КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

А.С.Шкуро

Конспект лекций по математике-1

для студентов химического института

Учебное пособие

Казань – 2011

УДК 517

Печатается по решению учебно-методической комиссии ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Протокол №10 от 5 мая 2011 г.

заседания кафедры общей математики КФУ Протокол №7 от 28 апреля 2011 г.

Научный редактор
докт. ф.-м. наук, проф. Н.Г.Гурьянов

Рецензенты:
докт. ф.-м. наук, проф. Ю.И.Бутенко,
канд. ф.-м. наук, доц. Е.П.Аксентьева

Шкуро А.С.

Конспект лекций по математике-1 для студентов химического института: учебное пособие / А.С. Шкуро. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2011. – 78 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике для студентов химического института, читаемых автором в первом семестре на протяжении ряда последних лет.

Пособие полностью соответствует ныне действующей программе курса математики для студентов-химиков, но может быть использовано студентами и других естественных специальностей, а также заинтересованными школьниками старших классов общеобразовательных школ.

I Элементы линейной алгебры.

Лекция 1.

Определители.

Определителем (детерминантом) $2^{го}$ порядка называется выражение

$$D=\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Определителем (детерминантом) $3^{го}$ порядка называется выражение

$$D=\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 .$$

Минором элемента определителя $3^{го}$ порядка называется определитель $2^{го}$ порядка, получающийся из данного определителя в результате вычеркивания строки и столбца, содержащих данный элемент.

В дальнейшем для краткости будем говорить, что элемент определителя занимает четное место, если сумма номеров его строки и его столбца есть число четное, и нечетное место, если эта сумма есть нечетное число.

Алгебраическим дополнением (минором со знаком) элемента определителя $3^{го}$ порядка называется минор этого элемента, взятый со знаком +, если элемент занимает четное место, и со знаком –, если его место нечетное.

В дальнейшем алгебраические дополнения элементов определителя с буквенными элементами условимся обозначать соответствующими большими буквами.

Теорема разложения.

Определитель $3^{го}$ порядка равен сумме парных произведений элементов какого-либо ряда на их алгебраические дополнения.

Основные свойства определителей.

1. Определитель не меняет своего значения при замене всех его строк соответствующими столбцами.

2. При перестановке двух параллельных рядов определителя его абсолютная величина сохраняет прежнее значение, а знак меняется на обратный.

Следствие 1. Определитель, у которого два параллельных ряда одинаковы, равен нулю.

Следствие 2. Сумма парных произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

3. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя.

Следствие 1. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

Следствие 2. Если элементы какого-либо ряда определителя пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то определитель равен нулю.

4. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы $2^х$ слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Следствие. Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо его ряда прибавить числа, пропорциональные соответствующим элементам параллельного ряда с одним и тем же коэффициентом пропорциональности (это так называемые элементарные преобразования определителя).

Элементарные преобразования дают удобный способ вычисления определителей. С их помощью можно все элементы некоторого ряда, кроме одного, сделать нулями, не изменяя при этом величины определителя. Разлагая затем определитель по элементам этого ряда, приведем данный определитель к одному определителю младшего порядка.

Решение системы $2^х$ линейных уравнений с $2^я$ неизвестными.

Стандартный вид такой системы:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Введем определитель системы $D=\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$, а также дополнительные определители $D_x = \begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}$.

Если $D\neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$$

Если $D=0$, но по крайней мере один из дополнительных определителей не равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет ни одного решения.

Если $D=D_x=D_y=0$, то система неопределенна, т.е. имеет бесконечное множество решений. В этом случае одно из уравнений есть следствие другого и система приводится к одному уравнению, например,

$a_1x+b_1y=c_1$, и имеет бесконечное множество решений:

$x=\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}y$, где y – произвольное число.

Лекция 2.

Решение системы 3$^{\text{х}}$ линейных уравнений с 3$^{\text{я}}$ неизвестными.

Стандартный вид такой системы:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Введем определитель системы $D=\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix}$, а также дополнительные определители:

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1b_1c_1 \\ d_2b_2c_2 \\ d_3b_3c_3 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} a_1d_1c_1 \\ a_2d_2c_2 \\ a_3d_3c_3 \end{vmatrix}, D_z=\begin{vmatrix} a_1b_1d_1 \\ a_2b_2d_2 \\ a_3b_3d_3 \end{vmatrix}.$$

Если $D\neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$x=\frac{D_x}{D}, y=\frac{D_y}{D}, z=\frac{D_z}{D}.$$

Если $D=0$, то система или несовместна или неопределенна и в этом случае следует применить метод Гаусса.

Метод последовательного исключения неизвестных Гаусса.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(-\frac{a_3}{a_1}\right) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ \qquad b_2'y+c_2'z=d_2' \\ \qquad b_3'y+c_3'z=d_3' \end{cases} \left(-\frac{b_3'}{b_2'}\right)$$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ \qquad b_2'y+c_2'z=d_2' \\ \qquad\qquad c_3''z=d_3'' \end{cases}$$

1) Если $a_1 \neq 0, b_2' \neq 0, c_3'' \neq o$, то решение системы единственно: z находится из третьего уравнения, затем y – из второго, а x – из третьего.

2) Если $a_1 \neq 0, b_2' \neq 0, c_3'' = 0$,

а) еще и $d_3'' = 0$, то решений бесконечное множество, определяемое из первых двух уравнений: y выражается через z из второго уравнения, а затем x – через z из первого, z – произвольное число.

б) еще и $d_3'' \neq 0$, то система несовместна, решений нет.

3) $a_1 \neq 0, b_2' = c_2' = b_3' = c_3' = 0,$

а) еще и $d_2' = d_3' = 0,$ то решений бесконечное множество, определяемое из первого уравнения: $x = \frac{d_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}z,$ где y и z – произвольные числа.

б) еще и хотя бы одно из чисел d_2' или d_3' $\neq 0$, то система несовместна, решений нет.

Матрицы и действия над ними.

Матрицей называется система m·n чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов.

Обозначение:

A= $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{mn}$, где a_{ik} - элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером k.

Матрица, у которой всего одна строка, называется строчной; матрица, у которой всего один столбец, - столбцевой. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой. Квадратной матрицей $n^{\text{го}}$ порядка называется матрица, имеющая n строк и n столбцов.

Определителем квадратной матрицы называется такой определитель, у которого элементы те же, что и у матрицы, и стоят на тех же местах. Прямоугольная неквадратная матрица определителя не имеет.

Главной диагональю квадратной матрицы называется ее диагональ, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не находящиеся на главной диагонали, равны нулю:

$$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})=\begin{pmatrix} a_{11}0...0 \\ 0a_{22}...0 \\ .... \\ 00.....a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$E=\begin{pmatrix} 10...0 \\ 01...0 \\ .... \\ 00...1 \end{pmatrix}=diag(1,1,...1)$$ - единичная матрица.

Матрицы A и B одинакового размера называются равными A=B, если $a_{ik}=b_{ik}$.

Суммой матриц A и B одинакового размера называется матрица C, если $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$ (i=1,2,…,m ; k=1,2,…,n). Обозначение C=A+B.

Аналогично определяется разность матриц D=A-B, если $d_{ik}=a_{ik}-b_{ik}$.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица B, которая получается из A умножением на λ всех ее элементов.

Произведением AB двух квадратных матриц A и B одного порядка называется третья квадратная матрица P того же порядка, элементы которой вычисляются по формуле:

$P_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i3}b_{3k}+\dots+a_{in}b_{nk}$. (v)

Вообще говоря, AB≠BA, т.е. умножение матриц не подчиняется коммутативному закону. (Две матрицы, для которых AB=BA, называются коммутирующими). При умножении матриц порядок множителей является существенным, поэтому применяются термины “умножение справа” и “умножение слева”.

Определение произведения AB можно распространить и на неквадратные матрицы, у которых число столбцов матрицы множимого A равно числу строк матрицы множителя B. При соблюдении этого условия матрица A может иметь любое число (m) строк, а матрица B - любое число (n) столбцов. Матрица AB будет иметь m строк и n столбцов, ее элементы вычисляются по формуле (v).

Матрицей, обратной к квадратной матрице A, называется матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенствам $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Пусть определитель квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$ отличен от нуля, т.е. D≠0. Матрица, для которой D≠0, называется невырожденной.

Обратная матрица A^{-1} находится по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}\cdots A_{n1} \\ A_{12}A_{22}\cdots A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}A_{2n}\cdots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотренную выше систему 3^x линейных уравнений с тремя неизвестными можно решать матричным методом. Для этого ее надо представить в виде матричного уравнения: AX=B, где $A=\begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$.

Умножив обе части матричного уравнения слева на A^{-1}, получим искомую матрицу $X=A^{-1}B$.

Введем понятие ранга матрицы. Для этого рассмотрим матрицу $B=\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21}b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m1}b_{m2}\cdots b_{mn} \end{pmatrix}$. Вычеркнем из нее несколько строк и столбцов так, чтобы количество оставшихся строк равнялось количеству оставшихся столбцов; следовательно, получена некоторая квадратная матрица; определитель ее называется минором матрицы B. Рангом матрицы B называется наивысший из порядков миноров, отличных от нуля.

II Аналитическая геометрия на плоскости

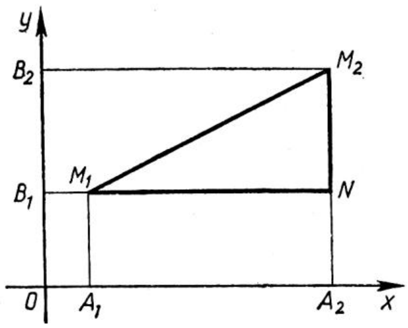
Лекция 3.

Введение прямоугольной декартовой системы координат. После введения прямоугольной системы координат каждой точке M плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (x,y) – координат этой точки. С другой стороны, если дана упорядоченная пара чисел (x,y), то можно построить единственную точку, для которой x и y будут прямоугольными координатами. Итак, при помощи прямоугольной системы координат устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Это соответствие дает возможность вместо точек рассматривать упорядоченные числа. Тем самым геометрические задачи сводятся к алгебраическим.

Рассмотрим теперь некоторые простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.

Расстояние между двумя точками.

Теорема. Для любых двух точек $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ плоскости расстояние между ними выражается формулой $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

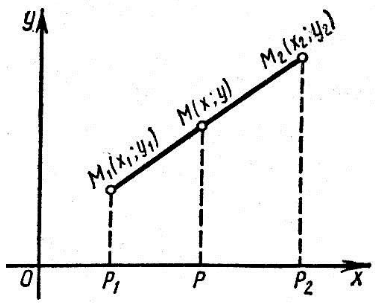


Доказательство: Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры на оси Ox и Oy и обозначим через N точку их пересечения.

Расстояние $M_1N=A_1A_2=|x_2-x_1|$, а расстояние $NM_2=B_1B_2=|y_2-y_1|$. Применяя к прямоугольному треугольнику M_1NM_2 теорему Пифагора, получим $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Деление отрезка в данном отношении.

Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M – любая точка этого отрезка, отличная от M_2. Число λ, определяемое равенством $\lambda=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$, называется отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 ($\lambda>0$ при внутреннем делении, $\lambda<0$ при внешнем делении).



Решить эту задачу помогает следующая теорема.

Теорема. Если точка $M(x,y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\qquad (V)$$

Доказательство: Докажем теорему для случая внутреннего деления. Опустим перпендикуляры из точек M_1, M, M_2 на ось Ox и обозначим точки их пересечения с осью Ox соответственно через P_1, P, P_2. На основании теоремы элементарной геометрии о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$, но $P_1P=x-x_1$, $PP_2=x_2-x$. Поэтому

$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$, откуда

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

аналогично

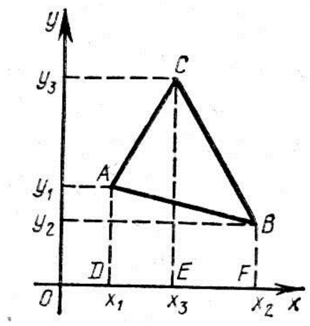
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Следствие. Если M – середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$ и получаем $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Формулы (v) остаются справедливыми и для внешнего деления.

Площадь треугольника.

Теорема. Для любых точек $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь S треугольника ABC выражается формулой:



$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1. \end{vmatrix}$$

Доказательство: Площадь ΔABC можно найти так:

$S_{ABC}=S_{ADEC}+S_{BCEF}-S_{ABFD}=\pm\frac{1}{2}[(x_3-x_1)(y_3+y_1)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)-(x_2-x_1)(y_1+y_2)]=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1. \end{vmatrix}$.

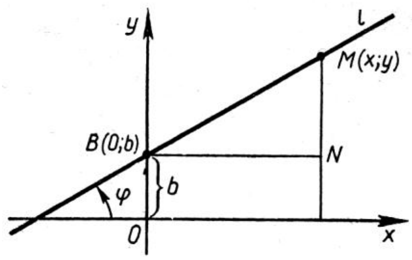
Лекция 4.

Прямая линия на плоскости.

Уравнением линии на плоскости называется такое уравнение с двумя переменными $\Phi(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты x,y любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Назовем углом наклона прямой к оси *Ox* тот угол, на который нужно повернуть ось *Ox* против часовой стрелки, чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей). Тангенс угла наклона прямой к оси *Ox* называется угловым коэффициентом прямой.



Рассмотрим прямую линию l, не параллельную оси ординат. Положение ее на плоскости будет вполне определено, если задать угол наклона прямой к оси абсцисс φ и величину отрезка, отсекаемого ею на оси ординат, *b*. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка прямой l. Из прямоугольного треугольника BMN имеем: $tg\varphi = \frac{y-b}{x}$, откуда $y=kx+b$ (v), где $k=tg\varphi$. Уравнение (v) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Посмотрим теперь, какое уравнение будет иметь прямая, параллельная оси Oy.Пусть a – абсцисса точки пересечения этой прямой с осью Ox. Очевидно, любая точка прямой имеет абсциссу, равную a; если же точка не лежит на прямой, то абсцисса ее будет отлична от a. Следовательно, эта прямая имеет уравнение $x=a$.

Общее уравнение прямой.

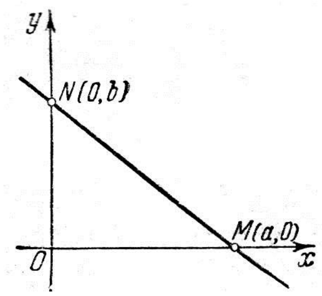
Теорема. Всякое невырожденное уравнение первой степени $Ax+By+C=0$ ($A^2+B^2\neq 0$) представляет собой уравнение некоторой прямой линии на плоскости Oxy. Это уравнение называется общим уравнением прямой.

Доказательство: 1) Пусть сначала $B\neq 0$. Тогда уравнение можно представить в виде $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Получили уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{A}{B}$ и ординатой $b = -\frac{C}{B}$. 2) Пусть теперь $B=0$, тогда $A\neq 0$. Имеем $Ax+C=0$ и $x = -\frac{C}{A}$.Последнее уравнение представляет собой уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок $a = -\frac{C}{A}$.

Исследование общего уравнения прямой.

Посмотрим, какое положение занимает прямая, определяемая общим уравнением, по отношению к координатным осям, когда один или два коэффициента его обращаются в нуль.

1) $C=0$, $Ax+By=0$ – прямая, проходящая через начало координат.
2) $A=0$, $By+C=0$ - прямая, параллельная оси Ox.
3) $B=0$, $Ax+C=0$ - прямая, параллельная оси Oy.
4) $C=0$, $B=0$, $Ax=0$ - ось Oy.
5) $C=0$, $A=0$, $By=0$ - ось Ox.



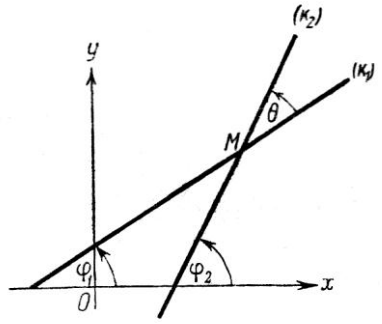
Уравнение прямой в отрезках.

Рассмотрим прямую, пересекающую обе координатные оси и не проходящую через начало координат. Положение прямой можно определить, указав величины a и b отрезков, отсекаемых прямой соответственно на осях Ox и Oy. Найдем уравнение этой прямой. Ее уравнение $Ax+By+C=0$, где ни один из коэффициентов не равен нулю. Остается выразить коэффициенты A, B и C через параметры

a и b. Т. к. точки M и N лежат на данной прямой, то $Aa+C=0$, откуда $A=-\frac{C}{a}$ и $Bb+C=0$, откуда $B=-\frac{C}{b}$. Подставляя A и B в общее уравнение прямой, получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.



Рассмотрим две прямые: $y=k_1x+b_1$; $y=k_2x+b_2$; где $k_1=tg\varphi_1$, $k_2=tg\varphi_2$; естественно, мы предположили, что ни одна из них не параллельна оси Oy. Обозначим через θ угол наклона второй прямой к первой. Тогда $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ и $tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1)=\frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1+tg\varphi_2 tg\varphi_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$. Если одна из прямых параллельна оси Oy, то угол θ находится непосредственно по формуле $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых соответственно $k_1 = k_2$, $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Если прямые заданы общими уравнениями: $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, то $tg\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых соответственно $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Пучок прямых.

Пусть даны точка $A(x_1,y_1)$ и угловой коэффициент k, определяющий направление прямой линии, проходящей через точку А. Уравнение этой прямой будем искать в виде $y=kx+b$. Т.к. точка А лежит на данной прямой, то координаты ее должны удовлетворять уравнению: $y_1 =kx_1+b$. Отсюда находим b и подставляем в уравнение. Получаем искомое уравнение:

$y - y_1= k(x - x_1)$ (v) . Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A_1(x_1,y_1)$ параллельно оси Oy, будет иметь вид $x=x_1$.

Если в уравнении (v) под k будем понимать величину, принимающую всевозможные числовые значения, то это уравнение будет определять множество прямых, проходящих через точку $A(x_1,y_1)$, т.е. пучок прямых с центром в точке А.

Иногда центр пучка прямых не задается непосредственно, а определяется парой прямых, принадлежащих пучку, $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$. Тогда уравнение пучка прямых имеет вид:

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть даны точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Уравнение пучка прямых линий, проходящих через точку $A(x_1,y_1)$ имеет вид: $y-y_1=k(x-x_1)$. Чтобы выделить из этого пучка прямую линию, проходящую через точку $B(x_2,y_2)$, потребуем, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению пучка: $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. Отсюда нужно определить значение параметра k и внести это значение в уравнение пучка. Т.о. получим уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$:

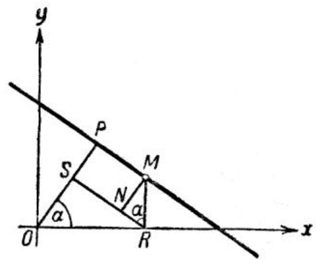
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Если данные точки A и B лежат на прямой, параллельной оси Ox ($y_2-y_1=0$) или оси Oy ($x_2-x_1=0$), то уравнение прямой будет соответственно $y=y_1$ или $x=x_1$.

Лекция 5.

Нормальное уравнение прямой линии.

Пусть на плоскости дана какая-нибудь прямая линия. Проведем через начало координат прямую OP перпендикулярно к данной; выберем на ней положительное направление от начала координат к данной прямой.



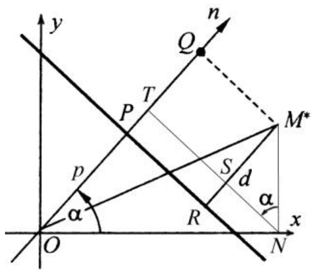
Положение данной прямой относительно осей координат можно охарактеризовать, указав ее расстояние p от начала координат и угол α между осью Ox и прямой OP. Составим уравнение данной прямой. Пусть M(x,y) – произвольная точка прямой. Из чертежа видно: OS + SP = OP. Из прямоугольного треугольника OSR имеем: OS = ORcosα $=x\cos\alpha$. С другой стороны, SP = NM определяем из прямоугольного треугольника MNR: SP = NM = RMsinα $=y\sin\alpha$. Внося значения OS, SP и OP=p в первое равенство, перепишем его так: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ (v). Это уравнение называется нормальным уравнением прямой.

Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду.

Пусть дано общее уравнение прямой: $Ax+By+C=0$. Чтобы привести его к нормальному виду, надо умножить его на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$. В этой формуле нужно брать знак, противоположный знаку C.

Расстояние от данной точки до данной прямой.

Отклонением данной точки от данной прямой называется число d, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, взятой со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от прямой.



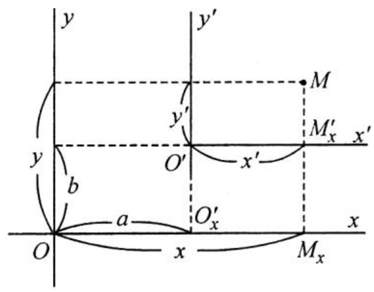
Теорема: Если точка M^* имеет координаты (x^*,y^*), а прямая задана нормальным уравнением (v), то отклонение точки M^* от этой прямой дается формулой: $d=x^*\cos\alpha + y^*\sin\alpha - p$.

Доказательство: Спроектируем точку M^* на нормаль n. Имеем: $d = PQ = OQ - OP$, но $OQ = OT+TQ=OT+SM^* = x^*\cos\alpha + y^*\sin\alpha$, $OP = p$, поэтому $d = x^*\cos\alpha + y^*\sin\alpha - p$.

Очевидно, расстояние от точки до прямой есть абсолютная величина отклонения.

Преобразование прямоугольных координат.
Параллельный перенос осей координат.

Рассмотрим простейший случай, когда оси "новой системы координат" $O'x'y'$ параллельны соответствующим осям "старой системы координат" Oxy и имеют одинаковые направления с ними. Пусть начало новой системы координат точка O' имеет координаты (a,b) в старой системе координат. Точка M плоскости со "старыми координатами" (x,y) будет иметь некоторые "новые координаты" x', y'. Из чертежа непосредственно получаем:



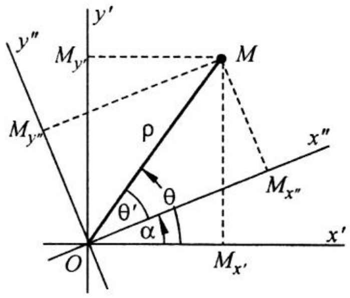
$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \quad (1)$$

Обратно, из (1) находим:

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \quad (2)$$

Поворот осей координат.

Будем считать теперь систему координат $O'x'y'$ "старой" и повернем ее на угол α. В этом случае "новой системой координат" будет $O'x''y''$. Непосредственно из чертежа можно получить:



$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \end{cases} \qquad (3)$$

Чтобы выразить новые координаты x'', y'' через старые x', y', достаточно разрешить систему (3) относительно x'' и y''. Получим

$$\begin{cases} x'' = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y'' = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (4)$$

Общий случай.

Пусть даны две прямоугольные системы координат с разными началами и разными направлениями осей: Oxy и $O'x''y''$. Новое начало координат есть точка Î $'(a,b)$ и ось $O'x''$ образует с осью Ox угол α. Чтобы выразить старые координаты x и y через новые x'' и y'', достаточно соединить формулы (2) и (3):

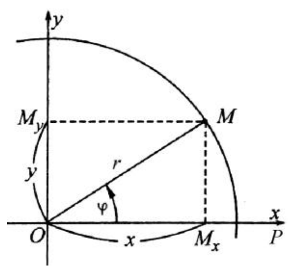
$$\begin{cases} x = a + x''\cos\alpha - y''\sin\alpha \\ y = b + x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \end{cases} \qquad (5)$$

Аналогично, из формул (1) и (4) получаем:

$$\begin{cases} x'' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y'' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases} \qquad (6)$$

Из формул (5) и (6) вытекает, что формулы перехода от одной прямоугольной системы координат к другой являются линейными функциями как новых, так и старых координат.

Полярные координаты.



Для определения положения точки на плоскости, кроме рассмотренной выше декартовой прямоугольной системы координат, довольно часто применяется полярная система координат. Эта система координат применяется, в частности, при исследовании вращательных движений. Пусть на плоскости даны некоторая точка O (назовем ее полюсом) и проходящая через нее ось OP (назовем ее полярной осью), а также указана единица масштаба. Назовем полярным радиусом точки M плоскости ее расстояние $r = OM$ от полюса и полярным углом точки M угол φ между полярной осью и отрезком OM. Условимся угол φ брать в границах $0 \le \varphi < 2\pi$. Полярный радиус и полярный угол точки будем называть ее полярными координатами и записывать

M(r,φ). Можно установить связь между прямоугольными и полярными координатами одной и той же точки. Предположим, что полюс полярной системы совпадает с началом прямоугольной системы координат, а полярная ось является положительной полуосью *Ox.* Тогда имеем:

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$ С другой стороны: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = \frac{y}{x}.$ Заметим, что при определении полярного угла φ по tgφ нужно учитывать знаки координат *x* и *y.*

Лекция 6.

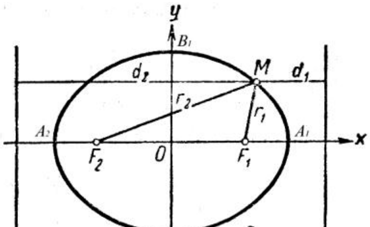
Линии второго порядка.

Множество всех точек плоскости, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению степени n , называется алгебраической линией (кривой) n^{го} порядка. Мы с вами выяснили раньше, что линии первого порядка являются прямыми. Перейдем к изучению линий второго порядка.

Окружность.

Получим уравнение окружности радиуса R с центром в точке C(*a,b).* Пусть M – произвольная точка данной окружности, *x,y* – ее прямоугольные координаты. Поскольку окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра), то CM=R. Но согласно формуле расстояния между двумя точками на плоскости $CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Из двух последних равенств получаем: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Это уравнение данной окружности. Если положить $a=b=0$, то получим каноническое уравнение окружности: $x^2+y^2=R^2$.

Эллипс.



Эллипсом называется множество точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. Чтобы составить уравнение эллипса, примем за ось абсцисс прямую, соединяющую две данные точки F_1 и F_2 , выбрав на ней положительное направление от F_2 к F_1; начало координат O возьмем в середине отрезка F_2F_1. Обозначая через *x* и *y* координаты произвольной точки M эллипса, выразим длины отрезков F_1M и F_2M по формуле расстояния между двумя точками. По определению эллипса сумма F_1M+F_2M есть величина постоянная. Обозначив ее через $2a$, будем иметь:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$ Освободившись от радикалов, получим каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ (v) где положено $b^2=a^2-c^2$.

Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon$ называется эксцентриситетом эллипса.

Так как уравнение (v) содержит только квадраты текущих координат, то оси координат являются осями симметрии эллипса. Ось симметрии эллипса, на которой располагаются фокусы, называется фокальной осью. Точка пересечения осей симметрии называется центром эллипса. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его вершинами: $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$. Отрезки, соединяющие противоположные вершины, а также их длины $2a$ и $2b$, называются большой и малой осями эллипса. Длины a и b называются большой и малой полуосями эллипса. Для исследования формы эллипса достаточно рассмотреть его форму при $x\geq 0, y\geq 0,$ так как эллипс симметричен относительно осей координат. Из уравнения (v) следует $\frac{x^2}{a^2}\leq 1,$ т.е. $x\leq a.$ С увеличением x от 0 до a ордината y уменьшается от b до 0. Таким образом, эллипс имеет форму, указанную на чертеже. Директрисами эллипса называются две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него. В выбранной системе координат директрисы эллипса определяются уравнениями: $x=-\frac{a}{\varepsilon}, x=\frac{a}{\varepsilon}.$ Т.к. для эллипса $0<\varepsilon<1$, то $\frac{a}{\varepsilon}>a;$ это означает, что директрисы эллипса не имеют с ним общих точек. Свойство директрис эллипса выражается следующей теоремой.

Теорема. Отношение расстояния r произвольной точки эллипса до фокуса к расстоянию d этой точки до соответствующей директрисы есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса, т.е. $\frac{r}{d}=\varepsilon.$

Доказательство: Рассмотрим, например, левый фокус и левую директрису:

$$r=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=$$

$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2}+2cx+a^2}=\sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2}+2cx+a^2}=\sqrt{(\frac{cx}{a}+a)^2}=\pm(\frac{cx}{a}+a).$$

Знак надо выбирать так, чтобы правая часть была >0. Т.к. $a>c$ и $|x|\leq a,$ то необходимо взять знак $+$, т.е. $r=a+\frac{cx}{a}=a+\varepsilon x.$

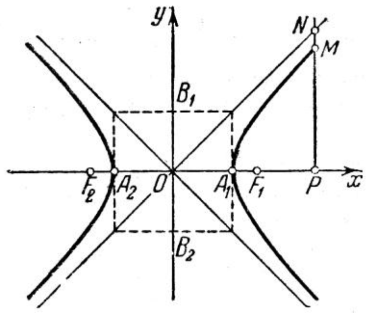
Далее, $d=x-(-\frac{a}{\varepsilon})=x+\frac{a}{\varepsilon}.$ $\frac{r}{d}=\frac{a+\varepsilon x}{x+\frac{a}{\varepsilon}}=\varepsilon.$ Теорема доказана.

Механическое построение эллипса. Зная фокусы F_1 и F_2 и длину $2a$ большой оси, легко механически построить эллипс. Нужно взять нить длиной $2a$, укрепить два ее конца в точках F_1 и F_2 и, придав ей форму ломаной F_1MF_2, описать точкой M эллипс, следя за тем, чтобы нить все время оставалась натянутой.

Лекция 7.

Гипербола.

Гиперболой называется множество точек, абсолютное значение разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.



Обозначим эту постоянную через $2a$, расстояние между фокусами $2c$ и выберем оси координат так же, как и в случае эллипса. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка гиперболы. По определению гиперболы: $|F_2M - F_1M| = 2a$ или $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$ Освободившись от радикалов, получим каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (v), где $b^2=c^2-a^2$.

Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется эксцентриситетом гиперболы ($\varepsilon > 1$).

Так как уравнение (v) содержит только квадраты текущих координат, то оси координат являются осями симметрии гиперболы. Ось симметрии, на которой располагаются фокусы, называется фокальной осью. Точка пересечения осей симметрии называется центром гиперболы. Точки пересечения гиперболы с осями координат называются вершинами гиперболы: $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$. С осью Oy гипербола не пересекается, т.к. при $x=0$ получаем $y^2=-b^2$, откуда видно что для y действительных значений нет. Поэтому ось симметрии, пересекающая гиперболу, называется действительной осью симметрии (фокальной осью), ось симметрии, которая не пересекает гиперболы, называется мнимой осью симметрии. Отрезок A_1A_2, соединяющий вершины гиперболы, а также его длина $2a$ называются действительной осью гиперболы. Если на мнимой оси симметрии гиперболы отложить в обе стороны от ее центра O отрезки OB_1 и OB_2 длиною b, то отрезок B_1B_2, а также его длина $2b$ называются мнимой осью гиперболы. Величины a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы. Для исследования формы гиперболы достаточно рассмотреть ее форму при $x \geq 0, y \geq 0,$ т.к. гипербола симметрична относительно осей координат. Из уравнения (v) следует $\frac{x^2}{a^2} \ge 1,$ значит $a \le x < \infty.$ Когда x увеличивается от a до ∞, то y тоже увеличивается от 0 до ∞. Кривая имеет форму, изображенную на чертеже. Она располагается вне полосы, ограниченной прямыми $x = \pm a,$ и состоит из двух отдельных ветвей.

Асимптоты гиперболы. Рассмотрим две прямые линии, тесно связанные с гиперболой – так называемые асимптоты гиперболы. Предполагая x и y положительными, разрешим уравнение (v) гиперболы относительно ординаты y: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$ Сопоставим это уравнение с уравнением прямой линии $Y = \frac{b}{a}x,$ называя соответствующими две точки N(x,Y) и M(x,y), расположенные соответственно на этой прямой и на гиперболе и имеющие одну и ту же абсциссу x. Очевидно, $Y > y$. Покажем, что при неограниченном возрастании x расстояние MN, убывая, стремится к нулю. В самом деле, MN=Y-y=$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$ откуда MN=$\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$ Из последней формулы видно, что при неограниченном возрастании x расстояние MN, убывая, стремится к нулю. Отсюда следует, что когда точка M, двигаясь по гиперболе в первом квадранте, удаляется в ∞, то ее расстояние до прямой $Y = \frac{b}{a}x$ уменьшается и стремится к нулю. То же обстоятельство будет иметь место при движении точки M по гиперболе в третьем квадранте (вследствие симметрии относительно начала координат O). В силу симметрии гиперболы относительно оси Oy мы получим вторую прямую $y = -\frac{b}{a}x,$ симметрично расположенную с прямой $y = \frac{b}{a}x,$ к которой также будет неограниченно приближаться точка M при движении по гиперболе и удалении в бесконечность (во втором и четвертом квадрантах). Эти две прямые линии носят название асимптот гиперболы. Очевидно, асимптоты гиперболы располагаются по диагоналям прямоугольника, одна сторона которого параллельна оси Ox и равна $2a$, другая – параллельна оси Oy и равна $2b$, а центр лежит в начале координат. При вычерчивании гиперболы по ее уравнению рекомендуется предварительно построить ее асимптоты.

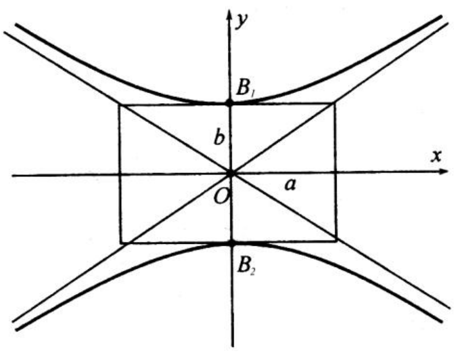
Директрисы гиперболы. Директрисами гиперболы называются две прямые, перпендикулярные к действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него. Если гипербола задана каноническим уравнением (v), то в данной системе координат ее директрисы определяются уравнениями: $x = -\frac{a}{\varepsilon}, x = \frac{a}{\varepsilon}.$ Поскольку для гиперболы $\varepsilon > 1$, то

$\frac{a}{\varepsilon} < a$; это означает, что директрисы гиперболы не имеют с ней общих точек. Свойство директрис гиперболы выражается следующей теоремой.

Теорема. Отношение расстояния r произвольной точки гиперболы до фокуса к расстоянию d этой точки до соответствующей директрисы есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы, т.е. $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы для эллипса.

Сопряженные гиперболы. Рассмотрим теперь уравнение вида: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*)

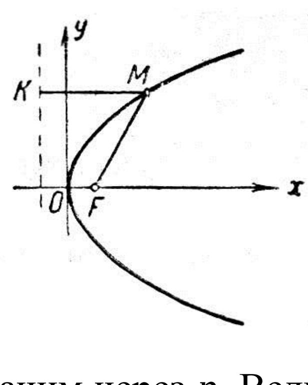


При помощи перестановки букв x и y, a и b оно сводится к уравнению (v). Отсюда ясно, что уравнение (*) определяет гиперболу, расположенную так, как показано на чертеже. Уравнение (*) также называется каноническим уравнением гиперболы. Две гиперболы, которые определяются уравнениями (v) и (*) в одной и той же системе координат и при одних и тех же значениях a и b, называются сопряженными друг с другом.

Равносторонняя гипербола. Гипербола с равными полуосями (a=b) называется равносторонней (равнобочной). Ее каноническое уравнение имеет вид x^2-y^2=a^2. Очевидно, что основной прямоугольник равносторонней гиперболы есть квадрат, поэтому асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг к другу и делят пополам углы между ее осями симметрии.

Парабола.

Парабола есть множество точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой (предполагается, что данная точка не лежит на прямой).



Чтобы составить уравнение параболы, примем за ось Ox прямую, проходящую через фокус F перпендикулярно директрисе, и будем считать ее направленной от директрисы к фокусу; за начало координат возьмем середину O отрезка от точки F до данной прямой, длину которого обозначим через p. Величину p называют параметром параболы. Координаты фокуса F будут $(\frac{p}{2},0)$. Обозначим через x и y координаты произвольной точки M параболы. Тогда координаты точки K – основания перпендикуляра, опущенного из M на директрису, будут $(-\frac{p}{2}, y)$. Так как по определению FM=MK, то, применяя формулу расстояния между двумя точками, получим уравнение параболы в выбранной системе координат: $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$. Освободившись от радикалов, получим каноническое уравнение параболы: $y^2=2px$.

Исследуем форму параболы. Заметим, что x не может принимать отрицательных значений, т.е. все точки параболы лежат справа от оси Oy. Каждому значению x соответствуют два значения y, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, т.е. кривая симметрично расположена относительно оси Ox. С увеличением x абсолютная величина ординаты y увеличивается, причем, когда x неограниченно растет, то $|y|$ тоже неограниченно растет. Кривая имеет вид, данный на чертеже. Парабола имеет одну ось симметрии; ось симметрии параболы называют ее осью. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется ее вершиной. Уравнение директрисы параболы в данной системе координат $x=-\frac{p}{2}$.

Каждое из уравнений $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$ определяет параболу.

Лекция 8.

Упрощение уравнения второй степени, не содержащего члена с произведением координат.

Пусть дано уравнение:

$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ (v), для которого $A^2+C^2\neq 0$.

Рассмотрим три случая.

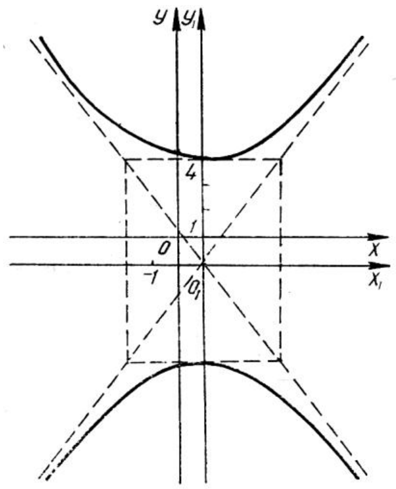
1) A и C одного знака, т.е. $A\cdot C>0$. Уравнение (v) в этом случае называется уравнением эллиптического типа. Выделяя полные квадраты, получаем $A(x+\frac{D}{A})^2+C(y+\frac{E}{C})^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F$.

Переходя к новым координатам по формулам: $x_1=x+\frac{D}{A}, y_1=y+\frac{E}{C}$ и обозначая $\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F=l$, получим: $Ax_1^2+Cy_1^2=l$ (*). В зависимости от l, это уравнение можно привести к одному из уравнений: $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ (эллипс), $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=-1$ (линии не определяет), $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=0$ (точка).

2) A и C разных знаков, т.е. $A\cdot C<0$. Уравнение (v) в этом случае называется уравнением гиперболического типа. Уравнение (*) приводится к одному

из следующих уравнений: $\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$ (гипербола), $-\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$ (гипербола), $\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=0$ (пара пересекающихся прямых).

3) A=0, C≠0 (или C=0, A≠0). Уравнение (v) в этом случае называется уравнением параболического типа. Если еще а) D≠0, то будем иметь $C(y+\frac{E}{C})^2=-2D(x+\frac{F-\frac{E_2}{C}}{2D})$. Переходя к новым координатам по формулам $y_1=y+\frac{E}{C}, x_1=x+\frac{F-\frac{E^2}{C}}{2D}$ и обозначая $-\frac{D}{C}=p,$ получим: $y_1^{\ 2}=2px_1$ (парабола). Если еще b) D=0, то $C(y+\frac{E}{C})^2=\frac{E^2}{C}-F$ или $y_1^{\ 2}=l,$ где $y_1=y+\frac{E}{C}, l=\frac{E^2}{C^2}-\frac{F}{C}.$ Уравнение $y_1^{\ 2}=l$ сводится к одному из уравнений $y_1^{\ 2}=b^2$ (пара параллельных прямых), $y_1^{\ 2}=-b^2$ (линии не определяет), $y_1^{\ 2}=0$ (пара совпавших прямых).



Пример. Построить линию, определяемую уравнением:

$9y^2-16x^2+18y+32x-151=0.$ $\qquad 9(y+1)^2-16(x-1)^2=144,$

$x_1=x-1, y_1=y+1$ (1). После этой замены уравнение принимает вид: $-\frac{x_1^{\ 2}}{9}+\frac{y_1^{\ 2}}{16}=1.$ Это уравнение гиперболы с действительной осью O_1y_1 и параметрами a=3, b=4. Центр гиперболы O_1 находится в точке $x_1=0, y_1=0$. С помощью формул (1) находим старые координаты O_1: x=1, y=-1. Строим старую и новую системы координат и гиперболу относительно системы $O_1x_1y_1$, тем самым построена линия, заданная исходным уравнением, в старой системе координат.

Упрощение общего уравнения второй степени.

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ (1) (B≠0).

Перейдем к новым координатам $x', y',$ считая, что переход от Oxy к $Ox'y'$ осуществляется путем поворота осей координат на некоторый угол α:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем $A_1x'^2+2B_1x'y'+C_1y'^2+2D_1x'+2E_1y'+F=0,$ (3) где $B_1=(C-A)\cos\alpha\sin\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$

Угол поворота выберем так, чтобы в уравнении (3) обратился в нуль коэффициент B_1, т.е. $(C-A)\cos\alpha\sin\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0.$

Отсюда получим соотношение для нахождения α: $ctg\,2\alpha = \dfrac{A-C}{2B}$.

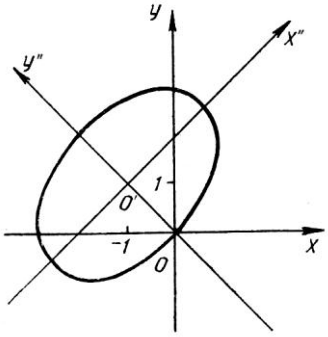
В формулы преобразования (2) входят sinα и cosα, чтобы найти их, необходимо воспользоваться известными тригонометрическими формулами: $\cos 2\alpha = \dfrac{ctg\,2\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2 2\alpha}}$, $\sin\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$.

После такого выбора угла поворота α, уравнение (3) принимает вид: $A_1 x'^2 + C_1 y'^2 + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F = 0$.

А приведение такого уравнения к каноническому виду мы рассматривали выше.

Пример. Определить вид, параметры и расположение линии, заданной уравнением: $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y = 0$.

$ctg\,2\alpha = \dfrac{A-C}{2B} = \dfrac{5-5}{-6} = 0$. Взяв $\alpha = 45^\circ$, формулы (2) запишем в виде: $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'), y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$. (*)



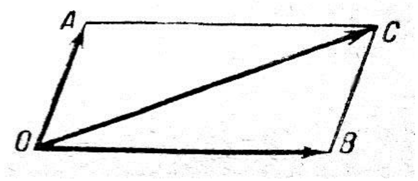
Подставив эти выражения в данное уравнение и преобразовав его, получим: $x'^2 + 4(y' - \sqrt{2})^2 = 8$. Перейдем к новым координатам по формулам $x'' = x', y'' = y' - \sqrt{2}$. (**). В результате получим: $\dfrac{x''^2}{8} + \dfrac{y''^2}{2} = 1$.(***). Это уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$. Центр эллипса находится в точке, для которой $x'' = 0, y'' = 0$. С помощью формул преобразования (**) и (*) находим: $x' = 0, y' = \sqrt{2}, x = -1, y = 1$. Итак, центр эллипса и начало новой системы $O'x''y''$ находятся в точке $O'(-1{,}1)$. Строим эллипс, определяемый уравнением (***), относительно системы $O'x''y''$, тем самым линия построена относительно старой системы Oxy.

III Векторная алгебра и аналитическая геометрия в пространстве.

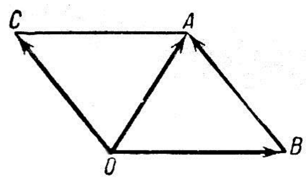
Лекция 9

Величины, с которыми приходится встречаться в механике, физике и других прикладных дисциплинах, бывают двоякого рода. Такие величины как температура, время, масса, объем и т.д. вполне характеризуются одним числовым значением. Такие же величины как сила, скорость, ускорение и т.д. становятся определенными только тогда, когда известно, каковы их числовые значения и направления в пространстве. Величины первого рода называются скалярными, или короче, скалярами. Величины второго рода называются векторными. Для геометрического изображения векторной величины служит вектор. Вектором называется отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Векторы являются предметом так называемого векторного исчисления, подобно тому, как числа являются предметом арифметики. В дальнейшем мы будем использовать векторы как один из удобных инструментов аналитической геометрии в пространстве.

Два вектора считаются равными, если выполнены следующие три условия: 1) длины векторов равны, 2) векторы параллельны, 3) векторы направлены в одну сторону. На чертеже направление вектора отмечается стрелкой. Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому векторы можно приводить к одному началу и называются они свободными.



Сложение векторов.Известные из механики законы сложения векторных величин служат основанием следующего определения сложения векторов. Суммой двух векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ называется такой третий вектор $\overline{OC},$ выходящий из их общего начала, который служит диагональю параллелограмма, сторонами которого являются слагаемые векторы (правило параллелограмма). Можно складывать векторы по правилу треугольника: в конце первого слагаемого строим второе слагаемое. Вектор, замыкающий эту ломаную, есть сумма. Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец – с концом второго. Сложение векторов удовлетворяет основным законам, которым подчиняется сложение чисел.



Вычитание векторов. Разностью двух векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ называется такой третий вектор $\overline{OC},$ что сумма $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ равна $\overline{OA}.$ Можно пользоваться следующим правилом: чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно отнести их к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора-вычитаемого в конечную точку вектора-уменьшаемого.

Умножение вектора на число. При умножении вектора на число его длина умножается на модуль числа, а направление либо сохраняется (если число положительное), либо меняется на противоположное (если число отрицательное).

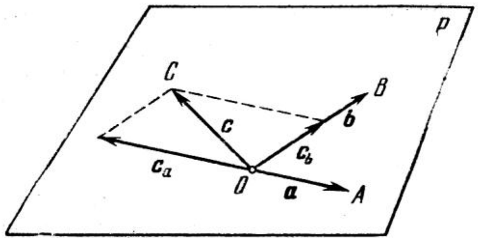
Стандартная форма вектора. Если ненулевой вектор $\bar{a}$ разделить на его длину $|\bar{a}|$, то мы получим единичный вектор $\bar{e}$, так называемый орт, того же направления: $\bar{e}=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Отсюда имеем стандартную форму вектора $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{e}$.

Коллинеарные векторы. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они параллельны или расположены на одной и той же прямой.

Теорема. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. $\bar{b}=k\bar{a}$ (v).

Доказательство: 1) Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и $\bar{e},\bar{e}'$ - их орты. Имеем $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{e}$ и $\bar{b}=|\bar{b}|\bar{e}'$. Очевидно, $\bar{e}'=\pm\bar{e}$. Поэтому $\bar{b}=\pm|\bar{b}|\bar{e}=\pm\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}|\bar{a}|\bar{e}=k\bar{a}$, где $k=\pm\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$. 2) Если выполнено равенство (v), то коллинеарность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ непосредственно следует из смысла умножения векторов на скаляр.

Компланарные векторы. Три вектора $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называются компланарными, если после приведения их к общему началу они лежат в одной плоскости.



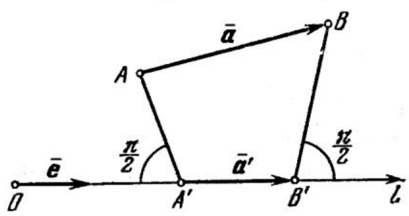
Теорема. Три ненулевых вектора $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других, т.е., например, $\bar{c}=k\bar{a}+l\bar{b}$ (*).

Доказательство: 1) Пусть векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны, расположены в плоскости Р и имеют общую точку приложения О. Предположим сначала, что эти векторы не все попарно коллинеарны, например, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны. Тогда, производя разложение вектора $\bar{c}$ в сумму векторов $\bar{c}_a$ и $\bar{c}_b$, коллинеарных соответственно векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, будем иметь $\bar{c}=\bar{c}_a+\bar{c}_b=k\bar{a}+l\bar{b}$. Если векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ попарно коллинеарны, то можно написать $\bar{c}=k\bar{a}=k\bar{a}+0\bar{b}$, и т.о. снова выполнено условие (*). 2) Обратно, если для векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ выполнено условие (*), то на основании смысла соответствующих векторных операций вектор $\bar{c}$ расположен в плоскости, содержащей векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. эти векторы компланарны.

Лекция 10.

Проекция вектора на ось.

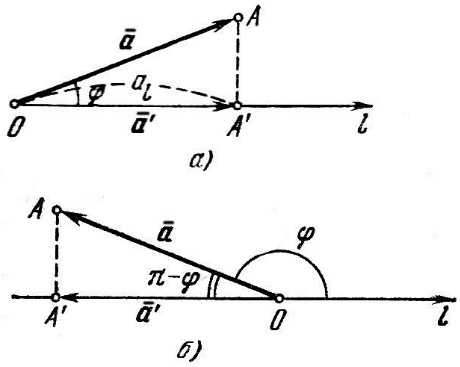
Проекцией точки А на ось l называется основание A' перпендикуляра AA', опущенного из точки А на эту ось.



Под компонентой (составляющей) вектора $\bar{a}$ относительно оси l понимается вектор $\bar{a}' = \overline{A'B'}$, начало которого A' есть проекция на ось l начала A вектора $\bar{a}$, а конец которого B' есть проекция на ось l конца B этого вектора.

Под проекцией вектора $\bar{a}$ на ось l понимается скаляр $a_l = \pm\left|\overline{A'B'}\right|$, равный длине (модулю) его компоненты $\bar{a}'$ относительно оси l, взятой со знаком плюс, если направление компоненты совпадает с направлением оси l, и со знаком минус, если направление компоненты противоположно направлению оси l. Если $\bar{e}$ - единичный вектор оси l, то $\bar{a}' = a_l \bar{e}$.

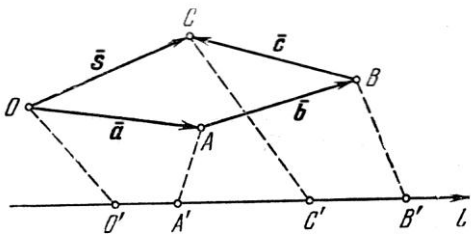
Теорема 1. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l равна произведению длины $|\bar{a}|$ вектора на косинус угла φ между направлением вектора и направлением оси, т.е. $a_l = |\bar{a}|\cos\varphi$.



Доказательство: Так как вектор $\bar{a} = \overline{OA}$ свободный, то можно предположить, что начало его О лежит на оси l. *1)* Если угол φ острый, то направление $\bar{a}'$ совпадает с направлением оси l. Тогда: $a_l = +\left|\overline{OA'}\right| = |\bar{a}\cos\varphi|$. 2) Если угол φ тупой, то направление $\bar{a}'$ противоположно направлению оси l. Тогда: $a_l = -\left|\overline{OA'}\right| = -|\bar{a}|\cos(\pi-\varphi) = |\bar{a}|\cos\varphi.$

Следствие 1. Проекция вектора на ось: 1) положительна, если вектор образует с осью острый угол, 2) отрицательна, если этот угол - тупой, 3) равна нулю, если этот угол - прямой.

Следствие 2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.



Теорема 2. Проекция суммы нескольких векторов на данную ось равна сумме их проекций на эту ось.

Доказательство: Пусть, например, $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Обозначая проекции точек О, А, В, С на ось l через O', A', B', C', и учитывая направления компонент, имеем $s_l = +\left|\overline{O'C'}\right| = +\left|\overline{O'A'}\right| + \left|\overline{A'B'}\right| - \left|\overline{B'C'}\right| = a_l + b_l + c_l.$

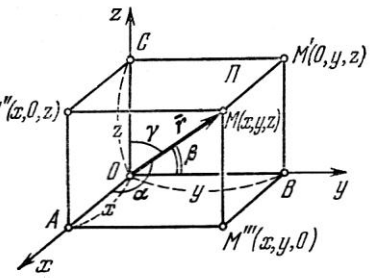
Следствие. Проекция замкнутой векторной линии на любую ось равна нулю.

Теорема 3. Проекция произведения вектора на скаляр на данную ось равна произведению проекции вектора на данную ось на этот скаляр,т.е. $np_l(k\bar{a}) = knp_l\bar{a}.$

Эта формула следует из теоремы 1 и смысла умножения вектора на скаляр.

Следствие. Проекция линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации проекций этих векторов, т.е. $np_l(k_1\bar{a}+k_2\bar{b})=k_1np_l\bar{a}+k_2np_l\bar{b}$.

Прямоугольные декартовы координаты в пространстве.



Через некоторую точку O пространства проведем три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz – оси координат, относительно которых мы будем определять положение точек пространства. Оси координат обычно располагают так, как это указано на чертеже. В этом случае если мы будем смотреть из какой-либо точки положительной полуоси Oz на положительную полуось Oy, то ось Ox будет направлена вправо. Поэтому эта система координат называется правой системой. Для правой системы поворот от оси Ox к оси Oy на прямой угол будет казаться происходящим против часовой стрелки, если смотреть на плоскость xOy из какой-либо точки положительной полуоси Oz. Ось Ox называется осью абсцисс, Oy – осью ординат, Oz – осью аппликат. Точка пересечения координатных осей называется началом координат. Наконец, выберем единицу масштаба. Три взаимно перпендикулярные плоскости Oyz, Oxz, Oxy, проходящие через соответствующие оси, называются координатными плоскостями; они делят все пространство на восемь октантов.

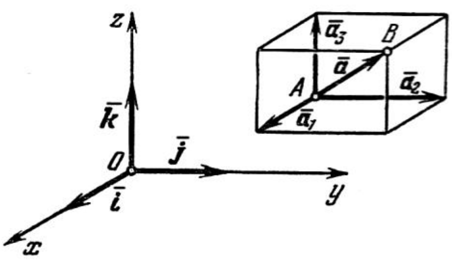
Радиус-вектор. Для каждой точки М пространства существует ее радиус-вектор $\bar{r}=\overline{OM}$, начало которого есть начало координат O и конец которого есть данная точка М.

Под **декартовыми прямоугольными координатами** x,y,z точки М понимаются проекции ее радиуса-вектора $\bar{r}$ на соответствующие оси координат, т.е. $x=r_x, y=r_y, z=r_z$. Точка М с координатами x,y,z обозначается М(x,y,z), причем первая координата называется абсциссой, вторая - ординатой, а третья - аппликатой точки М. Для нахождения этих координат через точку М проведем три плоскости МА, МВ, МС, перпендикулярные соответственно осям Ox,Oy,Oz. Тогда на этих осях получатся отрезки $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$, численно равные координатам точки М. Радиус-вектор $\bar{r}$ является диагональю параллелепипеда П с измерениями $|x|,|y|,|z|$, образованного плоскостями МА, МВ, МС и координатными плоскостями. Поэтому $|\bar{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Если обозначить через α,β,γ (меняющиеся от 0 до π) углы, образованные радиусом-вектором $\bar{r}$ с координатными осями, то будем иметь $x=|\bar{r}|\cos\alpha, y=|\bar{r}|\cos\beta, z=|\bar{r}|\cos\gamma$. Косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами радиуса-вектора $\bar{r}$. Из последних формул для модуля радиуса-вектора и для координат получаем $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Длина и направление вектора.

Пусть в пространстве $Oxyz$ задан вектор $\bar{a}$. Проекции этого вектора на оси координат a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Так как вектор $\bar{a}$ свободный, то его можно рассматривать как радиус-вектор точки $M(a_x, a_y, a_z)$. Отсюда получаем длину вектора $|\bar{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$. Направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ определяются из уравнений: $a_x = |\bar{a}|\cos\alpha, a_y = |\bar{a}|\cos\beta, a_z = |\bar{a}|\cos\gamma,$ причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Действия над векторами, заданными в координатной форме.



Пусть вектор $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ задан своими проекциями на оси координат. Построим параллелепипед, диагональю которого является вектор $\bar{a}$, а ребрами служат компоненты его $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ относительно соответствующих координатных осей. Имеем разложение: $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$. Если ввести единичные векторы (орты) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, направленные по осям координат, то на основании связи между компонентами вектора и его проекциями будем иметь: $\bar{a}_1 = a_x\bar{i}, \bar{a}_2 = a_y\bar{j}, \bar{a}_3 = a_z\bar{k}.$ Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, получаем координатную форму вектора: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$

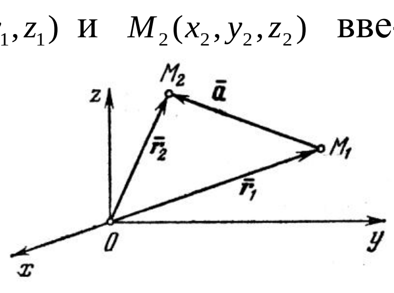
Если $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то, очевидно, также имеем $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$

При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр: $\lambda\bar{a} = \lambda a_x\bar{i} + \lambda a_y\bar{j} + \lambda a_z\bar{k}.$

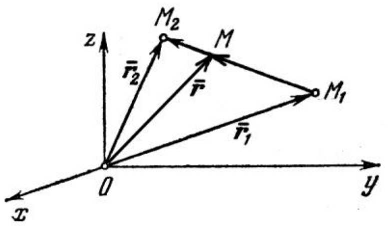
При сложении (или вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (или вычитаются): $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}.$

Расстояние между двумя точками пространства.

Для нахождения расстояния между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ введем в рассмотрение вектор $\bar{a} = \overline{M_1M_2}$ и будем искать его длину. Точки M_1 и M_2 можно задать их радиус-векторами $\bar{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$. Из векторного треугольника ΔOM_1M_2 будем иметь: $\bar{a} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. Проектируя это векторное равенство на оси координат, получим: $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1.$ Тогда будем иметь: $M_1M_2 = |\bar{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$



Деление отрезка в данном отношении.



Пусть даны две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ и требуется на прямой, проходящей через эти точки, найти точку $M(x, y, z)$, делящую отрезок M_1M_2 в заданном отношении $\lambda = \dfrac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$. Из чертежа видим, что $\overline{M_1M} = \bar{r} - \bar{r}_1, \overline{MM_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}$. Поэтому будем иметь $\lambda = \dfrac{\bar{r} - \bar{r}_1}{\bar{r}_2 - \bar{r}}$, откуда получаем решение задачи в векторном виде $\bar{r} = \dfrac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1 + \lambda}$. Проектируя это векторное равенство на оси координат, найдем решение задачи в координатной форме $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$ (1), где под φ подразумевается угол между векторами. Так как $|\bar{b}|\cos\varphi = np_{\bar{a}}\bar{b}$ и $|\bar{a}|\cos\varphi = np_{\bar{b}}\bar{a}$, то $(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}| np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| np_{\bar{b}}\bar{a}$ (2)

Основные свойства скалярного произведения.

1) $(\bar{a}\bar{b}) = (\bar{b}\bar{a})$. 2) $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}\bar{c}) + (\bar{b}\bar{c})$. 3) $(\bar{a}\bar{a}) = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$. 4) $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\bar{b})$.

5) $(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}, \bar{c}) = \lambda(\bar{a}\bar{c}) + \mu(\bar{b}\bar{c})$.

Из определения (1) получаем $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a}\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$. Из этой формулы следует, что $(\bar{a}\bar{b}) = 0$ является условием перпендикулярности двух векторов.

Скалярное произведение векторов в координатной форме.

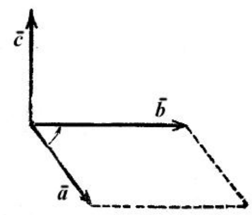
Пусть $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$. Перемножая эти векторы и учитывая соотношения $(\bar{i}\bar{j}) = (\bar{j}\bar{i}) = (\bar{j}\bar{k}) = (\bar{k}\bar{j}) = (\bar{k}\bar{i}) = (\bar{i}\bar{k}) = 0$, $(\bar{i}\bar{i}) = (\bar{j}\bar{j}) = (\bar{k}\bar{k}) = 1$, будем иметь $(\bar{a}\bar{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. Отсюда $\cos\varphi = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}$.

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны (параллельны), тогда у нас было $\bar{a} = k\bar{b}$; это эквивалентно $a_x = kb_x, a_y = kb_y, a_z = kb_z$ или $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$. Это условие параллельности двух векторов в координатной форме. Для перпендикулярных векторов cosφ=0, поэтому условие перпендикулярности двух векторов в координатной форме получается такое: $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Лекция 11.

Векторное произведение векторов.

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется новый вектор $\bar{c}$, определяемый следующими тремя условиями: 1) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$; 2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости этих векторов; 3) векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ должны образовывать правую тройку векторов. Обозначение $[\bar{a}\bar{b}] = \bar{c}$.



Основные свойства векторного произведения.

1) $[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]$, 2) $[\bar{a}\bar{a}] = \bar{0}$, 3) $[\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a}\bar{b}]$,

4) $[(\bar{a} + \bar{b}), \bar{c}] = [\bar{a}\bar{c}] + [\bar{b}\bar{c}]$.

Векторное произведение векторов в координатной форме.

Пусть: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$.

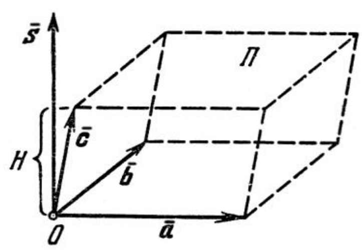
Перемножая векторно эти векторы и учитывая соотношения $[\bar{i}\bar{i}] = [\bar{j}\bar{j}] = [\bar{k}\bar{k}] = \bar{0}$, $[\bar{i}\bar{j}] = -[\bar{j}\bar{i}] = \bar{k}$, $[\bar{j}\bar{k}] = -[\bar{k}\bar{j}] = \bar{i}$, $[\bar{k}\bar{i}] = -[\bar{i}\bar{k}] = \bar{j}$, получаем:

$$[\bar{a}\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов.

Под смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ понимается число $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = ([\bar{a}\bar{b}], \bar{c})$.

Для приложения смешанного произведения весьма важным является уяснить себе его геометрический смысл. Построим параллелепипед П, ребрами которого , исходящими из общей вершины *O*, являются векторы $\bar{a}, \vec{b}, \bar{c}$. Тогда $|[\bar{a}\bar{b}]| = |\bar{s}|$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\vec{b}$, т.е. площадь основания параллелепипеда. Высота этого параллелепипеда H, очевидно, равна $H = \pm np_{\bar{s}}\bar{c} = \pm|\bar{c}|\cos\varphi$, где знак + соответствует острому углу φ, а знак - - тупому углу φ. В первом случае векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку, а во втором – левую тройку. На основании определения скалярного произведения



имеем: $([\bar{a}\bar{b}],\bar{c}) = (\bar{s}\bar{c}) = |\bar{s}|np_{\bar{s}}\bar{c} = \pm|\bar{s}|H = \pm V,$ где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}.$ Отсюда $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \pm V,$ т.е. смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку.

Основные свойства смешанного произведения.

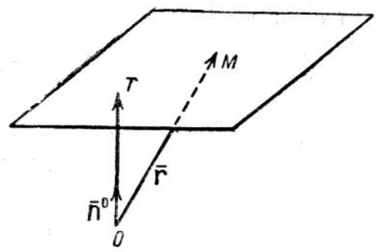
1) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е. $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{b}\bar{c}\bar{a}) = (\bar{c}\bar{a}\vec{b}).$

2) При перестановке двух соседних множителей смешанное произведение меняет свой знак на обратный, например, $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = -(\bar{b}\bar{a}\bar{c}).$

С помощью смешанного произведения получаем условие компланарности трех векторов: $(\vec{a}\vec{b}\bar{c}) = 0.$ Используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений, получим выражение в координатах для смешанного произведения $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x a_y a_z \\ b_x b_y b_z \\ c_x c_y c_z \end{vmatrix}.$

Лекция 12.

Плоскость в пространстве.
Нормальное уравнение плоскости.



Положение плоскости в пространстве будет вполне определено, если зададим ее расстояние p от начала O и единичный вектор $\bar{n}_0$, перпендикулярный плоскости и направленный от начала O к плоскости. Очевидно, для любой точки $M(\bar{r}),$ лежащей на плоскости, имеем $np_{\bar{n}_0}\overline{OM} = p$ (v). Это условие имеет место лишь для точек плоскости; оно нарушается, если точка M лежит вне плоскости. Из определения скалярного произведения имеем: $(\bar{r}\bar{n}_0) = |\bar{r}|\cos\varphi = np_{\bar{n}_0}\overline{OM}$ и, значит, уравнение (v) может быть записано в виде: $(\bar{r}\bar{n}_0) - p = 0.$ Это нормальное уравнение плоскости в векторной форме. Получим нормальное уравнение плоскости в координатной форме, поместив начало координат в начале векторов O. Заметим, что $\bar{n}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$ где α,β,γ - углы, образуемые вектором $\bar{n}_0$ с осями координат, $\bar{r} = \{x,y,z\}.$ Получим: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$ Это уравнение первой степени относительно $x,y,z,$ т.е.

всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.

Общее уравнение плоскости.

Теорема. Всякое уравнение первой степени между тремя переменными определяет плоскость.

Возьмем уравнение первой степени общего вида: $Ax+By+Cz+D=0.$ (*). Будем рассматривать *A, B, C* как проекции на оси координат *Ox, Oy, Oz* некоторого постоянного вектора $\bar{n},$ а *x, y, z* как проекции радиуса-вектора $\bar{r}$ точки *M*. Тогда уравнение (*) может быть переписано в векторной форме следующим образом: $(\bar{r}\bar{n})+D=0.$(**). Покажем, что это уравнение может быть приведено к нормальному виду. Рассмотрим три случая. 1) Пусть *D* < 0. Тогда разделим уравнение (**) на $|\bar{n}|.$ Получим: $(\bar{r}\bar{n}_0)+\frac{D}{|\bar{n}|}=0.$ Обозначив отрицательное число $\frac{D}{|\bar{n}|}$ через *-p*, где *p* положительно, будем иметь нормальное уравнение. 2) Если *D* > 0, то разделим уравнение (**) на $(-|\bar{n}|),$ также получим нормальное уравнение. 3) Если *D* = 0, то уравнение (**) можно разделить как на $|\bar{n},|$ так и на $(-|\bar{n}|).$ В обоих случаях получим нормальные уравнения. Т.о. уравнение (**) всегда может быть приведено к нормальному виду. Но нормальное уравнение определяет плоскость. Следовательно, уравнение (**), а значит и (*), определяет плоскость. Т.о. теорема доказана. Уравнение (*) называется общим уравнением плоскости. Условимся всякий вектор, отличный от нулевого, перпендикулярный к плоскости, называть нормальным вектором плоскости. Тогда $\bar{n}=\{A,B,C\}$ будет одним из нормальных векторов плоскости.

Чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному виду, надо его разделить на длину вектора $\bar{n}=\{A.B,C,\}$ взяв ее со знаком + или - , смотря по тому, будет ли *D* отрицательным или положительным, т.е. общее уравнение надо умножить на нормирующий множитель $M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$ причем знак множителя следует взять противоположным знаку свободного члена *D.* Из сравнения полученного уравнения с общим уравнением легко получаются следующие формулы: $\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$ $\cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$ $\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$ $p=\mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$

Исследование общего уравнения плоскости.

Посмотрим, какие частные положения относительно осей координат занимает плоскость, заданная общим уравнением, если некоторые коэффициенты обращаются в нуль.

Если $D=0$, то уравнению (*) удовлетворяют координаты точки $O(0,0,0)$, т.е. плоскость проходит через начало координат.

Если $C=0$, то уравнение (*) будет $Ax+By+D=0$. Рассматривая это уравнение на плоскости Oxy, мы будем иметь прямую линию. Рассматривая же это уравнение в пространстве, мы будем иметь множество тех точек, которые проектируются на плоскость Oxy в точки указанной прямой. Т.о. в этом случае уравнение определяет плоскость, параллельную оси Oz. Аналогично, если $B=0$, то уравнение $Ax+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy, и, наконец, если $A=0$, то уравнение $By+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox. Вообще, если в уравнении плоскости отсутствует координата z, y или x, то плоскость параллельна соответственно оси Oz, Oy или Ox.

Пусть $D=C=0$. Уравнение $Ax+By=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат параллельно оси Oz, т.е. это будет плоскость, проходящая через ось Oz. Аналогично, уравнение $Ax+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через ось Oy, а уравнение $By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через ось Ox.

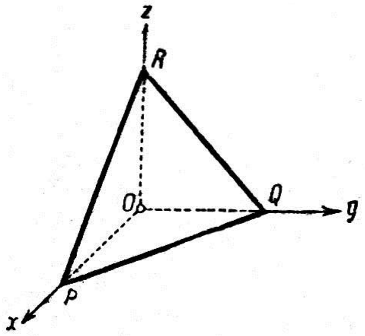
Если $A=B=0$, то уравнение $Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox и оси Oy, т.е. плоскость, параллельную координатной плоскости Oxy. Также уравнения $By+D=0$ и $Ax+D=0$ определяют плоскости, параллельные соответственно координатным плоскостям Oxz и Oyz.

Если $B=C=D=0$, то уравнение $Ax=0$ или $x=0$ определяет плоскость координат Oyz. Также уравнения $By=0$ и $Cz=0$ определяют соответственно координатные плоскости Oxz и Oxy.

Уравнение плоскости в отрезках.

Рассмотрим плоскость, пересекающую все три координатные оси и не проходящую через начало координат. Уравнение этой плоскости можно записать в виде $Ax+By+Cz+D=0$ (*), где ни один из коэффициентов не равен нулю. Обозначим через a, b, c величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат. Так как точка $P(a,0,0)$ лежит на плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению (*): $Aa+D=0$ или $A=-\frac{D}{a}$. Аналогично координаты точки $Q(0,b,0)$ должны удовлетворять уравнению (*): $Bb+D=0$ или $B=-\frac{D}{b}$. Наконец, координаты точки $R(0,0,c)$ удовлетворяют уравнению (*): $Cc+D=0$ или $C=-\frac{D}{c}$.

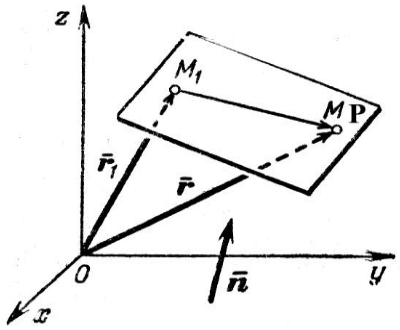
Подставляя найденные A, B, C в (*), после несложных преобразований получим уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$



Лекция 13.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Задана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Возьмем любой вектор $\bar{n}=\{A,B,C\}\neq\bar{0}$ и найдем уравнение плоскости P, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\bar{n}$. Вектор $\overline{M_1M}=\bar{r}-\bar{r}_1$, как лежащий в плоскости P, будет перпендикулярен вектору $\bar{n}$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю: $(\bar{n},\bar{r}-\bar{r}_1)=0.$ Это условие того, что точка M лежит в плоскости P. Последнее уравнение есть искомое уравнение в векторной форме. В координатной форме это уравнение принимает вид: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$ Изменяя A, B и C, мы будем получать различные плоскости, проходящие через точку M_1.



Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Обозначая их радиусы-векторы через $\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3,$ а текущий радиус-вектор через $\bar{r},$ мы легко получим искомое уравнение в векторной форме. В самом деле, векторы $\bar{r}-\bar{r}_1,\bar{r}_2-\bar{r}_1,\bar{r}_3-\bar{r}_1$ должны быть компланарны, следовательно, смешанное произведение этих векторов должно быть равно нулю: $([\bar{r}-\bar{r}_1,\bar{r}_2-\bar{r}_1],\bar{r}_3-\bar{r}_1)=0.$ Это и есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки в векторной форме. Переходя к координатам, получим:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

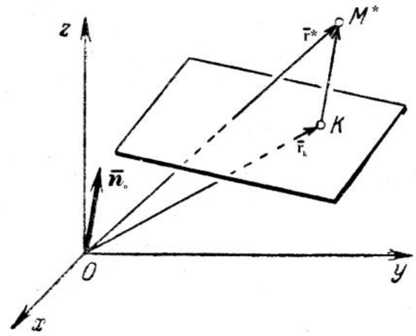
Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Пусть уравнения данных плоскостей будут: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$ Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. Один из этих углов равен углу φ между векторами $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\bar{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\},$ перпендикулярными к данным плоскостям. При изучении скалярного произведения двух векторов в координатной форме, мы имели следующую формулу для определения угла φ: $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Если плоскости перпендикулярны, то φ = $\frac{\pi}{2}$, т.е. cosφ = 0. Поэтому условие перпендикулярности двух плоскостей будет такое: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

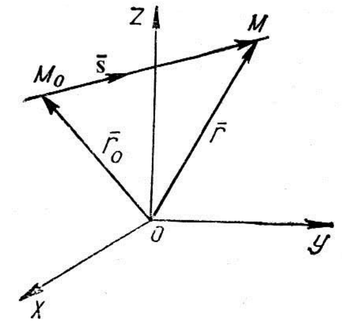
Условием параллельности двух плоскостей будет служить условие параллельности векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Расстояние от точки до плоскости.



Условимся называть отклонением данной точки от данной плоскости число *d*, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, взятой со знаком +, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, и со знаком -, если они лежат по одну сторону от плоскости. Пусть требуется найти расстояние от данной точки $M^*(\bar{r}^*)$ до плоскости $(\bar{r}\bar{n}_0) - p = 0.$ Т.е. найти длину перпендикуляра $M^*K,$ опущенного из точки M^* на плоскость. Вектор $\overline{KM^*}$ параллелен вектору $\bar{n}_0$, поэтому $\overline{KM^*} = d\bar{n}_0.$ Числовой множитель $d,$ взятый по абсолютной величине, дает нам искомое расстояние; знак же d будет +, если $\overline{KM^*}$ и $\bar{n}_0$ имеют одинаковое направление (т.е. если точки M^* и O лежат по разные стороны плоскости) и -, если эти векторы имеют противоположные направления (т.е. если точки M^* и O лежат по одну сторону плоскости). Таким образом, d является отклонением точки M^* от плоскости. Далее, $\overline{OK} + \overline{KM^*} = \overline{OM^*} \Rightarrow \overline{OK} = \overline{OM^*} - \overline{KM^*},$ или $\bar{r}_k = \bar{r}^* - d\bar{n}_0.$ Так как, с другой стороны, точка K лежит на плоскости $(\bar{r}\bar{n}_0) - p = 0,$ то радиус-вектор $\bar{r}_k$ этой точки должен удовлетворять уравнению плоскости, т.е. $(\bar{r}^* - d\bar{n}_0, \bar{n}_0) - p = 0,$ откуда $d = (\bar{r}^*\bar{n}_0) - p.$ В координатах: $d = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p,$ т.е. чтобы найти отклонение точки от плоскости, нужно в левую часть нормального уравнения плоскости подставить вместо текущих координат координаты данной точки. Для вычисления расстояния отточки до плоскости следует взять абсолютную величину полученного отклонения.

Прямая линия в пространстве. Параметрические и канонические уравнения прямой.



Прямая в пространстве однозначно определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направлением (т.е. некоторым вектором). Пусть $\bar{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ - радиус-вектор так называемой опорной точки *M₀* и $\bar{s} = \{m, n, p\}$ - ненулевой вектор прямой, который будем называть направляющим вектором прямой (длина его произвольна). Обозначая через $\bar{r} = \{x, y, z\}$ радиус-вектор произвольной точки M прямой (текущий радиус-вектор), из векторного треугольника OM_0M имеем: $\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}$ (v). Так как векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{s}$ коллинеарны, то $\overline{M_0M} = t\bar{s},$ где t - некоторый скаляр $(-\infty < t < +\infty)$. Подставляя это выражение в (v), получим векторное уравнение прямой линии в пространстве: $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s},$ (t - параметр). Проектируя это равенство на координатные оси, будем иметь параметрические уравнения прямой линии в пространстве: $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt.$ Если из этих уравнений исключить параметр t, то получим так называемые канонические уравнения прямой линии в пространстве: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$ (*). Эти уравнения имеют смысл пропорций, т.е. какие-то (не более, двух) из чисел m,n,p могут быть нулями. Система (*) содержит два уравнения, например, при $p \neq 0$ можно написать $\frac{x - x_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}, \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$ Числа m,n,p называются направляющими коэффициентами прямой линии. Обозначая через α, β, γ углы, образованные прямой с координатными осями и учитывая, что $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ являются направляющими косинусами вектора $\bar{s},$ будем иметь: $m = |\bar{s}|\cos\alpha, n = |\bar{s}|\cos\beta, p = |\bar{s}|\cos\gamma,$ где $|\bar{s}| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}.$ Отсюда получаем: $\cos\alpha = \frac{m}{|\bar{s}|}, \cos\beta = \frac{n}{|\bar{s}|}, \cos\gamma = \frac{p}{|\bar{s}|}$ $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1).$ Уравнения прямой (*) можно записать в стандартном виде: $\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}.$

Уравнения прямой, проходящей через две несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2).$

За направляющий вектор прямой примем $\bar{s} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \neq 0,$ тогда на основании (*) имеем: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$

Лекция 14.

Общие уравнения прямой.

Прямую L в пространстве можно задать так же, как линию пересечения двух плоскостей P и P': $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (v). Эти уравнения, рассматриваемые совместно, называются общими уравнениями прямой. Предполагается, что плоскости не параллельны и не сливаются. От общих уравнений прямой можно перейти к каноническим уравнениям. Для этой цели мы должны знать, какую-нибудь точку прямой и направляющий вектор. Координаты точки легко найдем из данной системы уравнений, выбирая одну из координат произвольно и решая после этого систему двух уравнений относительно оставшихся двух координат. Для отыскания направляющего вектора прямой заметим, что этот вектор, направленный по линии пересечения данных плоскостей, должен быть перпендикулярным к обоим нормальным векторам этих плоскостей $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\bar{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$. Обратно, всякий вектор, перпендикулярный к $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, параллелен обеим плоскостям, а следовательно, и данной прямой. Но векторное произведение $[\bar{n}_1\bar{n}_2]$ также обладает этим свойством. Поэтому за направляющий вектор прямой можно принять $\bar{s}=[\bar{n}_1\bar{n}_2]$.

Уравнение пучка плоскостей.

Пусть имеем общие уравнения прямой (v). Составим уравнение первой степени: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$, которое при любом значении λ определяет плоскость. Если точка лежит на данной прямой линии, то ее координаты одновременно удовлетворяют обоим уравнениям этой прямой и, следовательно, полученное уравнение определяет плоскости, проходящие через данную прямую, поэтому оно называется уравнением пучка плоскостей.

Угол между двумя прямыми линиями.

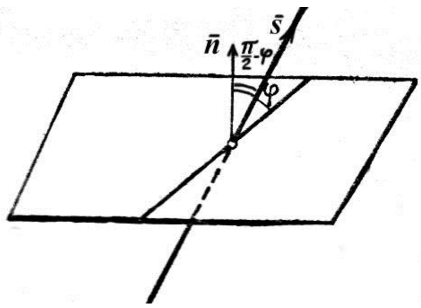
Углом между прямыми в пространстве будем называть любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данным. При этом будем брать угол в границах от 0 до π. Пусть уравнения двух прямых линий есть: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Очевидно, за угол φ между ними можно принять угол φ между их направляющими векторами $\bar{s}_1=\{m_1,\bar{n}_1,\bar{p}_1\}$ и $\bar{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$ или угол, дополняющий его до π.

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ - условие перпендикулярности двух прямых (т.к. скалярное произведение их направляющих векторов должно равняться нулю). $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ - условие параллельности двух прямых (т.к. их направляющие векторы должны быть коллинеарны).

Угол между прямой и плоскостью.



Пусть уравнения прямой имеют вид: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, а уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Углом φ между прямой и плоскостью будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Для определенности, будем считать, что φ - меньший из этих углов, тогда $\varphi \le \frac{\pi}{2}$. $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{|(\bar{n}\bar{s})|}{|\bar{n}||\bar{s}|}$. Но $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$, если $\varphi \le \frac{\pi}{2}$.

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

$Am + Bn + Cp = 0$ - условие параллельности (скалярное произведение $(\bar{n}\bar{s}) = 0$, т.к. $\bar{n} \perp \bar{s}$). $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ - условие перпендикулярности (т.к. $\bar{n}$ и $\bar{s}$ параллельны).

Пересечение прямой с плоскостью.

Даны уравнения прямой линии: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$. Координаты точки пересечения прямой линии с плоскостью должны одновременно удовлетворять всем трем этим уравнениям, а поэтому для их определения нужно совместно решить эти уравнения, считая *x, y, z* за неизвестные.

Но лучше поступить следующим образом. Приравнивая каждое из трех равных отношений уравнений прямой вспомогательному неизвестному *t*, получаем четыре уравнения первой степени с четырьмя неизвестными *x, y, z, t* : $\frac{x-x_0}{m} = t$, $\frac{y-y_0}{n} = t$, $\frac{z-z_0}{p} = t$, $Ax + By + Cz + D = 0$. Из первых трех уравнений находим: $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt.$ (v). Подставляя эти значения *x, y, z* в четвертое уравнение, получаем $t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$. Внося найденное значение *t* в формулы (v), получим координаты искомой точки пересечения прямой линии с плоскостью.

Если $Am+Bn+Cp\neq 0,$ то t имеет определенное конечное значение; следовательно, в этом случае прямая пересекает плоскость в одной точке.

В случае $Am+Bn+Cp=0,\quad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ прямая параллельна плоскости (в силу первого равенства), а точка (x_0,y_0,z_0), через которую прямая проходит, лежит вне плоскости (в силу второго соотношения), следовательно, прямая не имеет ни одной общей точки с плоскостью.

Если $Am+Bn+Cp=0,\quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$ то прямая параллельна данной плоскости (в силу первого равенства) и проходит через точку $(x_0,y_0z_0),$ лежащую в этой плоскости (в силу второго равенства); следовательно, прямая вся лежит в плоскости.

Лекция 15.

Поверхности в пространстве.

Поверхностью в пространстве называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y,z)=0.$(v).

Линия в пространстве как пересечение двух поверхностей определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

Поверхности разделяются по их уравнениям в прямоугольной декартовой системе координат на алгебраические и трансцендентные. Уравнение алгебраической поверхности после преобразований может быть приведено к виду (v), где левая часть есть целый многочлен относительно *x,y,z*. Степень этого многочлена относительно *x,y,z* дает порядок алгебраической поверхности. Порядок поверхности не зависит от выбора координатных осей. Алгебраическими поверхностями первого порядка являются плоскости, с которыми мы уже знакомы. Все неалгебраические поверхности являются трансцендентными поверхностями. Познакомимся с некоторыми часто встречающимися поверхностями.

Цилиндрические поверхности.

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей), остающейся параллельной некоторой данной прямой и пересекающей данную линию (направляющую).

Пусть направляющая цилиндрической поверхности определяется уравнениями: $F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0.$ Положим, что m,n,p - направляющие коэффициенты образующих цилиндрической поверхности. Канонические уравнения образующих будут: $\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}$, где (x,y,z) есть точка, принадлежащая направляющей, а X,Y,Z - текущие координаты образующих. Исключив x,y,z из написанных выше четырех уравнений, получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

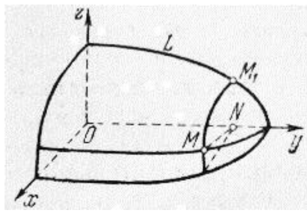
Надо знать, что уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны координатной оси, не содержит текущей координаты, одноименной с этой координатной осью, и обратно.

Конические поверхности.

Конической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей), проходящей через данную точку (вершину конуса) и пересекающей данную линию (направляющую конуса). Пусть направляющая конуса определяется уравнениями $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$, а вершина конуса имеет координаты x_0,y_0,z_0. Канонические уравнения образующих конуса как прямых, проходящих через точку (x,y,z) направляющей, будут: $\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}$. Исключив x,y,z из четырех написанных выше уравнений, получим искомое уравнение конической поверхности.

Надо знать, что уравнение конической поверхности с вершиной конуса в точке (x_0,y_0,z_0) однородно относительно разностей $X-x_0, Y-y_0, Z-z_0$, обратно, всякое однородное относительно $X-x_0, Y-y_0, Z-z_0$ уравнение представляет конус, вершина которого лежит в точке (x_0,y_0,z_0).

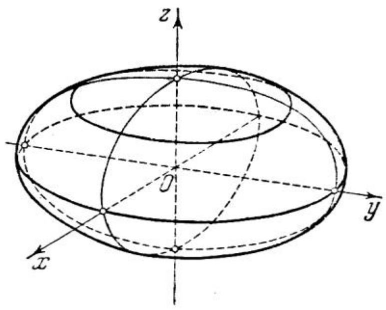
Поверхности вращения.



Поверхностью вращения называется поверхность, описываемая плоской линией при ее вращении относительно некоторой данной прямой.

Положим, что в плоскости Oyz нам дана линия L, имеющая уравнение: $F(Y,Z)=0$ (*). Найдем уравнение поверхности, полученной от вращения этой линии вокруг оси Oy. Из чертежа видно, что $Y=y, Z=\pm\sqrt{x^2+z^2}$, где x,y,z - текущие координаты рассматриваемой поверхности вращения. Подставляя Y,Z в (*), получим искомое уравнение поверхности вращения $F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

Поверхности второго порядка.



Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая алгебраическим уравнением второй степени относительно текущих координат *x,y,z*. При соответствующем выборе прямоугольной системы координат в пространстве уравнение поверхности второго порядка можно привести к одному из следующих двенадцати видов.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (1)

(трехосный эллипсоид)

Изучим поверхность (1) так называемым методом сечений. Найдем главные сечения:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=0$ - эллипс (*),

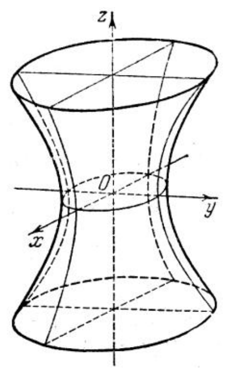
$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, x=0$ - эллипс (**),

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, y=0$ - эллипс (***).

Плоскость, параллельная плоскости $z=0$, пересекает поверхность по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, z=h$ с меньшими полуосями, чем у эллипса (*).

Плоскость, параллельная плоскости $x=0$, пересекает поверхность по эллипсу $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}, x=h$ с меньшими полуосями, чем у эллипса (**).

Плоскость, параллельная плоскости $y=0$, пересекает поверхность по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, y=h$ с меньшими полуосями, чем у эллипса (***).

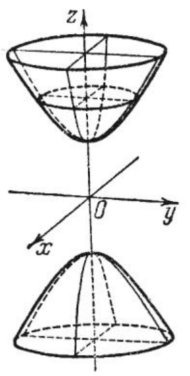


Если $a=b=c$, то уравнение (1) определяет сферу. Если $a=b\neq c$ или $a=c\neq b$, или $b=c\neq a$, то уравнение (1) определяет эллипсоид вращения.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (2)

(однополостный гиперболоид).

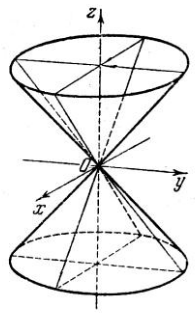
Применяя метод сечений, получаем искомую поверхность. Если $a=b$, то уравнение (2) определяет однополостный гиперболоид вращения.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (3)$$

(двуполостный гиперболоид).

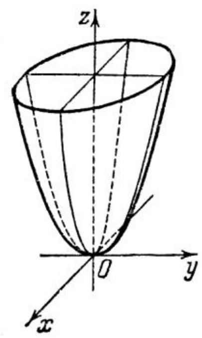
С помощью метода сечений строим эту поверхность. Если $a=b$, то уравнение (3) определяет двуполостный гиперболоид вращения.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (4)$$

(конус второго порядка).

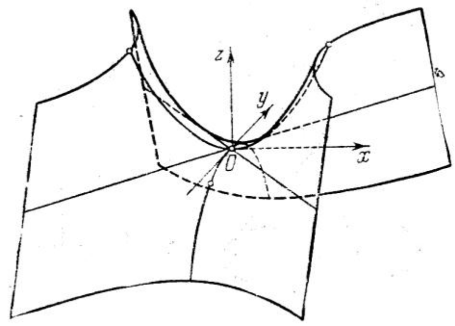
Методом сечений исследуем эту поверхность и строим ее. Если $a=b$, то уравнение (4) определяет круговой конус.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (5)$$

(эллиптический параболоид).

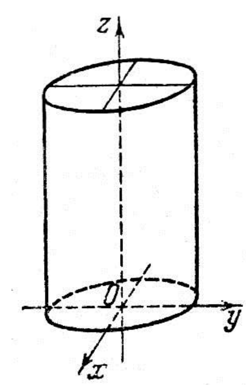
Применяем метод сечений, строим поверхность. Если $a=b$, то уравнение (5) определяет параболоид вращения.



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (6)$$

(гиперболический параболоид).

Здесь и дальше вновь применяем метод сечений и строим соответствующие поверхности.

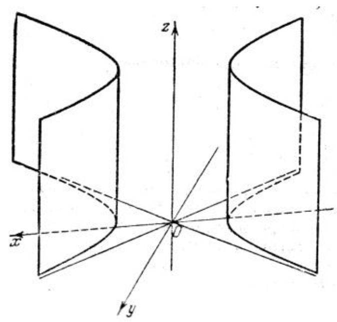


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (7)$$

(эллиптический цилиндр). Если $a=b$, то уравнение (7) определяет круговой цилиндр.

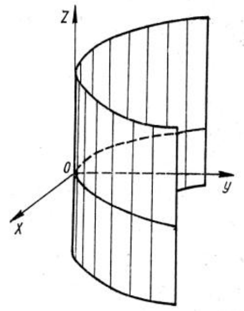
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (8)$$

(гиперболический цилиндр).



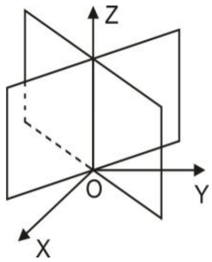
$$x^2 = 2py \quad (9)$$

(параболический цилиндр).



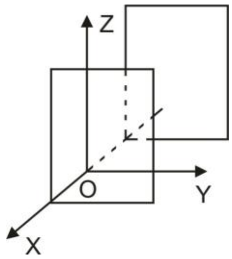
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad (10)$$

(пара пересекающихся плоскостей)



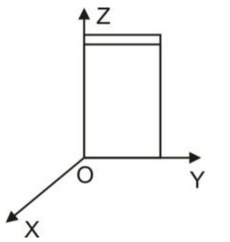
$$\frac{x^2}{a^2}=1 \quad (11)$$

(пара параллельных плоскостей)



$$x^2 = 0 \quad (12)$$

(пара совпадающих плоскостей)



Лекция 16.

Формулы преобразования прямоугольной системы координат в прямоугольную систему.

При параллельном переносе координатных осей:

$$x = x'+a, \quad y = y'+b, \quad z = z'+c, \quad (1)$$

$$x' = x-a, \quad y' = y-b, \quad z' = z-c, \quad (2)$$

где x,y,z – координаты точки в старой системе координат $Oxyz$, x',y',z' - координаты той же точки в новой системе координат $O'x'y'z'$, a,b,c - координаты нового начала O' в старой системе координат.

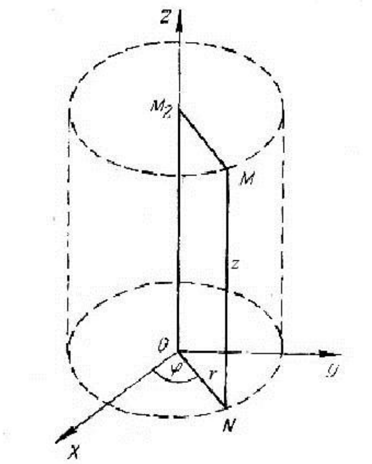
При повороте координатных осей:

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha_1 + y''\cos\alpha_2 + z''\cos\alpha_3 \\ y' = x''\cos\beta_1 + y''\cos\beta_2 + z''\cos\beta_3 \\ z' = x''\cos\gamma_1 + y''\cos\gamma_2 + z''\cos\gamma_3 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x'' = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\beta_1 + z'\cos\gamma_1 \\ y'' = x'\cos\alpha_2 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\gamma_2 \\ z'' = x'\cos\alpha_3 + y'\cos\beta_3 + z'\cos\gamma_3 \end{cases} \quad (4)$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - углы, образуемые осью $O'x'$ соответственно с новыми осями $O'x'',O'y'',O'z''$; β_1,β_2,β_3, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ - углы, образуемые соответственно осью $O'y'$ и осью $O'z'$ с новыми осями.

Цилиндрические координаты.

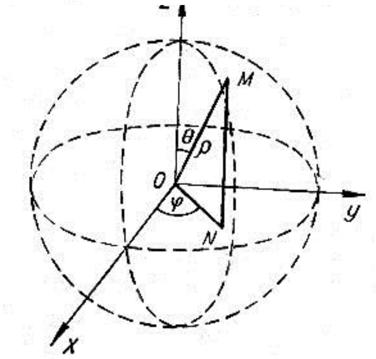


Цилиндрическими координатами точки M называются числа $r,\varphi,z,$ где r,φ - полярные координаты точки N (проекции точки M на плоскость Oxy), $z = np_{Oz}\overline{OM}$.

Связь между прямоугольными и цилиндрическими координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \lesseqgtr r < +\infty,\ 0 \lesseqgtr \varphi < 2\pi, \\ -\infty < z < +\infty \end{pmatrix}$$

Сферические координаты.



Сферическими координатами точки M называются числа $\rho,\theta,\varphi,$ где ρ - расстояние точки M до начала координат, θ - угол, образуемый $\overline{OM}$ с осью Oz (широта), φ - угол, на который нужно повернуть ось Ox против часовой стрелки (если смотреть со стороны положительного направления оси Oz), чтобы она совпала с лучом ON (долгота).

Связь между прямоугольными и сферическими координатами:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \lesseqgtr \rho < +\infty,\ 0 \lesseqgtr \varphi < 2\pi, \\ 0 \lesseqgtr \theta \lesseqgtr \pi \end{pmatrix}$$

IV Математический анализ.

Лекция 17

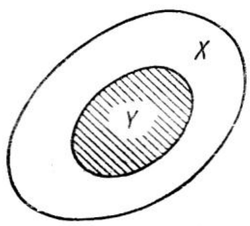
Дифференциальное исчисление функции одной переменной.
Основные понятия теории множеств.

Теория множеств возникла в 70-х годах XIX столетия. Основоположником ее является немецкий ученый Георг Кантор (1845-1918). Понятие “множество” мы часто употребляем в обыденной речи. Мы говорим: “множество людей, проживающих в городах”, “ множество деревьев этого леса” и т.д. В математике также употребляется это понятие, например, рассматриваются “множество чисел”, “множество функций”, “множество векторов”, “множество точек на плоскости” и т.д. Теория множеств занимается изучением множеств, а определения множества нет, так как это очень общее понятие, являющееся одним из основных, первичных понятий математики (общими, первичными понятиями в математике являются также, например, понятия точки, числа). Есть только описание множества: множество – это совокупность некоторых объектов, объединенных в одно целое по какому-то признаку. Сам Георг Кантор писал: “Множество есть многое, мыслимое нами как единое”. Например, A={весна, лето, осень, зима} – множество времен года. B={сложение, вычитание, умножение, деление} – множество арифметических действий. $C=\{x: x>2\}$ – множество чисел > 2. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества. Множества бывают конечные (A и B) и бесконечные (C). Множества задаются либо перечислением элементов (в случае конечных множеств), либо с помощью закона (правила), с помощью которого можно отнести объект к множеству.

Если x есть объект множества X, то пишут $x \in X$ (читается: x принадлежит X). Если y не является элементом множества X, то пишут $y \notin X$ (читается: y не принадлежит X). Например, $осень \in A,\ \ селедка \notin A.$ Удобно ввести понятие пустого множества $\varnothing$, т.е. множества, не содержащего ни одного элемента.

Множества X и X_1 считаются равными X=X_1, если они состоят из одних и тех же элементов. Множества X и X_1 называются эквивалентными X~X_1, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие (для конечных множеств это равносильно равенству числа элементов в эквивалентных множествах).

Множество Y, состоящее из части элементов множества X или совпадающее с ним, называется подмножеством множества X; пишут $Y \subset X$ (v) (читается: Y включено в X). Например, $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$. Условились считать, что пустое множество



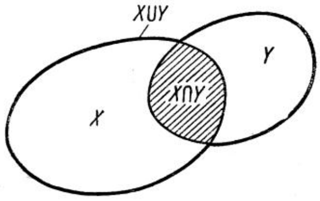
есть подмножество любого множества. Если множества изображать “логическими фигурами”, то соотношению (v) соответствует такой рисунок.

Если под символом $\forall$ понимать “для любого”, то соотношение (v) эквивалентно следующему: $\forall y \in Y \Rightarrow y \in X,$ где $\Rightarrow$ заменяет “следует”.

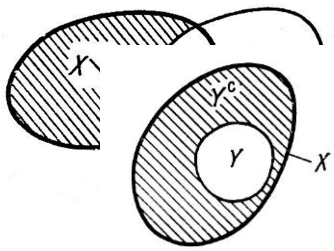
Если $Y \subset X$ и $X \subset Y$, то, очевидно, $X = Y$.

Операции над множествами.

Объединением (суммой) двух множеств X и Y называется множество XUY(U-знак объединения), состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств X или Y . Например, {1,2,3}U{2,3,4}={1,2,3,4}.



Пересечением (произведением) двух множеств X и Y называется множество X∩Y (∩-знак пересечения), состоящее из всех элементов, принадлежащих как одному, так и другому множествам (общая часть множеств). Например, {1,2,3}∩{2,3,4}={2,3}. Последним двум определениям соответствует следующий рисунок. Если множества X и Y не имеют общих элементов, то их пересечение пусто.



Разностью множеств X и Y называется множество $X \backslash Y$, содержащее все элементы множества X, не входящие в множество Y. Например, {1,2,3} \ {2,3,4}={1}.

Если $Y \subset X$, то множество $Y^C = X \backslash Y$ называется дополнением множества Y до множества X.

Лекция 18.

Функция.

Пусть X и Y – данные числовые множества. Если в силу некоторого соответствия *f*, сопоставляющего элементам множества X элементы множества Y, $\forall x \in X \;\; \exists \;\; y \in Y$ (единственный), то y называется однозначной функцией от x, определенной на множестве X.

Этот факт коротко обозначается так: $y = f(x)$ $(x \in X)$.

Множество X называют областью определения функции $f(x)$.

Отметим следующие области определения функции, которые часто будут встречаться в дальнейшем.

Интервалом называется множество всех чисел x, заключенных между данными числами a и b $(a<b)$, при этом сами эти числа не принадлежат рассматриваемому множеству чисел; его обозначают так: (a,b) или $a<x<b$.

Отрезком называется множество всех чисел x, заключенных между двумя данными числами a и b, причем оба числа a и b принадлежат рассматриваемому множеству; его обозначают так: $[a,b]$ или $a \le x \le b$. Иногда отрезок называют замкнутым интервалом.

$a \le x < b$ или $[a,b]$ и $a < x \le b$ или $(a,b]$ – полузамкнутые интервалы.

Множество чисел, представляющее собой или интервал, или отрезок, или полузамкнутый интервал, будем называть промежутком и обозначать $<a,b>$.

$a < x < +\infty$ или $(a,+\infty)$, $a \le x < +\infty$ или $[a,+\infty)$, $-\infty < x < c$ или $(-\infty,c)$, $-\infty < x \le c$ или $(-\infty,c]$, $-\infty < x < +\infty$ или $(-\infty,+\infty)$ - бесконечные интервалы и бесконечные полузамкнутые интервалы.

Данные выше определения можно сформулировать, используя вместо понятия “число” понятие “точка”.

В формуле $y = f(x)$ x называют аргументом или независимой переменной, а y - функцией или зависимой переменной. Зависимость переменных x и y называется функциональной зависимостью. Символ f называется характеристикой функции и указывает, что над значением x нужно произвести какие-то операции, чтобы получить значение y. Для функции $f(x)$ $f(a)$ - значение, которое она принимает при $x = a$. Корнем (или нулем) функции $y = f(x)$ называется значение аргумента $x=a$, при котором функция равна нулю: $f(a) = 0$.

Для обозначения функциональной зависимости вместо буквы f можно употреблять любую другую букву (g, h, F, φ и т.д.), причем понятно, что различные функции должны обозначаться в одном и том же вопросе различными буквами. Вместо записи $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ и т.д. иногда пишут $y = y(x)$, $u = u(x)$ и т.д., т.е. буквы y, u и т.д. обозначают и зависимую переменную, и символ совокупности операций над x.

Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента x соответствует большее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется возрастающей; если же большему значению аргумента x соответствует меньшее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется убывающей.

Для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, заданных на одном и том же множестве X, определяются сумма, разность, произведение, частное. Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами:

$$f(x)+\varphi(x),\ f(x)-\varphi(x),\ f(x)\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \qquad x \in X,$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \ne 0$, на X.

Функцию $f(x)$ называют четной или нечетной, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки и обладает на нем свойством $f(-x) = f(x)$ или свойством $f(-x) = -f(x)$. График четной функции, очевидно, симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат O .

Способы задания функции.

1) Табличный. При этом выписываются в определенном порядке значения аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

2) Графический. При этом соответствие между аргументом x и функцией y устанавливаются с помощью графика.

3) Аналитический. Если функция задана при помощи формулы, то говорят, что она задана аналитически. В некоторых случаях функция может задаваться несколькими формулами.

Основные элементарные функции.

1) Степенная функция: $y = x^{\alpha}$, где α - действительное число.

2) Показательная функция: $y = a^{x}$, где a - положительное число, не равное единице.

3) Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где основание логарифмов a - положительное число, не равное единице.

4) Тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\, x$, $y=\mathrm{ctg}\, x$, $y=\sec x$, $y=\mathrm{cosec}\, x$.

5) Обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\, x$, $y=\mathrm{arcctg}\, x$, $y=\mathrm{arcsec}\, x$, $y=\mathrm{arccosec}\, x$.

Сложная функция. Если y является функцией от u, а u в свою очередь зависит от переменной x, то y также зависит от x. Пусть $y=F(u)$ и $u=\varphi(x)$. Получаем функцию y от x: $y = F[\varphi(x)]$. Это сложная функция или функция от функции.

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной функцией вида $y=f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Алгебраической функцией называется любая функция $y=f(x)$, которая удовлетворяет уравнению вида: $P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0,$ где $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ - некоторые многочлены от x.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется **трансцендентной.**

Абсолютная величина действительного числа.

Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x (обозначается $|x|$) называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее условиям:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Из определения следует $x \leq |x|$.

Свойства абсолютных величин.

1) Абсолютная величина алгебраической суммы нескольких действительных чисел меньше или равна суммы абсолютных величин слагаемых.

Докажем, что для алгебраической суммы двух действительных чисел справедливо следующее неравенство: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Пусть $x + y \geq 0$, тогда $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.

Пусть $x + y < 0$, тогда $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$.

Доказательство легко распространяется на любое число слагаемых.

2) Абсолютная величина разности больше или равна разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого: $|x - y| \geq |x| - |y|$

Доказательство. $|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$, откуда следует, что

$|x - y| \geq |x| - |y|$.

3) Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей: $|xyz| = |x||y||z|$.

4) Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

5) $|x^n| = |x|^n$.

Последние три свойства непосредственно следуют из определения абсолютной величины.

Лекция 19.

Предел последовательности.

Числовой последовательностью (или последовательностью) называется функция $x_n = \varphi(n)$ (n = 1, 2, 3, …), определенная на множестве натуральных чисел.

Каждое значение x_n (n = 1, 2, 3,…) называется элементом последовательности, а число n - его номером. Числовую последовательность обозначают $\{ x_n \} = x_1, x_2, x_3, \dots$.

Примеры. 1) $\{ n \} = 1, 2, 3, \dots$ 2) $\{ \frac{1}{n} \} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

Число a называется пределом последовательности $\{ x_n \}$, если $\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что из $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$

Обозначается предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty.$ Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; последовательность, у которой нет предела, - расходящейся.

Выясним геометрический смысл понятия предела последовательности.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$ из которого следует, что $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$ Но всякий интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon),$ где $\varepsilon > 0,$ называется ε – окрестностью (или просто окрестностью) точки (числа) x на числовой прямой. Поэтому определение предела последовательности имеет следующий геометрический смысл: число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что из $n > N \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$ иначе, если в любой его окрестности содержатся почти все члены $\{x_n\}$, т.е. вне этой окрестности находится лишь конечное число членов $\{x_n\}$.

Пример. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ сходится и имеет предел $a=0$. В самом деле, зададим ε и составим неравенство $|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$ Оно верно для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$ или для всех $n > N,$ где N есть какое-либо натуральное число $N \ge \frac{1}{\varepsilon}.$ Таким образом, $\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что из $n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon.$

Из определения предела последовательности следует, что предел постоянной равен этой постоянной $\lim\limits_{n\to\infty} C = C,$ поскольку в данном случае $x_n=C$, $a=C$, $|x_n - a| = 0 < \varepsilon \forall\varepsilon > 0.$

Из определения предела последовательности следует также, что последовательность может иметь только один предел. Действительно, если допустить, что таких пределов два: a и b, причем $a<b$, то каждый из интервалов $(a\text{-}\varepsilon, a\text{+}\varepsilon)$ и $(b\text{-}\varepsilon, b\text{+}\varepsilon)$, где $\varepsilon = \frac{b-a}{3},$ должен был бы содержать все точки $\{x_n\}$, за исключением их конечного числа, но это невозможно, потому что указанные интервалы не имеют общих точек (не пересекаются).

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число A, что $x_n \le A$ (соответственно $x_n \ge A$) для всех номеров n. Последовательность $\{x_n\}$, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной. Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда существует такое число $C>0$, что $|x_n| \le C$ для всех номеров n.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если $\forall C>0 \exists x_n \in \{x_n\}$ такой, что $|x_n|>C$.

Примеры. 1) $\{\frac{1}{n}\}$ ограничена. 2) $\{-n^2\}$ ограничена сверху и неограниченна снизу. 3) $\{n\cos\frac{\pi n}{2}\}$ не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

Теорема. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Это значит, что $\forall\varepsilon>0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что из $n>N$ $\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Будем считать, что $\varepsilon<1$. Обозначим через d наибольшее из чисел 1, $|x_1 - a|$, $|x_2 - a|$, … , $|x_N - a|$, тогда $|x_n - a| \le d$, т.е. $a - d \le x_n \le a + d$ для всех n. Это и означает, что $\{x_n\}$ ограничена.

Число a называется верхней гранью последовательности $\{x_n\}$, если 1) $x_n \le a$ при всех n; 2) $\forall\varepsilon>0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что $x_n>a-\varepsilon$. Верхнюю грань последовательности $\{x_n\}$ будем обозначать $\sup\{x_n\}$ (sup – сокращение латинского слова supremum - наивысший). Аналогично определяется нижняя грань последовательности $\{x_n\}$ (составьте определение сами!) и обозначается $\inf\{x_n\}$ (inf – сокращение латинского слова infimum - наинизший).

Монотонные последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей), если $x_n \le x_{n+1}$ (соответственно $x_n \ge x_{n+1}$) при всех n. Монотонно возрастающие и монотонно убывающие последовательности называются просто монотонными.

Теорема. Всякая ограниченная сверху (снизу) монотонно возрастающая (монотонно убывающая) последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$).

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. В силу этих условий она имеет верхнюю грань $\sup\{x_n\}=a$. Докажем, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. По определению верхней грани, $x_n \le a$ для всех n и существует такой номер N, что $x_n>a-\varepsilon$, тогда в силу монотонности последовательности при всех $n>N$ получаем $a-\varepsilon<x_N\le x_n\le a<a+\varepsilon.$ Следовательно, $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$ т.е. $|x_n-a|<\varepsilon$ для $n>N$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$ Аналогично доказывается существование предела для ограниченной снизу монотонно убывающей последовательности.

Лекция 20.

Предел последовательности $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ при $n\to\infty.$

Рассмотрим последовательность $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $n=1, 2, 3, \ldots$

Докажем, что эта последовательность при $n\to\infty$ имеет предел, а для этого надо показать, что она монотонно возрастает и ограничена сверху.

Применив формулу бинома Ньютона, найдем

$$x_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Представим это выражение в следующей форме:

$$x_n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\ldots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}) \quad (*)$$

Совершенно аналогично запишем элемент x_{n+1}:

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{n}{n+1}).$$

Непосредственным сравнением убеждаемся, что $x_n<x_{n+1}$, т.е. $\{x_n\}$ возрастающая.

Для доказательства ограниченности этой последовательности сверху заметим, что каждое выражение в круглых скобках в соотношении (*) меньше 1, поэтому из (*) можно получить:

$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$ А отсюда следует, что

$$x_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Члены правой части этого неравенства, начиная со второго, являются первыми n членами геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$ и первым членом $a=1$, поэтому

$$x_n<1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3.$$

Итак, $\{x_n\}=\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ возрастает и ограничена сверху, следовательно имеет предел. Этот предел называют числом *e*. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$

e – иррациональное число; $e\approx 2{,}72$.

Арифметические операции над числовыми последовательностями.

Пусть заданы две последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Суммой, разностью, произведением и частным этих последовательностей называют соответственно последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_ny_n\}$, $\{\frac{x_n}{y_n}\}$. В последней последовательности $y_n\neq 0\,\forall n.$ Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число c называется последовательность $\{cx_n\}$.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Бесконечно малой последовательностью называется последовательность $\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$; или более подробно: последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)$ такое, что из $n>N\Rightarrow|\alpha_n|<\varepsilon.$ Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой.

Теорема 1. Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Зафиксируем $\varepsilon>0$, тогда можно указать номер N такой, что $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n>N$, поэтому $|\alpha_n\pm\beta_n|\leq|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$ Это означает, что $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)=0,$ т.е. $\{\alpha_n+\beta_n\}$ и $\{\alpha_n-\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности.

Следствие. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность; $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, т.е. $\exists b>0$ такое, что $|x_n|\leq b$ при всех n. Задав $\varepsilon>0$, укажем N такое, что $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{b}$ при всех $n>N$, тогда при тех же n $|\alpha_nx_n|=|\alpha_n||x_n|<\frac{\varepsilon}{b}b=\varepsilon.$

Это и означает, что $\{\alpha_nx_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Следствие. Произведение бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\forall E>0\exists N(E)$ такое, что из $n>N \Rightarrow |x_n|>E,$ в этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty.$ Бесконечно большая последовательность не имеет предела, применение знака lim в этом случае является условным. Примеры бесконечно больших последовательностей: $\{n\}$, $\{n^2\}$.

В заключение отметим, что если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность и $\alpha_n\neq 0$ ни при каком n, то $\{x_n\}=\{\dfrac{1}{\alpha_n}\}$ - бесконечно большая последовательность.

Свойства пределов сходящихся последовательностей.

Теорема 1. Для того, чтобы число a являлось пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_n=a+\alpha_n, n=1,2,3,...,$ (v), где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a,$ т.е. $\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon)$ такое, что из $n>N \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon.$ Обозначим $x_n-a=\alpha_n$, n=1, 2, 3,… ($x_n=a+\alpha_n$), тогда $|\alpha_n|<\varepsilon$ при всех $n>N$; следовательно, $x_n=a+\alpha_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0.$

Достаточность. Пусть выполнено равенство (v), где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,$ тогда $\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon)$ такое, что из $n>N \Rightarrow |\alpha_n|<\varepsilon.$ Поскольку $x_n-a=\alpha_n$, то при любом $\varepsilon>0$ и $n>N$ $|x_n-a|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a.$

Теорема 2. Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ - сходящиеся последовательности, то их сумма, разность, произведение и частное также сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n,$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$. В последнем равенстве $y_n\neq 0$ $\forall n.$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,$ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b,$ то $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$, n=1, 2, 3,… , где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0.$

Поскольку $x_n\pm y_n=(a\pm b)+(\alpha_n\pm\beta_n),$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)=0,$ то по теореме 1 получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n.$ Первая формула теоремы доказана. Так как $x_n y_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+(a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n),$ где ab – постоянная, $\{a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n\}$ - бесконечно малая, то по теореме 1 получаем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n=ab=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n.$ Вторая формула теоремы также доказана. Третью формулу теоремы примем без доказательства.

Лекция 21.

Предел функции.

Определение 1. (На языке последовательностей).

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением может быть самой точки a. Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если $\forall$ сходящейся к a последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значений аргумента x, элементы x_n которой отличны от a $(x_n \neq a)$, соответствующая последовательность $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$значений функции сходится к b.

Для обозначения предела функции используется следующая символика: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b.$ Функция $f(x)$ может иметь только один предел при $x\to a$. Это вытекает из того, что $\{f(x_n)\}$ может иметь только один предел.

Определение 2. (На языке "$\varepsilon-\delta$").

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением может быть самой точки a. Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если $\forall \varepsilon>0 \exists \delta(\varepsilon)>0$ такое, что из $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$

Оба эти определения предела функции эквивалентны. Покажем, например, что из определения 2 следует определение 1. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n, ...(x_n \neq a)$ - произвольная сходящаяся к a последовательность значений аргумента. По определению предела последовательности $\forall \delta>0 \exists N(\delta)$ такое, что из $n>N \Rightarrow |x_n-a|<\delta,$ а, следовательно, согласно определению 2 $|f(x_n)-b|<\varepsilon.$ Этим и доказана сходимость последовательности $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ значений функции к b. Т.о. выполнено условие, которое содержится в определении 1, и, следовательно, мы доказали, что из определения 2 следует определение 1.

Односторонние пределы.

Число b называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любой сходящейся к a последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значений аргумента x, элементы которой больше (меньше) a, соответствующая последовательность $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ значений функции сходится к b.

Для правого предела употребляется обозначение $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ или $f(a+0)=b.$ Для левого предела используется обозначение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ или $f(a-0)=b.$

Если правый и левый пределы функции $f(x)$ при $x\to a$ равны, то существует предел этой функции при $x\to a$, равный указанным односторонним пределам.

Сформулируем определения предела функции при $x\to\infty$ и $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x\to\infty$, если $\forall$ бесконечно большой последовательности значений аргумента соответствующая последовательность значений функции сходится к b.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если $\forall$ бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), соответствующая последовательность значений функции сходится к b.

Основная теорема о пределах функций.

Пусть заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют при $x\to a$ пределы b и c. Тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)$-$g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеют при $x\to a$ пределы (частное при условии $c\neq 0$), равные соответственно $b+c$, b-c, bc, $\frac{b}{c}$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_n\neq a)$ - произвольная сходящаяся к a последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $g(x)$. Соответствующие последовательности $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ и $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n), \ldots$ значений этих функций имеют пределы b и c. Но тогда, в силу теоремы 2 о пределах сходящихся последовательностей, последовательности $\{f(x_n)+g(x_n)\}$, $\{f(x_n)$-$g(x_n)\}$, $\{f(x_n)g(x_n)\}$ и $\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\}$ имеют пределы, соответственно равные $b+c$, b-c, bc и $\frac{b}{c}$. В силу произвольности $\{x_n\}$ это означает, что $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=b+c$, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=b-c$, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=bc$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}$.

Теорема 1. Если функция $f(x)=C$ постоянна в некоторой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$.

Доказательство. Если $f(x)=C$, то $|f(x)-C|=0<\varepsilon$ в рассматриваемой окрестности точки a, следовательно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$.

Введем понятие ограниченной функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Функция $y=f(x)$ называется ограниченной при $x\to a$, если для некоторого числа $M>0$ $\exists\delta(M)>0$ такое, что из $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|\leq M$.

Теорема 2. Функция $y=f(x)$, имеющая предел b при $x\to a$, ограничена при $x\to a$.

Доказательство. Дано: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,$ следовательно, $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0$, такое, что из $|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon.$ Выбирая ε=1, последнее неравенство запишем $|f(x)-b|<1.$ Отсюда $|f(x)|=|(f(x)-b)+b|\le|f(x)-b|+|b|<1+|b|=M,$ т.е. $|f(x)|<M$ при $|x-a|<\delta.$ Следовательно, функция $y=f(x)$ ограничена при $x\to a.$

Бесконечно малые функции.

Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a,$ если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0,$ т.е. если $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из $|x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon.$

Если функция $y=f(x)$ имеет равный b предел при $x\to a,$ то функция $\alpha(x)=f(x)-b$ является бесконечно малой при $x\to a$ в силу определения предела функции. Используя это, мы получаем специальное представление для функции, имеющей равный b предел при $x\to a$: $f(x)=b+\alpha(x),$ где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0.$

Теоремы о свойствах бесконечно малых функций.

Теорема 1. Сумма и разность двух бесконечно малых при $x\to a$ функций есть функция бесконечно малая при $x\to a.$

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x\to a$ функции. Тогда $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из $|x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$ поэтому $|\alpha(x)\pm\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon.$ Это означает, что $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)\pm\beta(x))=0,$ т.е. $(\alpha(x)+\beta(x))$ и $(\alpha(x)-\beta(x))$ - бесконечно малые при $x\to a$ функции.

Следствие. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x\to a$ функций есть бесконечно малая при $x\to a$ функция.

Теорема 2. Произведенпие бесконечно малой при $x\to a$ функции на ограниченную при $x\to a$ функцию есть функция бесконечно малая при $x\to a.$

Доказательство. Пусть $\alpha=\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to a$ функция, а $z=z(x)$ - ограниченная при $x\to a$ функция, т.е. для некоторого $C>0$ $\exists$ окрестность с центром в точке a, в которой $|z(x)|\le C.$ Так как $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to a$ функция, то $\forall\varepsilon>0$ можно указать окрестность с центром в точке $a,$ в которой $|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{C}.$ В наименьшей из этих окрестностей будет выполнено неравенство: $|\alpha(x)z(x)|=|\alpha(x)|\cdot|z(x)|<\varepsilon,$ а это и означает, что $\alpha(x)\cdot z(x)$ - бесконечно малая при $x\to a$ функция.

Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых при $x\to a$ функций есть бесконечно малая при $x\to a$ функция.

Следствие 2. Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на постоянную есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - две заданные на одном и том же множестве функции, являющиеся бесконечно малыми при $x \to a.$ Их можно сравнивать.

1) Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$ то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x).$

2) Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K \neq 0,$ то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка малости.

3) Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$ то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми.

Бесконечно большие функции.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a,$ если $\forall E > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E.$

Бесконечно большая функция предела не имеет, но иногда условно говорят, что ее предел равен бесконечности: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty.$ Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a,$ принимая только положительные или только отрицательные значения, то соответственно пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty.$

Сравнение бесконечно больших функций.

Пусть $\lim\limits_{x \to a} A(x) = \infty,$ $\lim\limits_{x \to a} B(x) = \infty.$

1) Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \infty,$ то бесконечно большая функция *A(x)* имеет более высокий порядок роста, чем бесконечно большая функция *B(x).*

2) Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{A(x)}{B(x)} = K \neq 0,$ то *A(x)* и *B(x)* имеют одинаковый порядок роста.

Лекция 22.

Теорема о пределе функции, заключенной между двумя функциями, имеющими общий предел.

Теорема. Пусть три функции $u = u(x), y = y(x), v = v(x)$ определены в некотором промежутке, содержащем точку *a.* Если $\forall x \in$ этому промежутку выполняются неравенства $u(x) \le y(x) \le v(x)$ (*) и функции *u(x)* и *v(x)* имеют одинаковые пределы при *x→a,* то функция *y=y(x)* имеет тот же предел при *x→a.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b,$ $\lim\limits_{x\to a} v(x)=b.$ Из неравенств (*) $\Rightarrow$ $u(x)-b\le y(x)-b\le v(x)-b.$ По определению предела функции $\forall\varepsilon>0\exists$ такие окрестности точки *a*, в которых будут соответственно выполняться неравенства: $-\varepsilon<u-b<\varepsilon,$ $-\varepsilon<v-b<\varepsilon.$ Для всех $x\in$ меньшей из этих окрестностей будут выполнены оба эти неравенства, а поэтому и неравенства $-\varepsilon<y-b<\varepsilon,$ $|y-b|<\varepsilon.$ Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} y(x)=b.$ Эта теорема называется еще теоремой о двух милиционерах.

Теорема о сохранении знака функции.

Теорема. Пусть функция *y=f(x)* определена в некотром промежутке, содержащем точку *a*. Если при *x→a* функция *y=f(x)* имеет положительный (отрицательный) предел, то найдется *δ* – окрестность точки *a* такая, что $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$ функция положительна (отрицательна).

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b.$ Это означает: $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из $|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon,$ или $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon.$ Если *b>0,* то, взяв $\varepsilon=\frac{b}{2},$ из неравенства $b-\varepsilon<f(x)$ получим $f(x)>b-\varepsilon=b-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}>0,$ т.е. *f(x)>0* при $|x-a|<\delta.$ Если *b<0,* то, взяв $\varepsilon=-\frac{b}{2},$ из неравенства $f(x)<b+\varepsilon$ получим $f(x)<b-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}<0,$ т.е. *f(x)*<0 при $|x-a|<\delta.$

Теорема о неравенстве, обе части которого имеют пределы.

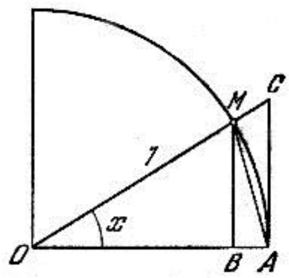
Теорема.

Если функции *u(x),v(x)* определены в некоторой δ – окрестности точки *a,* $\forall x\in(a-\delta,a+\delta), x\ne a,$ выполняется неравенство *u(x)<v(x)* и функции имеют пределы при *x→a*, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)\le\lim\limits_{x\to a} v(x).$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b,$ $\lim\limits_{x\to a} v(x)=c.$ Требуется доказать, что *b≤c.* Предположим противное, т.е. *b>c.* В силу условия и основной теоремы функция *v(x)-u(x)* имеет предел $\lim\limits_{x\to a}[v(x)-u(x)]=c-b,$ *c-b<0,* ибо *b>c* (по предположению). На основании теоремы о сохранении знака функции найдется δ – окрестность точки *a,* для всех точек которой (*x≠a)* $v(x)-u(x)<0$ или *v(x)<u(x),* что противоречит условию. Следовательно, *b≤c,* т.е. $\lim\limits_{x\to a} u(x)\le\lim\limits_{x\to a} v(x).$

Первый замечательный предел.

Теорема. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ существует и равен 1: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$



Доказательство. Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$, т.к. числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Найдем предел этой функции при $x\to 0$. Рассмотрим окружность радиуса 1; обозначим радианную меру центрального угла MOB через $\boldsymbol{x}$; будем считать, что $0<x<\frac{\pi}{2}$. Из рисунка непосредственно следует, что площадь ΔMOA<площади сектора MOA<площади ΔCOA (1). Площадь $\Delta MOA=\frac{1}{2}OA\cdot MB=\frac{1}{2}\sin x.$ Площадь сектора $MOA=\frac{\pi OA^2}{2\pi OA}\overset{\cup}{AM}=\frac{1}{2}x.$ Площадь $\Delta COA=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}tgx.$ Подставляя в (1) и сокращая на $\frac{1}{2}$, получим: $\sin x<x<tgx.$ Разделим все члены на $\sin x$: $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$ или $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$ или $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$ (2). Неравенства (2) в силу четности входящих в них функций верны не только для положительных, но и отрицательных x таких, что $0<|x|<\frac{\pi}{2}.$ Отметим, что для всех x выполняется неравенство $|\sin x|\le|x|.$ (3). В самом деле, $\sin x=0$ при $x=0;$ если $0<|x|<\frac{\pi}{2},$ то неравенство (3) следует из неравенства (2); если $|x|\ge\frac{\pi}{2},$ то $|\sin x|\le 1<\frac{\pi}{2}\le|x|,$ т.е. $|\sin x|<|x|.$ Так как $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}=2|\sin\frac{x}{2}||\sin\frac{x}{2}|\le|x|,$ то (1-cos$x$)$\to$0 при $x\to 0$. Обращаясь к неравенствам (2), заключаем, что функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ заключена между двумя функциями, имеющими один и тот же предел, равный 1; т.о. на основании теоремы о двух милиционерах получаем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Следствие. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1.$

Второй замечательный предел.

Теорема. Предел функции $(1+\frac{1}{x})^x$ при $x\to\infty$ существует и равен e: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

Доказательство. Было установлено, что $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ при $n\to\infty$, если n принимает целые положительные значения. Пусть теперь $x\to\infty$, принимая как дробные, так и отрицательные значения.

1) Пусть $x\to+\infty$. Каждое его значение заключено между двумя положительными целыми числами $n\le x<n+1$. При этом будут выполняться неравенства $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}$, $1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$, $(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{x})^x>(1+\frac{1}{n+1})^n$.

Если $x\to+\infty$, то очевидно, и $n\to+\infty$. Найдем пределы переменных, между которыми заключена переменная $(1+\frac{1}{x})^x$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})=e,$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=e,$ следовательно, на основании теоремы о двух милиционерах, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$

2) Пусть $x\to-\infty$. Введем новую переменную $t=-(x+1)$. При $t\to+\infty$ будет $x\to-\infty$. Можем написать $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-t-1}=\lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{t}{t+1})^{-t-1}=\lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{t+1}{t})^{t+1}=e.$

Теорема доказана. Если положить $\frac{1}{x}=\alpha,$ то получим второй замечательный предел во второй форме $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$

Логарифмы с основанием e называются натуральными логарифмами. Вместо $\log_e x$ пишут $\ln x$.

Лекция 23.

Непрерывность функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если: 1) она определена при значении $x=x_0$ и в некоторой окрестности с центром в x_0, 2) предел этой функции при $x\to x_0$ существует и 3) этот предел равен частному значению $f(x_0)$.

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 символически может быть выражено так: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Так как $x_0=\lim\limits_{x\to x_0}x$, то этому равенству можно придать следующую форму: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$. Следовательно, для непрерывной функции символ "*lim*" предельного перехода и символ "*f*" характеристики функции можно менять местами.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке x_0, если: 1) она определена при значении $x=x_0$ и в некоторой окрестности с центром в x_0, 2) правый (левый) предел этой функции при $x \to x_0$ существует и 3) этот предел равен частному значению $f(x_0)$.

Символические обозначения непрерывности справа (слева):

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad f(x_0+0) = f(x_0)$$

$$(\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad f(x_0-0) = f(x_0)).$$

Если функция непрерывна в точке x_0 и справа, и слева, то она непрерывна в этой точке.

Функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), если: 1) она определена в каждой точке этого интервала, 2) непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, если: 1) она определена в каждой точке отрезка $[a,b]$, 2) непрерывна в каждой точке интервала (a,b) и 3) непрерывна на концах интервала соответственно справа и слева.

Разностная форма условия непрерывности.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором интервале (a,b). Фиксируем любое значение x_0 из указанного интервала. Соответствующее значение функции будет $y_0=f(x_0)$ (1). Зададим аргументу в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что значение $x_0+\Delta x$ также принадлежит интервалу (a,b). Функция y при этом также получит некоторое припащение Δy. Новое, наращенное значение функции будет $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$. (2) Вычитая (1) из (2), получим следующую формулу для приращения функции: $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Теперь условие непрерывности функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ можно переписать так $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$ (3) Условие (3) и называется разностной формой условия непрерывности функции. С помощью этого условия убедимся в непрерывности некоторых основных элементарных функций.

1) $y = x^2$

$$\Delta y = (x_0+\Delta x) - {x_0}^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0$$

2) $y = \sin x$

$$|\Delta y| = |\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0| = 2|\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})| \cdot |\sin\frac{\Delta x}{2}| < |\Delta x|, \text{ поэтому } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Аналогичным образом рассматривая каждую основную элементарную функцию, можно доказать, что всякая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Основная теорема 1 для непрерывных функций.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке x_0 (частное при условии $g(x_0)\neq 0$).

Доказасельство. Т.к. непрерывные в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют при $x\to 0$ пределы $f(x_0)$ и $g(x_0)$, то в силу основной теоремы о пределе функции пределы функций $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ существуют и равны соответственно $f(x_0)+g(x_0)$, $f(x_0)-g(x_0)$, $f(x_0)\cdot g(x_0)$, $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Но эти величины как раз и равны частным значениям перечисленных функций в точке x_0. Теорема доказана.

Основная теорема 2 для непрерывных функций.

Непрерывная функция от непрерывной функции есть функция также непрерывная, иначе говоря, сложная функция, состоящая из непрерывных функций, непрерывна.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)),$ т.е. сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Из основных теорем о непрерывных функциях и непрерывности основных элементарных функций вытекает следующее свойство элементарных функций – они непрерывны в каждой точке, в которой они определены.

Точки разрыва функции.

Если в какой-то точке $x=x_0$ для функции $y=f(x)$ не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, то при $x=x_0$ функция $y=f(x)$ разрывна. Точка $x=x_0$ в этом случае называется точкой разрыва функции.

Рассмотрим возможные типы точек разрыва функции.

1) Устранимый разрыв. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $y=f(x)$, если предел функции при $x\to x_0$ существует, но в точке x_0 функция $f(x)$ или не определена, или ее частное значение $f(x_0)$ в точке x_0 не равно пределу.

Например, функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ имеет в нулевой точке устранимый разрыв, поскольку предел этой функции при $x\to 0$ существует и равен 1, но в точке $x=0$ эта функция не определена.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв указанного типа, то этот разрыв можно устранить, не изменяя при этом значений функции в точках, отличных от x_0. Для этого достаточно доопределить или переопределить значение функции в точке x_0 равным ее предельному значению в этой точке. Так в рассмотренном примере нужно положить $f(0)=1$ и функция будет непрерывной в точке $x=0$.

2) Разрыв 1го рода. Точка x_0 называется точкой разрыва 1го рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы: $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$. Величина $\delta=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

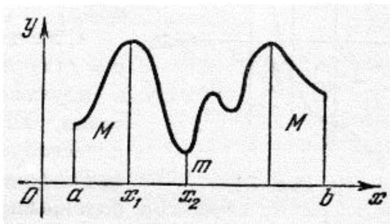
3) Разрыв 2го рода. Точка x_0 называется точкой разрыва 2го рода, если при $x\to x_0$ функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. $x=0$ – точка резрыва 2го рода.

Функция $y=f(x)$ называется кусочно непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых имеет разрыв 1го рода, кроме того, имеет односторонние пределы в точках a и b.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

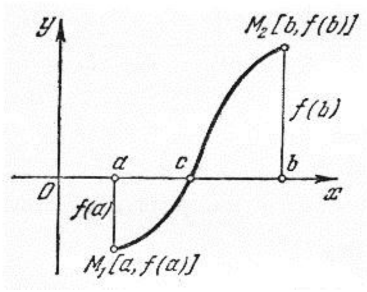
Теорема 1. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдется по крайней мере одна точка $x=x_1$ такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению $f(x_1)\geq f(x)$, где x – любая другая точка отрезка, и найдется по крайней мере одна точка x_2 такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению $f(x_2)\leq f(x)$.



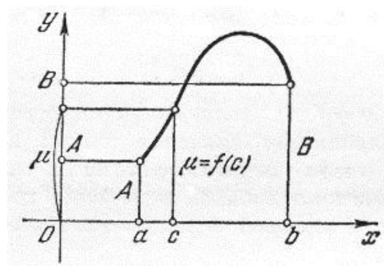
Значение функции $f(x_1)=M$ - наибольшее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$, значение функции $f(x_2)=m$ - наименьшее значение функции на отрезке $[a,b]$. Смысл теорем наглядно иллюстрируется на рисунках.

Теорема 2. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b найдется по крайней мере одна точка $x=c$, в которой функция обращается в нуль: $f(c)=0,\ a<c<b$.

Геометрический смысл этой теоремы - график такой непрерывной функции пересекает ось Ox по крайней мере в одной точке.



Теорема 3. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если на концах этого отрезка



функция принимает неравные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то, каково бы ни было число μ, заключенное между числами A и B, найдется такая точка $x=c$, заключенная между a и b, что $f(c)=\mu$.

Следствие. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором интервале и принимает наибольшее и наименьшее значения, то на этом интервале она принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значениями.

Лекция 24.

Нахождение пределов вида $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=C.$

1) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a}\psi(x)=B,$ то $C=A^B$.

2) Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=+\infty,$ то $C=0$, если $0<A<1;$ $C=+\infty$, если $A>1.$

Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=-\infty,$ то $C=+\infty$, если $0<A<1$; $C=0$, если $A>1.$

3) сли $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty,$ то $C=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)^{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}[1+(\varphi(x)-1)]^{\frac{1}{\varphi(x)-1}(\varphi(x)-1)\psi(x)}$ или окончательно $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)^{\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[(\varphi(x)-1)\psi(x)}$.

Следствия из 2[го] замечательного предела.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$ (1), если $a=e$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ (1')

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ (2), если $a=e$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (2')

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ (3).

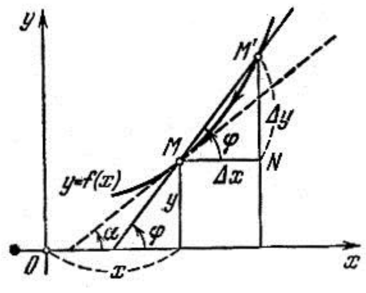
Производная.

Задача о касательной.

Касательной к данной непрерывной кривой в данной ее точке M_0 называется предельное положение секущей, проходящей через точку M_0, когда вторая точка пересечения неограниченно приближается по кривой к первой. Если секущая не имеет предельного положения, то говорят, что касательной к данной линии в точке M_0 не существует.

Покажем теперь, как находится уравенение касательной по заданному уравнению линии.

Задача. Зная уравнение непрерывной линии $y=f(x)$, найти уравнение касательной в данной ее точке $M_0(x_0,y_0)$, предполагая, что касательная существует.



Наряду с точкой $M_0(x_0,y_0)$ возьмем на нашей линии другую точку $M'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$. Проведя секущую M_0M' и прямые M_0N и $M'N$ параллельные координатным осям, получим прямоугольный $\Delta M_0NM'$, из которого находим угловой коэффициент секущей: $k' = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (1). Пусть теперь $M'\to M_0$; тогда, очевидно, $\Delta x\to 0$ и секущая M_0M' стремится к своему предельному положению – касательной M_0T в точке M_0. При $\Delta x\to 0$ будем иметь: $\varphi\to\alpha$ и в силу непрерывности тангенса получим $tg\varphi\to tg\alpha$, отсюда, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ в равенстве (1), найдем угловой коэффициент $k=tg\alpha$ касательной M_0T: $k = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Предел, стоящий в правой части называется производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 и сокращенно обозначается следующим образом: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x_0)$. Т.о. геометрический смысл производной состоит в том, что угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению ее производной в точке касания.

Уравнение касательной: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Задача о скорости движения точки.

К понятию производной приводит также задача о вычислении скорости неравномерного движения. Предположим, что точка M движется по некоторой прямой, которую примем за ось Ox. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM=x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса x движущейся точки есть функция времени t: $x=f(t)$. Это уравнение называется уравнением движения; оно выражает закон движения точки.

Задача. Зная закон движения, найти скорость движущейся точки для любого момента времени.

Пусть в некоторый момент времени t_0 движущаяся точка занимает положение M_0, причем $OM_0=x_0$. В момент $t_0+\Delta t$ точка займет положение M', где $OM'=x_0+\Delta x$. Отсюда $x_0+\Delta x=f(t_0+\Delta t)$. Следовательно, перемещение точки M_0 за время Δt будет $\Delta x=f(t_0+\Delta t)- f(t_0)$. Если точка M в течение промежутка времени $[t_0, t_0+\Delta t]$ двигалась в одном направлении, то Δx численно представляет собой путь, пройденный точкой за время Δt. Отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость изменения абсциссы x за промежуток времени Δt, обычно называемую средней скоростью движения точки. Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется скорстью движения в данный момент времени t_0. Обозначая эту скорость через v, получим: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(t_0)$. Т.о. физический смысл производной состоит в том, что скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени.

Для обозначения производной данной функции $y=f(x)$ кроме $y'=f'(x)$ (обозначение Лагранжа) употребляются также символы $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$ (обозначение Лейбница) и $\dot{y} = \dot{f}(x)$ (обозначение Ньютона).

Другие применения производной.

Быстрота протекания физических, химических, биологических и других процессов также выражается при помощи производной.

Пример. Обозначим через x количество вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. Очевидно, что x есть функция t: $x=f(t)$. Если t получает приращение Δt, то x получает приращение Δx. Тогда отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ представляет собой среднюю скорость химической реакции за промежуток времени Δt, а предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(t)$ выражает скорость химической реакции в данный момент t.

Односторонние производные.

Если отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ имеет предел справа (слева), то он называется производной справа (слева). Такие пределы называются односторонними производными. Обозначения: $f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - производная справа, $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - производная слева.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные существуют и равны между собой, причем $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Функция, имеющая производную в каждой точке данного интервала (a,b), называется дифференцируемой в интервале (a,b). Функция, имеющая производную в каждой внутренней точке данного отрезка $[a,b]$ и имеющая односторонние производные на концах $[a,b]$, называется дифференцируемой на отрезке $[a,b]$.

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$. Напишем тождество $\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x$ $(\Delta x\neq 0)$. Отсюда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=y'\cdot 0=0.$ Следовательно, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x.

Следствие. Если функция разрывна в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.

Пример того, что функция $y=f(x)$, непрерывная в точке x_0, может не иметь производной в этой точке.

$y=\backslash x\backslash$. Эта функция при $x=0$ не имеет производной (правая производная равна 1, а левая равна -1) хотя и непрерывна.

Производная непрерывной функции сама не обязательно является непрерывной. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке, то функция называется гладкой на этом промежутке. Функция, производная которой допускает лишь конечное число точек разрыва, и при том первого рода, на данном промежутке, называется кусочно гладкой на этом промежутке.

Лекция 25.

Таблица производных.

Производная от функции $y=x^{\alpha}$, где α – действительное число.

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^{\alpha}$$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}=x^{\alpha}[(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x^{\alpha}[(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1]}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha x^{\alpha-1}$$

Следовательно, $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ (1)

Производная от функции $y=\sin x.$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$ (2)

Производная от функции $y = \cos x$.

Вывести самим следующую формулу:

$(\cos x)' = -\sin x$ (3)

Основные правила дифференцирования функций.

Производная постоянной.

Вывести самим формулу $C' = 0$ (4)

Производная суммы.

$y = u + v - w,$ где u,v,w – некоторые дифференцируемые функции от x.

$$y + \Delta y = (u+\Delta u) + (v+\Delta v) - (w+\Delta w)$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$y' = u' + v' - w'$ (5)

Производная произведения.

$y = uv$, где u,v – некоторые дифференцируемые функции от x.

$$y + \Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v)$$

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x$$

$y' = uv' + vu'$ (6)

Следствие. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Производная частного.

$y = \frac{u}{v},$ где u,v – дифференцируемые функции от x, $v\neq 0$.

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}$. Если $\Delta x\to 0$, то и $\Delta v\to 0$, т.к. v – дифференцируемая, а, следовательно, и непрерывная функция.

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2} \quad (7)$$

Производная от функции $y=tgx$.

$$y=tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y'=\frac{\cos x\cdot(\sin x)'-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}\,. \quad y'=\frac{1}{\cos^2 x} \quad (8)$$

Производная от функции $y=ctgx$.

Показать самим, что $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. (9)

Производная сложной функции.

$$y=f[\varphi(x)]$$

Эту сложную функцию можно представить в виде цепочки простых функций: $y=f(z)$ и $z=\varphi(x)$.

Теорема. Если $y=f(z)$ и $z=\varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то $y'_x=y'_z\cdot z'_x$.

Доказательство. Дадим x приращение Δx; тогда z и y получат соответствующие приращения Δz и Δy. Так как производная y'_z существует, то $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta z}=y'_z$. Отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta z}=y'_z+\alpha$, причем $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha=0$. Следовательно, $\Delta y=(y'_z+\alpha)\Delta z$. Разделив обе части этого равенства на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x\to 0$ (при этом $\Delta z\to 0$), получим:

$$y'_x=y'_z\cdot z'_x \quad (10)$$

Производная логарифмической функции.

$$y=\log_a x$$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{x\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})=\frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

Итак, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ (11)

Полагая $a=e$, получим $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ (12)

Производная функции $y = \ln|x|$.

Запишем эту функцию с помощью двух равенств:

$y = \ln x$ при $x>0$

$y = \ln(-x)$ при $x<0$.

Отсюда получаем $y' = \dfrac{1}{x}$ при $x>0$ и $y' = \dfrac{1}{-x}(-x)' = \dfrac{1}{x}$ при $x<0$.

Следовательно, $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ (13)

Производная показательной функции $y = a^x$.

$\ln y = x\ln a$. Взяв производную от левой и правой частей по x, будем иметь $\dfrac{y'}{y} = \ln a$, отсюда $y' = y\ln a = a^x \ln a$

Окончательно, $(a^x)' = a^x \ln a$ (14)

Полагая $a=e$, получим $(e^x)' = e^x$ (15)

Производная степенно-показательной функции $y = u(x)^{v(x)}$.

$\ln y = v\ln u$; $\dfrac{y'}{y} = v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}$; $y' = u^v(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u})$

Т.е. $(u^v)' = u^v v'\ln u + vu^{v-1}u'$ (16)

Лекция 26.

Неявная функция и ее производная.

Функция называется явной, если она задана формулой вида $y=f(x)$. Функция y от аргумента x называется неявной, если она задана уравнением $F(x,y)=0$ (*), не разрешенным относительно зависимой переменной. Иногда разрешение уравнения (*) относительно y затруднено. Чтобы найти производную от неявной функции, нужно продифференцировать по x обе части уравнения (*), рассматривая y как функцию x. Из полученного уравнения находится искомая производная.

Пример. $x^2 + y^2 - a^2 = 0$

$2x + 2yy' = 0,\quad y' = -\dfrac{x}{y}.$

Обратная функция и ее производная.

Пусть y есть явная функция от аргумента x: $y=f(x)$ (v). Можно, однако, считать y аргументом, а x функцией. В таком случае уравнение (v) будет определять x как неявную функцию от y. Эта функция x называется обратной по отношению к данной функции y.

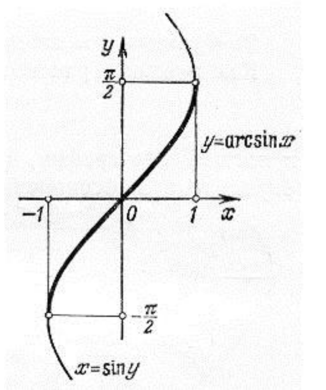
Пусть $y=f(x)$ есть дифференципуемая функция от аргумента x в некотором интервале (a,b), а $x=\varphi(y)$ – обратная к ней функция. Нашей задачей является: зная производную $y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ функции $y=f(x)$, найти производную $x'_y = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ обратной ей функции $x=\varphi(y)$, предполагая, что обратная функция существует и непрерывна в соответствующем интервале (не разрешая уравнения $y=f(x)$).

Теорема. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Доказательство. Напишем тождество: $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=1:\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Переходя к пределу при $\Delta y\to 0$ и учитывая, что при этом также $\Delta x\to 0$ (в силу непрерывности обратной функции), получим:

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=1:\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Отсюда $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$. (17)

Обратные тригонометрические функции и их производные.



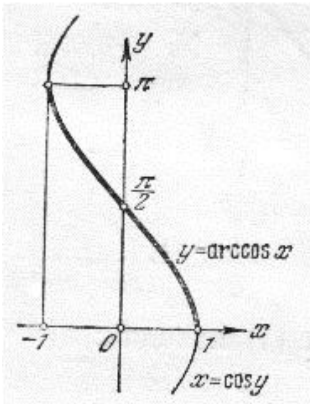
Функции, обратные тригонометрическим функциям, называются обратными тригонометрическими функциями.

Функция $y=\arcsin x$.

Рассмотрим функцию $x=\sin y$ и построим ее график, направив ось Oy вертикально вверх. Эта функция определена в бесконечном интервале $-\infty < y < +\infty$. Обратная ей функция $y=\mathrm{Arcsin}\,x$ есть многозначная функция. Если же y брать в пределах $-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$, то получим так называемое главное значение этой обратной тригонометрической функции: $y=\arcsin x$. Эта функция однозначно определена на отрезке $-1\le x\le 1$. Графиком ее служит часть синусоиды (изоражается жирной линией).

Найдем производную функции $y=\arcsin x$. Обратная ей функция $x=\sin y$, причем $x'_y=\cos y\ne 0$, если $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$. Используем правило дифференцирования обратной функции: $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$. Т.к. $\cos y > 0$ при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0, \quad -1 < x < 1.$ Следовательно, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (18).

Функция $y = \arccos x$.

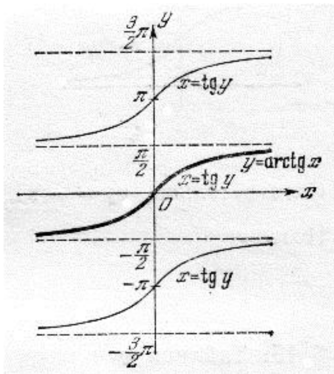


Рассмотрим функцию $x = \cos y$ и построим ее график, напавив ось Oy вверх. Эта функция определена в бесконечном интервале $-\infty < y < +\infty$. Обратная ей функция $y = \mathrm{Arccos}\, x$ есть многозначная функция. Если же y брать в пределах $0 \le y \le \pi$, то получим так называемое главное значение этой обратной тригонометрической функции: $y = \arccos x$. Эта функция однозначно определена на отрезке $-1 \le x \le 1$. Графиком ее служит часть косинусоиды (изображается жирной линией).

Найдем производную функции $y = \arccos x$. Обратная ей функция $x = \cos y$, причем $x'_y = -\sin y \ne 0$, если $0 < y < \pi$.

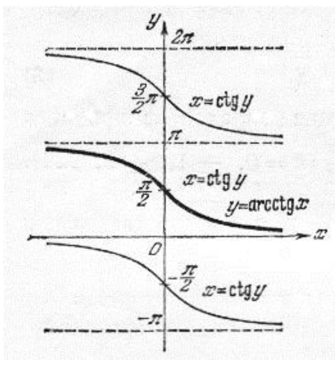
$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y}$. Т.к. $\sin y > 0$ при $0 < y < \pi$, то $\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0$ $(-1 < x < 1)$. Следовательно, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (19).

Функция $y = \mathrm{arctg}\, x$.



Рассмотрим функцию $x = \mathrm{tg}\, y$ и построим ее график, направив ось Oy вверх. Эта функция определена при всех значениях y, кроме значений $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Обратная ей функция $y = \mathrm{Arctg}\, x$ есть многозначная функция. Если же y брать в пределах $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то получим так называемое главное значение этой обратной тригонометрической функции: $y = \mathrm{arctg}\, x$. Эта функция однозначно определена на интервале $-\infty < x < +\infty$. Графиком ее служит часть тангенсоиды (изображается жирной линией).

Найдем производную функции $y = \mathrm{arctg}\, x$. Обратная ей функция $x = \mathrm{tg}\, y$, причем $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + tg^2 y$. Следовательно, $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ (20).



Функция $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Рассмотрим функцию $x = \mathrm{ctg}\, y$ и построим ее график, направив ось Oy вверх. Эта функция определена при всех значениях y, кроме значений $y = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Обратная ей функция y=Arcctg$x$ есть многозначная функция. Если же y брать в пределах $0 < y < \pi$, то получим так называемое главное значение этой обратной тригонометрической функции: y=arcctg$x$. Эта функция однозначно определена на интервале $-\infty < x < +\infty$. Графиком ее служит часть котангенсоиды (изображается жирной линией).

Найдем производную функции y=arcctg$x$. Обратная ей функция x=ctg$y$, причем $x'_y = -\dfrac{1}{\sin^2 y} = -(1 + ctg^2 y)$.

Итак, $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ (21).

Лекция 27.

Параметрическое задание функции.

Даны два уравнения: $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, (^)

где t принимает значения, содержащиеся на отрезке [T_1, T_2]. Каждому значению t соответствуют значения x и y (функции φ и ψ предполагаются однозначными). Если рассматривать значения x и y как координаты точки на координатной плоскости Oxy, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости. Когда t изменяется от T_1 до T_2, эта точка на плоскости описывает некоторую кривую. Уравнения (^) называются параметрическими уравнениями этой кривой, t называется параметром, а способ задания кривой уравнениями (^) называется параметрическим. Предположим далее, что функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную $t=\Phi(x)$. Тогда, очевидно, y является функцией от x: $y=\psi[\Phi(x)]$. Т.о., уравнения (^) определяют y как функцию от x, и говорят, что функция y от x задается параметрически. Выражение $y=f(x)$ непосредственной зависимости y от x может получиться путем исключения параметра t из уравнений (^).

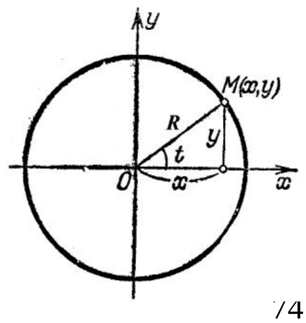
Параметрическое задание кривых широко применяется в механике. Если в плоскости Oxy движется некоторая материальная точка и нам известны законы движения проекций этой точки на оси координат: $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, где t есть время, то эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории движущейся точки.

Уравнения некоторых кривых в параметрической форме.

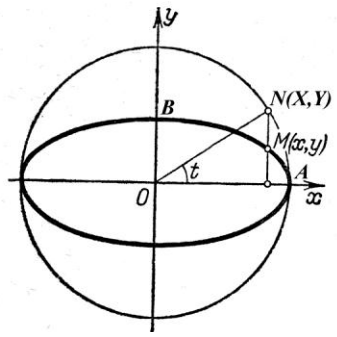
Окружность.

$x=R\cos t, y=R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Исключив t, получим $x^2 + y^2 = R^2$.



Эллипс.

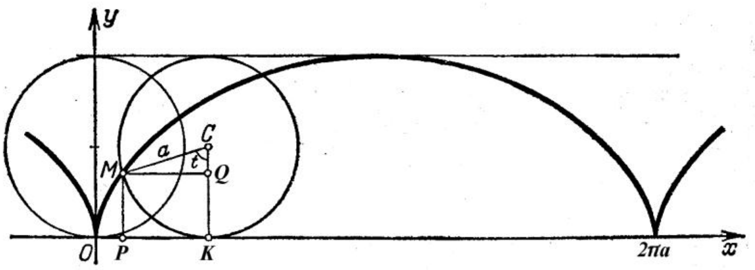


Эллипс с полуосями a и b можно рассматривать как равномерно сжатую вдоль вертикального диаметра окружность радиуса a, где коэффициент сжатия $k = \frac{b}{a}$. Пусть $M(x,y)$ – точка эллипса и $N(X,Y)$ – соответствующая точка окружности, где $x = X, y = \frac{b}{a}Y$. За параметр t примем $\angle NOx$. Тогда будем иметь: $x = X = a\cos t, \quad y = \frac{b}{a}Y = \frac{b}{a}a\sin t = b\sin t.$

Т.о., параметрические уравнения эллипса есть: $x=a\cos t, y=b\sin t.$

Исключив t, получим: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Циклоида.



Циклоидой называется кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии. Выведем параметрические уравнения циклоиды, приняв прямую за ось Ox, предполагая, что радиус катящейся окружности равен a и в начальном положении движущаяся точка M совпадает с началом координат. За параметр t примем угол поворота (в радианах) подвижного радиуса MC окружности относительно вертикального радиуса KC, где K – точка касания окружности с осью Ox. Т.к. качение окружности происходит без скольжения, то, очевидно, имеем: $OK = \overset{\cup}{MK} = at.$ Отсюда на основании рисунка для координат текущей точки M циклоиды получаем:

$x=OP=OK-PK=OK-MQ=at-a\sin t=a(t-\sin t),$

$y=PM=KC-QC=a-a\cos t=a(1-\cos t).$

Т.о. параметрические уравнения циклоиды есть:

$x=a(t-\sin t), \; y=a(1-\cos t).$

При изменении t от 0 до 2π точка M опишет одну арку циклоиды.

Производная функции, заданной параметрически.

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ $(t_0 \le t \le T)$.

Предположим, что эти функции имеют производные и что функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную $t=\Phi(x)$, которая также имеет производную. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию $y=f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию $y=\psi(t)$, $t=\Phi(x)$, где t – промежуточный аргумент. $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Итак, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ (22)

Формулы (1) – (22), полученные в лекциях (25) – (27), надо выписать в виде отдельной таблицы производных и выучить их наизусть.

Понятие о производных высших порядков.

Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется производной первого порядка и представляет собой некоторую новую функцию. Может случиться, что эта функция сама имеет производную. Тогла производная от производной первого порядка называется производной второго порядка или второй производной и обозначается так: $f''(x)$. Производная от производной второго порядка, если она существует, называется производной третьего порядка или третьей производной и обозначается так: $f'''(x)$ и т.д. Для обозначения дальнейших производных употребляются римские цифры.

Производные высших порядков обозначаются также и с помощью арабских цифр, но в этом случае порядок производной берется в скобки для того, чтобы его нельзя было принять за показатель степени.

Пример. $y = x^5$.

$y' = 5x^4,\quad y'' = 20x^3,\quad y''' = 60x^2,\quad y^{(4)} = 120x,\quad y^{(5)} = 120,\quad y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0.$

Производная n-го порядка обозначается $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$.

Физическое значение производной второго порядка.

Мы видели, что с помощью производной первого порядка можно найти скорость движения. Покажем, что для того, чтобы вычислить ускорение движения, надо воспользоваться производной второго порядка.

Пусть закон движения точки M по оси Ox выражается уравнением $x = f(t)$. Пусть в момент времени t точка M имеет скорость v, а в момент $t+\Delta t$ – скорость $v+\Delta v$. Т.о. за промежуток времени Δt скорость точки изменилась на величину Δv. Отношение $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ называется средним ускорением прямолинейного движения за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$

называется ускорением точки M в данный момент t. Обозначая ускорение буквой j, можем написать $j = v'(t)$. Но $v = f'(t)$. Поэтому $v'(t) = f''(t)$.

Итак, имеем $j = f''(t)$, т.е. величина ускорения прямолинейного движения точки равна второй производной от пути по времени.

V Рекомендуемая литература

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1966.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 2007.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1, М., Наука, 1976.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 2001.

Содержание