

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ**

Казань 2013

УДК 517

*Рекомендовано учебно-методической комиссией института Математики и
Механики Казанского (приволжского) федерального университета
Протокол № 1 от 10 октября 2013 г.*

Составитель:

д .ф.-м. н., проф. И. А. Бикчантаев

Линейные дифференциальные уравнения. — Казань: Казанский университет, 2013.— 17 с.

Данные методические разработки посвящены линейным дифференциальным уравнениям. Они могут быть полезны студентам при изучении курса "Дифференциальные уравнения".

© Казанский университет, 2013

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Нормальная линейная система дифференциальных уравнений.

В скалярной форме эта система имеет вид

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i(t)x^j + b^i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a_j^i(t)$ и $b^i(t)$ определены и непрерывны на интервале $q_1 < t < q_2$. Тогда любое решение системы (1) может быть продолжено на весь интервал $q_1 < t < q_2$. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые решения определены на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

Если все свободные члены $b^i(t)$ равны нулю, то система (1) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. В матричной форме система (1) записывается в виде одного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad (2)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & a_2^1(t) & \cdots & a_n^1(t) \\ a_1^2(t) & a_2^2(t) & \cdots & a_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n(t) & a_2^n(t) & \cdots & a_n^n(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b^1(t) \\ b^1(t) \\ \vdots \\ b^n(t) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix},$$
$$t \in (q_1, q_2).$$

Рассмотрим сначала однородную систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (3)$$

1. ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (3).

ЛЕММА 1. *Множество решений уравнения (3) образует векторное пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы означает, что если $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ — решения уравнения (3), то и любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами $\varphi = c^1\varphi_1 + \dots + c^r\varphi_r$ также является решением этого уравнения. Последнее сразу следует из правила умножения матриц. Лемма доказана.

Вектор-функции $\varphi_j : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, r$, называются *линейно зависимыми*, если существуют такие постоянные c^j , $j = 1, \dots, r$, не все из которых равны нулю, что $c^1\varphi_1(t) + c^2\varphi_2(t) + \dots + c^r\varphi_r(t) \equiv 0$. В противном случае эти вектор-функции называются *линейно независимыми*.

Пусть $t_0 \in (q_1, q_2)$ — фиксированная точка. Очевидно, если вектор-функции $\varphi_j : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, r$, линейно зависимы, то и постоянные векторы $\varphi_j(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, r$, также линейно зависимы. Обратное неверно.

ПРИМЕР. Рассмотрим вектор-функции $\varphi_1(t) = (0, t)$, $\varphi_2(t) = (0, t^2)$. При каждом фиксированном $t = t_0$ векторы $\varphi_1(t_0)$, $\varphi_2(t_0)$ линейно зависимы, но вектор-функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ линейно независимы на $\mathbb{R}$, так как ни одна из них не получается из другой умножением на постоянное число.

Однако, как показывает доказываемая ниже теорема, если ограничиться рассмотрением только вектор-функций, являющихся решениями системы (3), то линейная зависимость их на интервале $q_1 < t < q_2$ равносильна их линейной зависимости при любом фиксированном $t \in (q_1, q_2)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi_j : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, r$, — решения уравнения (3), линейно зависимые при некотором фиксированном $t_0 \in (q_1, q_2)$. Тогда вектор-функции $\varphi_j : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, r$, линейно зависимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы существуют постоянные $c^1, \dots, c^r$, не все равные нулю и такие, что

$$c^1\varphi_1(t_0) + c^2\varphi_2(t_0) + \dots + c^r\varphi_r(t_0) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = c^1\varphi_1(t) + c^2\varphi_2(t) + \dots + c^r\varphi_r(t).$$

По лемме 1 φ — решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = 0$. Этому же условию удовлетворяет тривиальное решение $x = 0$. Поэтому, в силу единственности решения задачи Коши, $\varphi = 0$, т. е.

$$c^1\varphi_1(t) + c^2\varphi_2(t) + \dots + c^r\varphi_r(t) \equiv 0,$$

что и означает линейную зависимость решений $\varphi_j : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, r$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Любые n линейно независимых решений уравнения (3) образуют базис пространства решений этого уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — линейно независимые решения уравнения (3). По теореме 1 при каждом фиксированном $t_0 \in (q_1, q_2)$ постоянные векторы $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ линейно независимы. Эти векторы образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, любой вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ может быть разложен по элементам этого базиса. Пусть φ — произвольное решение уравнения (3). Тогда

$$\varphi(t_0) = c^1 \varphi_1(t_0) + c^2 \varphi_2(t_0) + \dots + c^n \varphi_n(t_0).$$

В силу этого равенства решения уравнения (3) φ и $c^1 \varphi_1 + c^2 \varphi_2 + \dots + c^n \varphi_n$ имеют общее начальное условие и потому совпадают, т. е.

$$\varphi(t) \equiv c^1 \varphi_1(t) + c^2 \varphi_2(t) + \dots + c^n \varphi_n(t).$$

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Любые n решений уравнения (3), начальные значения которых при некотором $t_0 \in (q_1, q_2)$ линейно независимы, образуют базис пространства решений этого уравнения.

Базис пространства решений уравнения (3) называется также *фундаментальной системой решений* этого уравнения. Существование фундаментальной системы решений уравнения (3) следует из существования в пространстве $\mathbb{R}^n$ n линейно независимых векторов $a_1, \dots, a_n$, которые можно принять в качестве начальных данных для решений $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ уравнения (3).
Функция

$$x(t) = c^1 \varphi_1(t) + c^2 \varphi_2(t) + \dots + c^n \varphi_n(t), \quad (4)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — фундаментальная система решений уравнения (3), а $c^1, c^2, \dots, c^n$ — произвольные постоянные, называется *общим решением* уравнения (3).

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ.

Рассмотрим $n \times m$ матрицу $X = (X_j^i)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Множество таких матриц будем обозначать через $\mathcal{M}^{n,m}$. В этом пункте будем рассматривать матричные функции $X : (q_1, q_2) \rightarrow \mathcal{M}^{n,m}$.

Рассмотрим матричное уравнение, по виду совпадающее с (3):

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (5)$$

где $A : (q_1, q_2) \rightarrow \mathcal{M}^{n,n}$ — непрерывная функция.

Функция $\Phi : (q_1, q_2) \rightarrow \mathcal{M}^{n,m}$ класса $C^1(q_1, q_2)$ называется решением уравнения (5), если при всех $t \in (q_1, q_2)$

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t). \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 3. Матрица-функция $\Phi : (q_1, q_2) \rightarrow \mathcal{M}^{n,m}$ тогда и только тогда является решением уравнения (5), когда ее векторы-столбцы $\varphi_j : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$, являются решениями соответствующего уравнения (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. По определению умножения матриц $A\Phi = (A\varphi_1, \dots, A\varphi_m)$. Отсюда получаем, что (6) равносильно равенствам

$$\dot{\varphi}_j(t) = A(t)\varphi_j(t), \quad j = 1, \dots, m,$$

что и требовалось доказать.

Далее будем рассматривать только квадратные матрицы-решения $\Phi : (q_1, q_2) \rightarrow \mathcal{M}^{n,n}$ уравнения (5). Функция $W(t) = \det \Phi(t)$ называется *определителем Вронского* или *вронскианом* матрицы решений $\Phi(t)$.

ТЕОРЕМА 4. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $W(t) = 0$ при всех $t \in (q_1, q_2)$;
- 2) $W(t) = 0$ при некотором $t \in (q_1, q_2)$;
- 3) решения $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ уравнения (3) линейно зависимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) справедлива по теореме 1, так как условие $W(t) = 0$ означает, что столбцы матрицы $\Phi(t)$ линейно зависимы. Наконец, импликация 3) $\Rightarrow$ 1) также справедлива, так как из линейной зависимости столбцов матрицы следует, что ее определитель равен нулю. Теорема доказана.

Матрица-решение $\Phi : (q_1, q_2) \rightarrow \mathcal{M}^{n,n}$ уравнения (5), определитель которой не равен нулю, называется *фундаментальной матрицей*. Ее будем также называть фундаментальной матрицей уравнения (3). С помощью фундаментальной матрицы формулу (4) общего решения уравнения (3) можно записать в виде

$$x = \Phi(t)c, \quad c \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Фундаментальная матрица, обладающая свойством $\Phi(t_0) = E_n$, называется *нормированной в точке t_0* . Если $\tilde{\Phi}(t)$ — нормированная при $t = t_0$ фундаментальная матрица, то (7) принимает вид

$$x = \tilde{\Phi}(t)x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

где $x_0 = x(t_0)$ — начальное значение решения $x(t)$ при $t = t_0$.

ПРИМЕР. Рассмотрим гладкую плоскую кривую $x(s) : [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ в натуральной параметризации, т. е. в качестве параметра выбрана длина этой кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки. Обозначим через $\tau(s)$ и $n(s)$ соответственно касательный вектор и единичный вектор нормали в точке $x(s)$. Так как $s = \int_0^s \sqrt{\tau^2(u)} du$, то $\tau^2(s) = 1$. Дифференцируя это тождество, получаем, что $\tau'(s)\tau(s) = 0$; следовательно, $\tau'(s) = k(s)n(s)$, где $k : [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}$. Аналогично, $n'(s) = \alpha(s)\tau(s)$, причем $\alpha = n'\tau = -n\tau' = -k$. Мы получили так называемые *формулы Френе*:

$$\tau'(s) = k(s)n(s), \quad n'(s) = -k(s)\tau(s).$$

Если $\tau(s)$ и $n(s)$ рассматривать как векторы-строки, то формулы Френе принимают вид матричного уравнения (6), где

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \tau(s) \\ n(s) \end{pmatrix}, \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Нормированная при $s = 0$ фундаментальная матрица $\tilde{\Phi}(s)$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}(s) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) & \sin \varphi(s) \\ -\sin \varphi(s) & \cos \varphi(s) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \varphi(s) = \int_0^s k(t) dt + \varphi(0),$$

ибо $k(s)n(s) = \tau'(s) = \varphi'(s)n(s)$ и, следовательно, $k(s) = \varphi'(s)$. Отсюда вытекает геометрический смысл коэффициента $k(s)$: это угловая скорость вращения касательного вектора (а вместе с ним и нормали) с изменением s ; $k(s)$ называется кривизной кривой в точке $x(s)$.

Рассмотрим определитель Вронского некоторой матрицы-решения $\Phi(t)$. Вычисляя его разложением по элементам i -й строки, получаем

$$W = \sum_{k=1}^n \Phi_k^i W_i^k,$$

где W_i^k — алгебраическое дополнение элемента Φ_k^i . Отсюда следует, что

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_j^i} = W_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

так как при данном i W_i^k от Φ_j^i не зависят. Следовательно,

$$\dot{W} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial W}{\partial \Phi_j^i} \dot{\Phi}_j^i = \sum_{i,j=1}^n W_i^j \dot{\Phi}_j^i.$$

Так как в силу (6)

$$\dot{\Phi}_j^i = \sum_{k=1}^n a_k^i \Phi_j^k,$$

то

$$\dot{W} = \sum_{i,k=1}^n a_k^i \sum_{j=1}^n W_i^j \Phi_j^k.$$

Согласно свойству определителя

$$\sum_{j=1}^n W_i^j \Phi_j^k = \delta_i^k W,$$

где δ_i^k — символ Кронекера. Следовательно,

$$\dot{W} = W \sum_{i=1}^n a_i^i.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n a_i^i(s) \right) ds. \quad (9)$$

Формула (9) называется *формулой Лиувилля*.

Сумма диагональных элементов матрицы $A \in \mathcal{M}^{n,n}$ называется *следом* матрицы и обозначается $\text{sp } A$. Используя это обозначение, (9) можно переписать в виде

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{sp } A(s) ds. \quad (9')$$

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (5). Следующая теорема показывает, что на множестве матриц-решений уравнения (5) справедлива формула общего решения, аналогичная (7).

ТЕОРЕМА 5. *Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (5), то*

1) при любой постоянной матрице $C \in \mathcal{M}^{n,m}$ функция ΦC есть решение уравнения (5)

2) если $\Psi : (q_1, q_2) \rightarrow \mathcal{M}^{n,m}$ — решение уравнения (5), то существует постоянная матрица $C \in \mathcal{M}^{n,m}$ такая, что $\Psi(t) = \Phi(t)C$, при этом если $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица, то C — неособая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Phi(t)$ — решение системы (5), то

$$\frac{d}{dt}(\Phi C) = \dot{\Phi}C = (A\Phi)C = A(\Phi C),$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения положим $C(t) = \Phi^{-1}(t)\Psi(t)$. Тогда $\Psi(t) = \Phi(t)C(t)$. Дифференцируя это тождество по t , получим $A\Psi = A\Phi C + \Phi\dot{C}$, откуда $\Phi\dot{C} = 0$. Умножая последнее тождество слева на Φ^{-1} , получим $\dot{C} = 0$. Следовательно, C — постоянная матрица. Из определения C вытекает также, что если $\Psi(t)$ — неособая матрица, то и C — неособая. Теорема доказана.

3. СОПРЯЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ.

Пусть, по-прежнему, $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (5). Дифференцируя по t тождество $\Phi^{-1}\Phi = E_n$, получим

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}A. \quad (10)$$

Обозначим через X^* сопряженную с X матрицу, т. е. матрицу, в которой $X_j^{*i} = \overline{X_i^j}$, где черта сверху означает комплексную сопряженность. Если матрица X вещественна, то X^* является транспонированной с X . Из алгебры известна формула $(XY)^* = Y^*X^*$. Поэтому в силу (10)

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1})^* = -A^*(\Phi^{-1})^*.$$

Уравнение

$$\dot{x} = -A^*(t)x \quad (11)$$

называется уравнением, *сопряженным* с уравнением (3) (или с (5)). Мы доказали, следовательно, что если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (3), то $(\Phi^{-1})^*(t)$ является фундаментальной матрицей сопряженного уравнения (11).

Пусть $\Psi(t)$ — некоторая фундаментальная матрица уравнения (11). По теореме 5 $\Psi(t) = (\Phi^{-1})^*(t)C$, где C — постоянная неособая матрица. Отсюда $\Psi^*(t) = C^*\Phi^{-1}(t)$,

$$\Psi^*(t)\Phi(t) = B, \quad (12)$$

где $B = C^*$ — постоянная неособая матрица.

Равенству (12) можно дать следующее истолкование. Строки матрицы $\Psi^*(t)$ (т. е. столбцы матрицы Ψ) и столбцы матрицы $\Phi(t)$ являются решениями соответственно уравнений (11) и (3). Их произведение есть постоянная. Таким образом, каждое решение сопряженного уравнения можно рассматривать как линейный функционал на векторном пространстве решений уравнения (3). Другими словами, множество решений сопряженного с (3) уравнения (11) образует векторное пространство, сопряженное по отношению к пространству решений уравнения (3).

Положим $U(t, x) = \Psi^*(t)x$. Координатные функции $U^i(t, x)$ называются *первыми интегралами системы* (3). Они обладают следующим свойством: если $\varphi(t)$ — решение (3), то $U^i(t, \varphi(t)) \equiv \text{const}$. Это свойство вытекает из (12).

4. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ.

Предположим, что известно m , $1 \leq m \leq n - 1$, линейно независимых решений $\varphi_1, \dots, \varphi_m : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ уравнения (3). Образует матрицу $\Phi_1 = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $\Phi_1 \in \mathcal{M}^{n,m}$. По теореме 1 векторы $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ линейно независимы при каждом $t \in (q_1, q_2)$, следовательно, ранг $r(\Phi_1) = m$. Это означает, что для каждой точки $t_0 \in (q_1, q_2)$ можно указать окрестность $I \subset (q_1, q_2)$, в которой некоторые m строк матрицы $\Phi_1(t)$ образуют ненулевой минор $\alpha(t)$. Для простоты предположим, что этот минор образуют первые m строк матрицы $\Phi_1(t)$. В дальнейшем будем считать $t \in I$.

Пусть $B \in \mathcal{M}^{n,n-m}$ — постоянная матрица, первые m строк которой нулевые, а последние $n - m$ строк образуют единичную матрицу E_{n-m} . Положим

$$S(t) = (\Phi_1(t), B) : I \rightarrow \mathcal{M}^{n,n}.$$

Очевидно, что $\det S(t) = \alpha(t) \neq 0$. В (3) выполним замену $x = S(t)y$. В результате получим

$$\dot{S}y + S\dot{y} = ASy. \quad (13)$$

Так как $AS = (A\Phi_1, AB)$, $\dot{S} = (A\Phi_1, 0)$, то

$$S\dot{y} = (A\Phi_1, AB)y - (A\Phi_1, 0)y = (0, AB)y$$

или

$$\dot{y} = (0, S^{-1}AB)y, \quad 0 \in \mathcal{M}^{n,m}. \quad (14)$$

Полагая

$$S^{-1}AB = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_1 \in \mathcal{M}^{m,1}, \quad y_2 \in \mathcal{M}^{n-m,1},$$

где $Q_1 : I \rightarrow \mathcal{M}^{m, n-m}$, $Q_2 : I \rightarrow \mathcal{M}^{n-m, n-m}$ — известные функции, запишем (14) в виде

$$\dot{y}_1 = Q_1(t)y_2, \quad (15)$$

$$\dot{y}_2 = Q_2(t)y_2. \quad (16)$$

Покажем, что интегрирование (3) сводится к интегрированию (16). Пусть $\tilde{\Psi}_2(t) = (\psi_{2,m+1}, \dots, \psi_{2,n})$ — фундаментальная матрица уравнения (16). Из (15) находим квадратурами первые m координатных функций $\psi_{1,m+1}, \dots, \psi_{1,n}$ линейно независимых решений

$$\psi_{m+1}(t) = \begin{pmatrix} \psi_{1,m+1} \\ \psi_{2,m+1} \end{pmatrix}, \dots, \psi_n(t) = \begin{pmatrix} \psi_{1,n} \\ \psi_{2,n} \end{pmatrix}$$

уравнения (14). Пусть $\Psi_2(t) = (\psi_{m+1}, \dots, \psi_n) \in \mathcal{M}^{n, n-m}$. Очевидно, что любые постоянные векторы $\psi_1, \dots, \psi_m \in \mathbb{R}^n$, последние $n - m$ координат которых равны нулю, являются решениями (14). Пусть в постоянной матрице $\Psi_1 = (\psi_1, \dots, \psi_m) \in \mathcal{M}^{n, m}$ первые m строк образуют единичную матрицу порядка m , а остальные $n - m$ строк состоят из нулей. Тогда матрица $\Psi(t) = (\Psi_1, \Psi_2)$ является фундаментальной матрицей уравнения (14), так как ее столбцы являются решениями этого уравнения по построению и $\det \Psi = \det \tilde{\Psi}_2 \neq 0$. Теперь фундаментальная матрица $\Phi(t)$ уравнения (3) находится по формуле $\Phi = S\Psi$.

$$\begin{array}{ccc}
 S : & \text{матрица системы (14):} & \Psi : \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \Phi_1 & E_{n-m} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & Q_1 \\ \hline \dots & \dots \\ \hline 0 & Q_2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline E_m & \\ \hline \dots & \dots \\ \hline 0 & \tilde{\Psi}_2 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{l} n \\ m \end{array} & \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array} & \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array} \\
 \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array} & \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array} & \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array}
 \end{array}$$

ПРИМЕР. Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x}^1 = t^{-1}x^1 + tx^2 - x^3, \quad \dot{x}^2 = t^{-1}x^1 - tx^2 + x^3, \quad \dot{x}^3 = x^1 + x^2. \quad (17)$$

Здесь

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & t & -1 \\ t^{-1} & -t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}^{3,3}.$$

Система (17) имеет решение $\varphi_1(t) = (t, t, t^2)$. Тогда

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad S(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. замена, приводящая к понижению порядка имеет вид $x = Sy$ или

$$x^1 = ty^1, \quad x^2 = ty^1 + y^2, \quad x^3 = t^2y^1 + y^3.$$

Обратная замена имеет вид $y = S^{-1}x$ или

$$y^1 = t^{-1}x^1, \quad y^2 = x^2 - x^1, \quad y^3 = x^3 - tx^1.$$

Дифференцируя эти выражения по t и учитывая (17), получаем систему

$$\dot{y}^1 = y^2 - t^{-1}y^3, \quad \dot{y}^2 = -2ty^2 + 2y^3, \quad \dot{y}^3 = (1 - t^2)y^2 + ty^3. \quad (18)$$

Последние два уравнения системы (18) образуют самостоятельную систему двух уравнений, к интегрированию которой и сводится интегрирование системы (17).

5. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ.

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad (19)$$

которая является векторной записью системы (1).

Пусть $\psi : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — некоторое решение уравнения (19). В (19) сделаем замену переменных

$$x = y + \psi. \quad (20)$$

Из (19) и (20) имеем:

$$\dot{y} = A(t)y. \quad (21)$$

Так как равенство $y = \Phi(t)c$, где $c \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (21), задает множество всех решений уравнения (21), то формула

$$x = \Phi(t)c + \psi(t) \quad (22)$$

задает множество всех решений уравнения (19). Функция (22) называется *общим решением* линейного неоднородного уравнения (19). Формула (22) может быть записана также в виде

$$x = \psi(t) + c^1\varphi_1(t) + \cdots + c^n\varphi_n(t), \quad (22')$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — векторы-столбцы матрицы $\Phi(t)$, образующие фундаментальную систему решений однородной системы (21).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\Phi(t) : (q_1, q_2) \rightarrow \mathcal{M}^{n,n}$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (21). Тогда

$$x = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds, \quad (23)$$

где $c \in \mathbb{R}^n$, $t, t_0 \in (q_1, q_2)$ — общее решение неоднородного уравнения (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения общего решения уравнения (19) достаточно найти какое-либо частное решение этого уравнения. С этой целью используем метод вариации постоянных (метод Лагранжа). Согласно этому методу решение ищем в виде

$$\psi(t) = \Phi(t)c(t), \quad (24)$$

где $c(t) : (q_1, q_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — функция класса $C^1(q_1, q_2)$, подлежащая определению. Так как ψ есть решение уравнения (19), то

$$\dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + b.$$

Отсюда, поскольку $\dot{\Phi} = A\Phi$, получаем

$$\Phi\dot{c} = b. \quad (25)$$

Следовательно, $\dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$. В качестве $c(t)$ можно взять

$$c(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds, \quad t, t_0 \in (q_1, q_2). \quad (26)$$

Теперь (23) следует из (22), (24), (26). Теорема доказана.

Линейное уравнение n -го порядка.

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = b(t). \quad (27)$$

Коэффициенты $a_i(t)$ и свободный член $b(t)$ определены и непрерывны на интервале (q_1, q_2) . Уравнение (27) будем называть *однородным*, если $b(t) \equiv 0$. В противном случае это уравнение называется *неоднородным*.

Решение уравнения (27) всегда можно свести к линейной нормальной системе дифференциальных уравнений n -го порядка следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = x^3, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}^{n-1} = x^n, \\ \dot{x}^n = -a_n(t)x^1 - a_{n-1}(t)x^2 - \dots - a_1(t)x^n + b(t). \end{cases}$$

Используя векторные обозначения эту систему запишем в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t), \quad (28)$$

где матрица $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

а вектор $B(t)$ определяется формулой $B(t) = (0, 0, \dots, b(t))$.

ЛЕММА 2. Уравнение (27) эквивалентно системе (28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = \psi(t)$ — решение уравнения (27). Ему соответствует решение

$$x = \varphi(t) = (\psi(t), \dot{\psi}(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t))$$

уравнения (28). Обратно, каждому решению

$$x = \varphi(t) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^n(t))$$

уравнения (28) соответствует решение $y = \varphi^1(t)$ уравнения (27). Указанное соответствие взаимно однозначно. Лемма 2 доказана.

Задача Коши для линейного уравнения (27) ставится следующим образом. Задаются произвольно n чисел $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ и $t_0 \in (q_1, q_2)$. Требуется найти решение $y(t)$ уравнения (27), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (30)$$

Уравнения (28) показывают, что сводя уравнение (27) к системе (28) мы одновременно сводим задачу Коши для уравнения (27) к задаче Коши для

системы (28), так как условия (30) записываются в виде начальных условий для системы (28):

$$x^1(t_0) = y_0, \ x^2(t_0) = \dot{y}_0, \dots, \ x^n(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Из доказанной эквивалентности уравнения (27) и системы (28) и теоремы 1 из §8 следует, что любое решение уравнения (27) может быть продолжено на весь интервал (q_1, q_2) ; задача Коши (27), (30) имеет единственное решение, определенное на (q_1, q_2) . В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые решения уравнения (27) определены на (q_1, q_2) .

Рассмотрим однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0. \quad (31)$$

Очевидно, множество решений уравнения (31) образует векторное пространство.

Пусть

$$\dot{x} = A(t)x \quad (32)$$

есть соответствующая ему система уравнений, где матрица $A(t)$ определена формулой (29).

ЛЕММА 3. Решения

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_r(t) \quad (33)$$

уравнения (31) являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда линейно зависимы соответствующие им решения системы (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть решения (33) линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $c^1, c^2, \dots, c^r$, не все равные нулю, что

$$c^1\psi_1(t) + c^2\psi_2(t) + \cdots + c^r\psi_r(t) = 0, \quad q_1 < t < q_2. \quad (34)$$

Дифференцируя это тождество последовательно $n - 1$ раз, получим

[illegible]

Учитывая, что соответствующее $\psi_i(t)$ решение системы (32) имеет вид

$$\varphi_i(t) = (\psi_i(t), \dot{\psi}_i(t), \dots, \psi_i^{(n-1)}(t)), \quad (36)$$

соотношения (35) можем переписать в виде

$$c^1\varphi_1(t) + \dots + c^r\varphi_r(t) = 0, \quad q_1 < t < q_2, \quad (37)$$

что означает линейную зависимость решений (36).

Обратно, пусть решения $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ системы (32) линейно зависимы, т. е. связаны соотношением (37). Тогда первая компонента векторного равенства (37) имеет вид (34), т. е. решения (33) линейно зависимы. Лемма 3 доказана.

Совокупность n линейно независимых решений уравнения (31) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Из леммы 3 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Решения $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ однородного уравнения (31) образуют фундаментальную систему решений тогда и только тогда, когда вектор-функции $\varphi_i(t) = (\psi_i(t), \dot{\psi}_i(t), \dots, \psi_i^{(n-1)}(t))$, $i = 1, \dots, n$, образуют фундаментальную систему решений однородной системы (32).*

Из лемм 2 — 4 следует, что пространства решений уравнений (31) и (32) имеют одну и ту же размерность n . Если $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (31), то любое решение $\psi(t)$ этого уравнения представимо в виде их линейной комбинации:

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + c^2\psi_2(t) + \dots + c^n\psi_n(t),$$

где $c^1, \dots, c^n$ — некоторые постоянные.

Определителем Вронского или вронскианом системы решений $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ уравнения (31) называется определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \dots & \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \dots & \dot{\psi}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 7. *Решения*

$$\psi_1(t), \dots, \psi_n(t) \quad (39)$$

уравнения (31) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $W(t) \equiv 0$ на (q_1, q_2) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если решения (36) системы (32) соответствуют решениям (39) уравнения (31), то их вронскианы совпадают. Отсюда, из теоремы 4 и из леммы 2 следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Решения (39) уравнения (31) тогда и только тогда образуют фундаментальную систему решений, когда их вронскиан $W(t)$ не обращается в нуль.

Из выражения (29) для матрицы $A(t)$ и формулы (9) следует формула Лиувилля для определителя (38):

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \right). \quad (40)$$

Вернемся к неоднородному уравнению (27). Если известна фундаментальная система решений $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ соответствующего однородного уравнения (31), то решение неоднородного уравнения (27) может быть найдено методом вариации постоянных, т. е. в виде

$$y = c^1(t)\psi_1(t) + \cdots + c^n(t)\psi_n(t), \quad (41)$$

где функции $\dot{c}^1(t), \dots, \dot{c}^n(t)$ находятся из системы алгебраических уравнений, соответствующей уравнению (25)

[illegible]

Так как определителем этой системы является определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (31), то он не обращается в нуль ни в одной точке интервала $q_1 < t < q_2$. Поэтому из системы (42) однозначно определяются функции $\dot{c}^1(t), \dots, \dot{c}^n(t)$, а по ним интегрированием находятся и функции $c^1(t), \dots, c^n(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука. 1974.
- [2] Карташев А. П., Рождественский Б. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления*. М.: Наука. 1983.
- [3] Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Физматлит, 2009.
- [4] Филиппов А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М.: Наука. 2008.