матрица преобразуется следующим следующим образом:

$$(a_{i'j'} - \lambda g_{i'j'}) = (a_{ij} - \lambda g_{ij})p^i_{i'}p^j_{j'}.$$

При этом

$$\det(a_{i'j'} - \lambda g_{i'j'}) = \det(a_{ij} - \lambda g_{ij})(\det(p^i_{i'}))^2.$$

Поэтому уравнения $\det(a_{i'j'} - \lambda g_{i'j'}) = 0$ и $\det(a_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$ эквивалентны.

$2^\circ$. Корни характеристического уравнения (85) вещественны.

Действительно, пусть $\lambda \in \mathbf{C}$ — некоторый корень уравнения (85) и $w^i = u^i + \sqrt{-1}v^i$ — некоторое ненулевое решение системы уравнений (84), $\sqrt{-1}$ обозначает здесь мнимую единицу. Тогда

$$a_{ij}w^i = \lambda g_{ij}w^i, \quad a_{ij}\overline{w}^{\,i} = \overline{\lambda} g_{ij}\overline{w}^{\,i},$$

где $\overline{w}^{\,i} = u^i - \sqrt{-1}v^i$. Просуммируем первое из этих соотношений с $\overline{w}^{\,j}$, а второе с $w^j$, и затем вычтем одно из получившихся соотношений из другого. В результате получим $(\lambda - \overline{\lambda})g_{ij}w^i\overline{w}^{\,j} = 0$ или $(\lambda - \overline{\lambda})(g_{ij}u^iu^j + g_{ij}v^iv^j) = 0$, откуда следует $\lambda - \overline{\lambda} = 0$.

3°. Пусть $\lambda$ — некоторый корень уравнения (85) и $w^i$, $i = 1, \ldots, n$, — некоторое вещественное ненулевое решение системы уравнений (84). Тогда всякий вектор $\mathbf{x}$, ортогональный вектору $\mathbf{w}$, будет сопряжен этому вектору, то есть равенство $g_{ij}w^ix^j = 0$ влечет равенство $a_{ij}w^ix^j = 0$.

Действительно, из условий $a_{ij}w^ix^j - \lambda g_{ij}w^ix^j = 0$ и $g_{ij}w^ix^j = 0$ следует, что $a_{ij}w^ix^j = 0$.

Пусть теперь $\lambda_1$ — некоторый корень уравнения (85), а $\mathbf{w}_1$ — некоторый единичный вектор, координаты которого удовлетворяют уравнению (84) для $\lambda = \lambda_1$. Выберем новый базис в $\mathbf{E}_n$, полагая $\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_1$ и $\mathbf{e}_k \perp \mathbf{w}_1$ при $k = 2, \ldots, n$. При этом $a_{1i} = 0$, $i = 2, \ldots, n$, и в новом базисе квадратичная форма $\varphi$ принимает вид

$$\varphi(\mathbf{v}) = a_{ij}v^iv^j = a_{11}(v^1)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}v^iv^j, \quad \text{где} \quad a_{11} = \lambda_1.$$

Формулой $\varphi'(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}v^iv^j$ задается квадратичная форма, определенная на ортогональном дополнении $\mathcal{L}\{\mathbf{w}_1\}^{\perp}$ к одномерному подпространству $\mathcal{L}\{\mathbf{w}_1\}$. Размерность пространства $\mathcal{L}\{\mathbf{w}_1\}^{\perp}$ равна $n-1$. Применяя вышеприведенные рассуждения к квадратичной форме $\varphi'$, мы найдем базис $\{\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ пространства $\mathcal{L}\{\mathbf{w}_1\}^{\perp}$, в котором форма $\varphi'$ имеет вид

$$\varphi'(\mathbf{v}) = a_{22}(v^2)^2 + \sum_{i,j=3}^{n} a_{ij}v^iv^j.$$

При этом в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ квадратичная форма $\varphi$ будет иметь вид

$$\varphi(\mathbf{v}) = a_{ij}v^i v^j = a_{11}(v^1)^2 + a_{22}(v^2)^2 + \sum_{i,j=3}^{n} a_{ij}v^i v^j.$$

Применяя метод математической индукции, приходим к базису, в котором квадратичная форма $\varphi$ имеет вид (82).

Характеристическое уравнение (85) в полученном базисе принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть,

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda) = 0. \tag{86}$$

Отсюда следует, что коэффициенты $a_{11}$, $a_{22}$, …, $a_{nn}$ в каноническом виде формы $\varphi$ являются корнями характеристического уравнения (с учетом кратностей) и, следовательно, с точностью до перестановок, не зависят от выбора канонического базиса. $\square$

В случае, когда базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathbf{E}_n$ ортонормированный, характеристическое уравнение принимает вид

$$\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$$

или, в подробной записи,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{87}$$

Квадратичной форме $\varphi(\mathbf{v}) = a_{ij}v^i v^j$, заданной на евклидовом векторном пространстве $\mathbf{E}_n$, можно отнести линейный оператор

$\mathbf{u} = \widehat{\varphi}(\mathbf{v})$, определенный соотношениями $u^k = a^k_i v^i$, где $a^k_i = a_{ij}g^{jk}$, а $(g^{jk})$ — матрица, обратная матрице $(g_{jk})$ (см. [27], §6).

**Определение.** *Ортогональным инвариантом уравнения* (46)

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0$$

*гиперповерхности 2-го порядка* $\Phi$ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}_n$ *называется всякая функция* $I(a_{11}, \ldots, a_{n+1\,n+1})$ *от коэффициентов этого уравнения, значение которой не меняется при замене одного ортонормированного репера в* $\mathcal{E}_n$ *на другой.*

**Ортогональные инварианты уравнения (46).**

1°. Все аффинные инварианты уравнения (46) являются также и его ортогональными инвариантами.

2°. $I_{n+1} = \det(a_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n+1$, — ортогональный инвариант уравнения (46).

**Доказательство.** Имеем $a_{\alpha'\beta'} = \widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}\widetilde{p}^{\beta}_{\beta'}a_{\alpha\beta}$. Отсюда $\det(a_{\alpha'\beta'}) = \det(a_{\alpha\beta})(\det(\widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}))^2 = \det(a_{\alpha\beta})\det(p^i_j)^2 = \det(a_{\alpha\beta})$, поскольку $(p^i_j)$ — ортогональная матрица и, следовательно, $\det(p^i_j) = \pm 1$. $\square$

3°. Каждый из корней $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ характеристического уравнения (85) квадратичной формы $\varphi$, ассоциированной с уравнением (46) гиперповерхности 2-го порядка, — ортогональный инвариант этого уравнения.

4°. Раскрывая определитель (87), характеристическое уравнение можно переписать в виде:

$$\lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n I_n = 0. \tag{88}$$

Коэффициенты $I_1, I_2, \ldots, I_n$ (взятые с соответствующим знаком) характеристического уравнения (88) — ортогональные инварианты уравнения (46) гиперповерхности 2-го порядка.

Это следует из однозначности представления характеристического уравнения в виде (88), а также из теоремы Виета для уравнения (88) (см. [11], Гл. 6, §1).

**Ортогональные инварианты уравнения кривой 2-го порядка.**

При $n = 2$ уравнение (87) принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) = 0,$$

а уравнение (88), соответственно, вид

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0.$$

Принимая во внимание теорему Виета для квадратного уравнения, получаем следующие ортогональные инварианты уравнения кривой второго порядка:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \qquad I_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**Ортогональные инварианты уравнения поверхности 2-го порядка.**

При $n = 3$ уравнение (87) принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{89}$$

а уравнение (88) соответственно вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \tag{90}$$

Раскладывая левую часть уравнения (90) на множители, его можно представить в виде

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = 0. \tag{91}$$

Сравнивая коэффициенты многочленов, стоящих в левых частях уравнений (89), (90) и (91), получаем следующие выражения для ортогональных инвариантов уравнения поверхности второго порядка:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

**Ортогональные полуинварианты уравнения гиперповерхности второго порядка.**

Если в определении ортогонального инварианта уравнения (46) гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве ограничиться преобразованиями координат, не меняющими начала координат, то получится определение ортогонального полуинварианта (семиинварианта) уравнения (46).

**Определение.** *Ортогональным полуинвариантом уравнения*

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0 \tag{92}$$

*гиперповерхности 2-го порядка* $\Phi$ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}_n$ *называется всякая функция* $I(a_{11}, \ldots, a_{n+1\,n+1})$ *от коэффициентов этого уравнения, значение которой не меняется при замене ортонормированного репера* $\{O; \mathbf{e}_i\}$*, по отношению к которому рассматривается уравнение* (92)*, на любой другой ортонормированный репер с тем же началом.*

Аналогично рассмотренному ранее случаю гиперповерхности второго порядка в аффинном пространстве, поместим евклидово пространство $\mathcal{E}_n$ как гиперплоскость $\pi_n$ в некоторое евклидово пространство $\mathcal{E}_{n+1}$, выберем в $\mathcal{E}_{n+1}$ ортонормированный репер $\{Q; \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{n+1}\}$ такой, что $\mathbf{e}_{n+1} = \overrightarrow{QO}$, и рассмотрим конус $\widetilde{\Phi}$ в $\mathcal{E}_{n+1}$, определяемый уравнением $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n+1$. Всякому преобразованию ортонормированного репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ в $\mathcal{E}_n$, не меняющему начала $O$, соответствует в $\mathcal{E}_{n+1}$ преобразование ортонормированного репера $\{Q; \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{n+1}\}$, не меняющее начала $Q$ и последнего базисного вектора $\mathbf{e}_{n+1}$. Поэтому все ортогональные инварианты квадратичной формы $\widetilde{\varphi}(\mathbf{w}) = a_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$ будут полуинвариантами уравнения (92).

Таким образом, ортогональными полуинвариантами уравнения (92) являются корни и коэффициенты характеристического уравнения квадратичной формы $\widetilde{\varphi}(\mathbf{w}) = a_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$.

Очевидно, всякий ортогональный инвариант уравнения (92) является и его ортогональным полуинвариантом.

**Ортогональные полуинварианты уравнения кривой второго порядка.**

Характеристическое уравнение квадратичной формы $\widetilde{\varphi}(\mathbf{w})$ при $n = 2$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения представляют собой следующие полуинварианты (см. с. 103):

$$
\begin{gathered}
a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{gathered}
\tag{93}
$$

Определитель третьего порядка в (93) является ортогональным инвариантом уравнения (92). Поскольку $a_{11}+a_{22} = I_1$ — ортогональный инвариант уравнения (92), то полуинвариантом будет и коэффициент $a_{33}$. Вычитая из суммы трех определителей второго порядка в (93) ортогональный инвариант $I_2$, представляющий собой первый из этих трех определителей, получим ортогональный полуинвариант

$$
K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{94}
$$

**Ортогональные полуинварианты уравнения поверхности второго порядка.**

Характеристическое уравнение квадратичной формы $\widetilde{\varphi}(\mathbf{w})$ при $n = 3$ имеет вид

$$
\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0.
$$

Коэффициенты при $\lambda^2$ и $\lambda$ в этом уравнении представляют собой соответственно суммы шести определителей второго порядка и четырех определителей третьего порядка. Вычитая из этих полуинвариантов инварианты $I_2$ и $I_3$ (см. с. 103), получим полуинварианты

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{95}$$

и

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{96}$$

Рекомендуемая литература и задачи к настоящему параграфу указаны в конце параграфа 6.

## 6 Классификация гиперповерхностей второго порядка в $\mathcal{E}_n$

Выбирая канонический базис и умножая, если необходимо, уравнение кривой на $(-1)$, квадратичную форму $\varphi$, ассоциированную с уравнением кривой второго порядка

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0,$$

можно привести к одному из следующих трех видов:

I. $A(v^1)^2 + B(v^2)^2$. II. $A(v^1)^2 - B(v^2)^2$. III. $A(v^1)^2$, где $A, B > 0$.

Рассуждая как в аффинном случае и умножая, если необходимо, на положительный числовой множитель, получаем следующий список уравнений кривых второго порядка в $\mathcal{E}_2$ (координаты в $\mathcal{E}_2$ обозначаем $x$ и $y$ вместо $x^1$ и $x^2$, в скобках рядом с уравнениями указываем принятые названия кривых).

I. Кривые эллиптического типа.

1°. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b$ (эллипсы).

2°. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geqslant b$ (мнимые эллипсы).

3°. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geqslant b, \quad \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$ (пары мнимых пересекающихся прямых).

II. Кривые гиперболического типа.

4°. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (гиперболы).

5°. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geqslant b, \quad \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$ (пары вещественных пересекающихся прямых).

III. Кривые параболического типа.

6°. $y^2 = 2px$ (параболы).

7°. $x^2 = a^2$ (пары параллельных прямых).

8°. $x^2 = -a^2$ (пары мнимых параллельных прямых).

9°. $x^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

Уравнения 1°–9° при всяких значениях параметров называются *каноническими.*

**Теорема 6.** *Специальным выбором ортонормированного репера в $\mathcal{E}_2$ и умножением, если необходимо, на вещественное число, всякое уравнение кривой второго порядка можно привести к одному и только одному виду из списка 1°–9°.*

**Доказательство.** Как и в аффинном случае, одно и то же уравнение нельзя привести к двум различным видам из списка 1°–9°, поскольку любые два уравнения из списка 1°–9° отличаются значениями ортогональных инвариантов (с учетом умножения уравнения на вещественное число). □

Напомним, что движение евклидова пространства устанавливает соответствие между точками, имеющими одинаковые координаты по отношению к двум различным ортонормированным реперам.

**Определение.** *Две гиперповерхности второго порядка $\Phi$ и $\Psi$ в $\mathcal{E}_n$ называются евклидово эквивалентными, если существует движение $\alpha \in GO(\mathcal{E}_n)$, при котором $\alpha(\Phi) = \Psi$ в $\mathcal{E}_n^{\mathbf{C}}$.*

**Теорема 7.** 1) *Всякая кривая второго порядка $\Phi$ в $\mathcal{E}_2$ может быть задана одним и только одним уравнением из списка 1°–9°.*

2) *Две кривые второго порядка в $\mathcal{E}_2$ евклидово эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых прямоугольных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из списка 1°–9°.*

Аналогичная теорема имеет место для поверхностей второго порядка в $\mathcal{E}_3$.

**Теорема 8.** 1) *Всякая поверхность второго порядка $\Phi$ в $\mathcal{E}_3$*

*может быть задана одним и только одним уравнением из нижеследующего списка* $1^\circ$–$17^\circ$.

2) *Две поверхности евклидово эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых прямоугольных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из списка* $1^\circ$–$17^\circ$.

I. Центральные поверхности.

$1^\circ$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\quad a\geqslant b\geqslant c$ (эллипсоиды).

$2^\circ$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\quad a\geqslant b\geqslant c$ (мнимые эллипсоиды).

$3^\circ$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0,\quad a\geqslant b\geqslant c,\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1$ (мнимые конусы).

$4^\circ$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\quad a\geqslant b$ (однополостные гиперболоиды).

$5^\circ$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\quad a\geqslant b$ (двуполостные гиперболоиды).

$6^\circ$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\quad a\geqslant b,\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1$ (вещественные конусы).

II. Параболоиды.

$7^\circ$. $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z,\quad p\geqslant q>0$ (эллиптические параболоиды).

$8^\circ$. $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z,\quad p\geqslant q>0$ (гиперболические параболоиды).

III. Цилиндры над кривыми второго порядка.

$9^\circ$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geqslant b$ (эллиптические цилиндры).

$10^\circ$. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1,\quad a\geqslant b$ (мнимые эллиптические цилиндры).

11°. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,\quad a\geqslant b,\quad \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ (пары мнимых пересекающихся плоскостей).

12°. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (гиперболические цилиндры).

13°. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,\quad a\geqslant b,\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ (пары вещественных пересекающихся плоскостей).

14°. $y^2=2px,\quad p>0$ (параболические цилиндры).

15°. $x^2=a^2$ (пары вещественных параллельных плоскостей).

16°. $x^2=-a^2$ (пары мнимых параллельных плоскостей).

17°. $x^2=0$ (пара вещественных совпадающих плоскостей).

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к следующему утверждению: *в пространстве $\mathcal{E}_n$ выбором подходящего репера уравнение всякой гиперповерхности можно привести к следующему виду*

$$\sum_{i=1}^{p}a_i(x^i)^2-\sum_{i=p+1}^{q}a_i(x^i)^2-2bx^{p+q+1}+c=0, \tag{97}$$

*где $a_i>0$, $i=1,\ldots,p+q\leqslant n$ и если $p+q=n$, то $b=0$. Для того, чтобы две поверхности с уравнениями вида (97) были евклидово эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их уравнения были пропорциональны.*

**Определение канонического вида уравнения кривой по инвариантам.**

1. Центральные кривые.

Поместив начало координат в центр и выбрав канонический базис для квадратичной формы $\varphi$, получим следующее уравнение

$$\lambda_1(x^1)^2+\lambda_2(x^2)^2+a_{33}=0.$$

При этом

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 a_{33} = I_2 a_{33}.$$

Поэтому уравнение кривой имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0. \tag{98}$$

2. Параболы.

Выбирая канонический базис для $\varphi$ и перенося начало координат так же, как это осуществлялось в аффинном случае, получаем следующее уравнение ($\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$)

$$\lambda_1(x^1)^2 + 2a_{23}x^2 = 0.$$

Поскольку в этом случае

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{а} \quad I_1 = \lambda_1, \quad \text{то} \quad a_{23} = \pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}.$$

Поэтому уравнение кривой имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x^2 = 0. \tag{99}$$

3. Параллельные прямые. $I_2 = 0$, $I_3 = 0$.

Характеристическое уравнение имеет два корня $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 = 0$. После того, как выбран базис, в котором квадратичная форма $\varphi$ имеет канонический вид $a_{11}(v^1)^2$, $a_{11} = \lambda_1$, уравнение кривой принимает вид (см. с. 85)

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0.$$

Определитель $I_3$ матрицы

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратичной формы $\widetilde{\varphi}$ равен нулю. Отсюда следует, что $a_{23} = 0$ и уравнение кривой имеет вид

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{13}x^1 + a_{33} = 0. \tag{100}$$

При одновременном выполнении условий $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$ полуинвариант $K_2$, определяемый формулой (94), оказывается ортогональным инвариантом. Действительно, для уравнения (100) инвариант $K_2$ имеет вид

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

При переносе начала координат $x^i = x^{i'} + b^i$ уравнение кривой принимает вид $a_{11}(x^{1'} + b^1)^2 + 2a_{13}(x^{1'} + b^1) + a_{33} = 0$. Отсюда

$$K_2' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{13}' \\ a_{13}' & a_{33}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} + a_{11}b^1 \\ a_{13} + a_{11}b^1 & a_{33} + a_{11}(b^1)^2 + 2a_{13}b^1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = K_2.$$

Итак, после выбора канонического базиса и переноса начала координат, в рассматриваемом случае уравнение кривой приводится к виду $\lambda_1(x^1)^2 + a_{33} = 0$. При этом

$$\lambda_1 = I_1, \quad K_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad a_{33} = \frac{K_2}{I_1}.$$

В итоге получаем следующее каноническое уравнение кривой с равными нулю инвариантами $I_2$ и $I_3$:

$$I_1(x^1)^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0.$$

**Определение канонического вида уравнения поверхности второго порядка по инвариантам.**

1. Центральные поверхности.

Поместив начало координат в центр и выбрав канонический базис для квадратичной формы $\varphi$, получаем следующее уравнение

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 + a_{44} = 0.$$

При этом $I_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 a_{44} = I_3 a_{44}$. Поэтому уравнение поверхности имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0.$$

2. Параболоиды ($I_3 = 0$, $I_4 \neq 0$).

Выбирая канонический базис для $\varphi$ и перенося начало координат, получим следующее уравнение ($\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$):

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + 2a_{34}x^3 = 0.$$

Поскольку в этом случае

$$I_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{а} \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2, \quad \text{то} \quad a_{34} = \pm\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}.$$

Поэтому уравнение поверхности имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}\,x^3 = 0.$$

Знак перед корнем выбирается таким образом, чтобы система координат была правой.

3. Эллиптические и гиперболические цилиндры и пересекающиеся плоскости ($I_3 = 0$, $I_4 = 0$, $I_2 \neq 0$).

В этом случае характеристическое уравнение имеет два отличных от нуля корня $\lambda_1$ и $\lambda_2$. После того, как выбран базис, в котором квадратичная форма $\varphi$ имеет канонический вид $a_{11}(v^1)^2 + a_{22}(v^2)^2$, $a_{11} = \lambda_1$, $a_{22} = \lambda_2$, уравнение поверхности принимает вид

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0.$$

Определитель $I_4$ матрицы $(a_{\alpha\beta})$ равен нулю. Отсюда следует, что $a_{34} = 0$ и уравнение кривой имеет вид

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + a_{44} = 0.$$

Легко проверяется (аналогично рассмотренному выше случаю 3 для кривых), что при одновременном выполнении двух условий $I_3 = 0$ и $I_4 = 0$ полуинвариант $K_3$, определяемый формулой (96), оказывается ортогональным инвариантом (не изменяется при переносе начала координат). После переноса начала координат уравнение поверхности приводится к виду

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{44} = 0.$$

При этом $K_3 = a_{11}a_{22}a_{44} = I_2 a_{44}$. Поэтому уравнение поверхности имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0.$$

4. Параболический цилиндр ($I_3 = 0$, $I_2 = 0$, $I_4 = 0$, $K_3 \neq 0$).

Выбор канонического базиса и перенос начала координат (как в случае параболы на плоскости) приводит уравнение поверхности к следующему виду

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{24}x^2 = 0,$$

где коэффициент $a_{24}$ отличен от нуля. При этом $K_3 = -a_{11}a_{24}^2 = -I_1 a_{24}^2$. Поэтому уравнение поверхности имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\, x^2 = 0.$$

5. Параллельные плоскости ($I_2 = I_3 = I_4 = K_3 = 0$).

Выбором канонического базиса уравнение поверхности приводится к виду

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{14}x^1 + a_{44} = 0.$$

Легко проверяется, что при $I_2 = I_3 = I_4 = K_3 = 0$ полуинвариант $K_2$, определяемый формулой (95), оказывается ортогональным инвариантом. После переноса начала координат уравнение поверхности принимает вид

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{44} = 0.$$

При этом $K_2 = a_{11}a_{44} = I_1 a_{44}$. Поэтому уравнение поверхности имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0.$$

**Задача 27.** На евклидовой плоскости в прямоугольной системе координат $\{O; x, y\}$ задана кривая второго порядка уравнением

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

Найти каноническое уравнение этой кривой и каноническую систему координат.

**Решение.** Матрицы ассоциированных квадратичных форм имеют вид

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & -19 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$. Однородная система линейных уравнений (84) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = 0.$$

При $\lambda_1 = 9$ эта система представляет собой уравнение $-4w^1 + 6w^2 = 0$. Поэтому вектор главного направления, соответствующий корню $\lambda_1 = 9$, имеет вид $\mathbf{w}_1 = \{3; 2\}$. Второй вектор главного направления можно найти аналогичным образом, но можно просто повернуть вектор $\mathbf{w}_1$ на угол $\pi/2$. В результате получим $\mathbf{w}_2 = \{-2; 3\}$.

Центр кривой находится из системы уравнений (61), матрица которой образована двумя первыми строками матрицы $(a_{\alpha\beta})$. Итак, центр находится из системы уравнений $5x + 6y - 11 = 0$, $6x - 6 = 0$ и имеет координаты $x_C = 1$, $y_C = 1$. Перенесем начало координат в центр. Для этого подставим в уравнение кривой формулы преобразования координат сдвига: $x = \hat{x} + 1$, $y = \hat{y} + 1$. Получим уравнение

$$5(\hat{x}+1)^2 + 12(\hat{x}+1)(\hat{y}+1) - 22(\hat{x}+1) - 12(\hat{y}+1) - 19 = 0,$$

которое после приведения подобных членов принимает вид

$$5\hat{x}^2 + 12\hat{x}\hat{y} - 36 = 0. \tag{101}$$

Выберем теперь в качестве новых базисных векторов единичные векторы главных направлений

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{3}{\sqrt{13}}\,\mathbf{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\,\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{2'} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\,\mathbf{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}\,\mathbf{e}_2.$$

Этой замене базиса соответствует преобразование координат

$$\hat{x} = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y', \quad \hat{y} = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'.$$

Подставив эти преобразования в уравнение (101), получим уравнение $\frac{5}{13}(3x'-2y')^2-\frac{12}{13}(3x'-2y')(2x'+3y')-36=0$, которое после приведения подобных членов принимает вид $9(x')^2-4(y')^2=36$. Итак, каноническое уравнение кривой имеет вид

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Это же уравнение получается при использовании формулы (98). В данном случае $I_3=\det(a_{\alpha\beta})=36^2$, а $I_2=\det(a_{ij})=-36$. $\triangleright$

**Задача 28.** На евклидовой плоскости в прямоугольной системе координат $\{O;x,y\}$ задана кривая второго порядка уравнением

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

Найти каноническое уравнение этой кривой и каноническую систему координат.

**Решение.** Матрицы ассоциированных квадратичных форм имеют вид

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $I_2=\det(a_{ij})=0$, то рассматриваемая кривая является кривой параболического типа. Так как $I_3=\det(a_{\alpha\beta})=-64\neq 0$, то это парабола. Характеристическое уравнение $(1-\lambda)^2-1=0$ имеет корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$. По формуле (99) находим каноническое уравнение $2x^2+2\sqrt{32}y=0$. Для нахождения канонической системы координат нужно сначала повернуть оси координат. Векторы главных направлений имеют вид $\mathbf{w}_1=\{-1;1\}$, $\mathbf{w}_2=\{1;1\}$. $\triangleright$

**Задача 29.** Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых, есть гиперболический параболоид.

**Решение.** Выберем систему координат, в которой первая прямая — ось $Ox^1$, общий перпендикуляр прямых — ось $Ox^3$, а вторая прямая имеет уравнения $x^1 = t\cos\alpha$, $x^2 = t\sin\alpha$, $x^3 = a = \mathrm{const}$. Квадрат расстояния от точки $M(x^1; x^2; x^3)$ до оси $Ox^1$ равен $(x^2)^2 + (x^3)^2$, а квадрат расстояния от $M$ до второй прямой равен квадрату модуля векторного произведения векторов $\{\cos\alpha; \sin\alpha; 0\}$ и $\{x^1; x^2; x^3 - a\}$. Приравнивая два эти числа, получим уравнение $(x^3 - a)^2 + (x^1\sin\alpha - x^2\cos\alpha)^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2$. В аффинной системе координат $2x^{3'} = -2ax^3 + a^2$, $x^{1'} = x^1\sin\alpha - x^2\cos\alpha$, $x^{2'} = x^2$ это уравнение принимает вид $2x^{3'} = (x^{2'})^2 - (x^{1'})^2$. $\triangleright$

**Рекомендуемая литература:** [1], Гл. XVIII; [7], Гл. XI, §6.

**Задачи и упражнения:** [4], 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 735, 740, 741, 1753, 1754, 1755, 1756, 1757, 1758, 1759, 1760, 1761, 1762, 1763, 1764, 1765.

# 7 Проективное пространство

Для того, чтобы из аффинной геометрии плоскости получить евклидову геометрию, нужно в пространстве векторов $\mathbf{V}_2$ аффинного пространства $\mathcal{A}_2$ ввести скалярное произведение, а в группе аффинных преобразований $GA(\mathcal{A}_2)$ пространства $\mathcal{A}_2$ взять подгруппу, состоящую из преобразований, сохраняющих скалярное произведение векторов. Обратно, аффинная геометрия плоскости получается из евклидовой переходом к более широкой группе преобразований, действующей на том же самом множестве точек.

Проективная геометрия возникает при дальнейшем расширении группы преобразований. Как и в случае аффинной геометрии (с. 31), проективные преобразования естественно возникают в рамках евклидовой геометрии. Если в трехмерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$ взять две непараллельные плоскости $\pi = \{M_0, \mathbf{L}_2\}$ и $\pi' = \{M_0', \mathbf{L}_2'\}$ и точку $S$, не принадлежащую ни одной из этих плоскостей, то отображение $p$, проектирующее плоскость $\pi$ на $\pi'$ из точки $S$ (т.е., относящее точке $M \in \pi$ точку $M' \in \pi'$, лежащую на прямой $SM$), является проективным отображением. В отличие от проектирования плоскости $\pi$ на $\pi'$ параллельно некоторому вектору (с. 31), центральное проектирование не является взаимно однозначным. Для точки $N$ такой, что прямая $SN$ параллельна плоскости $\pi'$, не существует образа $N' = p(N)$. А для точки $K' \in \pi'$ такой, что $SK' \| \pi$, не существует прообраза $K \in \pi$. Для того, чтобы центральное проектирование из точки $S$ стало взаимно однозначным отображением, можно удалить из плоскости $\pi$ прямую $a$, принадлежащую плоскости $\sigma = \{S, \mathbf{L}_2'\}$, а из плоскости $\pi'$ прямую $b'$, принадлежащую плоскости $\tau = \{S, \mathbf{L}_2\}$. Недостатком такого подхода является то, что при замене точки $S$ на какую-либо другую точку $S_1$ придется удалять другие прямые. Другая возможность состоит в том, чтобы, наоборот, добавить ко множеству точек плоскости $\pi'$ точки, которые будут служить образами точек прямой $a$, а ко множеству точек плоскости $\pi$ точки, которые будут служить прообразами точек прямой $b'$. Расширенные плоскости $\widetilde{\pi} = \pi \cup p^{-1}(b')$ и $\widetilde{\pi}' = \pi' \cup p(a)$ будут находиться во взаимно однозначном соответствии между собой и одновременно во взаимно однозначном соответствии со множеством $\mathcal{P}_2$ прямых пространства $\mathcal{E}_3$, проходящих через точку $S$. Множество $\mathcal{P}_2$ уже не зависит от выбора плоскостей $\pi$ и $\pi'$, и по отношению к нему плоскости $\pi$ и $\pi'$ могут рассматриваться как подмножества. Это множество $\mathcal{P}_2$ и наделяется структурой проективной плоскости.

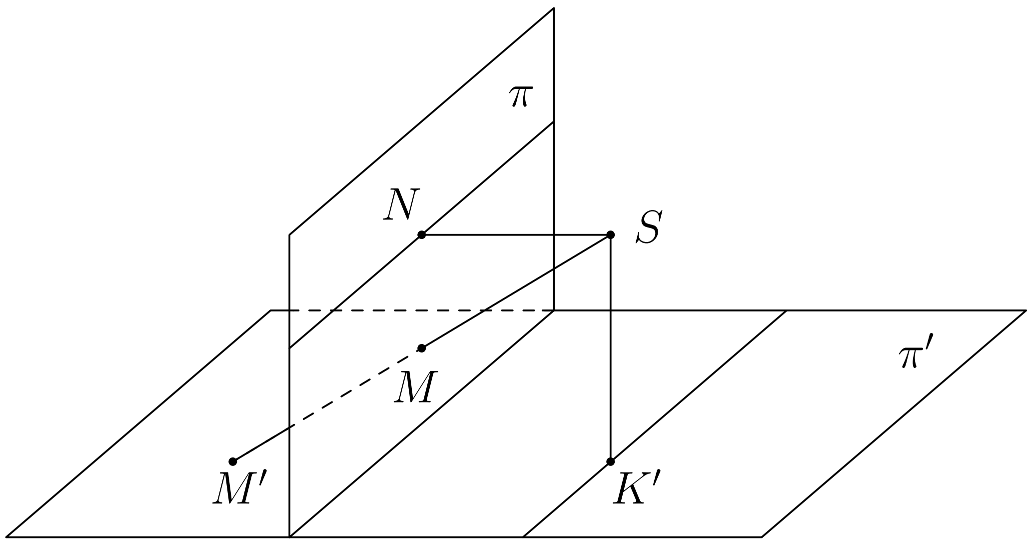



Рис. 35.

При центральном проектировании не сохраняется параллельность прямых.

**Задача 30.** Показать, что, выбирая подходящее центральное проектирование, можно произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$ перевести в параллелограмм.

**Решение.** Рассмотрим некоторую пирамиду $SABCD$. Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. На луче $SO$ выберем точку $P$ такую, что $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OP}$. Пусть четыре прямые, проходящие через точку $P$ параллельно прямым $SA$, $SC$, $SB$ и $SD$, пересекают $SC$, $SA$, $SD$ и $SB$ соответственно в точках $C'$, $A'$, $D'$ и $B'$. Четырехугольник $A'B'C'D'$ является параллелограммом. $\triangleright$

**Задача 31.** Записать уравнения проектирования плоскости $Oxz$ на плоскость $Oxy$ из точки $S(a;b;c)$.

**Решение.** Пусть точка $M \in Oxz$ имеет координаты $(x;0;z)$, а точка $M' \in Oxy$ — координаты $(x';y';0)$. Из коллинеарности векторов $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SM'}$ получаем следующие пропорции:

$$\frac{x'-a}{x-a} = \frac{y'-b}{0-b} = \frac{0-c}{z-c},$$

откуда

$$x' = \frac{az-cx}{z-c}, \quad y' = \frac{bz}{z-c}.$$

$\triangleright$

**Определение.** *Проективным пространством размерности $n$ над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ называется тройка $(\mathcal{P}_n, \mathbf{V}_{n+1}, p)$, состоящая из некоторого множества $\mathcal{P}_n$, векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ размерности $n+1$ над полем $\mathbf{R}$ и сюръективного отображения*

$$p : \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathcal{P}_n \tag{102}$$

*такого, что $p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{w})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$.*

Элементы множества $\mathcal{P}_n$ называются точками проективного пространства. Когда не возникает недоразумений, при обозначении проективного пространства будем использовать один символ $\mathcal{P}_n$. Векторное пространство $\mathbf{V}_{n+1}$ называется *ассоциированным* с проективным пространством $\mathcal{P}_n$. При этом говорят, что *отображение* (102) *задает на множестве $\mathcal{P}_n$ структуру проективного пространства.*

**Определение.** *Отображение* $\varphi : \mathcal{P}'_m \to \mathcal{P}_n$ *называется морфизмом проективных пространств (проективным отображением), если существует линейное отображение* $\widetilde{\varphi} : \mathbf{V}'_{m+1} \to \mathbf{V}_{n+1}$ *ассоциированных векторных пространств такое, что коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}'_{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "p'"'] & \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{P}'_m \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{P}_n \end{tikzcd} \tag{103}$$

Коммутативность диаграммы (103) означает, что $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi \circ p'$.

Из определения морфизма проективных пространств следует, что отображение $\widetilde{\varphi}$ в диаграмме (103) является мономорфизмом ($\ker \widetilde{\varphi} = \{\mathbf{0}\}$), поскольку иначе верхняя строка диаграммы будет не определена. Таким образом, проективное отображение всегда является вложением. Морфизм проективных пространств называется *изоморфизмом*, если он является взаимнооднозначным отображением. При этом, очевидно, и линейное отображение $\widetilde{\varphi}$ будет изоморфизмом векторных пространств (если $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{n+1}$ не принадлежит образу пространства $\mathbf{V}'_{m+1}$, то $p(\mathbf{v}) \in \mathcal{P}_{n+1}$ не может принадлежать образу пространства $\mathcal{P}_n$). Отсюда следует, что проективные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность.

Будем говорить, что линейное отображение $\widetilde{\varphi}$ *порождает* морфизм $\varphi$.

## 7.1 Примеры проективных пространств

1. $\mathcal{P}_n = \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве $\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, определяемое следующим образом: $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$ для некоторого

$\lambda \in \mathbf{R}$. Отображение $p$ имеет вид $p : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]$, где $[\mathbf{v}]$ — класс векторов, эквивалентных вектору $\mathbf{v}$.

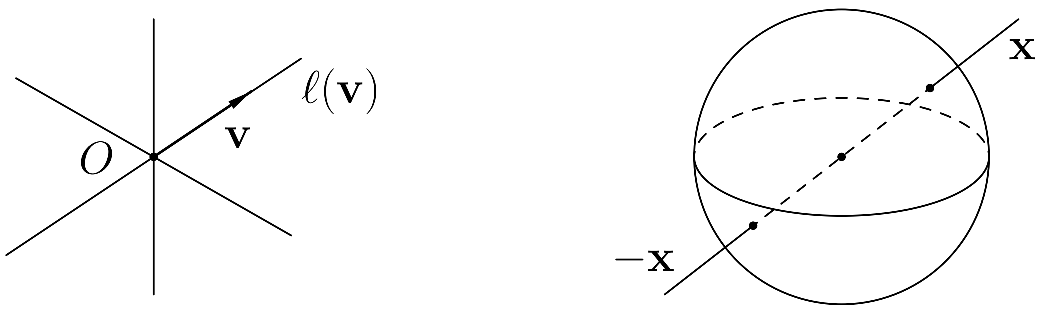
В частности, пространство $\mathbf{R}\mathcal{P}_n = \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$ называется *стандартным* проективным пространством размерности $n$.

2. $\mathcal{P}_n$ — множество одномерных подпространств векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$. Отображение $p$ имеет вид $p : \mathbf{v} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{v})$.

3. $\mathcal{P}_n = \mathcal{B}(O)$ — множество прямых аффинного пространства $(\mathcal{A}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \psi)$, проходящих через фиксированную точку $O \in \mathcal{A}_{n+1}$. Такое множество прямых называется *связкой*, точка $O$ называется *центром* связки. Отображение $p$ относит вектору $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ прямую с направляющим вектором $\mathbf{v}$, проходящую через $O$,

$$p : \mathbf{v} \mapsto \ell(\mathbf{v}) = \{M \in \mathcal{A}_{n+1} \,|\, \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_O + t\mathbf{v}\}.$$

4. $\mathcal{P}_n = \mathbf{S}^n/\sim$, где $\mathbf{S}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{n+1} \,|\, \mathbf{x}^2 = 1\}$ — сфера радиуса 1 в евклидовом пространстве $\mathbf{E}_{n+1}$, а отношение эквивалентности $\sim$ определено следующим образом: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \pm\mathbf{y}$. Отображение $p$ относит вектору $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ пару точек пересечения прямой $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$ со сферой $\mathbf{S}^n$.




Связка $\qquad\qquad$ $\mathbf{S}^n/\{\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}\}$

Рис. 36.

**Замечание.** Поскольку проективные пространства одной размерности изоморфны, то приведенные выше примеры называют также *моделями* проективного пространства размерности $n$.

## 7.2 Аффинная модель проективного пространства

Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{B}(O)$ — связка прямых аффинного пространства $\mathcal{A}_{n+1}$ с центром в точке $O$, $\pi = \mathcal{A}_n$ — гиперплоскость в $\mathcal{A}_{n+1}$ с направляющим подпространством $\mathbf{V}_n(\pi)$, не проходящая через точку $O$, а $\pi' = \{O, \mathbf{V}_n(\pi)\}$ — гиперплоскость, проходящая через точку $O$ и параллельная $\pi$. Прямые, проходящие через точку $O$ и лежащие в гиперплоскости $\pi'$, образуют связку $\mathcal{B}_{\pi'}(O) = \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$, представляющую собой $(n-1)$-мерное проективное пространство.

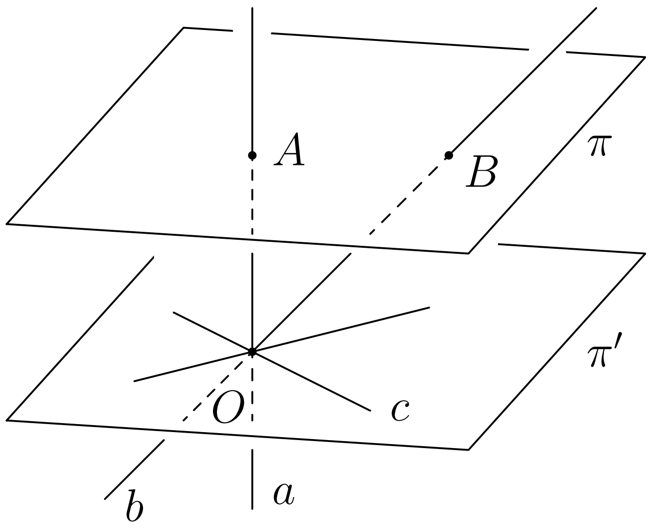



Рис. 37.

Если прямая $a \in \mathcal{B}(O)$ не лежит в гиперплоскости $\pi'$, то она пересекает $\pi = \mathcal{A}_n$ в одной точке $A$. Относя каждой прямой $a \in \mathcal{B}(O) \setminus \mathcal{B}_{\pi'}(O)$ точку $A = a \cap \pi$, получим взаимно однозначное соответствие

$$h_\pi : \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}(\pi') \to \mathcal{A}_n, \qquad (104)$$

называемое *аффинной картой.*

Отождествляя $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$ с $\mathcal{A}_n$, получаем представление проективного пространства

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{P}_{n-1}(\pi') \qquad (105)$$

как аффинного пространства $\pi = \mathcal{A}_n$, дополненного множеством $\mathcal{P}_{n-1}(\pi')$. Это множество $\mathcal{P}_{n-1}(\pi')$ является гиперплоскостью в $\mathcal{P}_n$ (определение гиперплоскости в проективном пространстве приведено ниже), называемой *бесконечно удаленной* или *несобственной* гиперплоскостью для данной аффинной карты. Всякая точка $C \in \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$, то есть прямая $c \in \mathcal{B}_{\pi'}(O)$, называется бесконечно удаленной или несобственной точкой аффинного пространства $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}_n$. Точки проективного пространства $\mathcal{P}_n$, принадлежащие $\mathcal{A}_n$, при этом называют собственными точками аффинного пространства $\mathcal{A}_n$. Представление проективного пространства $\mathcal{P}_n$ в виде объединения (105) аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ и несобственной гиперплоскости $\mathcal{P}_{n-1}(\pi')$ называется *аффинной моделью проективного пространства.*

Представляя далее проективное пространство $\mathcal{P}_{n-1}(\pi')$, а затем и каждую вновь появляющуюся бесконечно удаленную гиперплоскость, в виде (105), получим дизъюнктное объединение

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_{n-1} \cup \mathcal{A}_{n-2} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_0. \tag{106}$$

## 7.3 Плоскости в $\mathcal{P}_n$

**Определение.** *Плоскостью размерности $m$ ($m$-плоскостью) в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ называется подмножество $\pi_m \subset \mathcal{P}_n$, представляющее собой образ $p\left(\mathbf{V}_{m+1} \backslash \{\mathbf{0}\}\right)$, где $\mathbf{V}_{m+1} = \mathbf{V}_{m+1}(\pi_m)$ — подпространство в векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$, ассоциированном с $\mathcal{P}_n$.*

Очевидно, отображение $p$, ограниченное на $\mathbf{V}_{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, наделяет подмножество $\pi_m \subset \mathcal{P}_n$ структурой $m$-мерного проективного пространства $\mathcal{P}_m$. Поэтому плоскости в $\mathcal{P}_n$ называют также *подпространствами* в $\mathcal{P}_n$. В дальнейшем плоскость $\pi_m = p(\mathbf{V}_{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$ будем обозначать также символом $\pi(\mathbf{V}_{m+1})$.

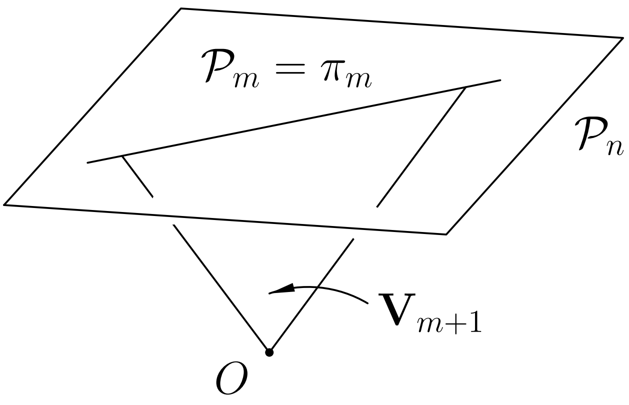



Рис. 38.

0-плоскости в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ — это точки этого пространства. 1-плоскости пространства $\mathcal{P}_n$ называются *прямыми*, а $(n-1)$-плоскости называются *гиперплоскостями*.

Пусть $\pi(\mathbf{V}_{m+1})$ и $\pi(\mathbf{V}'_{k+1})$ — две плоскости в $\mathcal{P}_n$. В том случае, когда $\mathbf{V}_{m+1} \cap \mathbf{V}'_{k+1} \neq \{\mathbf{0}\}$, очевидно, выполняется

$$\pi(\mathbf{V}_{m+1}) \cap \pi(\mathbf{V}'_{k+1}) = \pi(\mathbf{V}_{m+1} \cap \mathbf{V}'_{k+1}).$$

Если $\mathbf{V}_{m+1} \cap \mathbf{V}'_{k+1} = \{\mathbf{0}\}$, то плоскости $\pi(\mathbf{V}_{m+1})$ и $\pi(\mathbf{V}'_{k+1})$ называются *скрещивающимися*. Таким образом, две плоскости в $\mathcal{P}_n$ либо пересекаются по плоскости, либо скрещиваются. Плоскости $\pi_m$ и $\pi_k$ в $\mathcal{P}_n$ могут скрещиваться только при $(m+1)+(k+1) \leqslant n+1$, т. е. только при $m+k \leqslant n-1$.

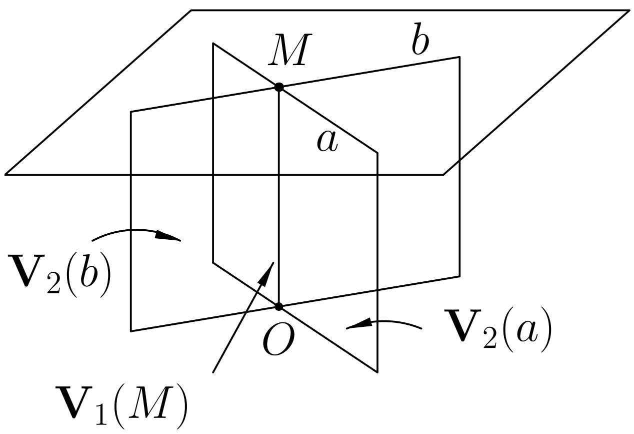



Рис. 39.

В частности, на проективной плоскости (так называют проективное пространство размерности два) $\mathcal{P}_2$ любые две несовпадающие прямые $a$ и $b$ пересекаются в одной точке. Эта точка $M = a \cap b$ определяется 1-мерным подпространством

$$\mathbf{V}_1(M) = \mathbf{V}_2(a) \cap \mathbf{V}_2(b).$$

В модели $\mathcal{P}_2 = \mathbf{S}^2/\sim$ это свойство прямых проективной плоскости иллюстрируется пересечением двух больших окружностей сферы в двух диаметрально противоположных точках.

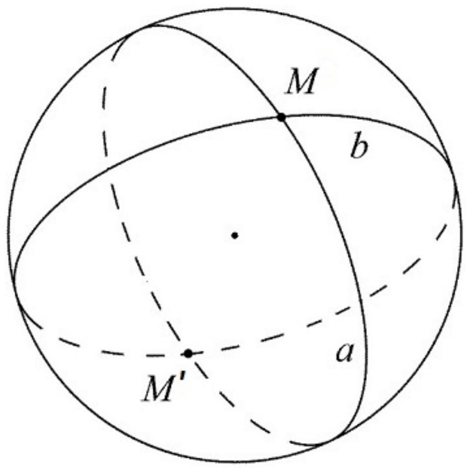



Рис. 40.

Рассмотрим теперь аффинную модель $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$ проективного пространства, и пусть две прямые $a$ и $b$ в $\mathcal{P}_n$ таковы, что их части, содержащиеся в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$, представляют собой параллельные прямые (аффинные) с направляющим вектором $\mathbf{v}$. Так как $\mathbf{V}_2(a) \cap \mathbf{V}_2(b) = \mathcal{L}(\mathbf{v})$, то эти прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке $p(\mathbf{v}) \in \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$.

**Замечание.** В проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ над полем вещественных чисел можно ввести такое понятие математического анализа (точнее, топологии) как предел последовательности точек $A_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Это можно сделать, например, следующим образом: точка $A$ является пределом последовательности $A_i$, если в некоторой аффинной карте, для которой точка $A$ не является бесконечно удаленной, то есть такой, что $A \in \mathcal{A}_n$, найдется такое натуральное число $k$, что при $i \geqslant k$ все точки $A_i$ принадлежат $\mathcal{A}_n$ и $\lim\limits_{i \to \infty} A_i = A$. При этом всякая прямая проективного пространства оказывается замкнутой кривой (топологически эквивалентной окружности). Пределом стремящейся к бесконечности последовательности точек $A_i$, $i = 1, 2, \ldots$, прямой $\ell$ с направляющим вектором $\mathbf{v}$ аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ из аффинной модели (105) является точка $p(\mathbf{v}) \in \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$.

## 7.4 Однородные координаты в $\mathcal{P}_n$

Точка $A \in \mathcal{P}_n$ однозначно определяется любым вектором $\mathbf{a}$ из векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$, ассоциированного с $\mathcal{P}_n$, таким, что $p(\mathbf{a}) = A$. Будем использовать следующее обозначение: $A = [\mathbf{a}]$. При этом $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Пусть $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, — базис в $\mathbf{V}_{n+1}$ и $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Тогда точка $A$ однозначно определяется набором чисел $\{a^\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$. Два набора $\{a^\alpha\}$ и $\{b^\alpha\}$ задают одну и ту же точку пространства $\mathcal{P}_n$ тогда и только тогда, когда $b^\alpha = \lambda a^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$.

Числа $\{a^\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, определенные с точностью до одновременного умножения на число, называются *проективными координатами* точки $A = [\mathbf{a}] \in \mathcal{P}_n$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. Проективные координаты точки $A$ будем обозначать следующим образом: $[a^1 : a^2 : \ldots : a^{n+1}]$ или, кратко, $[a^\alpha]$. В соответствии с принятыми обозначениями, $[a^1 : a^2 : \ldots : a^{n+1}] = [\lambda a^1 : \lambda a^2 : \ldots : \lambda a^{n+1}]$ для любого ненулевого $\lambda \in \mathbf{R}$.

Возникает естественный вопрос: в каком случае два базиса $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и $\{\mathbf{e}'_\alpha\}$ определяют одну и ту же систему проективных координат в $\mathcal{P}_n$? Ответом является следующее предложение.

**Предложение.** *Пусть* $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ *и* $\{\mathbf{e}'_\alpha\}$ *— два базиса в векторном пространстве* $\mathbf{V}_{n+1}$*, ассоциированном с проективным про-*

*странством* $\mathcal{P}_n$ *и* $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = {}'a^\alpha \mathbf{e}'_\alpha$ — *разложения вектора* $\mathbf{a}$ *по указанным базисам. Соотношение*

$$[a^1 : a^2 : \ldots : a^{n+1}] = [{}'a^1 : {}'a^2 : \ldots : {}'a^{n+1}]$$

*выполняется для всех точек* $[\mathbf{a}] \in \mathcal{P}_n$ *тогда и только тогда, когда существует* $\lambda \in \mathbf{R}$ *такое, что* $\mathbf{e}'_\alpha = \lambda \mathbf{e}_\alpha$ *для всех* $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

**Доказательство.** 1) Если $\mathbf{e}'_\alpha = \lambda \mathbf{e}_\alpha$, то $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = {}'a^\alpha \mathbf{e}'_\alpha = {}'a^\alpha \lambda \mathbf{e}_\alpha$, откуда следует, что $a^\alpha = \lambda \cdot {}'a^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

2) Точка $E'_\beta$, определяемая базисным элементом $[\mathbf{e}'_\beta]$ базиса $\{\mathbf{e}'_\alpha\}$, имеет в этом базисе координаты $[\overset{1}{0} : \ldots : \overset{\beta}{1} : \ldots : \overset{n+1}{0}]$, где единица стоит на месте с номером $\beta$. Если эта точка имеет такие же координаты в базисе $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, то $\mathbf{e}'_\beta = \lambda \mathbf{e}_\beta$. Однако, в последнем соотношении коэффициент $\lambda$ зависит от номера $\beta$, поэтому векторы базисов связаны соотношениями $\mathbf{e}'_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Чтобы показать, что на самом деле все коэффициенты $\lambda_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, совпадают, достаточно рассмотреть точку

$$E = [\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \ldots + \mathbf{e}'_{n+1}] = [\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_{n+1} \mathbf{e}_{n+1}].$$

Поскольку ее координаты $[1 : 1 : \ldots : 1]$ и $[\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_{n+1}]$ относительно рассматриваемых базисов совпадают, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1}$. $\square$

**Определение.** *Два базиса* $\{\mathbf{e}'_\alpha\}$ *и* $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ *векторного пространства* $\mathbf{V}_{n+1}$, *ассоциированного с проективным пространством* $\mathcal{P}_n$, *назовем эквивалентными, если существует* $\lambda \in \mathbf{R}$ *такое, что* $\mathbf{e}'_\alpha = \lambda \mathbf{e}_\alpha$ *для всех* $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

*Это отношение эквивалентности разбивает множество* $\mathcal{B}(\mathbf{V}_{n+1})$ *всех базисов пространства* $\mathbf{V}_{n+1}$ *на классы эквивалентных между собой базисов. Каждый из классов эквивалентности называется проективным репером. Проективный репер,* *определяемый базисом* $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, *обозначается следующим образом:* $[\mathbf{e}_\alpha]$. *Координатами точки* $A \in \mathcal{P}_n$ *относительно репера* $[\mathbf{e}_\alpha]$ *называются ее координаты* $[a^\alpha]$ *относительно базиса* $\{\mathbf{e}_\alpha\}$.

В принятой системе обозначений проективный репер $[\mathbf{e}_\alpha]$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, и одна точка $[\mathbf{e}_\alpha] = p(\mathbf{e}_\alpha)$ обозначаются одинаково. Поэтому каждый раз будем оговаривать, имеется ли в виду одна точка или репер.

Проективный репер $[\mathbf{e}_\alpha]$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, определяет $n+1$ точку $E_\alpha = [\mathbf{e}_\alpha] = p(\mathbf{e}_\alpha)$ в пространстве $\mathcal{P}_n$. Однако, обратно по точкам $E_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, репер $[\mathbf{e}_\alpha]$ не восстанавливается, поскольку точками $E_\alpha$ каждый из векторов $\mathbf{e}_\alpha$ определяется с точностью до умножения на свой множитель $\lambda_\alpha$. Этот недостаток можно устранить, задав еще одну точку $E = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_{n+1}]$, которая в системе координат, определяемой репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, имеет координаты $[1 : 1 : \ldots : 1]$.

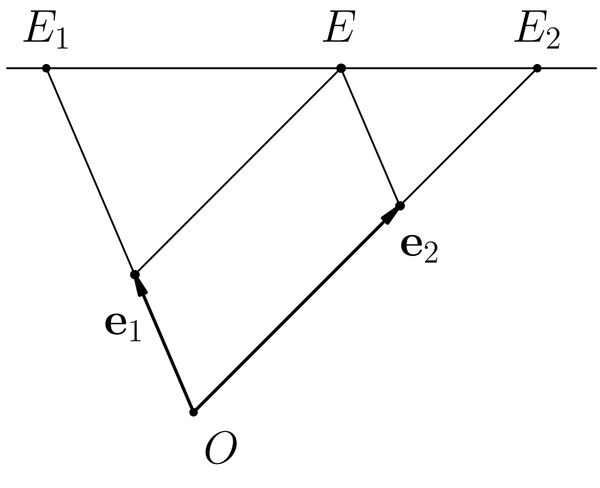



Рис. 41.

Набором точек $\{E_\alpha; E\}$ проективный репер $[\mathbf{e}_\alpha]$ определяется однозначно (см. доказательство вышеприведенного предложения). По этой причине для набора $\{E_\alpha; E\}$ также используется название *проективный репер*. Точки $E_\alpha$, имеющие координаты $[\overset{1}{0} : \ldots : \overset{\alpha}{1} : \ldots : \overset{n+1}{0}]$, называются *вершинами репера*, а точка $E$, имеющая координаты $[1 : 1 : \ldots : 1]$, называется *единичной точкой*.

**Замечание.** Соответствие, относящее точке проективного пространства ее координаты относительно проективного репера, можно рассматривать как изоморфизм $h : \mathcal{P}_n \to \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$ пространства $\mathcal{P}_n$ на стандартное проективное пространство $\mathbf{R}\mathcal{P}_n$.

Проективные координаты $[x^1 : x^2 : \ldots : x^{n+1}]$ называются также *однородными координатами*. Для аффинной карты (105), определяемой гиперплоскостью $\pi \subset \mathcal{A}_{n+1}$ с уравнением $x^{n+1} = 1$, у точек из $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}_n$ последняя координата $x^{n+1}$ отлична от нуля, поэтому такие точки однозначно определяются числами $\{X^i = x^i/x^{n+1}\}$, $i = 1, \ldots, n$. При этом, очевидно, $[x^1 : x^2 : \ldots : x^{n+1}] = [X^1 : X^2 : \ldots : X^n : 1]$. Числа $\{X^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, называются *неоднородными координатами* точек из $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}_n$. Неоднородные координаты — это аффинные координаты в гиперплоскости $\pi = \mathcal{A}_n$ относительно аффинного репера $\{Q, \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, где $Q \in \pi$ — точка с радиус-вектором $\mathbf{r}_Q = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{e}_{n+1}$.

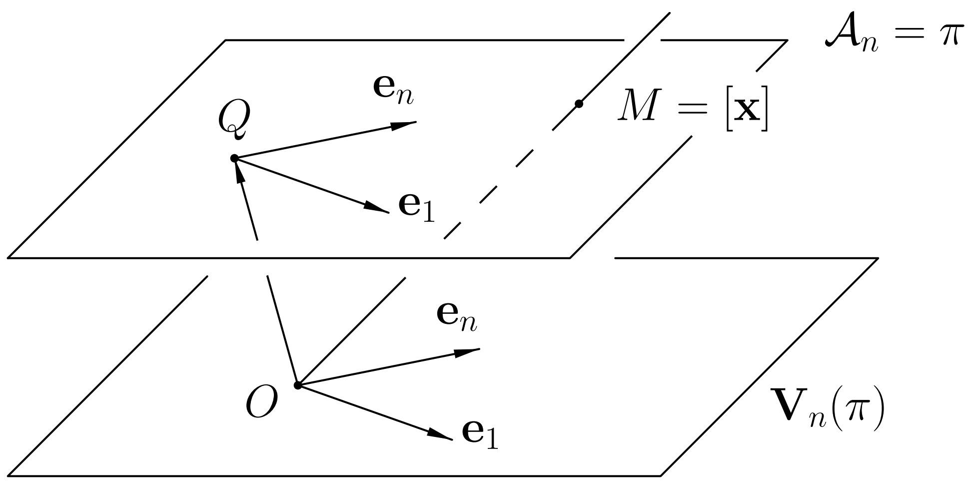



Рис. 42.

## 7.5 Уравнения $m$-плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$

Точка $[\mathbf{x}]$ принадлежит $m$-плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{x}$ принадлежит подпространству $\mathbf{V}_{m+1}$. Поэтому уравнения $m$-плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ в проективных координатах, определяемых репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, имеют тот же вид, что и уравнения подпространства $\mathbf{V}_{m+1}$ в базисе $\{\mathbf{e}_\alpha\}$.

1. Если подпространство $\mathbf{V}_{m+1}$ задано как линейная оболочка $\mathbf{V}_{m+1} = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}\}$ своего базиса $\{\mathbf{a}_A\}$, $A = 1, \ldots, m+1$, то $[\mathbf{x}] \in \pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{x} = t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^{m+1}\mathbf{a}_{m+1} = t^A\mathbf{a}_A.$$

В координатах это условие принимает вид

$$x^\alpha = t^1 a_1^\alpha + \ldots + t^{m+1} a_{m+1}^\alpha = t^A a_A^\alpha. \tag{107}$$

Уравнения (107) называются *параметрическими* уравнениями $m$-плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$. Числа $[t^1 : \ldots : t^{m+1}] = [t^A]$ являются проективными координатами в плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ относительно проективного репера $[\mathbf{a}_A]$, $A = 1, \ldots, m+1$.

2. Если $\operatorname{Ann}(\mathbf{V}_{m+1}) = \mathcal{L}\{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}^{n-m}\} \subset \mathbf{V}^*_{m+1}$, где $\{\widetilde{\mathbf{b}}^a\}$, $a = 1, \ldots, n-m$, — базис в $\operatorname{Ann}(\mathbf{V}_{m+1})$, то $[\mathbf{x}] \in \pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{\mathbf{b}}^a(\mathbf{x}) = 0,\ a = 1, \ldots, n-m.$$

В координатах указанная система уравнений принимает вид

$$b_\alpha^a x^\alpha = 0,\ a = 1, \ldots, n-m, \tag{108}$$

где $b_\alpha^a$ — координаты линейной формы $\widetilde{\mathbf{b}}^a$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. Таким образом, в проективных координатах $[x^\alpha]$ $m$-плоскость $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ задается системой однородных уравнений (108).

## 7.6 Преобразования проективных координат в $\mathcal{P}_n$

Пусть $[\mathbf{e}_\alpha]$ и $[\mathbf{e}_{\alpha'}]$ — два проективных репера в пространстве $\mathcal{P}_n$. Базисы $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\}$ ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$, определяющие эти реперы, связаны соотношением

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = p^{\alpha}_{\alpha'}\mathbf{e}_\alpha. \tag{109}$$

Соответствующее преобразование проективных координат $[x^\alpha]$ имеет вид

$$x^\alpha = p^{\alpha}_{\alpha'}x^{\alpha'}. \tag{110}$$

Каждый из базисов $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\}$ определяется соответствующим проективным репером с точностью до умножения на вещественное число: $\{\mathbf{e}_\alpha\} \sim \{\widetilde{\mathbf{e}}_\alpha = \mu\mathbf{e}_\alpha\}$, $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\} \sim \{\widetilde{\mathbf{e}}_{\alpha'} = \lambda\mathbf{e}_{\alpha'}\}$. Если $\widetilde{\mathbf{e}}_{\alpha'} = \widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}\widetilde{\mathbf{e}}_\alpha$, то $\widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'} = \nu p^{\alpha}_{\alpha'}$, где $\nu = \lambda/\mu$. Таким образом, матрица $(p^{\alpha}_{\alpha'})$, осуществляющая преобразование координат (110), определена с точностью до умножения на ненулевое вещественное число.

Матрицу, заданную с точностью до умножения на ненулевое число, называют *псевдоматрицей*. Точнее, псевдоматрица — это класс эквивалентности матриц $[P] = [p^\alpha_\beta]$ по следующему отношению эквивалентности: $P = (p^\alpha_\beta) \sim Q = (q^\alpha_\beta)$ тогда и только тогда, когда $P = \lambda Q$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$.

## 7.7 Преобразования (движения) проективного пространства $\mathcal{P}_n$

**Определение.** *Движением (проективным преобразованием) проективного пространства $\mathcal{P}_n$ называется изоморфизм этого пространства на себя, то есть такое взаимно однозначное отображение $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, для которого существует линейный изоморфизм $\widetilde{\varphi} : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{V}_{n+1}$ ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ на себя такой, что коммутативна диа-*

*грамма*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{P}_n \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{P}_n \end{tikzcd} \quad . \tag{111}$$

Проективное преобразование $\varphi$, порождаемое линейным преобразованием $\widetilde{\varphi}$, будем обозначать также следующим образом: $\varphi = [\widetilde{\varphi}]$.

В проективных координатах, определяемых репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, преобразование $\varphi : \mathcal{P}_n \ni [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{y}] \in \mathcal{P}_n$ принимает вид

$$y^\alpha = \varphi^\alpha_\beta x^\beta, \tag{112}$$

где $(\varphi^\alpha_\beta)$ — матрица линейного преобразования $\widetilde{\varphi}$ в базисе $\{\mathbf{e}_\alpha\}$.

Проективные преобразования $\varphi = [\widetilde{\varphi}]$ и $\psi = [\widetilde{\psi}]$ совпадают тогда и только тогда, когда $\widetilde{\varphi} = \lambda\widetilde{\psi}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Действительно, если $\widetilde{\varphi} = \lambda\widetilde{\psi}$, то, очевидно, $[\widetilde{\varphi}] = [\widetilde{\psi}]$. Если же $[\widetilde{\varphi}] = [\widetilde{\psi}]$ и $\widetilde{\psi} : \mathbf{e}_\alpha \mapsto \mathbf{e}'_\alpha$, то $\widetilde{\varphi} : \mathbf{e}_\alpha \mapsto \lambda_\alpha \mathbf{e}'_\alpha$, где $\lambda_\alpha$ зависит (априори) от $\alpha = 1, \ldots, n+1$. Но, поскольку $\widetilde{\varphi} : \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_{n+1} \mapsto \lambda_1\mathbf{e}'_1 + \lambda_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + \lambda_{n+1}\mathbf{e}'_{n+1} = \mu(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \ldots + \mathbf{e}'_{n+1})$, то $\lambda_\alpha = \mu$ при всех $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

Отсюда, в частности, следует, что матрица $(\varphi^\alpha_\beta)$ проективного преобразования (112) определена с точностью до умножения на число, а проективный репер $[\mathbf{e}_\alpha]$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между проективными преобразованиями пространства $\mathcal{P}_n$ и псевдоматрицами $[\varphi^\alpha_\beta]$.

Множество проективных преобразований пространства $\mathcal{P}_n$ образует группу $GP(\mathcal{P}_n)$, изоморфную факторгруппе (см. [14], §65 или [12], Гл. 5, §3) $GL(\mathbf{V}_n)/H$ группы $GL(\mathbf{V}_n)$ линейных (невырожденных) преобразований векторного пространства $\mathbf{V}_n$ по нормальной подгруппе $H$, состоящей из гомотетий $\lambda \cdot \mathrm{id} : \mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$.

Поскольку в координатах линейные преобразования задаются невырожденными матрицами, группа $GP(\mathcal{P}_n)$ изоморфна факторгруппе $GL(n, \mathbf{R})/H$ полной матричной группы по нормальной подгруппе $H$, состоящей из скалярных матриц $(\varphi^\alpha_\beta) = (\lambda\, \delta^\alpha_\beta)$.

Преобразование проективных координат (110) с формальной точки зрения представляет собой проективное преобразование стандартного проективного пространства $\mathbf{R}\mathcal{P}_n$.

Поскольку линейное преобразование $\widetilde{\varphi} : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{V}_{n+1}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, имеющими одинаковые координаты $x^\alpha$ по отношению к базисам $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и $\{\mathbf{e}'_\alpha\}$, где $\mathbf{e}'_\alpha = \widetilde{\varphi}(\mathbf{e}_\alpha)$, то есть

$$\widetilde{\varphi} : \mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha \longmapsto \mathbf{x}' = x^\alpha \mathbf{e}'_\alpha,$$

то проективное преобразование $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{x}']$, имеющими одинаковые координаты $[x^\alpha]$ по отношению к реперам $[\mathbf{e}_\alpha]$ и $[\mathbf{e}'_\alpha]$ соответственно. Отсюда следует (см. предложение на с. 128), что проективное преобразование $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ однозначно определяется соответствиями

$$E_\alpha \mapsto E'_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, n+1, \quad E \mapsto E'$$

между точками, задающими проективные реперы $\{E_\alpha; E\}$ и $\{E'_\alpha; E'\}$.

**Предложение.** *Существует единственное проективное преобразование $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, которое переводит один упорядоченный набор $\{A_1, \ldots, A_{n+2}\}$ из $n+2$ точек, находящихся в общем положении (никакие $n+1$ из этих точек не принадлежат одной гиперплоскости) в другой упорядоченный набор $\{A'_1, \ldots, A'_{n+2}\}$ из $n+2$ точек, находящихся в общем положении.*

**Доказательство.** Действительно, $\varphi$ — это преобразование, переводящее вершины репера $\{E_\alpha = A_\alpha; E = A_{n+2}\}$ в соответствующие вершины репера $\{E'_\alpha = A'_\alpha; E = A'_{n+2}\}$. □

В частности, из этого предложения следует, что проективным преобразованием плоскости $\mathcal{P}_2$ можно перевести один из двух произвольным образом выбранных четырехугольников в другой.

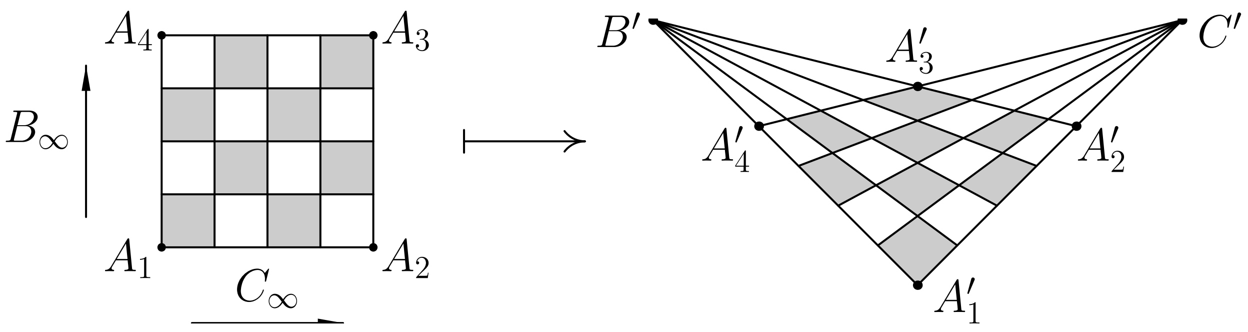



Рис. 43.

## 7.8 Ангармоническое отношение четырех точек прямой

**Определение.** *Пусть $A = [\mathbf{a}]$, $B = [\mathbf{b}]$, $C = [\mathbf{c}]$, $D = [\mathbf{d}]$ — четыре различные точки, принадлежащие одной прямой $\ell$ в пространстве $\mathcal{P}_n$, и*

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{113}$$

*Ангармоническим отношением отношением точек $A$, $B$, $C$ и $D$ называется следующее число:*

$$(A, B, C, D) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\beta}{\alpha}\,. \tag{114}$$

Нетрудно убедиться, что число $(A, B, C, D)$ не зависит от выбора векторов, определяющих точки $A$, $B$, $C$ и $D$. Например, если заменить в разложениях (113) $\mathbf{a}$ на $\nu\mathbf{a}$, то $\lambda$ и $\alpha$ заменятся, соответственно, на $\lambda' = \lambda/\nu$ и $\alpha' = \alpha/\nu$. При этом число (114) не изменится.

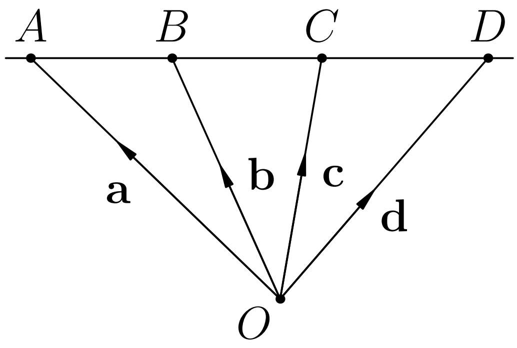



Рис. 44.

Число $(A, B, C, D)$ называют также *сложным отношением* точек $A$, $B$, $C$, $D$.

**Задача 32.** Пусть $\{E_1, E_2; E\}$ — проективный репер на проективной прямой (одномерном проективном пространстве) $\mathcal{P}_1$, а $M$ — точка этой прямой с координатами $[x^1 : x^2]$. Проверить, что $(E_1, E_2, E, M) = x^1/x^2$.

**Задача 33.** Пусть точки $A$, $B$, $C$, $D$ проективной прямой $\mathcal{P}_1$ заданы своими координатами $[a^1 : a^2]$, $[b^1 : b^2]$, $[c^1 : c^2]$, $[d^1 : d^2]$ соответственно относительно некоторого проективного репера $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. Доказать, что

$$(A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c^1 & b^1 \\ c^2 & b^2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d^1 & b^1 \\ d^2 & b^2 \end{vmatrix}}. \tag{115}$$

**Решение.** Первое из разложений (113) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\lambda$ и $\mu$, а второе — как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha$ и $\beta$. Записав решение этих систем по формулам Крамера и подставив полученные выражения в (114), получим формулу (115). $\triangleright$

**Задача 34.** Вывести из формулы (115) следующие соотношения:

$$(A, B, C, D) = (C, D, A, B) = (B, A, C, D)^{-1} = \\ = (A, B, D, C)^{-1} = (B, A, D, C). \quad (116)$$

Поскольку при линейных преобразованиях линейные комбинации векторов переходят в линейные комбинации образов этих векторов с теми же коэффициентами, то из определения проективных преобразований (см. диаграмму (111)) следует, что при проективных преобразованиях сохраняется ангармоническое отношение четырех точек прямой. Ангармоническое отношение четырех точек прямой называют *основным инвариантом проективной геометрии.*

## 7.9 Проективные преобразования в аффинной карте

Рассмотрим произвольное проективное преобразование $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ и представление (105) пространства $\mathcal{P}_n$ в виде объединения аффинного пространства и несобственной гиперплоскости $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$, соответствующее некоторой аффинной карте (104). Выясним, какими уравнениями задается ограничение $\varphi|\mathcal{A}_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{P}_n$ преобразования $\varphi$ в аффинных (неоднородных) координатах в пространстве $\mathcal{A}_n$.

Итак, в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ рассматриваем репер $[\mathbf{e}_\alpha]$, по отношению к которому аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ определяется условием $x^{n+1} \neq 0$ ($\mathcal{A}_n$ можно отождествить с гиперплоскостью $\pi \subset \mathbf{V}_{n+1}$, имеющей уравнение $x^{n+1} = 1$). Уравнения (112) в неоднородных координатах $X^i = x^i/x^{n+1}$ и $Y^i =$

$y^i/y^{n+1}$ принимают вид

$$Y^i = \frac{y^i}{y^{n+1}} = \frac{\varphi^i_\alpha x^\alpha}{\varphi^{n+1}_\beta x^\beta} = \frac{\dfrac{\varphi^i_\alpha x^\alpha}{x^{n+1}}}{\dfrac{\varphi^{n+1}_\beta x^\beta}{x^{n+1}}} = \frac{\varphi^i_j X^j + \varphi^i_{n+1}}{\varphi^{n+1}_k X^k + \varphi^{n+1}_{n+1}}. \qquad (117)$$

Таким образом, в аффинных координатах проективные преобразования задаются дробно-линейными функциями вида

$$Y^i = \frac{a^i_1 X^1 + \ldots + a^i_n X^n + a^i_{n+1}}{b_1 X^1 + \ldots + b_n X^n + b_{n+1}}. \qquad (118)$$

Уравнениями (118) задается отображение $\varphi|\mathcal{A}_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{P}_n$ (ограничение отображения $\varphi$ на подмножество $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}_n$). При этом гиперплоскость $\pi \subset \mathcal{A}_n$, имеющая уравнение $b_1 X^1 + \ldots + b_n X^n + b_{n+1} = 0$, отображается проективным преобразованием $\varphi$ в несобственную гиперплоскость. Поэтому проективные преобразования можно рассматривать и в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$, но область определения этих преобразований может не совпадать со всем пространством $\mathcal{A}_n$.

Выясним теперь, какой вид имеют проективные преобразования $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, при которых несобственная гиперплоскость $\mathcal{P}_{n-1}$ отображается на себя. При этом, очевидно, и аффинное пространство $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$ будет отображаться на себя. Так как несобственная гиперплоскость имеет уравнение $x^{n+1} = 0$, то в уравнениях (112) из $x^{n+1} = 0$ должно следовать $y^{n+1} = 0$ (при любых $x^1, \ldots, x^n$). Поскольку $y^{n+1} = \varphi^{n+1}_1 x^1 + \ldots + \varphi^{n+1}_n x^n + \varphi^{n+1}_{n+1} x^{n+1}$, это возможно только при $\varphi^{n+1}_1 = \varphi^{n+1}_2 = \ldots = \varphi^{n+1}_n = 0$. В этом случае $\varphi^{n+1}_{n+1} \neq 0$ (иначе отображение $\varphi$ будет вырожденным), и уравнения (117) принимают вид

$$Y^i = a^i_1 X^1 + \ldots + a^i_n X^n + a^i_{n+1}, \quad \text{где} \quad a^i_\alpha = \frac{\varphi^i_\alpha}{\varphi^{n+1}_{n+1}}.$$

В результате приходим к следующему предложению.

**Предложение.** *Если проективное преобразование $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ отображает несобственную гиперплоскость $\mathcal{P}_{n-1}$ на себя, то его ограничение на аффинное пространство $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$ является аффинным преобразованием пространства $\mathcal{A}_n$.*

Отсюда следует, что геометрия проективного пространства с группой преобразований, переводящих в себя некоторую фиксированную гиперплоскость, является, по существу, аффинной геометрией.

## 7.10 Комплексификация вещественных проективных пространств

Так же как и в случае векторного и аффинного пространств, в определении проективного пространства (с. 121) поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ можно заменить на любое другое поле $\mathbf{F}$. В частности, в случае $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ имеет место следующее определение.

**Определение.** *Проективным пространством размерности $n$ над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ называется тройка $(\mathcal{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{C}), p)$, состоящая из некоторого множества $\mathcal{P}_n(\mathbf{C})$, векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{C})$ размерности $n+1$ над полем $\mathbf{C}$ и сюръективного отображения*

$$p : \mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{C}) \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathcal{P}_n(\mathbf{C}) \tag{119}$$

*такого, что $p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{w})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{C}$.*

В дальнейшем проективное пространство $(\mathcal{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{C}), p)$ иногда будем обозначать одним символом $\mathcal{P}_n(\mathbf{C})$.

**Задача 35.** Проективное пространство $\mathcal{P}_3(\mathbf{F}_2)$ размерности 3 над полем $\mathbf{F}_2$ остатков от деления на 2 состоит из конечного числа точек. Выяснить, из скольких точек состоит это пространство, и найти все прямые и все плоскости этого пространства.

**Определение.** *Комплексификацией $n$-мерного вещественного проективного пространства $\mathcal{P}_n = (\mathcal{P}_n, \mathbf{V}_{n+1}, p)$ называется набор $(\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}, \widetilde{\theta}, \theta)$, состоящий из комплексного проективного пространства $(\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}, \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}}, p^{\mathbf{C}})$, линейного отображения $\widetilde{\theta} : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}}$ и инъективного отображения $\theta : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$ таких, что пара $(\mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}}, \widetilde{\theta})$ является комплексификацией ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ и коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} & \xrightarrow{\widetilde{\theta}} & \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \{\mathbf{0}\} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p^{\mathbf{C}}} \\ \mathcal{P}_n & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}} \end{array} . \tag{120}$$

*При этом исходное проективное пространство $\mathcal{P}_n$ отождествляется с его образом $\theta(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$.*

Построить комплексификацию проективного пространства $\mathcal{P}_n$ можно, например, следующим образом. Пусть $(\mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}}, \widetilde{\theta})$ — комплексификация векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$, ассоциированного с $\mathcal{P}_n$. Введем на $\mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ отношение эквивалентности $\sim$, полагая, что $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ тогда и только тогда, когда существует $\lambda \in \mathbf{C}$ такое, что $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$. Положим затем

$$\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}} = \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim \quad \text{и} \quad p^{\mathbf{C}} : \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \{\mathbf{0}\} \ni \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}] \in \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}},$$

где $[\mathbf{v}]$ — класс векторов, эквивалентных вектору $\mathbf{v}$. Отображение $\theta$, замыкающее диаграмму (120), при этом определится соотношением $\theta(A) = [\widetilde{\theta}(\mathbf{a})]$, где $A = p(\mathbf{a})$.

Переход к комплексификации позволяет считать, что координаты точек пространства $\mathcal{P}_n$ могут принимать не только вещественные, но и комплексные значения.

**Замечание.** Рассматривая аффинные карты, для комплексного проективного пространства $\mathcal{P}_n(\mathbf{C})$ можно получить представления аналогичные (105) и (106). Переходя в соответствующем представлении (106) к овеществлениям комплексных аффинных пространств, получим следующее представление комплексного проективного пространства как (дизъюнктного) объединения вещественных аффинных пространств:

$$\mathcal{P}_n(\mathbf{C}) = \mathcal{A}_{2n} \cup \mathcal{A}_{2(n-1)} \cup \mathcal{A}_{2(n-2)} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_0. \tag{121}$$

В частности, при $n = 1$ представление (121) принимает вид $\mathcal{P}_1(\mathbf{C}) = \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_0$, то есть $\mathcal{P}_1(\mathbf{C})$ получается из $\mathcal{A}_2$ добавлением одной бесконечно удаленной точки $\mathcal{A}_0$ и топологически (как непрерывное множество точек) $\mathcal{P}_1(\mathbf{C})$ эквивалентно сфере $\mathbf{S}^2$.

**Задача 36.** Сформулируйте определение комплексификации проективных отображений и постройте какой-нибудь функтор комплексификации проективных пространств.

## 7.11 Гиперповерхности второго порядка в $\mathcal{P}_n$

**Определение.** *Гиперповерхностью второго порядка в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ называется множество точек $\Phi \subset \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$ в комплексификации $\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$ пространства $\mathcal{P}_n$, которое в системе координат, определяемой некоторым проективным репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, задается уравнением второй степени*

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0. \tag{122}$$

Из этого определения следует, что если $\mathcal{P}_n$ представлено как множество одномерных подпространств векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$, то гиперповерхность $\Phi$ представляет собой множество прямолинейных образующих конуса $\widetilde{\Phi}$, заданного уравнением (122) в ассоциированном векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$.

Если ввести в векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$ скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, превращающее его в евклидово векторное пространство $\mathbf{E}_{n+1}$, то каждая прямолинейная образующая конуса $\widetilde{\Phi}$ будет пересекать сферу $\mathbf{x}^2 = 1$ в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому можно представлять себе гиперповерхность $\Phi$ как множество пар точек пересечения конуса со сферой.

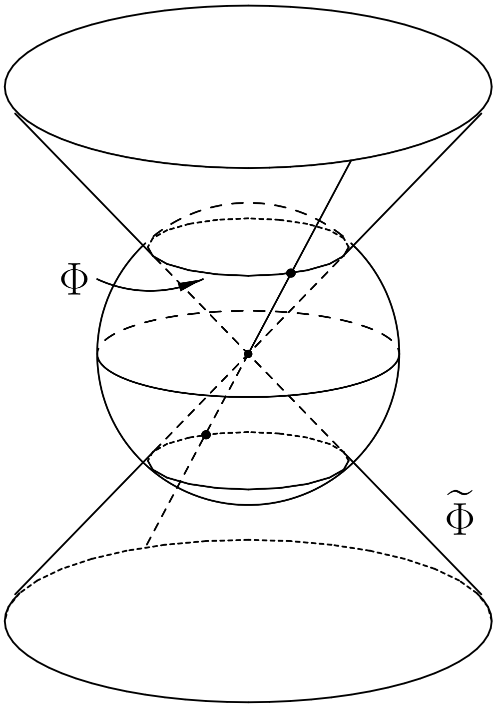



Рис. 45.

Часть $\Phi' = \Phi \cap \mathcal{A}_n$ гиперповерхности $\Phi$, содержащаяся в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n \backslash \mathcal{P}_{n-1}$, представляет собой гиперповерхность второго порядка в $\mathcal{A}_n$. Если относительно некоторого репера в $\mathcal{P}_n$ гиперплоскость $\mathcal{P}_{n-1}$ имеет уравнение $x^{n+1} = 0$, то в соответствующих аффинных координатах в $\mathcal{A}_n$ гиперповерхность $\Phi'$ имеет уравнение

$$a_{ij} X^i X^j + 2a_{i\,n+1} X^i + a_{n+1\,n+1} = 0. \qquad (123)$$

Тип этой гиперповерхности зависит от выбора аффинной карты (см. задачи 37 и 38 ниже).

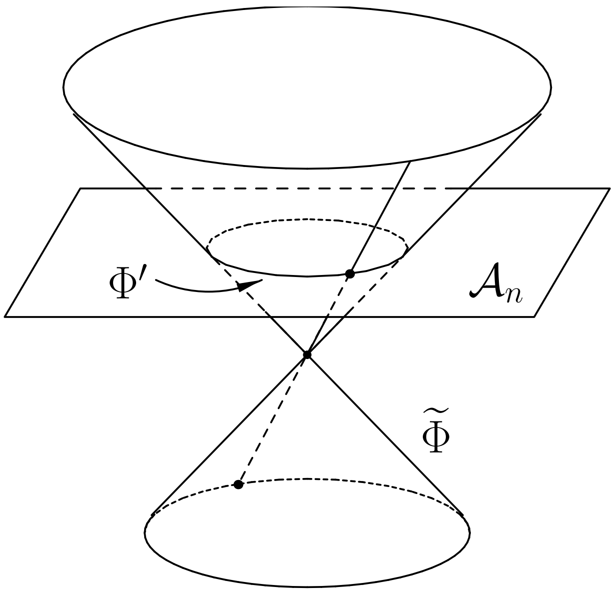



Рис. 46.

**Классификация гиперповерхностей второго порядка в $\mathcal{P}_n$.**

**Определение.** *Две гиперповерхности второго порядка $\Phi$ и $\Psi$ в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ называются проективно эквивалентными, если существует проективное преобразование $\varphi \in GP(\mathcal{P}_n)$, при котором $\varphi(\Phi) = \Psi$ в комплексификации $\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$ пространства $\mathcal{P}_n$.*

Преобразованию проективного репера в $\mathcal{P}_n$ соответствует преобразование базиса в ассоциированном векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$. Выбирая соответствующий базис в $\mathbf{V}_{n+1}$, квадратичную форму в левой части уравнения (122) можно привести к одному и только одному каноническому (нормальному) виду (см. [1], глава XIV, §6)

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(x^\alpha)^2 - \sum_{\alpha=p+1}^{p+q}(x^\alpha)^2, \quad p+q \leqslant n+1.$$

Поскольку $\varphi(\Phi) = \Psi$ в $\mathcal{P}_n$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\Phi}) = \widetilde{\Psi}$ в $\mathbf{V}_{n+1}$, то классификация гиперповерхностей в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ эквивалентна классификации конусов в $\mathcal{A}_{n+1}$

и эквивалентна классификации квадратичных форм в ассоциированном векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$. Поэтому всякая гиперповерхность второго порядка в $\mathcal{P}_n$ в проективных координатах может быть задана одним и только одним из уравнений вида

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(x^\alpha)^2 - \sum_{\alpha=p+1}^{p+q}(x^\alpha)^2 = 0, \quad 1 \leqslant p+q \leqslant n+1, \ \ p \geqslant q. \quad (124)$$

**Классификация кривых второго порядка в $\mathcal{P}_2$.**

**Теорема.** *Две кривые второго порядка на проективной плоскости $\mathcal{P}_2$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых проективных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из следующего списка*

1°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ (*мнимый овал*);

2°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ (*вещественный овал*);

3°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ (*пара мнимых пересекающихся прямых*);

4°. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ (*пара вещественных пересекающихся прямых*);

5°. $(x^1)^2 = 0$ (*пара совпадающих прямых*).

**Задача 37.** Покажите, что ограничения вещественного овала, заданного уравнением 2°, на $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}_2 \setminus \mathcal{P}_1$ для прямых $\mathcal{P}_1$, заданных уравнениями $x^3 = 0$, $x^2 = 0$ и $x^2 + x^3 = 0$, представляют собой эллипс, гиперболу и параболу соответственно.

**Решение.** В первых двух случаях следует поделить уравнение 2° соответственно на $(x^3)^2$ и $(x^2)^2$, после чего в аффинных координатах $X^1 = x^1/x^3$, $X^2 = x^2/x^3$ и $X^1 = x^3/x^2$, $X^2 = x^1/x^2$ получим соответственно уравнения $(X^1)^2 + (X^2)^2 = 1$ и $(X^1)^2 - (X^2)^2 = 1$.

В третьем случае нужно сначала осуществить преобразование координат $y^1 = x^1$, $y^2 = x^2 - x^3$, $y^3 = x^2 + x^3$. В новой системе координат овал будет иметь уравнение $(y^1)^2+y^2y^3=0$, а прямая $\mathcal{P}_1$ будет задана уравнением $y^3=0$. Поделив на $(y^3)^2$, в аффинных координатах $X^1=y^1/y^3$, $X^2=y^2/y^3$ получим уравнение параболы $(X^1)^2+X^2=0$. $\rhd$

**Классификация поверхностей второго порядка в $\mathcal{P}_3$.**

**Теорема.** *Две поверхности второго порядка в проективном пространстве $\mathcal{P}_3$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых проективных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из следующего списка*

1°. $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=0$ (*мнимая овальная поверхность);*

2°. $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2=0$ (*вещественная овальная поверхность);*

3°. $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2=0$ (*линейчатая кольцевидная поверхность);*

4°. $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$ (*мнимая коническая поверхность);*

5°. $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0$ (*вещественная коническая поверхность);*

6°. $(x^1)^2+(x^2)^2=0$ (*пара мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой* $x^1=x^2=0$*);*

7°. $(x^1)^2-(x^2)^2=0$ (*пара вещественных пересекающихся плоскостей);*

8°. $(x^1)^2=0$ (*пара совпадающих плоскостей).*

Точка с координатами $[0:0:0:1]$ называется вершиной конической поверхности с уравнением 5° (см. рисунок ниже).

**Задача 38.** Покажите, что для выбранной подходящим образом несобственной плоскости $\mathcal{P}_2\subset\mathcal{P}_3$, часть поверхности, заданной уравнением 2°, принадлежащая $\mathcal{A}_3=\mathcal{P}_3\setminus\mathcal{P}_2$, может оказаться эллипсоидом, двуполостным гиперболоидом или эллиптическим параболоидом, часть поверхности, заданной уравнением 3° — однополостным гиперболоидом или гиперболическим параболоидом, а часть поверхности, заданной уравнением 5° — конусом или цилиндром.

**Решение.** Уравнение плоскости $\mathcal{P}_2$ подбирается аналогично тому, как это осуществлялось при решении задачи 37 (см. также рис. 47). $\triangleright$

Топологически (то есть, с точностью до взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения) поверхности, заданные уравнениями 2°, 3° и 5°, эквивалентны поверхностям, изображенным на рис. 47.

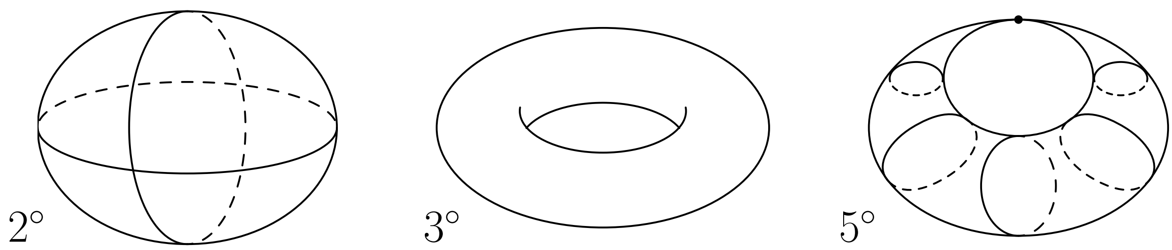



Рис. 47.

Приведем некоторые пояснения к этим рисункам.

Поверхность $\Phi$ с уравнением 2° не имеет общих точек с плоскостью $\mathcal{P}_2$, имеющей уравнение $x^4 = 0$, поскольку $x^4 = 0$ влечет $x^1 = x^2 = x^3 = 0$. Поэтому $\Phi$ совпадает с пересечением $\Phi \cap \mathcal{A}_3$, где $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}_3 \setminus \mathcal{P}_2$, а пересечение $\Phi \cap \mathcal{A}_3$ имеет уравнение $(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 1$.

Координаты точек поверхности $\Phi$ с уравнением 3° удовлетворяют условиям $(x^1)^2 + (x^2)^2 \neq 0$, $(x^3)^2 + (x^4)^2 \neq 0$, поскольку невыполнение хотя бы одного из этих условий влечет $x^3 = x^4 = x^1 = x^2 = 0$. Поэтому каждая точка $[\mathbf{x}]$ поверхности $\Phi$ может быть задана единственным вектором $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_4$, координаты которого удовлетворяют уравнениям

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1, \quad (x^3)^2+(x^4)^2=1. \tag{125}$$

Рассматриваемая система координат в $\mathbf{V}_4$ позволяет отождествить его с $\mathbf{R}^4$. Пространство $\mathbf{R}^4$ можно рассматривать как произведение двух пространств: $\mathbf{R}^2$ с координатами $(x^1, x^2)$ и $\mathbf{R}^2$ с координатами $(x^3, x^4)$. Уравнения системы (125) задают две единичных окружности в этих пространствах $\mathbf{R}^2$, а вся система задает соответственно произведение $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^4$ (тор). На рисунке изображен тор вращения в трехмерном пространстве.

Часть поверхности $\Phi$ с уравнением 5°, лежащая в $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}_3 \backslash \mathcal{P}_2$ для плоскости $\mathcal{P}_2$ с уравнением $x^4 = 0$, представляет собой конус $C$ с уравнением $(X^1)^2 + (X^2)^2 - (X^3)^2 = 0$. Пересечение поверхности с $\mathcal{P}_2$ представляет собой окружность $S$. Действительно, если $x^4 = 0$, то $x^3 \neq 0$ (иначе $(x^1 = x^2 = x^3 = 0)$ и, следовательно, в аффинной системе координат $Y^1 = x^1/x^3$, $Y^2 = x^2/x^3$, $Y^3 = x^4/x^3$ это пересечение задается уравнением $(Y^1)^2 + (Y^2)^2 = 1$. Таким образом, поверхность $\Phi$ представляет собой объединение конуса $C$ и окружности $S$, где к каждой прямолинейной образующей конуса добавляется точка окружности, замыкающая эту образующую в проективную прямую (которая топологически представляет из себя окружность).

## 7.12 Двойственное проективное пространство $\mathcal{P}_n^*$

Рассмотрим множество гиперплоскостей в пространстве $\mathcal{P}_n$. Обозначим это множество символом $\mathcal{P}_n^*$. Каждая гиперплоскость $\pi \subset \mathcal{P}_n$ представляет собой образ $p(\mathbf{V}_n(\pi))$, где $\mathbf{V}_n(\pi) \subset \mathbf{V}_{n+1}$ — подпространство, ассоциированное с $\pi$. Множество $n$-мерных подпространств в $\mathbf{V}_{n+1}$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством их аннуляторов — 1-мерных подпространств в сопряженном векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}^*$. Относя линейной форме $\widetilde{\mathbf{w}}$ (вектору пространства $\mathbf{V}_{n+1}^*$) гиперплоскость $\pi(\mathrm{Ann}(\widetilde{\mathbf{w}}))$, где

$$\mathrm{Ann}(\widetilde{\mathbf{w}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_{n+1} \,|\, \langle \mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{w}} \rangle = 0\}$$

— $n$-мерное подпространство, аннулирующее форму $\widetilde{\mathbf{w}}$ (аннулируемое формой $\widetilde{\mathbf{w}}$, см. [27], §4), получим отображение

$$p^* : \mathbf{V}_{n+1}^* \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathcal{P}_n^*, \tag{126}$$

задающее на множестве $\mathcal{P}_n^*$ структуру $n$-мерного проективного пространства, называемого *двойственным пространством пространства* $\mathcal{P}_n$.

В соответствии с принятыми обозначениями, элемент пространства $\mathcal{P}_n^*$, определяемый вектором $\widetilde{\mathbf{w}} \in \mathbf{V}_{n+1}^*$ (линейной формой) обозначаем $[\widetilde{\mathbf{w}}]$.

**Отношение инцидентности.**

Точка $[\mathbf{a}]$ пространства $\mathcal{P}_n$ принадлежит гиперплоскости $[\widetilde{\mathbf{w}}]$ этого пространства или, другими словами, гиперплоскость $[\widetilde{\mathbf{w}}]$ проходит через точку $[\mathbf{a}]$, тогда и только тогда, когда

$$\langle \mathbf{a}, \widetilde{\mathbf{w}} \rangle = 0 \qquad \text{или} \qquad a^\alpha w_\alpha = 0. \tag{127}$$

Поскольку второе двойственное пространство $(\mathbf{V}_{n+1}^*)^*$ векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ канонически изоморфно исходному пространству $\mathbf{V}_{n+1}$, то второе двойственное пространство $(\mathcal{P}_n^*)^*$ проективного пространства $\mathcal{P}_n$ канонически изоморфно исходному пространству $\mathcal{P}_n$. Поэтому точка $[\mathbf{a}]$ пространства $\mathcal{P}_n$ определяет гиперплоскость пространства $\mathcal{P}_n^*$, состоящую из всех гиперплоскостей $[\widetilde{\mathbf{w}}]$ пространства $\mathcal{P}_n$ таких, что $\langle \mathbf{a}, \widetilde{\mathbf{w}} \rangle = 0$, то есть из гиперплоскостей $[\widetilde{\mathbf{w}}]$, проходящих через точку $[\mathbf{a}]$. Условие

(127) является при этом одновременно условием того, что точка $[\widetilde{\mathbf{w}}] \in \mathcal{P}_n^*$ принадлежит гиперплоскости $[\mathbf{a}]$ пространства $\mathcal{P}_n^*$.

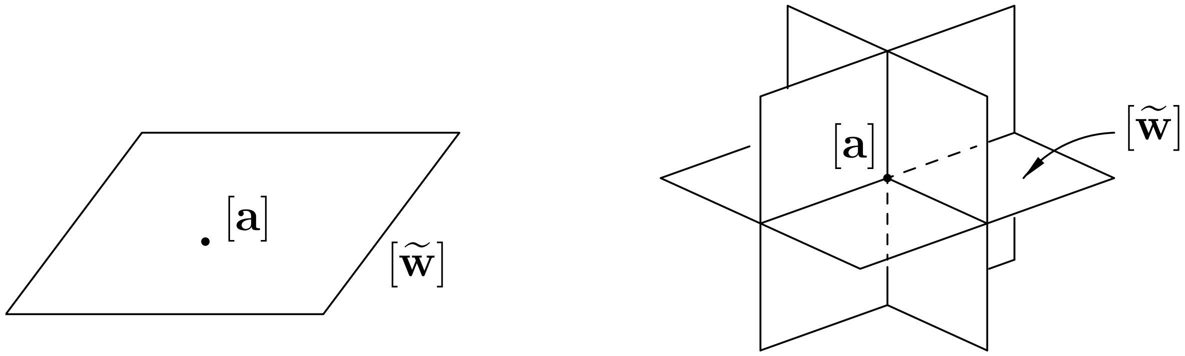



Рис. 48.

Отношение принадлежности точки $[\mathbf{a}]$ гиперплоскости $[\widetilde{\mathbf{w}}]$ называют *отношением инцидентности*. При этом условие (127) является условием инцидентности точки $[\mathbf{a}]$ и гиперплоскости $[\widetilde{\mathbf{w}}]$.

**Принцип двойственности.**

Из рассмотренных выше взаимоотношений между точками и гиперплоскостями проективного пространства вытекает следующий принцип двойственности:

*Если имеется какое-либо верное утверждение, сформулированное в терминах точек и гиперплоскостей проективного пространства и отношения инцидентности между ними, то после замены каждого слова «точка» на слово «гиперплоскость», а каждого слова «гиперплоскость» на слово «точка», получится еще одно верное утверждение.*

Простейшей иллюстрацией принципа двойственности являются следующие два утверждения:

1) для любых двух различных точек на плоскости $\mathcal{P}_2$ имеется единственная прямая, инцидентная каждой из этих точек;

2) для любых двух различных прямых на плоскости $\mathcal{P}_2$ имеется единственная точка, инцидентная каждой из этих прямых.

**Теорема Дезарга.**

Примером теоремы проективной геометрии является следующая теорема Дезарга.

**Теорема.** *Пусть в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ заданы два треугольника $ABC$ и $A'B'C'$ таких, что все точки $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$ различны, а прямые $AA'$, $BB'$ и $CC'$ различны и пересекаются в одной точке $S$. Пусть, далее, $U$ — точка пересечения прямых $AB$ и $A'B'$, $V$ — точка пересечения прямых $BC$ и $B'C'$, а $W$ — точка пересечения прямых $AC$ и $A'C'$. Тогда точки $U$, $V$ и $W$ лежат на одной прямой.*

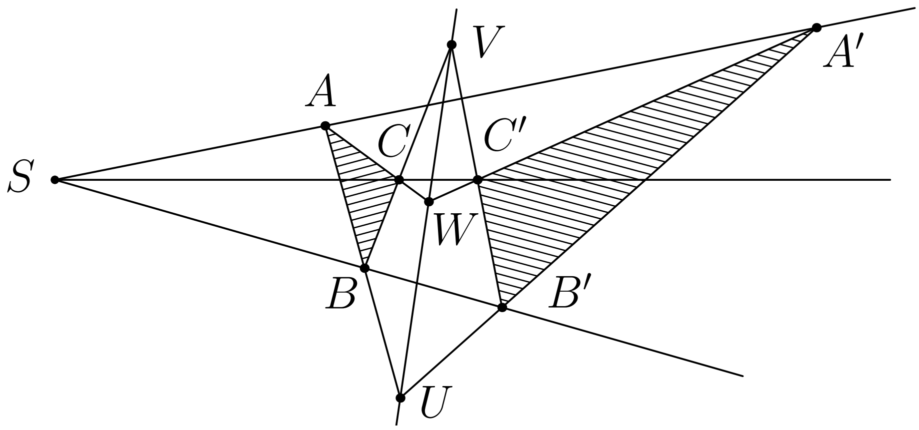



Рис. 49.

**Доказательство.** Если 2-плоскости $\pi_2$ и $\pi'_2$, в которых расположены, соответственно, треугольники $ABC$ и $A'B'C'$, не совпадают, то точки $U$, $V$ и $W$ лежат на прямой $\ell = \pi_2 \cap \pi'_2$.

Пусть теперь треугольники $ABC$ и $A'B'C'$ лежат в одной плоскости. Можно считать, что теорему надо доказать для пространства $\mathcal{P}_2$ размерности два. Пусть $A = [\mathbf{a}]$, $B = [\mathbf{b}]$, $C = [\mathbf{c}]$, $A' = [\mathbf{a}']$, $B' = [\mathbf{b}']$, $C' = [\mathbf{c}']$ и $S = [\mathbf{s}]$. Имеют место следующие линейные зависимости векторов

$$\mathbf{s} = \lambda\mathbf{a} + \lambda'\mathbf{a}', \quad \mathbf{s} = \mu\mathbf{b} + \mu'\mathbf{b}', \quad \mathbf{s} = \nu\mathbf{c} + \nu'\mathbf{c}'.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $U = [\mathbf{u}]$, где $\mathbf{u} =$

$\lambda\mathbf{a}-\mu\mathbf{b} = \mu'\mathbf{b}'-\lambda'\mathbf{a}'$, поскольку при этом точка $[\mathbf{u}]$ принадлежит каждой из прямых $AB$ и $A'B'$. Аналогично, вычитая из второго равенства третье, а потом из третьего первое, получим $V = [\mathbf{v}]$, где $\mathbf{v} = \mu\mathbf{b} - \nu\mathbf{c} = \nu'\mathbf{c}' - \mu'\mathbf{b}'$, $W = [\mathbf{w}]$, где $\mathbf{w} = \nu\mathbf{c} - \lambda\mathbf{a} = \lambda'\mathbf{a}' - \nu'\mathbf{c}'$. Складывая теперь векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, получим $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (\lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}) + (\mu\mathbf{b} - \nu\mathbf{c}) + (\nu\mathbf{c} - \lambda\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Таким образом, векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ линейно зависимы, и поэтому точки $U$, $V$ и $W$ принадлежат одной прямой. $\square$

**Задача 39.** Докажите теорему Дезарга, объявляя прямую $\ell = UW$ несобственной прямой аффинного пространства $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}_2 \backslash \ell$.

**Решение.** При этом получаем в $\mathcal{A}_2$ две пары параллельных прямых $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$ и требуется доказать, что $BC \| B'C'$.

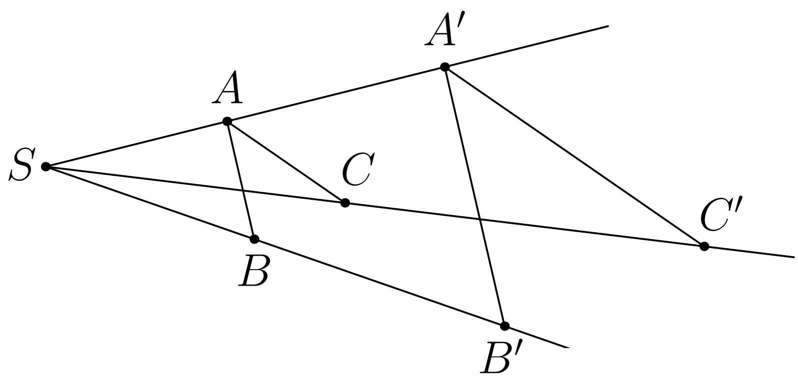



Рис. 50.

$\triangleright$

**Задача 40.** Применяя принцип двойственности, докажите обратную теорему Дезарга в $\mathcal{P}_2$: Даны два треугольника $ABC$ и $A'B'C'$ таких, что все точки $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$ различны, а точки $U = AB \cap A'B'$, $V = BC \cap B'C'$ и $W = AC \cap A'C'$ лежат на одной прямой. Тогда прямые $AA'$, $BB'$ и $CC'$ пересекаются в одной точке $S$.

**Решение.** Для того, чтобы решить эту задачу, достаточно аккуратно сформулировать теорему Дезарга в терминах точек, прямых и отношения инцидентности, а потом заменить каждое слово «точка» на слово «прямая» и наоборот, каждое слово «прямая» на слово «точка».

Теорема Дезарга: Точка $S$ инцидентна трем различным прямым $a$, $b$ и $c$. Точки $A$ и $A'$ различны и инцидентны прямой $a$, точки $B$ и $B'$ различны и инцидентны прямой $b$, точки $C$ и $C'$ различны и инцидентны прямой $c$. Ни одна из этих точек не совпадает с точкой $S$. Прямые $AB$ и $A'B'$ инцидентны точке $U$, прямые $BC$ и $B'C'$ инцидентны точке $V$, прямые $AC$ и $A'C'$ инцидентны точке $W$. Тогда существует прямая $s$, инцидентная точкам $U$, $V$ и $W$. $\triangleright$

**Неевклидовы геометрии.**

Как было показано выше (см. с. 140), геометрия проективного пространства с группой проективных преобразований, переводящих в себя некоторую фиксированную гиперплоскость, является, по существу, аффинной геометрией.

Рассмотрим теперь в пространстве $\mathcal{P}_n$ некоторую гиперповерхность второго порядка $\Phi$. Проективные преобразования $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, переводящие гиперповерхность $\Phi$ в себя (то есть такие, что $\varphi(\Phi) = \Phi$), образуют подгруппу $G(\Phi)$ в группе проективных преобразований $GP(\mathcal{P}_n)$. Пусть в системе координат, определяемой некоторым репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, гиперповерхность $\Phi$ имеет уравнение

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0 \tag{128}$$

и пусть $[\mathbf{x}] \in \Phi$. Проективное преобразование $\varphi$ с уравнениями $y^\sigma = \varphi^\sigma_\alpha x^\alpha$ переводит гиперповерхность $\Phi$ в себя тогда и только тогда, когда из условия $[\mathbf{x}] \in \Phi$ следует $[\mathbf{y}] \in \Phi$, то есть если из $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ следует $a_{\sigma\tau}y^\sigma y^\tau = 0$ или

$$a_{\sigma\tau}\varphi^\sigma_\alpha x^\alpha \varphi^\tau_\beta x^\beta = 0. \tag{129}$$

Таким образом, гиперповерхность $\Phi$ может быть задана двумя уравнениями второй степени — уравнением (128) и уравнением (129). Отсюда следует (см. предложение на с. 86), что эти уравнения пропорциональны, то есть

$$a_{\sigma\tau}\varphi^{\sigma}_{\alpha}\varphi^{\tau}_{\beta} = \lambda a_{\alpha\beta}, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{130}$$

Таким образом, подгруппа $G(\Phi) \subset GP(\mathcal{P}_n)$ состоит из линейных преобразований, удовлетворяющих уравнению (130).

Геометрия пространства $\mathcal{P}_n$ с группой движений $G(\Phi)$ называется *неевклидовой геометрией.* Такая геометрия изучает свойства объектов в $\mathcal{P}_n$, которые остаются неизменными при преобразованиях из группы $G(\Phi)$. При этом гиперповерхность $\Phi$ называется *абсолютом* соответствующей неевклидовой геометрии, а преобразования, сохраняющие абсолют, называются *движениями* в этой неевклидовой геометрии.

Неевклидова геометрия, соответствующая абсолюту с каноническим уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 0, \tag{131}$$

называется *эллиптической геометрией* или *геометрией Римана.* Абсолют (131) не имеет вещественных точек. Проективное пространство с абсолютом (131) и соответствующей группой движений называется *эллиптическим* пространством.

Уравнение (130) для абсолюта (131) принимает вид

$$\delta_{\sigma\tau}\varphi^{\sigma}_{\alpha}\varphi^{\tau}_{\beta} = \lambda\delta_{\alpha\beta},$$

где $(\delta_{\sigma\tau})$ — единичная матрица.

Таким образом, движения эллиптического пространства задаются матрицами $A = (\varphi^{\alpha}_{\beta})$, удовлетворяющими уравнению $AA^{\top} = \lambda E$. Поскольку матрица $A$ определена с точностью до пропорциональности, то движение эллиптического пространства можно задать матрицей, удовлетряющей уравнению $AA^{\top} =$

$E$, то есть ортогональной матрицей. Если проективное пространство $\mathcal{P}_n$ рассматривать как сферу в $\mathbf{E}_{n+1}$ с отождествленными диаметрально противоположными точками, то движениями эллиптического пространства оказываются преобразования $\mathcal{P}_n$, индуцированные поворотами (движениями) сферы $\mathbf{S}^n$. Таким образом, эллиптическая геометрия — это обычная геометрия сферы, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки.

Неевклидова геометрия, соответствующая абсолюту с каноническим уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 = 0,$$

называется *гиперболической геометрией* или *геометрией Лобачевского.*

Точки пространства $\mathcal{P}_n$, лежащие внутри абсолюта, то есть точки, удовлетворяющие (в канонической системе координат) неравенству

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 < 0,$$

называются собственными точками геометрии Лобачевского. Множество $\mathcal{H}_n$ собственных точек образует так называемое *гиперболическое пространство* или *пространство Лобачевского.*

Прямыми и плоскостями пространства Лобачевского являются части прямых и плоскостей пространства $\mathcal{P}_n$, лежащие в подмножестве $\mathcal{H}_n$, то есть внутри абсолюта. Расстояние между точками $A$ и $B$ пространства $\mathcal{H}_n$ определяется формулой

$$\operatorname{dist}(A, B) = \frac{k}{2}\, |\ln(M, N, A, B)|, \tag{132}$$

где $M$ и $N$ — точки пересечения прямой $AB$ с абсолютом $\Phi$, $(M, N, A, B)$ — ангармоническое отношение, определенное формулой (114), а $k$ — некоторая положительная константа.

**Задача 41.** Проверить, используя формулу (114), что если одна из точек $A$ или $B$ будет стремиться к абсолюту, то расстояние между $A$ и $B$, вычисляемое по формуле (132) будет неограниченно возрастать.

Таким образом, точки абсолюта можно рассматривать как бесконечно удаленные точки пространства Лобачевского.

Прямые пространства $\mathcal{H}_n$, пересекающиеся в точке, принадлежащей абсолюту, называются *параллельными* в смысле Лобачевского.

Прямые пространства $\mathcal{H}_n$, пересекающиеся в точке, лежащей во внешней области по отношению к абсолюту, называются *расходящимися.*

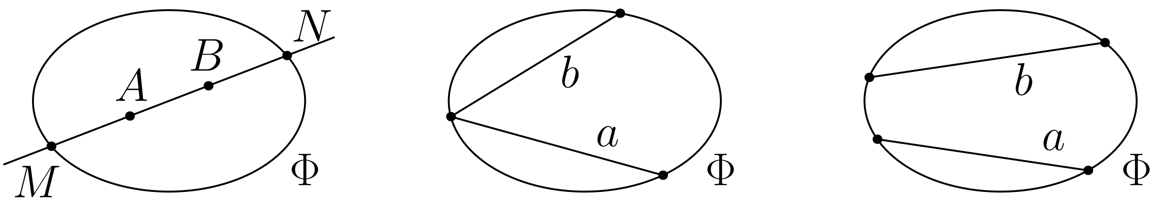



Рис. 51.

Подробнее с геометрией неевклидовых пространств можно ознакомиться по книгам [22], [3], [19].

**Рекомендуемая литература:** [1], Гл. X, XIX; [3], Гл. 1, 2; [16], Лекция 28.

**Задачи и упражнения:** [4], 912, 913, 919, 920, 938, 941, 944, 962, 963, 964, 969, 970, 995, 1005, 1006, 1007, 1011, 1012, 1013, 1023, 1042, 1043, 1044, 1883, 1885, 1886.

## Список литературы


[1] Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* М. Наука. 1979. 512 с.

[2] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия I.* М. Просвещение. 1974. 352 с.

[3] Базылев В.Т., Дуничев К.И. *Геометрия II.* М. Просвещение. 1975. 368 с.

[4] Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. *Сборник задач по аналитической геометрии.* «Лань». 2009. 384 с.

[5] Берже М. *Геометрия.* Т. 1. М., Мир. 1984. 560 с.

[6] Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. *Заочные математические олимпиады.* М., Наука. 1986. 176 с.

[7] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* М., Физматлит, 2004. 464 с.

[8] Зорич В.А., *Математический анализ.* Т. 1, 2. М., МЦНМО. 2007. 1488 с.

[9] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия.* М., Физматлит, 2012. 224 с.

[10] Кокстер Г.С.М. *Введение в геометрию.* М., Наука. 1966. 648 с.

[11] Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Ч. I: Основы алгебры.* М., МЦНМО. 2009. 272 с.

[12] Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Ч. II: Линейная алгебра.* М., МЦНМО. 2009. 368 с.

[13] Кострикин А.И., Манин Ю.И. *Линейная алгебра и геометрия.* «Лань». 2008. 304 с.

[14] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.* М. Наука. 1971. 432 с.

[15] Малахальцев М.А., Фомин В.Е., Шапуков Б.Н., Шурыгин В.В. *Задачи по тензорному анализу и римановой геометрии.* Учебное пособие. Изд.–во Казанск. ун-та. 1993. 160 с.

[16] Постников М.М. *Аналитическая геометрия* (*Лекции по геометрии. Семестр I*). М. Наука. 1979. 336 с.

[17] Постников М.М. *Группы и алгебры Ли* (*Лекции по геометрии. Семестр V*). М. Наука. 1982. 448 с.

[18] Постников М.М. *Линейная алгебра* (*Лекции по геометрии. Семестр II*). М. Наука. 1986. 400 с.

[19] Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского.* М. МЦНМО. 2012. 88 с.

[20] Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* М. Наука. 1967. 384 с.

[21] Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства.* М. Наука. 1966. 648 с.

[22] Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства.* М. Наука. 1969. 548 с.

[23] *Сборник задач по геометрии.* Под ред. Базылева В.Т. М. Просвещение. 1980. 240 с.

[24] Холл М. *Комбинаторика.* М., Мир. 1970. 424 с.

[25] Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии.* М. Наука. 1964. 336 с.

[26] Шурыгин В.В. *Аналитическая геометрия I. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть I. Аналитическая геометрия плоскости.* Казань, КГУ, 2007. 108 с.

[27] Шурыгин В.В. *Аналитическая геометрия II. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть II. Аналитическая геометрия пространства.* Казань, КФУ, 2012. 120 с.

## Содержание