КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

А.С.ШКУРО

Конспект лекций по математике-3 для студентов Химического института

Учебное пособие

Казань – 2013

УДК 517

Печатается по решению учебно-методической комиссии

ФГАОУВПО «Казанский федеральный университет»

Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Протокол №5 от 18 апреля 2013 г.

заседания кафедры общей математики КФУ

Протокол №7 от 26 марта 2013 г.

Научный редактор

докт. ф.-м. наук, проф. **Н.Г.Гурьянов**

Рецензенты:

докт. ф.-м. наук, проф. **Ю.И.Бутенко,**

канд. ф.-м. наук, доц. **Е.П.Аксентьева**

Шкуро А.С.

Конспект лекций по математике-3 для студентов Химического института: учебное пособие / А.С. Шкуро. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013. – 161с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике для студентов Химического института, читаемых автором в третьем семестре на протяжении ряда последних лет. Пособие полностью соответствует ныне действующей программе курса математики для студентов-химиков, но может быть использовано студентами и других естественных специальностей, а также заинтересованными школьниками старших классов общеобразовательных школ.

I. Дифференциальные уравнения

Лекция 1

Введение

При изучении многих физических явлений не удается непосредственно найти закон, связывающий рассматриваемые величины, но в то же время легко устанавливается зависимость между теми же величинами и их производными или дифференциалами. При этом мы получаем уравнения, содержащие неизвестные функции под знаком производных или дифференциалов, иначе говоря, получаем дифференциальные уравнения.

Определение. Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которые неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала.

Например: 1) $\frac{dm}{dt} = -km$, 2) $\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$, 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 4) $xdy - y^2dx = 0$.

Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция является функцией одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным [примеры 1), 2), 4)].

Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных или уравнением с частными производными [пример 3)].

В этом разделе мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции [в примерах 1) и 4) - дифференциальные уравнения первого порядка, в примерах 2) и 3) - дифференциальные уравнения второго порядка].

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения *n-го* порядка

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 (*)$$

Если левая часть дифференциального уравнения (*) является многочленом по отношению к производной максимального порядка от неизвестной функции, то степень этого многочлена называется степенью дифференциального уравнения.

Например, $\left(y''\right)^3 + \left(y'\right)^4 - y^5 + x^7 = 0$ является дифференциальным уравнением второго порядка третьей степени.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Например, уравнение $\frac{dx}{dt} = x$ имеет решение $x = e^t$.

График решения обыкновенного дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Семейство решений, содержащее все без исключения решения данного уравнения, называется общим решением.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение считается проинтегрированным, если его решения найдены в явном виде $y = y(x)$ или определяются некоторым конечным уравнением $F(x, y(x)) = 0,$ которое называется интегралом дифференциального уравнения.

Перейдем к изучению методов интегрирования дифференциальных уравнений.

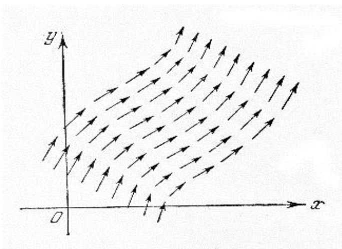
Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Общий вид:
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

Простейший пример такого уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)$ рассматривается в курсе интегрального исчисления. В этом простейшем случае решение $y = \int f(x)dx + C$ содержит произвольную постоянную (или $y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C$). Эта произвольная постоянная C может быть определена, если известно значение $y(x_0) = y_0$; тогда $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx.$ Условие $y(x_0) = y_0$ называют начальным условием.

В курсе "Дифференциальные уравнения" доказано, что уравнение (1) также имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0,$ а его общее решение зависит от одной произвольной постоянной.

Дифференциальное уравнение (1) устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной $\frac{dy}{dx}$ к интегральной кривой в той же точке. Зная x и y, можно вычислить $\frac{dy}{dx}$. Следовательно, дифференциальное уравнение (1) определяет поле направлений, которое может иметь вид, изображенный на рисунке. И задача



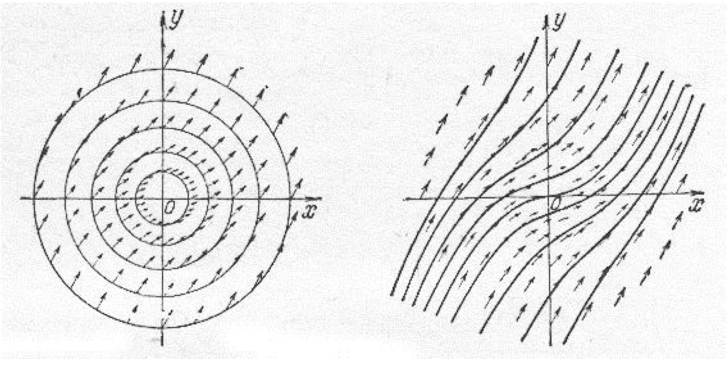
интегрирования дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Пример. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Для построения поля направлений найдем множество точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие линии называются изоклинами.

$\frac{dy}{dx} = k,$ где k - постоянная; $\sqrt{x^2 + y^2} = k$ или $x^2 + y^2 = k^2$.
Следовательно, в данном случае изоклинами являются окружности с центром в начале координат, причем угловой коэффициент касательных к искомым интегральным кривым равен радиусу этих окружностей.

Для построения поля направлений дадим постоянной k некоторые определенные значения (рисунок слева). Теперь можно уже приближенно провести искомые интегральные кривые (рисунок справа).



Во многих задачах, в частности почти во всех задачах геометрического характера, переменные x и y совершенно равноправны. Поэтому в таких задачах, если они сводятся к решению дифференциального уравнения (1), естественно наряду с уравнением (1) рассматривать также уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$. (1')

Если оба эти уравнения имеют смысл, то они эквивалентны, т.е. если функция $y = y(x)$ является решением уравнения (1), то обратная функция $x = x(y)$ является решением уравнения (1') и, следовательно, уравнения (1) и (1') имеют общие интегральные кривые.

Если же в некоторых точках одно из этих уравнений теряет смысл, то в таких точках естественно его заменять другим из этих уравнений.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0 \tag{2}$$

называются уравнениями с разделенными переменными. Функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ будем считать непрерывными.

Общим интегралом уравнения (2) будет

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C \tag{3}$$

$$\text{(или } \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx + \int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = C\text{).}$$

Если надо выделить частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, то оно, очевидно, определится из уравнения

$$\int_{x_0}^{x} f_1(x)dx + \int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = 0.$$

Уравнения вида

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)dy = 0, \tag{4}$$

в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от *x* и только от *y*, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.

Путем деления на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ они приводятся к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx+\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy=0.$$

Заметим, что деление на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $\psi_1(y)\varphi_2(x)$, а если функции $\psi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ могут быть разрывными, то возможно появление лишних решений, обращающих в нуль множитель $\frac{1}{\psi_1(y)\varphi_2(x)}$.

Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

1) $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$.

Замена переменных $z=ax+by+c$,

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right),\quad \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)=f(z),$$

$$\frac{dz}{dx}=a+bf(z),\qquad \frac{dz}{a+bf(z)}=dx.$$

2) $\frac{dy}{dx}=f\left(\sqrt{ax+by+c}\right)$

Замена переменных $z=\sqrt{ax+by+c}$,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{a+b\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{ax+by+c}}=\frac{a+b\frac{dy}{dx}}{2z},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(2z\frac{dz}{dx}-a\right),\quad \frac{1}{b}\left(2z\frac{dz}{dx}-a\right)=f(z),$$

$$2z\frac{dz}{dx}=a+bf(z),\qquad \frac{2zdz}{a+bf(z)}=dx.$$

Пример. $\frac{dy}{dx}=2x+y$

Замена $z = 2x + y, \quad y' = z' - 2, \quad \frac{dz}{dx} - 2 = z, \quad \frac{dz}{z+2} = dx,$

$\ln|z+2| = x + \ln C, \quad z = -2 + Ce^x, \quad 2x + y = -2 + Ce^x,$

$y = Ce^x - 2x - 2$ - общее решение.

Лекция 2

Однородные уравнения первого порядка

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией *n-го* измерения относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ (или $f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right)$).

Пример 1. Функция $f(x, y) = xy - y^2$ есть однородная функция второго измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 f(x, y)$ (или $f(x, y) = xy - y^2 = x^2\left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right)$).

Пример 2. Функция $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy} = f(x, y) = \lambda^0 f(x, y)$

(или $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$).

Уравнение первого порядка
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

называется однородным относительно x и y, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y.

Решение однородного уравнения. По условию $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Положив в этом тождестве $\lambda = \frac{1}{x}$, получим $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, т.е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов.

Уравнение (1) в этом случае примет вид $\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. (1')

Сделаем подстановку $\frac{y}{x} = z$, т.е. $y = xz$.

Тогда будем иметь $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$.

Подставляя это выражение производной в уравнение (1'), получим

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(1, z).$$

Это - уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{dz}{dx} = f(1, z) - z, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, найдем $\int \frac{dz}{f(1, z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C$.

Подставляя после интегрирования вместо z отношение $\frac{y}{x}$, получим интеграл уравнения (1').

Пример. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$.

Полагая $y = xz, \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ и подставляя в исходное уравнение, получим: $x\frac{dz}{dx} + z = z + tgz$, $\frac{\cos z dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$,

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + \ln C, \quad \sin z = Cx, \quad \sin\frac{y}{x} = Cx.$$

Замечание. Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

будет однородным в том и только в том случае, когда $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения, так как в этом случае $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}. \tag{1}$$

Если $c_1 = c = 0,$ то уравнение (1) есть, очевидно, однородное. Пусть теперь c и c_1 (или одно из них) отличны от нуля. Сделаем замену переменных

$$x = u + x_0,\, y = v + y_0. \tag{2}$$

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}.$

Подставляя в уравнение (1) x, y и $\frac{dy}{dx},$ будем иметь

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv + ax_0 + by_0 + c}{a_1 u + b_1 v + a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}. \tag{3}$$

Подберем x_0 и y_0 так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0, \\ a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

т.е. определим x_0 и y_0 как решения системы уравнений (4).

1) Если определитель этой системы $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ то находим ее единственное решение (x_0, y_0). При таких x_0 и y_0 уравнение (3) становится однородным:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{a_1 u + b_1 v}.$$

Решив это уравнение и перейдя к x и y по формулам (2), получим решение уравнения (1).

2) Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$ то $ab_1 = a_1 b.$ Но в этом случае $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda,$ т.е. $a_1 = \lambda a, b_1 = \lambda b$ и, следовательно, уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \tag{5}$$

Тогда подстановкой $z = ax + by$ уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Замечание. Прием, примененный к интегрированию уравнения (1), применяется и к интегрированию уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right),$$

где f - какая угодно непрерывная функция.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$

Решая систему уравнений $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases},$ получим $x_0 = 1, y_0 = 2.$

Положив $x = u + 1, y = v + 2,$ будем иметь: $\frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v}.$

Замена переменных $z = \dfrac{v}{u}$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{1-z}{1+z}, \quad \frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2} = \frac{du}{u},$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2z-z^2\right| = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln C,$$

$$\left(1-2z-z^2\right)u^2 = C, \quad u^2 - 2uv - v^2 = C,$$

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1.$$

Пример 2. $y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}.$

Определитель соответствующей системы $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Делаем замену $z = 2x + y.$

Тогда $y' = z' - 2,$ и уравнение приводится к виду

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}, \quad \text{или} \quad z' = \frac{5z+9}{2z+5}.$$

Решая его, найдем

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C.$$

Так как $z = 2x + y,$ то мы получим окончательно решение исходного уравнения в виде

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\ln|10x+5y+9| = x + C,$$

или

$$10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| = C_1.$$

Лекция 3

Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x.) \tag{1}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ в дальнейшем будем считать непрерывными функциями x в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение (1).

Если $f(x)=0$, то уравнение (1) называется линейным однородным, а если $f(x)\neq 0$, то оно называется линейным неоднородным.

В линейном однородном уравнении переменные разделяются

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

и, интегрируя, получаем

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \neq 0. \tag{2}$$

При делении на y мы потеряли решение $y \equiv 0,$ однако оно может быть включено в найденное семейство решений (2), если считать, что C может принимать и значение 0.

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{1}$$

может быть применен так называемый метод "вариации постоянной". При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее (т.е. имеющее ту же левую часть) однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

общее решение которого, как указано выше, имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

При постоянном C функция $Ce^{-\int p(x)dx}$ является решением однородного уравнения. Попробуем теперь удовлетворить неоднородному уравнению, считая C функцией x $C(x)$, т.е. по существу совершая замену переменных

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

где $C(x)$ - новая неизвестная функция x.

Вычисляя производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

и подставляя в исходное неоднородное уравнение (1), получим

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

или

$$\frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx},$$

откуда, интегрируя, находим

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$

а, следовательно,

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (3)$$

Итак, общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $C_1 e^{-\int p(x)dx}$ и частного решения неоднородного уравнения $e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx,$ получающегося из (3) при $C_1 = 0.$

Заметим, что в конкретных примерах нецелесообразно пользоваться громоздкой и трудно запоминаемой формулой (3), значительно легче каждый раз повторять все приведенные выше вычисления.

Пример . $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2.$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad y = Cx,$$

Считаем C функцией x, тогда $y = C(x)x,$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dC}{dx}x + C(x)$ и, подставляя в исходное уравнение, после упрощения получаем

$$\frac{dC}{dx}x = x^2 \quad \text{или} \quad dC = xdx, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Следовательно, общее решение

$$y = C_1 x + \frac{x^2}{2}.$$

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \qquad (1)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции от x (или постоянные), а $n \neq 0$ и $n \neq 1$ (в противном случае получилось бы линейное уравнение).

Это уравнение приводится к линейному следующим преобразованием.

Разделив все члены уравнения на y^n, получим

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{-n+1} = f(x). \qquad (2)$$

Сделаем, далее, замену

$$z = y^{-n+1}.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2), будем иметь линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)p(x)z = (-n+1)f(x).$$

Найдя его общий интеграл и подставив вместо z выражение y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Пример. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}.$

Это уравнение Бернулли, причем $n = -1.$

Умножаем все члены уравнения на $2y$ и делаем замену.

$$2y\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x} = x^2, \quad y^2 = z, \quad 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x^2$$

и далее как в предыдущем примере.

Лекция 4

Уравнения в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполняется условие Эйлера

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}. \tag{2}$$

Докажем, что условие (2) является необходимым и достаточным для того, чтобы левую часть уравнения (1) можно было представить в виде полного дифференциала некоторой функции $u(x,y)$, т.е. уравнение (1) примет вид

$$du(x,y) = 0, \tag{3}$$

и, следовательно, его общий интеграл есть $u(x,y) = C.$

Предположим сначала, что левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy;$$

тогда

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Дифференцируя первое соотношение по y, а второе - по x, получим

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Предполагая непрерывность вторых производных, будем иметь

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

т.е. равенство (2) является необходимым условием для того, чтобы левая часть уравнения (1) была полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$. Покажем, что это условие является и достаточным, т.е. что при выполнении равенства (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. При этом будет дан и метод нахождения функции $u(x,y)$ по ее частным производным.

Из соотношения $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ находим $u(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)$. При вычислении интеграла $\int M(x,y)dx$ y рассматривается как постоянная, поэтому $C(y)$ является произвольной функцией y. Для определения функции $C(y)$ дифференцируем найденную функцию $u(x,y)$ по y и, так как $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+C'(y)=N(x,y).$$

Из этого уравнения определяем $C'(y)$ и, интегрируя, находим $C(y)$.

Пример.

$$(x+y+1)dx+\left(x-y^2+3\right)dy=0.$$

Левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, так как

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y} \equiv \frac{\partial\left(x-y^2+3\right)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x+y+1, \quad u = \frac{x^2}{2} + xy + x + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y), \quad x + C'(y) = x - y^2 + 3,$$

$$C'(y) = -y^2 + 3, \quad C(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + C_1,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1.$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C_2.$$

Иногда левую часть уравнения в полных дифференциалах удается представить в виде полного дифференциала некоторой функции более простым так называемым методом группировки. Покажем это на только что рассмотренном примере.

$$(x+y+1)dx + \left(x - y^2 + 3\right)dy = 0,$$

$$(x+1)dx + (ydx + xdy) + \left(-y^2 + 3\right)dy = 0,$$

$$d\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + d(xy) + d\left(-\frac{y^3}{3} + 3y\right) = 0,$$

$$d\left(\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y\right) = 0,$$

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C.$$

После умножения обеих частей этого равенства на 6 получаем тот же ответ, что был получен выше.

Интегрирующий множитель

Пусть левая часть уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

не есть полный дифференциал. Иногда удается подобрать такую функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую всех членов уравнения левая часть уравнения становится полным дифференциалом. Общее решение полученного таким образом уравнения совпадает с общим решением первоначального уравнения; функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем уравнения (1).

Для того, чтобы найти интегрирующий множитель μ, поступаем следующим образом: умножим обе части данного уравнения на неизвестный пока интегрирующий множитель μ: $\mu M dx + \mu N dy = 0.$

Для того, чтобы последнее уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

т.е.

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

или

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

После деления обеих частей последнего уравнения на μ, получим

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{2}$$

Очевидно, что всякая функция $\mu(x,y)$, удовлетворяющая последнему уравнению, является интегрирующим множителем уравнения (1). Уравнение (2) является уравнением в частных производных с неизвестной функцией μ, зависящей от двух переменных x и y. Можно доказать, что при определенных условиях оно имеет бесчисленное множество решений и, следовательно, уравнение (1) имеет интегрирующий множитель. Но в общем случае задача нахождения $\mu(x,y)$ из уравнения (2) еще труднее, чем первоначальная задача интегрирования уравнения (1). Только в некоторых частных случаях удается найти функцию $\mu(x,y)$.

Пусть, например, уравнение (1) допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y. Тогда $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0,$ и для отыскания μ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

из которого определяется $\ln \mu,$ а, следовательно, и μ. Ясно, что так можно поступать только в том случае, если выражение $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ не зависит от x.

Аналогично, если выражение $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ не зависит от y, а зависит только от x, то легко находится интегрирующий множитель, зависящий только от x.

Заметим, что умножение на интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ может привести к появлению лишних частных решений, обращающих этот множитель в нуль.

Пример. $\left(y + xy^2\right)dx - xdy = 0.$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Следовательно, левая часть уравнения не есть полный дифференциал. Посмотрим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя, зависящего только от y. Заметив, что

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y},$$

заключаем, что уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y. Находим его: $\frac{d\ln\mu}{dy}=-\frac{2}{y}$; отсюда $\ln\mu=-2\ln y$, т.е. $\mu=\frac{1}{y^2}$. После умножения всех членов данного уравнения на найденный интегрирующий множитель μ получаем уравнение $\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$ в полных дифференциалах $\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\right)$. Решая это уравнение, найдем его общий интеграл $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C=0,$ или $y=-\frac{2x}{x^2+2C}$.

Лекция 5

Теорема существования и единственности решения уравнения $y'=f(x,y)$

Если в дифференциальном уравнении

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

функция $f(x,y)$ удовлетворяет в прямоугольнике D

$$x_0-a\le x\le x_0+a,\qquad y_0-b\le y\le y_0+b$$

следующим двум условиям:

1) $f(x,y)$ непрерывна и, следовательно, в силу замкнутости области D ограничена по модулю $|f(x,y)|\le M$,

2) $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x,\bar{y}) - f(x,y)| \le N|\bar{y} - y|,$$

где N - постоянная, то на отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ существует единственное решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$; здесь h - наименьшее из чисел a и $\frac{b}{M}$.

(Условие Липшица может быть заменено более грубым условием, требующим существования ограниченной по модулю частной производной $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le N_1$.)

Условия этой теоремы являются достаточными для существования и единственности решения, но не являются необходимыми.

Особые решения и особые точки уравнения $y' = f(x,y)$

Особыми точками называются точки (x_0, y_0), в окрестности которых решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, не существует или решение существует, но не единственно.

Кривая, состоящая сплошь из особых точек, называется особой. Если график некоторого решения сплошь состоит из особых точек, то решение называется особым.

Для нахождения особых точек или особых кривых надо прежде всего найти множество точек, в которых нарушены условия теоремы о существовании и единственности решения, так как только среди таких точек могут быть особые. Конечно, не каждая точка, в которой нарушены условия теоремы о существовании и единственности решения, обязательно является особой, так как условия этой теоремы достаточны для существования и единственности решения, но они не являются необходимыми.

Первое условие теоремы существования и единственности решения нарушается в точках разрыва функции $f(x,y)$, причем если при приближении по любому пути к некоторой изолированной точке разрыва (x_0,y_0) функция $f(x,y)$ неограниченно возрастает по модулю, то в тех задачах, в которых переменные x и y равноправны, уравнение $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ должно быть заменено уравнением $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}$, для которого правая часть уже непрерывна в точке (x_0,y_0), если считать $\frac{1}{f(x_0,y_0)}=0.$

Следовательно, в задачах, в которых переменные x и y равноправны, первое условие теоремы существования и единственности нарушается в тех точках, в которых и функция $f(x,y)$ и $\frac{1}{f(x,y)}$ разрывны.

Особенно часто приходится рассматривать уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

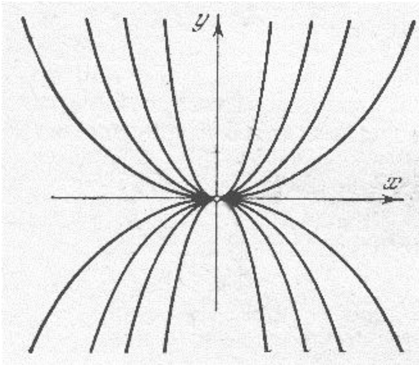
где функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны.

В этом случае функции $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ и $\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$ будут одновременно разрывны лишь в тех точках (x_0,y_0), в которых $M(x_0,y_0)=N(x_0,y_0)=0$ и не существует пределов

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{N(x,y)}{M(x,y)}.$$

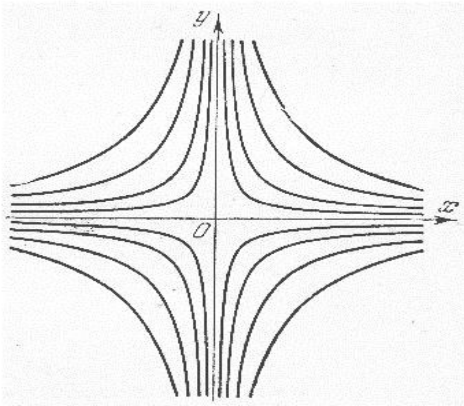
Рассмотрим несколько типичных особых точек уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$



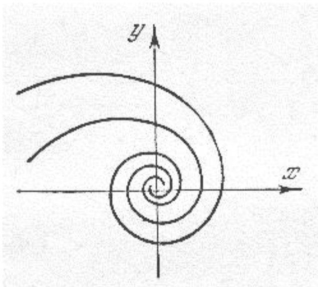
Правые части данного уравнения и уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$ разрывны в точке $x = 0, y = 0.$ Интегрируя уравнение, получим $y = Cx^2$ - семейство парабол и $x = 0.$ В начале координат - особая точка, называемая узлом (так как через нее проходит бесчисленное множество интегральных кривых).

Пример 2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$



Правые части данного уравнения и уравнения $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$ разрывны в точке $x = 0, y = 0.$ Интегрируя уравнение, получаем $y = \frac{C}{x}$ - семейство гипербол и прямую $x = 0.$ В начале координат - особая точка, называемая седлом или седловиной (так как через нее проходят лишь две интегральные кривые - оси координат).

Пример 3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$



Правые части данного уравнения и уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{x+y}$ разрывны в точке $x = 0, y = 0.$ Интегрируя рассматриваемое однородное уравнение, получим

$$\frac{y}{x} = z, \quad y = xz, \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{1-z}, \qquad \frac{dz}{\frac{1+z}{1-z} - z} = \frac{dx}{x}$$

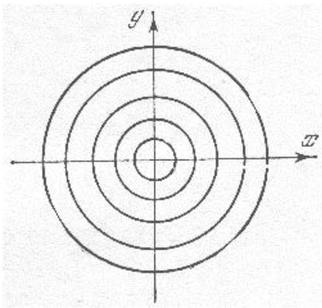
$$\frac{(1-z)dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}, \qquad arctgz - \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) + \ln C = \ln|x|$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) = \ln\left(Ce^{arctg\frac{y}{x}}\right), \qquad \sqrt{x^2+y^2} = Ce^{arctg\frac{y}{x}}$$

или в полярных координатах $r = Ce^{\varphi}$ - логарифмические спирали.

В начале координат - особая точка, называемая фокусом (так как ни одна интегральная кривая через нее не проходит и ее окрестность заполнена незамкнутыми интегральными кривыми).

Пример 4. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

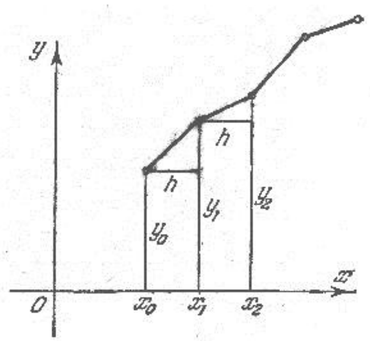


Правые части данного уравнения и уравнения $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ разрывны в точке $x = 0, y = 0.$ Интегрируя уравнение, получаем $x^2 + y^2 = C^2$ - семейство окружностей с центром в начале координат. В начале координат - особая точка, называемая центром (так как ни одна интегральная кривая через нее не проходит и ее окрестность заполнена семейством замкнутых интегральных кривых).

Второе условие теоремы существования и единственности решения - условие Липшица, или более грубое условие, требующее существования ограниченной по модулю частной производной $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, чаще всего нарушается в точках, при приближении к которым $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ неограниченно возрастает, т.е. в точках, в которых $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0.$ Уравнение

$\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = 0,$ вообще говоря, определяет некоторую кривую, в точках которой может быть нарушена единственность. Если в точках этой кривой единственность нарушена, то кривая будет особой, если, кроме того, эта кривая окажется интегральной, то получим особую интегральную кривую. Возможно, что кривая $\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = 0$ имеет несколько ветвей, тогда для каждой ветви надо решить вопрос о том, будет ли эта ветвь особой кривой и будет ли она интегральной кривой.

Приближенный метод Эйлера интегрирования уравнения $y' = f(x, y)$



Класс дифференциальных уравнений, интегрирующихся точными методами, весьма узок, поэтому очень большое значение приобретают приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Однако, для того, чтобы применять тот или иной метод приближенного интегрирования дифференциального уравнения, надо прежде всего быть уверенным в существовании искомого решения, а также и в единственности решения, так как при отсутствии единственности остается неясным, какое именно решение требуется приближенно определить.

Метод Эйлера заключается в том, что искомая интегральная кривая дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y),$ проходящая через точку $(x_0, y_0),$ заменяется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек.

При применении этого метода для приближенного вычисления значения искомого решения $y(x)$ в точке $x = b,$ отрезок $x_0 \le x \le b$ (если

$b > x_0$) делится на n равных частей точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, где $x_n = b$. Длина каждой части $x_{i+1} - x_i = h$ называется шагом вычисления. Приближенные значения искомого решения в точках x_i обозначаем y_i.

Для вычисления y_1 заменяем на отрезке $x_0 \le x \le x_1$ искомую интегральную кривую отрезком ее касательной в точке (x_0, y_0). Следовательно, $y_1 = y_0 + hy_0'$, где $y_0' = f(x_0, y_0)$.

Аналогично вычисляем

$y_2 = y_1 + hy_1'$, где $y_1' = f(x_1, y_1)$,

$y_3 = y_2 + hy_2'$, где $y_2' = f(x_2, y_2)$,

....

$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}'$, где $y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1})$.

Если $b < x_0$, то схема вычислений остается прежней, но шаг h отрицателен.

Естественно, что при $h \to 0$ ломаные Эйлера приближаются к графику искомой интегральной кривой, и следовательно, с уменьшением шага h метод Эйлера дает все более и более точное значение искомого решения в точке b.

Лекция 6

Простейшие типы дифференциальных уравнений второго порядка

В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y').$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, в которых допускается понижение порядка уравнения.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

Общее решение такого уравнения находится с помощью двукратного интегрирования по следующей схеме

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{dy'}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dx} = f(x), \qquad dy' = f(x)dx,$$

$$y' = \int f(x)dx + C_1, \qquad y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

Пример. $y'' = \sin x$

$$y' = -\cos x + C_1, \qquad y = -\sin x + C_1x + C_2.$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y')$

Сделаем подстановку $y' = p.$ Будем считать, что вместо функции y вводится новая функция $p = p(x).$ Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \qquad \frac{dp}{dx} = f(p), \qquad \frac{dp}{f(p)} = dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем p как функцию от x и произвольной постоянной C_1

$$p = p(x, C_1).$$

Подставляя это значение в соотношение $y' = p,$ получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции y от x

$$\frac{dy}{dx} = p(x, C_1).$$

Интегрируя это уравнение, получим общее решение исходного уравнения $y = \int p(x, C_1)dx + C_2.$

Пример. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{y'}$

$$y' = p, \quad p = p(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = \sqrt{p},$$

$$\frac{dp}{\sqrt{p}} = dx, \quad 2\sqrt{p} = x + C_1, \quad p = \frac{1}{4}(x + C_1)^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(x + C_1)^2, \quad y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2.$$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)$

Сделаем снова подстановку $y' = p.$ Но теперь мы будем считать p функцией от y, $p = p(y).$ Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p, \quad p\frac{dp}{dy} = f(y).$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем p как функцию от y и произвольной постоянной C_1 $p = p(y, C_1).$ Подставляя это значение в соотношение $y' = p,$ получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции y от x

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Интегрируя это уравнение, получим общий интеграл исходного уравнения

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Пример. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

Полагая $y' = p,$ $y'' = p\dfrac{dp}{dy,}$ получим уравнение с разделяющимися переменными $p\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{p^2}{y},$ общее решение которого $p = C_1 y$ или

$\frac{dy}{dx} = C_1 y.$ Снова разделяя переменные и интегрируя, получим
$\ln|y| = C_1 x + \ln C_2$ или $y = C_2 e^{C_1 x}.$

4. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y')$

Делаем подстановку как во втором случае $y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx}$.

Получаем уравнение первого порядка $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$ относительно неизвестной функции p от x. Проинтегрировав это уравнение, находим его общее решение $p = F(x, C_1),$ а затем из соотношения $\frac{dy}{dx} = F(x, C_1)$ получаем общий интеграл исходного уравнения $y = \int F(x, C_1)dx + C_2.$

Пример. $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{y'}{e^x + 1}$

$$y' = p, \quad p = p(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{p}{e^x + 1},$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{e^x + 1}, \quad \ln|p| = -\int \frac{dx}{e^x + 1} = \ln\left|1 + e^{-x}\right| + \ln C_1,$$

$$p = C_1\left(1 + e^{-x}\right), \quad \frac{dy}{dx} = C_1\left(1 + e^{-x}\right), \quad y = C_1\left(x - e^{-x}\right) + C_2.$$

5. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y, y')$

Делаем подстановку как в третьем случае $y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$

Получаем уравнение первого порядка $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$ относительно неизвестной функции p от y. Проинтегрировав это уравнение, находим его общее решение $p = F(y, C_1),$ а затем из соотношения

$\frac{dy}{dx}=F(y,C_1)$ получаем общий интеграл исходного уравнения $F_1(x,y,C_1,C_2)=0.$

Пример. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$$y'=p,\quad y''=p\frac{dp}{dy},\quad p\frac{dp}{dy}=\frac{p^2}{y},$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y}\\ p=0\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}p=C_1y\\ p=0\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}\frac{dy}{dx}=C_1y\\ \frac{dy}{dx}=0\end{array}\right.,$$

$$\left[\begin{array}{l}\ln y=C_1x+\ln C_2\\ y=C_1\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}y=C_2e^{C_1x}\\ y=C_1\end{array}\right..$$

Лекция 7

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка называется линейным, если оно первой степени относительно неизвестной функции y и ее производных y' и y'', т.е. имеет вид

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x), \tag{1}$$

где $a_1,a_2,f(x)$ - заданные непрерывные функции от x или постоянные. Функция $f(x)$ называется правой частью уравнения.

Если $f(x)\neq 0,$ то уравнение называется линейным неоднородным или уравнением с правой частью. Если же $f(x)=0,$ то уравнение имеет вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{2}$$

и называется линейным однородным или уравнением без правой части (левая часть этого уравнения является однородной функцией первого измерения относительно y, y', y'').

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (общая теория)

Теорема 1. Если y_1 и y_2 - два частных решения уравнения (2), то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 - решения уравнения, то

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0. \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (2) сумму $y_1 + y_2$ и принимая во внимание тождества (3), будем иметь

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0,$$

т.е. $y_1 + y_2$ есть решение уравнения.

Теорема 2. Если y_1 есть решение уравнения (2) и C - постоянная, то Cy_1 есть также решение уравнения (2).

Доказательство. Подставляя в уравнение (2) выражение Cy_1, получим

$$(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = 0;$$

тем самым теорема доказана.

Определения. Два решения уравнения (2) y_1 и y_2 называются линейно независимыми на отрезке $[a,b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т.е. если $\frac{y_1}{y_2} \neq const.$

Два решения y_1 и y_2 называются линейно зависимыми на отрезке $[a,b]$, если существует такое постоянное число λ, что $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ при $a \le x \le b.$ В этом случае $y_1 = \lambda y_2.$

Если y_1 и y_2 есть функции от x, то определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

называется определителем Вронского, или вронскианом данных функций.

Теорема 3. Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.

Доказательство. Так как $y_2 = \lambda y_1$, то $y_2' = \lambda y_1'$ и

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 4. Если определитель Вронского $W(y_1, y_2)$, составленный для решений y_1 и y_2 линейного однородного уравнения (2), не равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$ на отрезке $[a,b]$, где коэффициенты уравнения непрерывны, то он не обращается в нуль ни при каком значении x на этом отрезке.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 - два решения уравнения (2), то

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \quad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Умножая члены первого равенства на y_1, члены второго равенства на y_2 и вычитая из первых вторые, получим

$$\left(y_1 y_2'' - y_1'' y_2\right) + a_1\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right) = 0. \tag{4}$$

Разность, стоящая во второй скобке, есть определитель Вронского $W(y_1, y_2)$, а именно, $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Разность, стоящая в первой скобке, есть производная от определителя Вронского

$$W_x'(y_1, y_2) = \left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Следовательно, равенство (4) принимает вид

$$W' + a_1 W = 0. \tag{5}$$

Найдем решение последнего уравнения, удовлетворяющее начальному условию $W\big|_{x=x_0} = W_0$. Разделяя переменные в уравнении (5), получаем $\frac{dW}{W} = -a_1 dx.$ Интегрируя, находим

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C,$$

откуда

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \tag{6}$$

Формула (6) называется формулой Лиувилля.

Определим C так, чтобы удовлетворялось начальное условие. Подставляя $x = x_0$ в левую и правую части равенства (6), получаем $W_0 = C.$

Следовательно, решение, удовлетворяющее начальным условиям, примет вид

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \tag{7}$$

По условию $W_0 \neq 0$. Но тогда из равенства (7) следует, что $W \neq 0$ ни при каком значении x, потому что показательная функция не обращается в нуль ни при каком конечном значении аргумента. Теорема доказана.

Замечание. Если определитель Вронского равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$, то он равен также нулю при любом значении x из рассматриваемого отрезка. Это непосредственно следует из формулы (6): если $W = 0$ при $x = x_0$, то

$$W\Big|_{x=x_0} = C = 0;$$

следовательно, $W = 0$ каково бы ни было значение верхнего предела x в формуле (6).

Теорема 5. Если решения y_1 и y_2 уравнения (2) линейно независимы на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского W, составленный для этих решений, не обращается в нуль ни в одной точке указанного отрезка.

Доказательство. Допустим, что $W(y_1, y_2) = 0$ в некоторой точке отрезка $[a,b]$. Тогда по теореме 4 определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ будет равен нулю во всех точках отрезка $[a,b]$; $W = 0$ или $y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$

Допустим, что $y_1 \neq 0$ на отрезке $[a,b]$. Тогда на основании последнего равенство можно написать $\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0$ или $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0.$ Отсюда следует

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = const,$$

т.е. решения y_1 и y_2 линейно зависимы.

Но это противоречит предположению о линейной независимости решений y_1 и y_2. Таким образом, мы доказали, что определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной из точек отрезка $[a,b]$.

Теорема 6. Если y_1 и y_2 - два линейно независимых решения уравнения (2), то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{8}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, есть его общее решение.

Доказательство. Из теорем 1 и 2 следует, что функция $C_1 y_1 + C_2 y_2$ есть решение уравнения (2) при любых значениях C_1 и C_2.

Докажем теперь, что каковы бы ни были начальные условия $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, можно так подобрать значения произвольных постоянных C_1 и C_2, чтобы соответствующее частное решение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ удовлетворяло заданным начальным условиям.

Подставляя начальные условия в равенство (8), будем иметь

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = y_0', \end{cases} \tag{9}$$

где обозначено

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2\big|_{x=x_0} = y_{20}, \quad y_1'\big|_{x=x_0} = y_{10}', \quad y_2'\big|_{x=x_0} = y_{20}'.$$

Из системы (9) можно определить C_1 и C_2, так как определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = y_{10} y_{20}' - y_{10}' y_{20}$$

есть определитель Вронского при $x = x_0$ и, следовательно, не равен 0 (в силу линейной независимости решений y_1 и y_2). Частное решение, которое получится из семейства (8) при найденных значениях C_1 и C_2, удовлетворяет заданным начальным условиям. Таким образом, теорема доказана.

Лекция 8

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Имеем линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

где p и q - постоянные действительные числа. Чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно, как было доказано выше, найти два линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{kx}, \quad \text{где} \quad k = const, \tag{2}$$

тогда

$$y' = ke^{kx}, \qquad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставляя полученные выражения производных в уравнение (1), находим

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0,$ то, значит,

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (3), то e^{kx} будет решением уравнения (1). Уравнение (3) называется характеристическим уравнением по отношению к уравнению (1).

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Возможны следующие случаи:

I. k_1 и k_2 - действительные и притом не равные между собой числа $(k_1 \neq k_2)$;

II. k_1 и k_2 - действительные равные числа $(k_1 = k_2)$;

III. k_1 и k_2 - комплексные числа.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1 \neq k_2$. В этом случае частными решениями будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const.$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} C_2 e^{k_2 x}.$$

Пример. Дано уравнение

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$

Общий интеграл есть

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

II. Корни характеристического уравнения действительные и равные. В этом случае $k_1 = k_2$.

Одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$ получается на основании предыдущих рассуждений. Нужно найти второе частное решение, линейно независимое с первым (функция $e^{k_2 x}$ тождественно равна $e^{k_1 x}$ и поэтому не может рассматриваться в качестве второго частного решения).

Будем искать второе частное решение в виде

$$y_2 = u(x)e^{k_1 x},$$

где $u(x)$ - неизвестная функция, подлежащая определению.

Дифференцируя, находим

$$y_2' = u'e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u''e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}\left(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u\right).$$

Подставляя выражения производных в уравнение (1), получаем

$$e^{k_1 x}\left[u'' + (2k_1 + p)u' + \left(k_1^2 + pk_1 + q\right)u\right] = 0.$$

Так как k_1 - кратный корень характеристического уравнения, то

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0.$$

Кроме того, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ или $2k_1 = -p, \quad 2k_1 + p = 0.$

Следовательно, для того, чтобы найти $u(x)$, надо решить уравнение $e^{k_1 x}u'' = 0,$ или $u'' = 0.$ Интегрируя, получаем $u = Ax + B.$ В частности, можно положить $A = 1, B = 0;$ тогда $u = x.$ Таким образом, в качестве второго частного решения можно взять $y_2 = xe^{k_1 x}$.

Это решение линейно независимо с первым, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \neq const.$

Поэтому общим интегралом будет функция

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример. Дано уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0.$ Находим его корни: $k_1 = k_2 = 2.$ Общим интегралом будет

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

III. Корни характеристического уравнения комплексные.

Так как комплексные корни входят попарно сопряженными, то обозначим

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

где

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Частные решения можно записать в форме

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{4}$$

Это - комплексные функции действительного аргумента, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (1).

Очевидно, что если какая-либо комплексная функция действительного аргумента

$$y = u(x) + iv(x) \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению (1), то этому уравнению удовлетворяют функции $u(x)$ и $v(x)$.

Действительно, подставляя выражение (5) в уравнение (1), будем иметь

$$[u(x)+iv(x)]'' + p[u(x)+iv(x)]' + q[u(x)+iv(x)] = 0,$$

или

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Но комплексная функция равняется нулю тогда и только тогда, когда равны нулю действительная часть и мнимая часть, т.е.

$$u'' + pu' + qu = 0, \quad v'' + pv' + qv = 0.$$

Мы и доказали, что $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями уравнения.

Перепишем комплексные решения (4) в виде суммы действительной и мнимой части:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

По доказанному частными решениями уравнения (1) будут действительные функции

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Функции $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ линейно независимы, так как

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = ctg\beta x \neq const.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

или

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Пример. Дано уравнение

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i.$$

Следовательно, общий интеграл есть

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Лекция 9

Неоднородные линейные уравнения второго порядка

Пусть имеем неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{1}$$

Структура общего решения такого уравнения определяется следующей теоремой:

Теорема 1. Общее решение неоднородного уравнения (1) представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения $\tilde{y}$ и общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Нужно доказать, что сумма

$$y = \bar{y} + \tilde{y} \tag{3}$$

есть общее решение уравнения (1). Докажем сначала, что функция (3) есть решение уравнения (1).

Подставляя сумму $\bar{y}+\tilde{y}$ в уравнение (1) вместо y, будем иметь

$$(\bar{y}+\tilde{y})''+a_1(\bar{y}+\tilde{y})'+a_2(\bar{y}+\tilde{y})=f(x), \quad \text{или}$$

$$(\bar{y}''+a_1\bar{y}'+a_2\bar{y})+(\tilde{y}''+a_1\tilde{y}'+a_2\tilde{y})=f(x). \tag{4}$$

Так как $\bar{y}$ есть решение уравнения (2), то выражение, стоящее в первых скобках, тождественно равно нулю. Так как $\tilde{y}$ есть решение уравнения (1), то выражение, стоящее во вторых скобках, равно $f(x)$. Следовательно, равенство (4) является тождеством. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь, что выражение (3) есть общее решение уравнения (1), т.е. докажем, что входящие в него произвольные постоянные можно подобрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\big|_{x=x_0}=y_0', \tag{5}$$

каковы бы ни были числа x_0, y_0, y_0' (лишь бы x_0 было взято из той области, где функции a_1, a_2 и $f(x)$ непрерывны).

Заметив, что $\bar{y}$ можно представить в форме $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$, где y_1 и y_2 - линейно независимые решения уравнения (2), а C_1 и C_2 - произвольные постоянные, можем переписать равенство (3) в виде

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\tilde{y}. \tag{3'}$$

Тогда на основании условий (5) будем иметь

$$C_1y_{10}+C_2y_{20}+\tilde{y}_0=y_0, \quad C_1y_{10}'+C_2y_{20}'+\tilde{y}_0'=y_0'.$$

Из этой системы уравнений нужно определить C_1 и C_2. Переписав систему в виде

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 - \tilde{y}_0, \quad C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0 - \tilde{y}'_0, \tag{6}$$

замечаем, что определитель этой системы есть определитель Вронского для функций y_1 и y_2 в точке $x = x_0$. Так как эти функции по условию линейно независимы, то определитель Вронского не равен нулю; следовательно, система (6) имеет определенное решение C_1 и C_2, т.е. существуют такие значения C_1 и C_2, при которых формула (3) определяет решение уравнения (1), удовлетворяющее данным начальным условиям. Теорема полностью доказана.

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения можно применять следующий метод.

Метод вариации произвольных постоянных

Напишем общее решение однородного уравнения (2)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{7}$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения (1) в форме (7), рассматривая C_1 и C_2 как некоторые пока неизвестные функции от x.

Продифференцируем равенство (7):

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2.$$

Подберем искомые функции C_1 и C_2 так, чтобы выполнялось равенство

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0. \tag{8}$$

Если учесть это дополнительное условие, то первая производная y' примет вид

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2.$$

Дифференцируя теперь это выражение, найдем y'':

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'.$$

Подставляя y, y' и y'' в уравнение (1), получим

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + a_1\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + a_2\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = f(x),$$

или

$$C_1\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Выражения, стоящие в первых двух скобках, обращаются в нуль, так как y_1 и y_2 - решения однородного уравнения. Следовательно, последнее равенство принимает вид

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \qquad (9)$$

Таким образом, функция (7) будет решением неоднородного уравнения (1) в том случае, если функции C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений (8) и (9), т.е. если

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Так как определителем этой системы является определитель Вронского для линейно независимых решений y_1 и y_2 уравнения (2), то он не равен нулю; следовательно, решая систему, мы найдем C_1' и C_2' как определенные функции от x

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

Интегрируя, получим

$$C_1 = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C}_1, \quad C_2 = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C}_2,$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ - постоянные интегрирования.

Подставляя полученные выражения C_1 и C_2 в равенство (7), найдем интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$, т.е. общее решение неоднородного уравнения.

При решении неоднородных уравнений, у которых правая часть есть сумма нескольких функций, можно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 2. Решение $\tilde{y}$ уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x), \tag{10}$$

можно представить в виде суммы $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, где $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ - соответственно решения уравнений

$$\tilde{y}_1'' + a_1 \tilde{y}_1' + a_2 \tilde{y}_1 = f_1(x), \tag{11}$$

$$\tilde{y}_2'' + a_1 \tilde{y}_2' + a_2 \tilde{y}_2 = f_2(x). \tag{12}$$

Доказательство. Складывая правые и левые части равенств (11) и (12), получим

$$(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)'' + a_1(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)' + a_2(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

Из последнего равенства и следует, что сумма $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \tilde{y}$

есть решение уравнения (10).

Лекция 10

Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть имеем уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

где p и q - действительные числа.

В предыдущей лекции был дан общий метод нахождения решения неоднородного уравнения. В случае уравнения с постоянными коэффициентами легко находится общее решение соответствующего однородного уравнения и к нему добавляется частное решение неоднородного уравнения, которое довольно просто определяется при некоторых видах правой части. Рассмотрим несколько таких возможностей для уравнения (1).

I. Пусть правая часть уравнения (1) представляет собой произведение показательной функции на многочлен, т.е. имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}, \tag{2}$$

где $P_n(x)$ - многочлен $n-ой$ степени. Тогда возможны следующие частные случаи:

а) Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$\tilde{y} = \left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n\right)e^{\alpha x} = Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

б) Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения.

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$\tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

в) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения.

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$\tilde{y} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = x$$

Решение. Записываем характеристическое уравнение $k^2+4k+3=0$ и находим его корни: $k_1=-1$, $k_2=-3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}.$$

Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид xe^{0x} (т.е. вид $P_1(x)e^{0x}$) причем 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме $\tilde{y}=Q_1(x)e^{0x}$, т.е. положим

$$\tilde{y}=A_0x+A_1.$$

Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$4A_0+3(A_0x+A_1)=x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$3A_0=1,\quad 4A_0+3A_1=0,$$

откуда

$$A_0=\frac{1}{3},\quad A_1=-\frac{4}{9}.$$

Следовательно,

$$\tilde{y}=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}.$$

Общее решение будет

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''+9y=(x^2+1)e^{3x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+9=0,$ его корни $k_1=-3i,\quad k_2=3i.$ Общее решение однородного уравнения

$$\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Правая часть заданного уравнения $(x^2+1)e^{3x}$ имеет вид $P_2(x)e^{3x}$. Так как коэффициент 3 в показателе степени не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $\tilde{y}=Q_2(x)e^{3x},$ или $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}.$ Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, будем иметь

$$\left[9(Ax^2+Bx+C)+6(2Ax+B)+2A+9(Ax^2+Bx+C)\right]e^{3x}=(x^2+1)e^{3x}.$$

Сокращая на e^{3x} и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$18A=1,\quad 12A+18B=0,\quad 2A+6B+18C=1,$$

откуда $A=\frac{1}{18},\quad B=-\frac{1}{27},\quad C=\frac{5}{81}.$ Следовательно, частное решение будет

$$\tilde{y}=\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

и общее решение

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81}\right)e^{3x}.$$

II. Пусть правая часть имеет вид

$$f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{3}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Тогда возможны следующие частные случаи:

а) Если число $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (1) следует искать в виде

$$\tilde{y}=U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $U(x)$ и $V(x)$ - многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$;

б) Если число $\alpha + i\beta$ есть корень характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = x\left[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

При этом во избежание возможных ошибок надо отметить, что указанные две последние формы частных решений, очевидно, сохраняются и в том случае, когда в правой части (3) один из многочленов равен нулю, т.е. когда правая часть имеет вид $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ или $Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = -1 + 2i,$ $k_2 = -1 - 2i.$ Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$$\bar{y} = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x,$$

где A и B - постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя $\tilde{y}$ в заданное уравнение, будем иметь

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x,$ получим два уравнения для определения A и B:

$$-A + 2B + 5A = 2, \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

откуда $A=\frac{2}{5}$, $B=\frac{1}{5}$. Общее решение данного уравнения

$$y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

Пример 4. Решить уравнение $y''+4y=\cos 2x.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_1=2i,$ $k_2=-2i;$ поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$\tilde{y}=x(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Тогда

$$\tilde{y}'=2x(-A\sin 2x+B\cos 2x)+(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

$$\tilde{y}''=4x(-A\cos 2x-B\sin 2x)+4(-A\sin 2x+B\cos 2x).$$

Подставляя эти выражения производных в данное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x,$ получаем систему уравнений для определения A и B: $4B=1,$ $-4A=0,$ откуда $A=0,$ $B=\frac{1}{4}.$ Таким образом, общее решение данного уравнения $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x.$

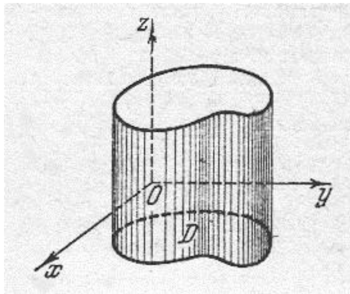
II. Кратные интегралы

Лекция 11

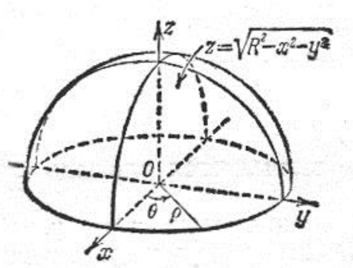
Двойной интеграл

Задача об определении объема цилиндроида

Цилиндроидом называется тело, ограниченное плоскостью *Oxy*, поверхностью, с которой любая прямая, параллельная оси *Oz*, пересекается не более, чем в одной точке, и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси *Oz*.

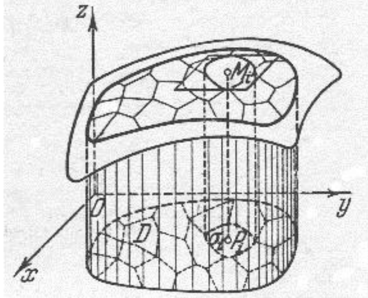


Область *D*, высекаемая в плоскости *Oxy* цилиндроидом, называется основанием цилиндроида. В частных случаях боковая цилиндрическая поверхность может и отсутствовать; примером тому служит цилиндроид, ограниченный плоскостью *Oxy* и верхней полусферой $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.



Обычно тело можно составить из некоторого числа цилиндроидов и искомый объем определить как сумму объемов цилиндрических тел, составляющих его.

Пусть $z=f(x,y)$ есть уравнение поверхности, ограничивающей цилиндроид. Будем считать функцию $f(x,y)$ непрерывной в области D и сначала предположим, что поверхность целиком лежит над плоскостью *Oxy*, т.е. что $f(x,y)>0$ всюду в области D. Обозначим искомый объем цилиндроида через V. Разобьем основание цилиндроида - область D - на некоторое число n областей



произвольной формы; будем называть их частичными областями. Пронумеровав частичные области в каком-нибудь порядке, обозначим их через $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Чтобы не вводить новых символов, будем обозначать их площади также $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Через границу каждой частичной области проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. Эти цилиндрические поверхности разрежут поверхность на n кусков, соответствующих n частичным областям. Таким образом, цилиндроид окажется разбитым на n частичных цилиндроидов. Выберем в каждой частичной области ΔS_i произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и заменим соответствующий частичный цилиндроид прямым цилиндром (т.е. цилиндроидом, ограниченным плоскостью параллельной плоскости Oxy,) с тем же основанием и высотой, равной $z_i = f(x_i, y_i)$. В результате получим n - ступенчатое тело, объем которого равен

$$V_n = f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i y_i)\Delta S_i. \qquad (1)$$

Принимая объем V данного цилиндроида приближенно равным объему построенного n - ступенчатого тела, будем считать, что V_n тем точнее выражает V, чем больше n и чем меньше каждая из частичных областей. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы будем требовать, чтобы не только площадь каждой частичной области стремилась к нулю, но чтобы стремились к нулю все ее размеры. Если назвать диаметром области наибольшее расстояние между точками ее границы, то высказанное требование будет означать, что каждый из диаметров частичных областей должен стремиться к нулю; при этом сами области будут стягиваться в точку.

В соответствии со сказанным мы принимаем искомый объем V равным пределу, к которому стремится V_n при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей $\max diam \Delta S_i$ (при этом $n \to \infty$).

$$V = \lim_{\max diam \Delta S_i \to 0} V_n = \lim_{\max diam \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

К отысканию предела подобных сумм для функций двух переменных приводят самые разнообразные задачи, а не только задача об объеме.

Сумма (1) называется двумерной интегральной суммой для функции $f(x,y)$ в области D, соответствующей данному разбиению этой области на n частичных областей.

Определение. Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется предел, к которому стремится двумерная интегральная сумма (1) при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей, если этот предел существует.

Записывается это так:

$$\iint_D f(x,y)dS = \lim_{\max diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i .$$

$f(x,y)dS$ - подынтегральное выражение, $f(x,y)$ - подынтегральная функция (интегрируемая функция), dS - элемент площади, D - область интегрирования, x и y - переменные интегрирования.

Из рассмотренной выше задачи вытекает следующий геометрический смысл двойного интеграла. Двойной интеграл от функции $f(x,y)$, взятый по области D, численно равен объему цилиндроида, ограниченного плоскостью Oxy, поверхностью $z = f(x,y)$ $(f(x,y) > 0)$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz и направляющей - границей области D.

Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции двух переменных

Давая определение двойного интеграла, мы предполагаем, что функция $f(x,y)$ ограничена. Как и для функции одной переменной, это условие является необходимым условием интегрируемости. Однако, оно не является достаточным, т.е. существуют ограниченные, но не интегрируемые функции. Примером таких функций является функция, определенная на квадрате $\{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \textit{если } x \textit{ и } y - \textit{рациональные числа} \\ 0, \textit{если } x \textit{ или } y - \textit{иррациональное число.} \end{cases}$$

Доказательство не интегрируемости такой функции следует непосредственно из определения двойного интеграла.

Достаточные условия интегрируемости даются теоремами для определенного интеграла.

Теорема 1. Функция $f(x,y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D, интегрируема в этой области.

Однако, не следует считать, что двойной интеграл существует только для непрерывных функций. Имеет место более общая теорема.

Теорема 2. Функция $f(x,y)$, ограниченная в замкнутой ограниченной области D и непрерывная на ней всюду, кроме точек, лежащих на конечном числе кривых, являющихся графиками непрерывных функций вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, интегрируема в этой области.

Свойства двойного интеграла

Конструкции определенного интеграла для функций одной переменной и двойного интеграла совершенно аналогичны. Вследствие этого свойства двойного интеграла, а также доказательства этих свойств, почти повторяют соответствующие свойства определенного интеграла. Поэтому рассмотрим свойства двойных интегралов без доказательств (повторить свойства определенного интеграла и их доказательства и доказать аналогично самим свойства двойного интеграла !).

1) $\iint\limits_D [f(x,y) + \varphi(x,y)]dS = \iint\limits_D f(x,y)dS + \iint\limits_D \varphi(x,y)dS.$

2) $\iint\limits_D af(x,y)dS = a\iint\limits_D f(x,y)dS,$ где $a = const.$

3) $\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS,$ где $D = D_1 \cup D_2,$ причем D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек.

4) $\iint\limits_D hdS = hS,$ где $h = const.$

5) Если $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$ во всех точках области D, то

$\iint\limits_D f(x,y)dS \geq \iint\limits_D \varphi(x,y)dS$ (знак = только в том случае, когда $f(x,y) \equiv \varphi(x,y)$).

6) Оценка двойного интеграла:

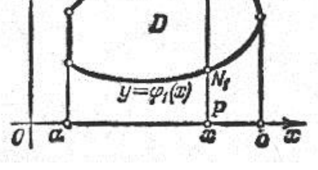
$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dS \leq MS,$ где m и M - наименьшее и наибольшее значения $f(x,y)$ в $D,$ S - площадь области D (знаки = только в том случае, когда $f(x,y) = const$ в D).

7) Теорема о среднем:

$\iint\limits_D f(x,y)dS = f(\xi,\eta)S,$ где (ξ,η) - координаты некоторой точки, лежащей в области $D,$ $f(\xi,\eta)$ - среднее значение функции $f(x,y)$ в области $D.$

Лекция 12

Вычисление двойных интегралов



Пусть область $D,$ лежащая в плоскости Oxy, такова, что всякая прямая, параллельная одной из координатных осей, например, оси Oy, и проходящая через внутреннюю (не лежащую на границе области) точку области, пересекает границу области в двух точках N_1 и N_2.

Мы предположим, что в рассматриваемом случае область D ограничена линиями: $y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x),\ x=a,\ x=b,$ причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x),\ a<b,$ а функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Такую область мы будем называть правильной в направлении оси *Oy*. Аналогично определяется область правильная в направлении оси *Ox*. Область, правильную как в направлении оси *Ox*, так и в направлении оси *Oy*, мы будем называть просто правильной областью.

При вычислении двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dS$ элемент площади dS нам удобно представить в ином виде. Будем разбивать область интегрирования D в плоскости *Oxy* на частичные области посредством двух систем координатных линий: $x=const$ и $y=const.$ Ясно, что $\Delta S_i=\Delta x_i\Delta y_i.$ Поэтому $dS=dxdy.$ Мы имеем:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (*)$$

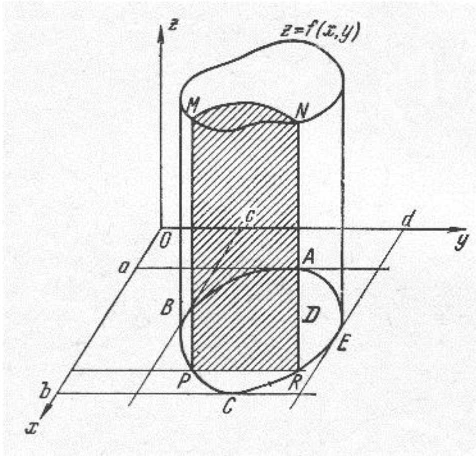
При вычислении двойного интеграла (*) мы будем опираться на тот факт, что он выражает объем V цилиндроида с основанием D, ограниченного поверхностью $z=f(x,y)$.

Напомним, что мы уже занимались задачей об объеме тела, когда рассматривали применение определенного интеграла для вычисления объема тела. Была получена формула

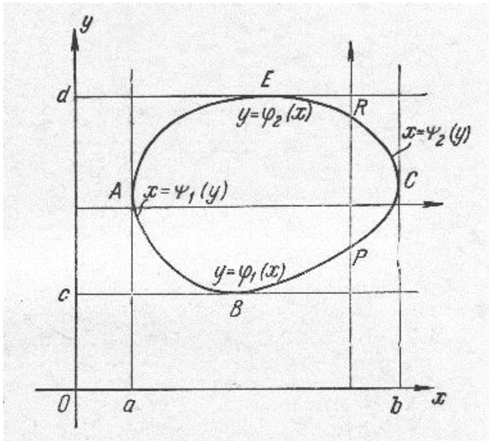
$$V=\int_a^b Q(x)dx, \qquad (**)$$

где $Q(x)$ - площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, а $x=a$ и $x=b$ - уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело. Применим теперь эту формулу к вычислению двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

Рассечем рассматриваемый цилиндроид произвольной плоскостью, параллельной плоскости *Oyz*, т.е. $x = const, \quad a \le x \le b.$ В сечении мы получим криволинейную трапецию *PMNR*, площадь которой выражается интегралом от функции $f(x, y)$, рассматриваемой как функция одной переменной y, причем y изменяется от ординаты точки P до ординаты точки R. Точка P есть точка входа прямой $x = const$ (в плоскости *Oxy*) в область D, а R - точка ее выхода из этой области.



Пусть область D - правильная. Из уравнений линий *ABC* и *AEC* следует, что ординаты этих точек при взятом x соответственно равны $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Следовательно, интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ дает выражение для площади плоского сечения *PMNR*. Ясно, что величина этого интеграла зависит от выбранного значения x:



$$Q(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (***)$$

Подставляя (***) в (**), получим

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

или в более удобной форме

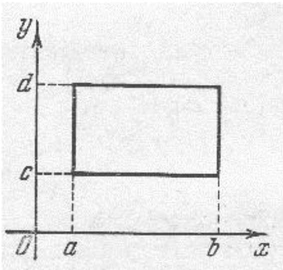
$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (1)$$

Меняя роли x и y, не трудно получить второе выражение для двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) показывают, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух обыкновенных определенных интегралов; нужно только помнить, что во внутреннем интеграле одна из переменных принимается при интегрировании за постоянную. Для краткости правые части формул (1) и (2) называют повторными (или двукратными) интегралами.

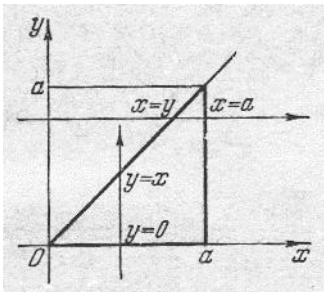
Формулы приведения двойного интеграла к повторному приобретают особенно простой вид, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат. В этом случае становятся постоянными пределы не только внешнего, но и внутреннего интегралов.



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Примеры. 1) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ привести к повторному, если D - треугольник, ограниченный прямыми $y=0, \quad y=x, \quad x=a.$

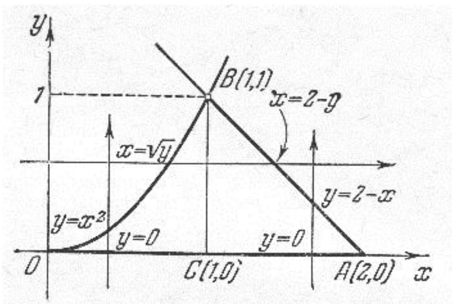
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy$$



или

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx.$$

2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ привести к повторному, если D - фигура, ограниченная линиями $y=0,\ y=x^2,\ x+y=2.$



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

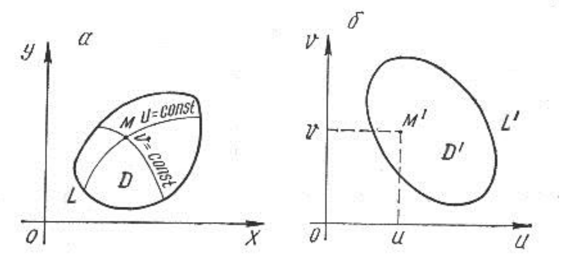
или

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

Лекция 13

Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в плоскости Oxy дана область D, ограниченная линией L. Пусть



$$u = \varphi_1(x,y),\ v = \psi_1(x,y) \quad (1)$$

- однозначные функции переменных x и y, непрерывные в области D и имеющие в ней непрерывные частные производные.

Предположим, что уравнения (1) однозначно разрешимы относительно x и y, т.е.

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v), \quad (2)$$

где $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ - непрерывные функции в некоторой области D' плоскости Ouv и имеющие в ней непрерывные частные производные.

Каждой точке $M(x,y)$ области D формулы (1) ставят в соответствие единственную точку $M'(u,v)$ области D'. Обратно, каждой точке $M'(u,v) \in D'$ формулы (2) ставят в соответствие единственную точку $M(x,y)$. Числа (u,v) называют при этом криволинейными координатами точки M. Следовательно, формулы (1) устанавливают взаимно - однозначное соответствие между точками областей D и D', или отображают область D на область D'. Область D' ограничена линией L', в которую при этом преобразуется линия L.

Фиксируем значение $u = u_0$, тогда прямой $u = u_0$ в плоскости Ouv будет соответствовать в плоскости Oxy некоторая линия, параметрические уравнения которой $x = \varphi(u_0, v)$, $y = \psi(u_0, v)$ (получены из уравнений (2), роль параметра играет v).

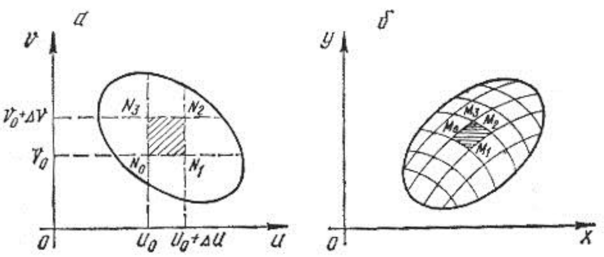
Прямоугольнику $N_0N_1N_2N_3$ в плоскости Ouv, ограниченному прямыми

$$u = u_0,\; u = u_0 + \Delta u,\; v = v_0,\; v = v_0 + \Delta v$$

в плоскости Oxy соответствует криволинейный четырехугольник $M_0M_1M_2M_3$, причем $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$,

где

$x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, $x_1 = \varphi(u_0 + \Delta u, v_0)$,



$x_2 = \varphi(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$, $y_2 = \psi(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v$

$x_3 = \varphi(u_0, v_0 + \Delta v)$, $y_3 = \psi(u_0, v_0 + \Delta v)$.

С точностью до бесконечно малых высшего порядка площадь четырехугольника $M_0M_1M_2M_3$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{M_0M_3}$. Площадь этого параллелограмма выражается формулой $\Delta S = \left|\left[\overline{M_0M_1}, \overline{M_0M_3}\right]\right|$.

Векторы $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{M_0M_3}$ в координатной форме записываются так:

$$\overline{M_0M_1} = [\varphi(u_0 + \Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)]\,\bar{i} + [\psi(u_0 + \Delta u, v_0) - \psi(u_0, v_0)]\,\bar{j},$$

$$\overline{M_0M_3} = [\varphi(u_0, v_0 + \Delta v) - \varphi(u_0, v_0)]\,\bar{i} + [\psi(u_0, v_0 + \Delta v) - \psi(u_0, v_0)]\,\bar{j}.$$

Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, получаем

$$\overline{M_0M_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u\ \bar{i} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\ \bar{j}, \quad \overline{M_0M_3} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\ \bar{i} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\ \bar{j}.$$

Следовательно, $\left[\overline{M_0M_1}, \overline{M_0M_3}\right] = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u\ \bar{i} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\ \bar{j}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\ \bar{i} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\ \bar{j}\right] =$

$$= \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right]\bar{k} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\Delta u\Delta v\ \bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}\Delta u\Delta v\ \bar{k} = I\cdot\Delta u\Delta v\ \bar{k}, \quad \text{где} \quad I = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \ - \qquad (3)$$

якобиан преобразования (2).

$$\Delta S = \left|\left[\overline{M_0M_1}, \overline{M_0M_3}\right]\right| = |\,I\,|\Delta u\Delta v$$

$$\text{или} \quad \Delta S = |\,I\,|\Delta S', \quad \text{где} \quad \Delta S' = \Delta u\Delta v. \qquad (4)$$

Рассмотрим вопрос о замене переменных в двойном интеграле

$$\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Предположим, что функция $z = f(x,y)$ непрерывна в области D. Пусть в этой области заданы функции (2), удовлетворяющие указанным выше условиям, тогда

$$f(x,y) = f[\varphi(u,v), \psi(u,v)] = F(u,v). \qquad (5)$$

Составим интегральную сумму для этой функции

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i. \qquad (6)$$

Принимая во внимание равенства (4) и (5), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)|\,I\,|\Delta S_i'.$$

Переходя в обеих частях к пределу при условии $\max diam\Delta S_i \to 0,$ получаем искомую формулу:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\, I\, |dudv, \tag{7}$$

по которой осуществляется замена переменных в двойном интеграле.

Она дает возможность свести вычисление двойного интеграла по области D к вычислению двойного интеграла по области $D',$ что может упростить задачу.

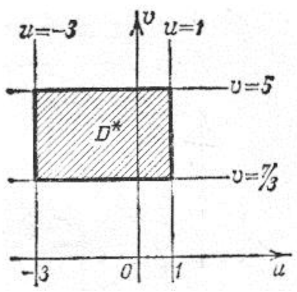
Впервые строгое доказательство этой формулы было дано выдающимся русским математиком М.В.Остроградским.

Пример. Вычислить $\iint\limits_{D}(y-x)dxdy,$ где область D ограничена прямыми:

$$y = x+1, \quad y = x-3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}x + 5.$$

Непосредственно вычислять этот интеграл затруднительно, однако, простая замена переменных позволяет свести его к интегралу по прямоугольнику, стороны которого параллельны осям координат.

Положим $u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x.$ Тогда прямые $y = x+1, \quad y = x-3$ перейдут соответственно в прямые $u = 1, \quad u = -3$ на плоскости $Ouv;$ прямые же $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}x + 5$ перейдут в прямые $v = \frac{7}{3}, \quad v = 5.$



Следовательно, заданная область D (параллелограмм) преобразуется в прямоугольник $D',$ который является более простой областью интегрирования.

Вычислим якобиан. Для этого выразим x и y через u и v :

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v.$$

Следовательно, $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4}, \quad |I| = \frac{3}{4}.$

$$\iint\limits_D (y-x)dxdy = \iint\limits_{D'} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \right) \right] \frac{3}{4} dudv = \iint\limits_{D'} \frac{3}{4} ududv =$$

$$= \int\limits_{\frac{7}{3}}^{5} dv \int\limits_{-3}^{1} \frac{3}{4} udu = \frac{3}{4} \int\limits_{\frac{7}{3}}^{5} dv \frac{u^2}{2} \Bigg|_{-3}^{1} = \frac{3}{8} \int\limits_{\frac{7}{3}}^{5} (1-9)dv = -3\left(5 - \frac{7}{3}\right) = -8.$$

Переход от прямоугольных координат к полярным

Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержат сумму $x^2 + y^2$, то во многих случаях упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам, так как данная сумма в полярных координатах $(x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi)$ принимает достаточно простой вид: $x^2 + y^2 = r^2$.

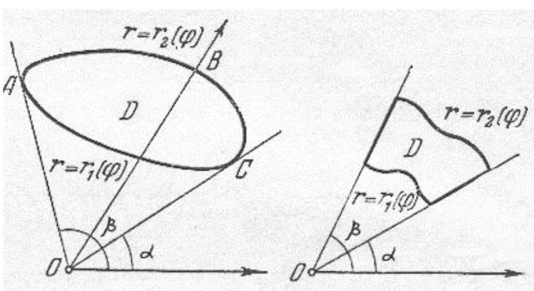
Переход от прямоугольных координат к полярным является частным случаем замены переменных в двойном интеграле. В этом случае $u = \varphi, \quad v = r.$

$$I = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -r, \quad |I| = r.$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi dr.$$

Правила расстановки пределов в повторном интеграле при вычислении двойного интеграла в полярной системе координат

1. Полюс не содержится внутри области интегрирования D, заключенной между лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, и координатные линии



$\varphi = const$ встречают ее границу не более, чем в двух точках (рис. *а*). Область может также иметь вид, изображенный на рис. *б*.

Полярные уравнения линий ADC и ABC пусть будут $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$.

Интегрируя сначала по r в пределах его изменения при постоянном φ, т.е. от $r_1(\varphi)$ до $r_2(\varphi)$, а затем по φ от φ_1 до φ_2, получим

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

Замечание. Если полюс лежит на границе области интегрирования, то $r_1(\varphi) = 0$.

Интегрирование в обратном порядке обычно не встречается.

В частном случае, когда областью интегрирования служит часть кругового кольца $r_1 \le r \le r_2$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, пределы интегрирования постоянны по обеим переменным:

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

2. Полюс содержится внутри области интегрирования и любой полярный радиус пересекает границу в одной точке (так, называемая звездная относительно полюса область). Интегрируя сначала по r, а затем по φ, получим

$$I = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr,$$

где $r = r(\varphi)$ есть полярное уравнение границы области.

В частности, при $r = r(\varphi) = R = const,$ т.е. когда область интегрирования есть круг с центром в полюсе, будем иметь

$$I = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{R} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

Переход от прямоугольных координат

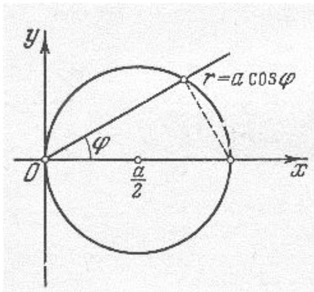
к обобщенным полярным координатам

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$$

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -ar\sin\varphi & a\cos\varphi \\ br\cos\varphi & b\sin\varphi \end{vmatrix} = -abr, \quad |I| = abr.$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{D'} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)rd\varphi dr.$$

Пример. Расставим пределы интегрирования в полярных координатах, если область D - круг $x^2 + y^2 \le ax.$ Переходя к полярным координатам, получим уравнение окружности в виде $r = a\cos\varphi$ (из чертежа или $x^2 + y^2 = ax \;\; \Rightarrow \;\; r^2 = ar\cos\varphi \;\; \Rightarrow \;\; r = a\cos\varphi$).



Здесь $r_1(\varphi) = 0, \quad r_2(\varphi) = a\cos\varphi, \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$ Поэтому

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

Лекция 14

Приложения двойных интегралов

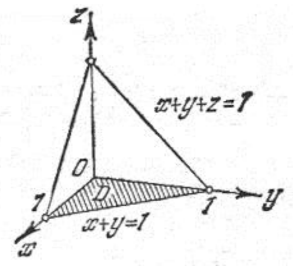
Вычисление объема.

Мы уже знаем, что объем V тела, ограниченного поверхностью $z = f(x,y),$ где $f(x,y)$ - неотрицательная функция, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области $D,$ а образующие параллельны оси Oz (это тело мы назвали цилиндроидом), равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D:

$$V = \iint\limits_D f(x, y) dS.$$

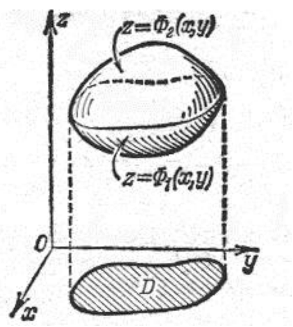
Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$



$$V = \iint\limits_D (1 - x - y) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left[(1 - x)y - \frac{y^2}{2} \right] \Bigg|_0^{1-x} = \int\limits_0^1 \frac{1}{2} (1 - x)^2 dx = \frac{1}{6} \; (куб.ед.)$$



Замечание 1. Если тело ограничено сверху поверхностью $z = \Phi_2(x, y) \geq 0$, а снизу - поверхностью $z = \Phi_1(x, y) \geq 0$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость Oxy является область D, то объем V этого тела равен разности объемов двух цилиндроидов; первый из этих цилиндроидов имеет нижним основанием область D, а верхним - поверхность $z = \Phi_2(x, y)$; второй цилиндроид имеет нижним основанием также область D, а верхним - поверхность $z = \Phi_1(x, y)$.

Поэтому $V = \iint\limits_D \Phi_2(x, y) dS - \iint\limits_D \Phi_1(x, y) dS$, или

$$V = \iint\limits_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)] dS.$$

Легко, далее, доказать , что эта формула верна не только в том случае, когда $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ неотрицательны, но и тогда, когда $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ - любые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению:

$$\Phi_2(x, y) \geq \Phi_1(x, y).$$

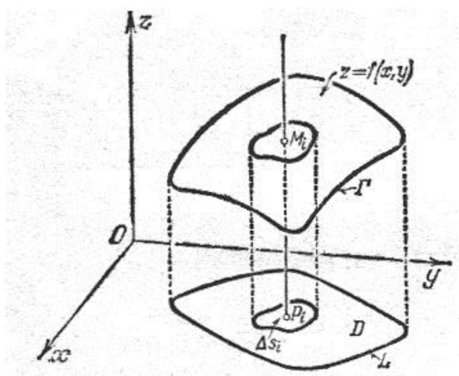
Замечание 2. Если в области D функция $f(x,y)$ меняет знак, то разбиваем область на две части: 1) область D_1, где $f(x,y)\geq 0$; 2) область D_2, где $f(x,y)\leq 0$. Предположим, что области D_1 и D_2 таковы, что двойные интегралы по этим областям существуют. Тогда интеграл по области D_1 будет положителен и будет равен объему тела, лежащего выше плоскости Oxy. Интеграл по D_2 будет отрицателен и по абсолютной величине равен объему тела, лежащего ниже плоскости Oxy. Следовательно, интеграл по D будет выражать разность соответствующих объемов.

Вычисление площади плоской фигуры.

Если мы составим двумерную интегральную сумму для функции $f(x,y)\equiv 1$ по области D, то эта сумма будет равна площади $S=\sum\limits_{i=1}^{n}1\cdot\Delta S_i$ при любом способе разбиения. Переходя к пределу в правой части равенства, получим $S=\iint\limits_D dxdy.$ Если область D - правильная, то

$$S=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy=\int\limits_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx.$$

Вычисление площади поверхности.



Пусть требуется вычислить площадь поверхности σ, ограниченной линией Γ; поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные, производные. Обозначим проекцию линии Γ на плоскость Oxy через L. Область на плоскости Oxy, ограниченную линией L, обозначим через D. Разобьем произвольным образом область D на n элементарных площадок $\Delta S_1,\Delta S_2,\ldots,\Delta S_n$. В каждой площадке ΔS_i

возьмем точку $P_i(x_i, y_i)$. Точке P_i будет соответствовать на поверхности σ точка $M_i[x_i, y_i, f(x_i, y_i)]$.

Через точку M_i проведем касательную плоскость к поверхности. Ее уравнение имеет вид:

$$z - z_i = f'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f'_y(x_i, y_i)(y - y_i). \tag{1}$$

На этой плоскости выделим такую площадку $\Delta\sigma_i$, которая проектируется на плоскость Oxy в виде площадки ΔS_i. Рассмотрим сумму всех площадок ΔS_i : $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$. Предел σ этой суммы, когда наибольший из диаметров площадок $\Delta\sigma_i$ стремится к нулю, мы будем называть площадью поверхности, т.е. по определению положим:

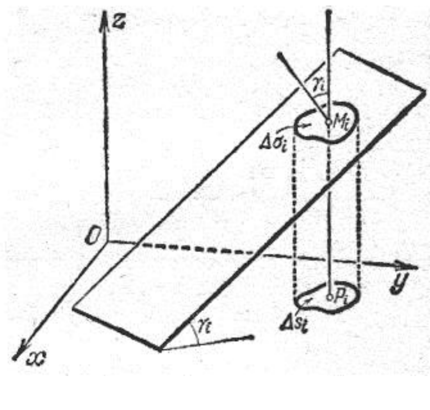
$$\sigma = \lim_{\max diam \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \tag{2}$$

Займемся теперь вычислением площади поверхности.

Обозначим через γ_i угол между касательной плоскостью и плоскостью Oxy. На основании известной формулы аналитической геометрии можно написать: $\Delta S_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i$ или $\Delta\sigma_i = \dfrac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}$. (3)

Угол γ_i есть в то же время угол между осью Oz и перпендикуляром к плоскости (1). Из определения скалярного произведения двух векторов можно записать:

$$\cos\gamma_i = \frac{(\overline{n_1}\,\overline{n_2})}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|},$$



где за вектор $\overline{n_1}$ (нормальный к плоскости Oxy) можно взять единичный вектор $\overline{k} = \{0,0,1\}$. А вектор $\overline{n_2}$ (нормальный к плоскости (1)) имеет проекции $\{-f'_x(x_i, y_i), -f'_y(x_i, y_i), 1\}$ (смотрите уравнение (1)).

Тогда $\cos\gamma_i = \dfrac{0\cdot\left(-f'_x(x_i, y_i)\right)+0\cdot\left(-f'_y(x_i, y_i)\right)+1}{\sqrt{f'^2_x(x_i, y_i)+f'^2_y(x_i, y_i)+1}}$.

Следовательно, $\Delta\sigma_i = \sqrt{1+f'^2_x(x_i, y_i)+f'^2_y(x_i, y_i)}\Delta S_i$.

Подставляя в (2), получим:

$$\sigma = \lim_{\max diam \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2_x(x_i, y_i)+f'^2_y(x_i, y_i)}\Delta S_i$$

или

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \qquad (4)$$

Это и есть формула, по которой вычисляется площадь поверхности $z = f(x, y)$.

Если уравнение поверхности дано в виде

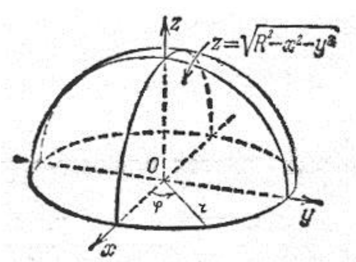
$x = \psi(y, z)$ или в виде $y = \chi(x, z)$,

то соответствующие формулы для вычисления площади поверхности имеют вид:

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz, \quad \sigma = \iint_{D''} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz,$$

где D' и D'' - области на плоскостях Oyz и Oxz, в которые проектируется данная поверхность.

Пример. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.



Вычислим площадь поверхности верхней половины сферы $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$. В этом случае $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

Следовательно, $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$

Область интегрирования D определяется условием $x^2+y^2\le R^2.$

Таким образом, на основании формулы (4) будем иметь:

$$\frac{1}{2}\sigma=\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dy.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам.

$$\frac{1}{2}\sigma=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr=R\int_0^{2\pi}d\varphi\left(-\sqrt{R^2-r^2}\right)\Big|_0^R=R\int_0^{2\pi}Rd\varphi=2\pi R^2.$$

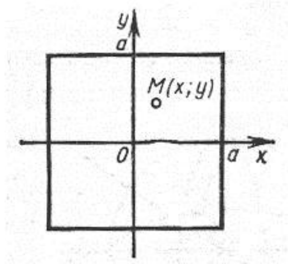
Итак, $\sigma=4\pi R^2.$

Вычисление массы пластинки.

Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластинку, т.е. некоторую область D, по которой распределена масса m с плотностью $\rho(x,y)$. Вычислим по заданной плотности $\rho(x,y)$ массу m этой пластинки, считая, что $\rho(x,y)$ - непрерывная функция. Разобьем D произвольно на n частей $\Delta S_i\ (i=1,2,\dots,n)$ и обозначим через m_i массы этих частей. В каждой части произвольно возьмем точку $P_i(x_i,y_i)$. Массу m_i каждой такой части ΔS_i можно считать приближенно равной $\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$, а масса всей пластинки тогда будет приближенно равна $m_n=\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$. Переходя к пределу при $\max diam\Delta S_i\to 0$, получим точное значение массы пластинки

$$m=\iint_D\rho(x,y)dxdy.$$

Пример. Определить массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность $\rho(x,y)$ в каждой точке $M(x,y)$ пропорциональна квадрату расстояния от точки M до точки пересечения диагоналей, а коэффициент пропорциональности равен k.



Решение. Выберем систему координат так, как показано на рисунке. Тогда $\rho(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)$. $m=\iint\limits_D k\left(x^2+y^2\right)dxdy.$

Учитывая, что подынтегральная функция четна относительно x и y, а область интегрирования симметрична относительно осей координат , можно ограничиться вычислением интеграла по той части области D, которая расположена в первой четверти, т.е.

$$m=4k\int_0^a dx\int_0^a\left(x^2+y^2\right)dy=4k\int_0^a dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=4k\int_0^a\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)dx=4k\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{a^3x}{3}\right)\Bigg|_0^a=4k\frac{2a^4}{3}=\frac{8}{3}ka^4.$$

Лекция 15

Тройной интеграл

Задача об отыскании массы неоднородного тела

Рассмотрим тело, занимающее пространственную область V, и предположим, что плотность распределения массы в этом теле является непрерывной функцией координат точек тела $f=f(x,y,z)$.

Разобьем тело произвольным образом на n частей: $\Delta v_1,\Delta v_2,\ldots,\Delta v_n$, обозначая символом Δv_i не только саму часть, но и ее объем. Выберем затем в каждой части по произвольной точке $P_i(x_i,y_i,z_i)$. Полагая, что в каждой частичной области плотность постоянна и равна ее значению в точке P_i, мы получим приближенное выражение для массы всего тела в виде суммы

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i. \qquad (1)$$

Сумма (1) называется трехмерной интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ в области V, соответствующей данному разбиению этой области на n частичных областей и данному выбору точек P_i. Предел этой суммы при условии, что $n \to \infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку, т.е. что его диаметр стремится к нулю (диаметром области Δv_i называется максимальное расстояние между точками, лежащими на границе области), даст массу M тела и по определению называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V.

$$M = \lim_{\max diam \Delta v_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i = \iiint_V f(x, y, z)dv. \qquad (2)$$

Физический смысл тройного интеграла (2) состоит в том, что он равен массе тела V, если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ есть плотность распределения массы в этом теле.

Теорема существования тройного интеграла.

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в пространственной области V, ограниченной замкнутой поверхностью S, то ее трехмерная интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел, т.е. тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z)dv$, не зависит от способа разбиения области V на частичные области Δv_i и от выбора в них точек P_i.

Свойства тройного интеграла.

В виду полной аналогии между свойствами и их доказательствами двойных и тройных интегралов ограничимся лишь перечислением свойств тройных интегралов (провести соответствующие доказательства самим !).

1). $\iiint\limits_V [f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)]dv=\iiint\limits_V f(x,y,z)dv+\iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dv.$

2). $\iiint\limits_V a\, f(x,y,z)dv=a\iiint\limits_V f(x,y,z)dv,$ где $a=const.$

3). $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dv,$ где $V=V_1\cup V_2,$

причем V_1 и V_2 не имеют общих внутренних точек.

4). $\iiint\limits_V dv=V$ (объем области V).

5). Если $f(x,y,z)\geq\varphi(x,y,z)$ во всех точках области $V,$ то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv\geq\iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dv.$$

6). Оценка тройного интеграла:

$$mV\leq\iiint\limits_V f(x,y,z)dv\leq MV,$$

где m и M - наименьшее и наибольшее значения $f(x,y,z)$ в $V.$

7). Теорема о среднем:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=f(\xi,\eta,\zeta)V,$$

где (ξ,η,ζ) - координаты некоторой точки, лежащей в области V. $f(\xi,\eta,\zeta)$ - среднее значение функции $f(x,y,z)$ в области $V.$

Вычисление тройного интеграла

Предположим, что область $V,$ ограниченная замкнутой поверхностью $S,$ обладает следующими свойствами:

1. Всякая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю точку области V, пересекает поверхность S в двух точках.

2. Вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную (двумерную) область D.

3. Всякая часть области V, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей, также обладает свойствами 1 и 2.

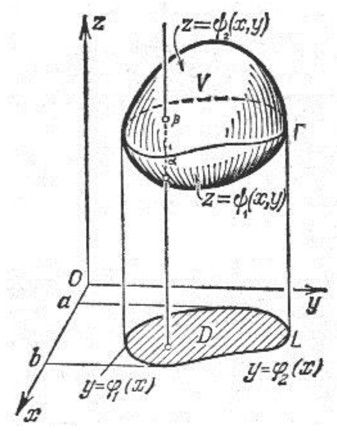
Область V, обладающую указанными свойствами, будем называть правильной в направлении оси Oz трехмерной областью.

Аналогично определяется правильность области в направлении осей Ox и Oy.

Область, правильную в направлении всех осей, будем называть просто правильной.

Правильными трехмерными областями являются, например, эллипсоид, прямоугольный параллелепипед, тетраэдр и т.д. Далее мы будем рассматривать в основном правильные области.

Вычисление тройного интеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$, так же как и двойного, может быть осуществлено посредством ряда последовательных интегрирований. Ограничимся описанием соответствующих правил.



При вычислении тройного интеграла элемент объема dv можно представить в более удобном виде $dv = dxdydz$.

Тогда
$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Опишем около V цилиндрическую

поверхность с образующей, перпендикулярной к плоскости Oxy. Она касается области V вдоль некоторой линии Γ, которая делит поверхность, ограничивающую область, на две части: верхнюю и нижнюю. Уравнением нижней поверхности пусть будет $z=\psi_1(x,y)$, уравнением верхней $z=\psi_2(x,y)$. Построенная цилиндрическая поверхность высекает из плоскости Oxy плоскую область D, которая является ортогональной проекцией V на плоскость Oxy, при этом линия Γ проектируется в границу L области D.

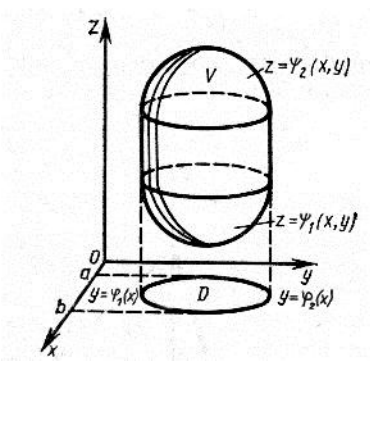
Будем интегрировать сначала по направлению оси Oz. Для этого функция $f(x,y,z)$ интегрируется по заключенному в V отрезку прямой, параллельной оси Oz и проходящей через некоторую точку $P(x,y)$ области D (отрезок $\alpha\beta$). При данных x и y переменная интегрирования z будет изменяться от $\psi_1(x,y)$ - аппликаты точки "входа" (α) прямой в область V до $\psi_2(x,y)$ - аппликаты точки "выхода" (β) прямой из области V. Результат интегрирования представляет собой величину, зависящую от точки $P(x,y)$; обозначим ее через $F(x,y)$: $F(x,y)=\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$. При интегрировании x и y рассматриваются здесь как постоянные.

Мы получим значение искомого тройного интеграла, если возьмем интеграл от $F(x,y)$ при условии, что точка $P(x,y)$ изменяется по области D, т.е. если возьмем $\iint\limits_D F(x,y)dxdy$.

Таким образом, тройной интеграл может быть представлен

$$I=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Приводя, далее, двойной интеграл к повторному, получим



$$I=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz. \qquad (*)$$

Формула (*) сохраняется для областей, имеющих цилиндрическую форму.

Если V - правильная область, то возможны шесть вариантов представления тройного интеграла через повторный трехкратный интеграл.

Если областью интегрирования служит внутренность параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, то все пределы интегрирования в повторном трехкратном интеграле постоянны.

Пример. Вычислить тройной интеграл

$$I=\iiint_V (x+y+z)dxdydz,$$

где V - пирамида, ограниченная плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями $x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

Решение. $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\left[(x+y)z+\frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y}=$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[(x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]dy=\int_0^1 dx\left[\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right]\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\right]dx=\left(\frac{x}{6}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}-\frac{(1-x)^4}{24}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{8}.$$

Замена переменных в тройном интеграле

(общий случай)

Пусть функции $\begin{cases} x = \varphi(u,t,w) \\ y = \psi(u,t,w) \\ z = \chi(u,t,w) \end{cases}$

взаимно однозначно отображают область V в прямоугольных координатах $x,\ y,\ z$ на область V' в криволинейных координатах $u,\ t,\ w.$

По аналогии с двойным интегралом введем якобиан I для общего преобразования

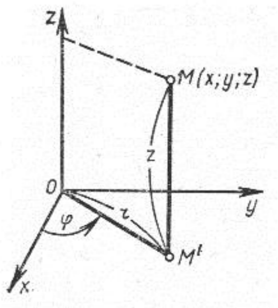
$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[\varphi(u,t,w),\psi(u,t,w),\chi(u,t,w)]|I|dudtdw.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Цилиндрические координаты.



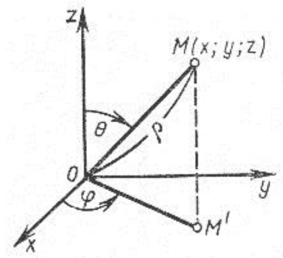
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (u = r, \quad t = \varphi, \quad w = z)$$

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, \qquad |I| = r.$$

2. Обобщенные цилиндрические координаты.

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad |I| = abr.$$

3. Сферические координаты.



$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad (u = \rho, \quad t = \theta, \quad w = \varphi)$$

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

$|I| = \rho^2\sin\theta.$

Приложения тройного интеграла

1. Вычисление массы тела.

Мы уже знаем, что если $f(x,y,z)$ считать объемной плотностью распределения вещества в области V, то $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ даст массу всего вещества, заключенного в объеме V.

2. Вычисление объема тела.

Если $f(x,y,z) \equiv 1$, то масса вещества, заключенного в объеме V, численно равна объему V. Поэтому объем области V выражается тройным интегралом $V = \iiint\limits_V dxdydz.$

Лекция 16

Криволинейные интегралы

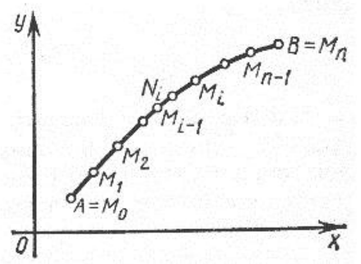
Перенесем понятие одномерного определенного интеграла, взятого по прямолинейному отрезку, на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой плоской или пространственной кривой. Такого рода интегралы называются криволинейными. Криволинейные интегралы бывают двух видов.

Криволинейный интеграл первого рода

(криволинейный интеграл по длине дуги)

Задача о вычислении массы кривой

Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую кривую L. Предположим, что эта кривая определяется параметрическими уравнениями:



$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (a\le t\le b) \qquad (1)$$

и сначала будем считать ее незамкнутой и ограниченной точками A и B. Вдоль кривой L распределено вещество с линейной плотностью $f(x,y)$. Требуется вычислить массу этой кривой, предполагая, что $f(x,y)$ - непрерывная функция.

Разобьем $[a,b]$ при помощи точек $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ на n частичных отрезков $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Так как каждому значению t_i соответствует на кривой L определенная точка $M_i(x_i,y_i)$ с координатами $x_i=\varphi(t_i)$, $y_i=\psi(t_i)$, то при указанном разбиении отрезка $a\le t\le b$ вся кривая L распадается на n частичных дуг: $M_0M_1, M_1M_2,\ldots,M_{n-1}M_n$. Выберем на каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку $N_i(\overline{x_i},\overline{y_i})$, координаты $\overline{x_i},\overline{y_i}$ которой отвечают некоторому значению $\overline{t_i}$ параметра t, так что $\overline{x_i}=\varphi(\overline{t_i})$, $\overline{y_i}=\psi(\overline{t_i})$, причем $t_{i-1}\le\overline{t_i}\le t_i$.

Условимся обозначать символом ΔS_i длину *i-ой* частичной дуги $M_{i-1}M_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Предположим, что на каждой элементарной дуге $M_{i-1}M_i$ средняя плотность вещества равна значению функции $f(x,y)$ в точке $N_i(\overline{x_i},\overline{y_i})$

этой дуги, т.е. $f\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)$. Умножив $f\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)$ на ΔS_i, получим приближенное значение массы частичной дуги $M_{i-1}M_i$. Тогда

$$m_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta S_i \qquad (2)$$

выражает приближенно массу всей дуги AB. Точное значение массы получим при переходе к пределу:

$$m=\lim_{\max \Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta S_i. \qquad (3)$$

Сумма (2) называется интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по длине дуги. Предел интегральной суммы (2) при $\max \Delta S_i \to 0$ называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x,y)$ по кривой L и обозначается

$$\int_L f(x,y)dS=\lim_{\max \Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta S_i. \qquad (4)$$

Отметим, что предел (4) существует, если $f(x,y)$ - непрерывная функция.

Из рассмотренной задачи вытекает физический смысл криволинейного интеграла первого рода - криволинейный интеграл первого рода дает массу кривой, линейная плотность вдоль которой равна $f(x,y)$.

Свойства криволинейного интеграла первого рода

1). $\int\limits_{AB} f(x,y)dS=\int\limits_{BA} f(x,y)dS$

2). $\int\limits_{AB}(f(x,y)+\varphi(x,y))dS=\int\limits_{AB} f(x,y)dS+\int\limits_{AB}\varphi(x,y)dS$

3). $\int\limits_{AB} a\cdot f(x,y)dS=a\cdot\int\limits_{AB} f(x,y)dS$

4). $\int\limits_{AB} dS=L,$ где L - длина дуги AB

5). $\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_{AC} f(x,y)dS + \int\limits_{CB} f(x,y)dS$ (AB состоит из AC и CB)

6). Если $f(x,y) \ge \varphi(x,y)$ на AB, то $\int\limits_{AB} f(x,y)dS \ge \int\limits_{AB} \varphi(x,y)dS$

7). Оценка интеграла $m \cdot L \le \int\limits_{AB} f(x,y)dS \le M \cdot L$

8). Теорема о среднем $\int\limits_{AB} f(x,y)dS = f(\xi,\eta)\cdot L,$ где (ξ,η) - некоторая точка, лежащая на AB.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Если $f(x,y)$ - непрерывная функция вдоль кривой L, то справедлива следующая формула, сводящая криволинейный интеграл первого рода к обычному определенному интегралу:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_a^b f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \qquad (5)$$

Покажем это. По определению

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i},\overline{y_i})\Delta S_i,$$

где $\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$.

$x_i - x_{i-1}$ и $y_i - y_{i-1}$ преобразуем по теореме Лагранжа:

$$x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\overline{t_i})(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i. \quad (t_{i-1} \le \overline{t_i} \le t_i).$$

Аналогично $y_i - y_{i-1} = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\overline{t_i})\Delta t_i$.

Причем в правых частях последних двух соотношений одно и то же значение $\overline{t_i}$, так как должна быть справедлива еще теорема Коши:

$$\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})} = \frac{\varphi'(\overline{t_i})}{\psi'(\overline{t_i})}.$$

Тогда $\Delta S_i = \sqrt{\varphi'^2(\bar{t}_i) + \psi'^2(\bar{t}_i)}\Delta t_i$.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left[\varphi(\bar{t}_i), \psi(\bar{t}_i)\right]\sqrt{\varphi'^2(\bar{t}_i) + \psi'^2(\bar{t}_i)}\Delta t_i =$$

$$= \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

Если кривая L задана уравнением $y = \psi(x)$ $(\alpha \le x \le \beta)$, то пишем

$\begin{cases} x = x \\ y = \psi(x) \end{cases}$ $(\alpha \le x \le \beta)$ и, рассматривая x как параметр, получим

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_\alpha^\beta f[x, \psi(x)]\sqrt{1 + \psi'^2(x)}dx.$$

Аналогично, если L: $x = \varphi(y)$ $(\gamma \le y \le \delta)$, то пишем

$\begin{cases} x = \varphi(y) \\ y = y \end{cases}$ $(\gamma \le y \le \delta)$ и, рассматривая y как параметр, получим

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_\gamma^\delta f[\varphi(y), y]\sqrt{\varphi'^2(y) + 1}dy.$$

Аналогично определяется и вычисляется криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x,y,z)$, взятый по пространственной кривой

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad (a \le t \le b); \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dS = \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}dt.$$

Криволинейный интеграл второго рода

(криволинейный интеграл по координатам)

Задача о вычислении работы переменной силы

Рассмотрим на плоскости Oxy ту же кривую L, определяемую уравнениями (1). Пусть переменная сила $F(x,y) = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ действует вдоль кривой AB. Требуется вычислить работу, производимую этой силой при перемещении материальной точки вдоль данной кривой L из A в B. Предположим, что $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - непрерывные функции вдоль L.

Разобьем отрезок $a \le t \le b$, а, следовательно, и кривую L, так же на n частей. Будем считать, что на частичной кривой $M_{i-1}M_i$ сила $\bar{F}$ постоянна и равна $\bar{F}(\bar{x_i}, \bar{y_i})$. Путь $M_{i-1}M_i$ будем считать прямолинейным, тогда можно ввести вектор перемещения $\overline{M_{i-1}M_i} = \overline{\Delta S_i} = \Delta x_i\,\bar{i} + \Delta y_i\,\bar{j}$.

Если сила $\bar{F}(\bar{x_i}, \bar{y_i})$ постоянна, а путь ΔS_i прямолинеен, то работа этой силы на заданном пути равна скалярному произведению $\left(\bar{F}(\bar{x_i}, \bar{y_i}), \overline{\Delta S_i}\right)$. Вся работа силы $\bar{F}(x,y)$ на криволинейном пути AB приближенно выражается формулой

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{F}(\bar{x_i}, \bar{y_i}), \overline{\Delta S_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[P(\bar{x_i}, \bar{y_i})\Delta x_i + Q(\bar{x_i}, \bar{y_i})\Delta y_i\right] \qquad (6)$$

Переходя к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим точное значение работы

$$A = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(\bar{x_i}, \bar{y_i})\Delta x_i + Q(\bar{x_i}, \bar{y_i})\Delta y_i\right]$$

Сумма (6) называется интегральной суммой по координатам для вектор-функции $\bar{F}(x,y)$, а ее предел при $\max \Delta S_i \to 0$ - общим криволинейным интегралом второго рода и обозначается:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta x_i + Q(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i \right). \qquad (7)$$

По традиции в левой части (7) скобки не пишутся и предполагается, что $\int_L$ относится ко всей сумме.

Из рассмотренной задачи вытекает физический смысл общего криволинейного интеграла второго рода - общий криволинейный интеграл второго рода (7) дает работу по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой L под действием силы $\overline{F}(x,y)$, имеющей проекции на оси Ox и Oy $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

$\int_{AB} P(x,y)dx$ и $\int_{AB} Q(x,y)dy$ называются криволинейными интегралами второго рода.

Свойства общего криволинейного интеграла второго рода

Только первое свойство общего криволинейного интеграла второго рода отличается от первого свойства криволинейного интеграла первого рода: $\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy,$ т.е. при перемене направления интегрирования общий криволинейный интеграл второго рода меняет лишь знак, поскольку в этом случае меняются знаки Δx_i и Δy_i.

Остальные свойства общего криволинейного интеграла второго рода аналогичны свойствам криволинейного интеграла первого рода.

Вычисление общего криволинейного интеграла второго рода

Если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вдоль $L,$ то справедлива следующая формула, сводящая общий криволинейный интеграл второго рода к обычному определенному интегралу:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt.$$

Покажем это.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta x_i + Q\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta y_i\right) =$$

$$= \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left\{P\left[\varphi\left(\overline{t_i}\right),\psi\left(\overline{t_i}\right)\right]\varphi'\left(\overline{t_i}\right) + Q\left[\varphi\left(\overline{t_i}\right),\psi\left(\overline{t_i}\right)\right]\psi'\left(\overline{t_i}\right)\right\}\Delta t_i =$$

$$= \int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt.$$

Если $L: \begin{cases} x = x \\ y = \psi(x) \end{cases} \quad (\alpha \le x \le \beta),$ то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[x,\psi(x)] + Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}dx.$$

Если $L: \begin{cases} x = \varphi(y) \\ y = y \end{cases} \quad (\gamma \le y \le \delta),$ то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\gamma^\delta \{P[\varphi(y),y]\varphi'(y) + Q[\varphi(y),y]\}dy.$$

Аналогично определяется и вычисляется общий криволинейный интеграл второго рода, взятый по пространственной кривой L

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad (a \le t \le b) \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

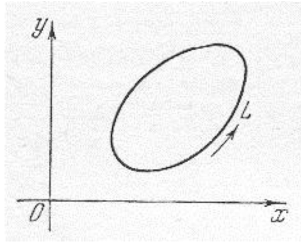
$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\varphi'(t) +$$

$$+ Q[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\chi'(t)\}dt,$$

где P, Q, R - проекции силы $\overline{F}(x,y,z),$ т.е.

$$\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}.$$

Замечание. Мы установили, что $\int\limits_L Pdx + Qdy$ зависит от направления обхода, поэтому следует принять особую договоренность о том, что мы будем понимать под этим символом в случае, когда L - замкнутая кривая, т.е. A совпадает с B.



Обозначение $\oint\limits_L Pdx + Qdy$ $(*)$. Из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L мы назовем положительным то направление обхода, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается по левую сторону по отношении к точке, совершающей обход. Будем считать, что в $(*)$ контур всегда обходится в положительном направлении.

Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

При рассмотрении задачи о вычислении работы переменной силы мы ввели вектор перемещения, который в пространственном случае имеет вид

$$\overline{\Delta S_i} = \Delta x_i \,\bar{i} + \Delta y_i \,\bar{j} + \Delta z_i \,\bar{k}.$$

Углы, образуемые $\overline{\Delta S_i}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz обозначим соответственно через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Тогда

$$\Delta x_i = \Delta S_i \cos\alpha_i, \quad \Delta y_i = \Delta S_i \cos\beta_i, \quad \Delta z_i = \Delta S_i \cos\gamma_i.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}\right)\Delta x_i + Q\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}\right)\Delta y_i + R\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}\right)\Delta z_i \right) =$$

$$= \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}\right)\cos\alpha_i + Q\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}\right)\cos\beta_i + R\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}\right)\cos\gamma_i \right)\Delta S_i =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dS.$$

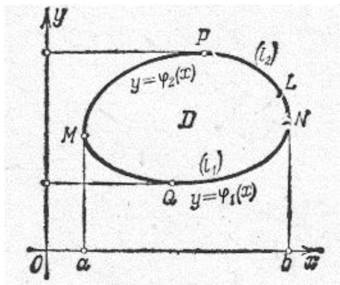
Итак, получили следующую формулу, связывающую криволинейные интегралы первого и второго рода:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS.$$

Лекция 17

Выражение площади области, ограниченной кривой, через криволинейный интеграл

Пусть в плоскости Oxy дана ограниченная контуром L правильная область D. Тогда площадь области D равна



$$S = \int_a^b \varphi_2(x)dx - \int_a^b \varphi_1(x)dx.$$

Но первый интеграл есть криволинейный интеграл второго рода по кривой l_2 (дуга MPN), так как $y=\varphi_2(x)$ есть уравнение этой кривой; следовательно, $\int_a^b \varphi_2(x)dx = \int_{MPN} ydx.$

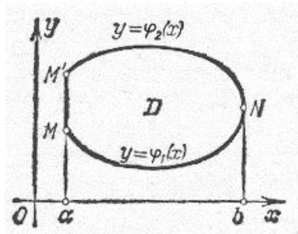
Второй интеграл есть криволинейный интеграл второго рода по кривой l_1 (дуга MQN), т.е. $\int_a^b \varphi_1(x)dx = \int_{MQN} ydx.$

На основании свойства 1 криволинейного интеграла второго рода имеем $\int_{MPN} ydx = -\int_{NPM} ydx.$

Следовательно, $S = -\int_{NPM} ydx - \int_{MQN} ydx = -\oint_L ydx.$ $(*)$

Если часть границы L составляет отрезок $M'M$, параллельный оси Oy, то $\int\limits_{M'M} ydx = 0$, и равенство $(*)$ остается справедливым и в этом случае.

Аналогично можно показать, что $S = \oint\limits_L xdy.$ $(**)$



Складывая почленно $(*)$ и $(**)$ и деля на 2, получим еще одну формулу для вычисления площади S:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx. \qquad (***)$$

Пример. Вычислить площадь эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Используя формулу $(***)$, получаем:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t(-a\sin t)]dt = \pi ab.$$

Формулы $(*)-(***)$ справедливы и для площадей, границы которых пересекаются линиями, параллельными координатным осям, более чем в двух точках. Для доказательства этого разобьем данную область с помощью линии l' на две правильные области. Для каждой из них справедлива формула $(***)$. Складывая левые и правые части, получим слева площадь данной области, справа - криволинейный интеграл (с коэффициентом $\frac{1}{2}$), взятый по всей границе, так как криволинейный интеграл второго рода по линии раздела l' берется дважды - в прямом и обратном направлениях и, следовательно, равен нулю.

$$S_1 = \frac{1}{2}\oint\limits_{l_1} xdy - ydx$$

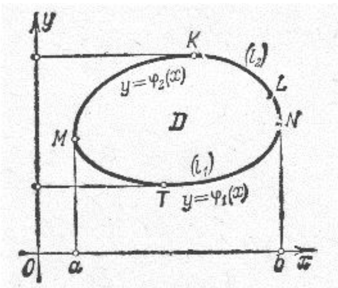
$$S_2 = \frac{1}{2}\oint_{l_2} xdy - ydx$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_{L} xdy - ydx.$$

Формула Грина

Установим связь между двойным интегралом по некоторой области D и общим криволинейным интегралом второго рода по границе L этой области.

Пусть в плоскости Oxy дана ограниченная замкнутым контуром L область D (правильная). Пусть эта область ограничена снизу кривой $y = \varphi_1(x)$, а сверху $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $(a \le x \le b)$.



В совокупности обе эти кривые составляют замкнутый контур L. Пусть в области D заданы непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные. Рассмотрим интеграл $\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy.$

Представляя его в виде двукратного, получим:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{dP(x,y)}{dy} dy = \int_a^b dx P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx. \tag{1}$$

Заметим, что интеграл $\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx$ численно равен криволинейному интегралу $\int\limits_{MKN} P(x,y)dx,$ взятому по кривой MKN, уравнения которой в параметрической форме такие: $x = x, \quad y = \varphi_2(x)$, где x - параметр.

Итак, $$\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx = \int_{MKN} P(x,y)dx. \qquad (2)$$

Аналогично, $$\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx = \int_{MTN} P(x,y)dx. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_{MKN} P(x,y)dx - \int_{MTN} P(x,y)dx. \qquad (4)$$

Но $$\int_{MKN} P(x,y)dx = -\int_{NKM} P(x,y)dx.$$

Следовательно, (4) можно записать так:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_{NKM} P(x,y)dx - \int_{MTN} P(x,y)dx = -\oint_L P(x,y)dx. \qquad (5)$$

Аналогично, найдем

$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy. \qquad (6)$$

Вычитая из (6) формулу (5), получим формулу Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

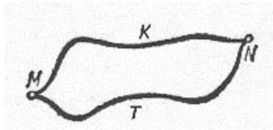
Эта формула связывает двойной интеграл по некоторой плоской области D с общим криволинейным интегралом второго рода по границе L этой области.

Мы предполагали, что область D правильная. Но формула Грина справедлива для любой области, которую можно разбить на правильные области.

Условия независимости общего криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Рассмотрим общий криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{(M)}^{(N)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$



взятый по некоторой плоской кривой, соединяющей точки M и N. Будем предполагать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные в рассматриваемой области D. Выясним, при каких условиях написанный общий криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы кривой, а зависит только от положения начальной и конечной точек M и N.

Рассмотрим две произвольные кривые MKN и MTN, лежащие в рассматриваемой области D и соединяющие точки M и N. Пусть

$$\int_{MTN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{MKN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{1}$$

то есть $$\int_{MTN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{MKN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Тогда на основании свойств 1 и 2 общего криволинейного интеграла второго рода имеем:

$$\int_{MTN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{NKM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

то есть общий криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L

$$\oint_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{2}$$

Контур $L = MTN + NKM$ можно, очевидно, считать произвольным.

Таким образом, из условия, что для любых двух точек M и N общий криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы соединяющей их кривой, а зависит только от положения этих точек, следует, что общий криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру равен нулю.

Справедливо и обратное утверждение: если общий криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру равен нулю, то он не зависит от формы кривой, соединяющей две любые точки, а зависит только от положения этих точек. Действительно, из (2) $\Rightarrow$ (1).

Естественно возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ для того, чтобы общий криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру был равен нулю. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Но сначала уточним, какие области будут рассматриваться далее.

Определение. Плоская область D называется односвязной, если каков бы ни был замкнутый контур L, лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром часть плоскости целиком принадлежит области D. Образно говоря, односвязность области означает, что область не имеет "дыр".

Теорема. Пусть во всех точках некоторой замкнутой односвязной области D функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны. Тогда для того, чтобы общий криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру L', лежащему в этой области, был равен нулю, т.е. чтобы

$$\oint_{L'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (2)$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad (3)$$

во всех точках области D.

Доказательство. Рассмотрим произвольный замкнутый контур L' в области D, ограничивающий область D', и для него напишем формулу Грина

$$\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{L'}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Если выполняется условие (3), то двойной интеграл, стоящий слева, тождественно равен нулю и, следовательно,

$$\oint_{L'}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Таким образом, достаточность условия (3) доказана.

Докажем теперь необходимость этого условия, т.е. докажем, что если равенство (2) выполняется для любой замкнутой кривой в области D, то в каждой точке этой области выполняется и условие (3).

Допустим, напротив, что равенство (2) выполняется, а условие (3) не выполняется, т.е. $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq 0$ хотя бы в одной точке.

Пусть, например, в некоторой точке $E(x_0,y_0)$ имеем неравенство

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}>0.$$

Так как в левой части неравенства стоит непрерывная функция, то она будет положительна и больше некоторого числа $\delta>0$ во всех точках некоторой достаточно малой области D', содержащей точку $E(x_0,y_0)$. Возьмем двойной интеграл по этой области от разности $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$. Он будет иметь положительное значение. Действительно,

$$\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy>\iint_{D'}\delta dxdy=\delta\iint_{D'}dxdy=\delta D'>0.$$

Но, по формуле Грина, левая часть последнего неравенства равна общему криволинейному интегралу второго рода по границе L' области D', который, по предположению, равен нулю. Следовательно, последнее неравенство противоречит условию (2) и, значит, предположение, что $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ отлично от нуля хотя бы в одной точке , неверно. Отсюда вытекает, что $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=0$ во всех точках данной области D.

Таким образом, теорема полностью доказана.

При изучении уравнений в полных дифференциалах было доказано, что выполнение условия $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ равносильно тому, что выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y),$$

причем $P(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}.$

Докажем, что в этом случае общий криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int_{(M)}^{(N)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

по любой кривой L, соединяющей точки M и N, равняется разности значений функции $U(x,y)$ в этих точках:

$$\int_{(M)}^{(N)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(M)}^{(N)}dU(x,y)=U(N)-U(M).$$

Доказательство. Если $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом функции $U(x,y)$, то $P(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}$ и общий криволинейный интеграл второго рода примет вид:

$$I=\int_{(M)}^{(N)}\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Для вычисления этого интеграла напишем параметрические уравнения кривой $L,$ соединяющей точки M и N

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t).$$

Будем считать, что значению параметра $t=t_0$ соответствует точка $M,$ а значению $t=T$ – точка $N.$ Тогда общий криволинейный интеграл второго рода сведется к следующему определенному интегралу:

$$I=\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right]dt.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть функция от $t,$ являющаяся полной производной от функции $U[\varphi(t),\psi(t)]$ по $t.$

Поэтому:

$$I=\int_{t_0}^{T}\frac{dU}{dt}dt=U[\varphi(t),\psi(t)]\Big|_{t_0}^{T}=U[\varphi(T),\psi(T)]-U[\varphi(t_0),\psi(t_0)]=U(N)-U(M).$$

Как видим, общий криволинейный интеграл второго рода от полного дифференциала не зависит от формы кривой, по которой производится интегрирование.

Аналогичное утверждение имеет место и для криволинейного интеграла по пространственной кривой.

Лекция 18

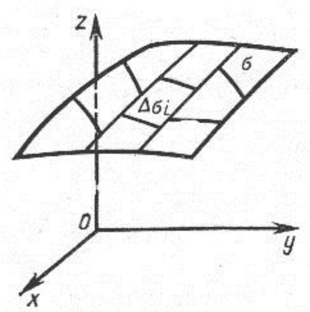
Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого рода

(поверхностные интегралы по площади поверхности)

Задача о массе материальной поверхности

Пусть в пространственной системе координат $Oxyz$ задана некоторая поверхность σ, ограниченная некоторой пространственной линией λ. На σ распределена масса с плотностью $f = f(x, y, z)$. Требуется вычислить массу этой материальной поверхности.



Разобьем поверхность σ сетью дуг на n элементарных площадок $\Delta\sigma_i$, площади которых также обозначим $\Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Предположим, что в каждой элементарной площадке $\Delta\sigma_i$ плотность постоянна и равна $f(x_i, y_i, z_i)$, где x_i, y_i, z_i - координаты произвольной точки M_i площадки $\Delta\sigma_i$. Произведение $f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i$ приближенно выражает массу элементарной площадки $\Delta\sigma_i$, а сумма всех таких произведений

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \qquad (1)$$

приближенно выражает массу всей заданной материальной поверхности. Точное значение искомой массы выражается формулой

$$m = \lim_{\max diam\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (2)$$

Сумма (1) называется интегральной суммой функции $f(x, y, z)$ по поверхности σ. Предел этой интегральной суммы (2) называют поверхностным интегралом первого рода и обозначают:

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{\max diam \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (3)$$

Предел (3) существует, если функция $f(x,y,z)$ - непрерывна, а σ - гладкая поверхность.

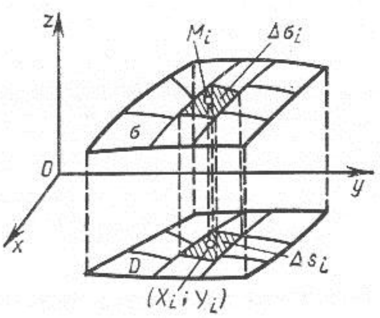
Итак, физический смысл поверхностного интеграла первого рода состоит в том, что он дает массу поверхности если $f(x,y,z)$ - плотность распределения массы на σ.

Свойства поверхностного интеграла первого рода

Определение поверхностного интеграла первого рода, по сути дела, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому свойства двойных интегралов, изученные нами ранее, без особых изменений переносятся интегралы по поверхности. Отметим , что поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Вычисление поверхностного интеграла первого рода производится сведением его к двойному интегралу. Пусть дан поверхностный интеграл $\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma.$



Предположим, что поверхность σ такова, что она с любой прямой, параллельной оси Oz, пересекается не более, чем в одной точке; тогда ее уравнение можно записать в виде $z = z(x,y)$. Покажем, что в этом случае вычисление интеграла по поверхности σ приводится к вычислению двойного интеграла по плоской области D - проекции поверхности σ на плоскость Oxy.

Разобьем поверхность σ произвольно на n частей $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ и спроектируем это разбиение на плоскость Oxy. Получим соответственно разбиение области D на части $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Площадь $\Delta\sigma_i$ каждой части поверхности может быть представлена в виде

$$\Delta\sigma_i = \iint\limits_{\Delta S_i} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}dxdy$$

(эту формулу мы получили, когда рассматривали вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла).

Применяя к двойному интегралу теорему о среднем, получаем

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}\Delta S_i,$$

где (x_i, y_i) - некоторая точка области ΔS_i.

Обозначим через M_i точку на частичной поверхности $\Delta\sigma_i$ с координатами $(x_i, y_i, z_i = z(x_i, y_i))$. Составим интегральную сумму для функции $f(x, y, z)$ по поверхности σ:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f[x_i, y_i, z(x_i, y_i)]\sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}\Delta S_i.$$

В правой части равенства находится интегральная сумма для двойного интеграла от непрерывной в области D функции $f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$ (в предположении, что $z(x, y),\ \ z_x'(x, y),\ \ z_y'(x, y)$ - непрерывны в D).

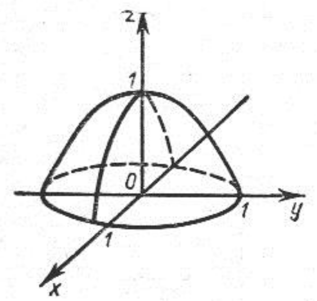
Переходя в обеих частях к пределу при $\max diam\Delta\sigma_i \to 0,$ получаем искомую формулу:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}dxdy, \qquad (4)$$

выражающую поверхностный интеграл первого рода через двойной по проекции D поверхности σ на плоскость Oxy.

Аналогично получаются формулы, выражающие интеграл по поверхности σ через двойные интегралы по ее проекциям на плоскости Oyz и Oxz.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma,$ где σ - часть параболоида вращения $z=1-x^2-y^2,$ отсеченная плоскостью $z=0.$



Решение. Поверхность $\sigma,$ заданная уравнением $z=1-x^2-y^2,$ проектируется на плоскость Oxy в область $D,$ ограниченную окружностью $x^2+y^2=1.$ Следовательно, областью D является круг $x^2+y^2\le 1.$ В этом круге функции $z=1-x^2-y^2,\quad z'_x(x,y)=-2x,\quad z'_y(x,y)=-2y$ непрерывны. По формуле (4) получаем:

$$\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma=\iint\limits_{D}\left(1+4x^2+4y^2\right)dxdy.$$

Переходя в полученном двойном интеграле к полярным координатам $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,$ находим:

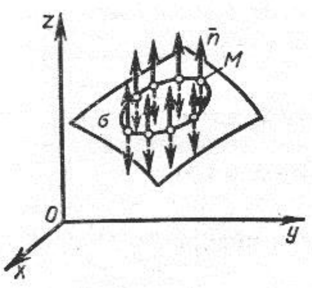
$$\iint\limits_{D}\left(1+4x^2+4y^2\right)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(1+4r^2\right)rdr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{r^2}{2}+r^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{2}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi.$$

Поверхностные интегралы второго рода

(поверхностные интегралы по координатам)

Введем предварительно понятие стороны поверхности. Возьмем на гладкой поверхности σ произвольную точку M и проведем через нее нормаль к поверхности (вектор $\bar{n}$). Рассмотрим теперь на поверхности σ какой-либо замкнутый

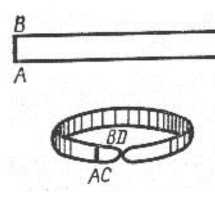


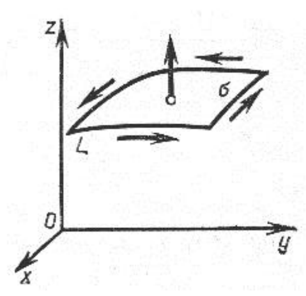
контур, проходящий через точку M и не имеющий общих точек с границей поверхности σ. Будем перемещать точку M по замкнутому контуру вместе с вектором $\bar{n}$ так, чтобы вектор $\bar{n}$ все время оставался нормальным к σ и чтобы его направление менялось при этом перемещении непрерывно. В начальное положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с противоположным.

Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности σ и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется двусторонней. Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, сфера, любая поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ - функции, непрерывные в некоторой области D плоскости Oxy.

Если же на поверхности σ существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали меняется после возвращения в исходную точку на противоположное, то поверхность называется односторонней.

Простейшим примером односторонней поверхности служит лист Мёбиуса. В дальнейшем рассматриваются только двусторонние поверхности. Двусторонние поверхности ориентируемы, а односторонние - не ориентируемы.





С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы. Пусть σ - ориентированная (сторона уже выбрана) поверхность, ограниченная контуром λ, не имеющим точек самопересечения. Будем считать положительным направлением обхода контура λ то, при движении по которому наблюдатель, расположенный так, что направление нормали совпадает с направлением от ног к голове, оставляет поверхность слева от себя.

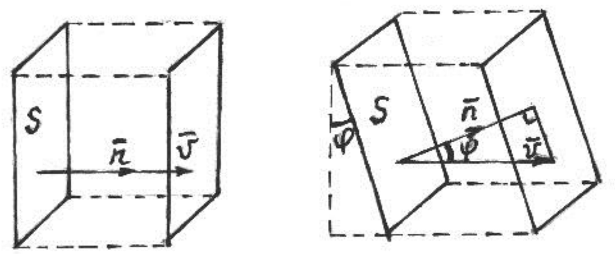
Противоположное направление называется отрицательным.

Задача о вычислении потока жидкости через поверхность

Пусть имеется некоторое течение жидкости. Говорят. что течение установилось, если скорость частиц жидкости, протекающих через данную точку, зависит только от этой точки и не зависит от времени. В каждой точке $M(x,y,z)$ области, в которой происходит течение, задан, следовательно, вектор $\bar{v}(x,y,z)$ - скорость частицы жидкости в этой точке. Таким образом, нам задано векторное поле - поле скоростей текущей жидкости. Проекции вектора $\bar{v}$ на оси координат будут являться функциями координат точки M. Запишем это так:

$$\bar{v} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}. \qquad (*)$$

Плотность жидкости считаем постоянной и равной единице. Будем искать количество жидкости, протекающее за единицу времени через заданную поверхность; разумеется, при этом считается, что жидкость может свободно протекать через эту поверхность. Указанное количество жидкости назовем потоком жидкости через поверхность.



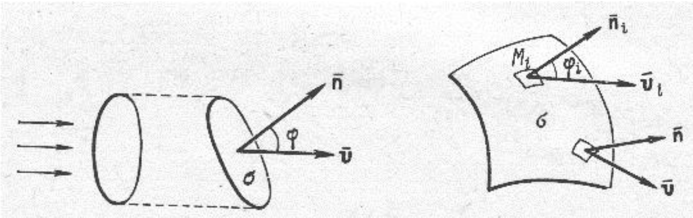
Начнем с рассмотрения простейшего случая. Пусть скорость течения жидкости во всех точках одна и та же: $\bar{v} = const.$ Поток жидкости Π через прямоугольник площади $S,$ расположенный в плоскости, перпендикулярной к скорости $\bar{v},$ будет равен объему прямого параллелепипеда с основанием S и высотой $|\bar{v}|$:

$$\Pi = S|\bar{v}|.$$

Поток жидкости Π через прямоугольник площади $S,$ расположенный в плоскости, нормаль к которой $\bar{n}$ образует со скоростью $\bar{v}$ угол φ, равен объему наклонного параллелепипеда с основанием S и высотой v_n - проекцией скорости $\bar{v}$ на нормаль $\bar{n}$:

$$\Pi = Sv_n.$$

Эта формула для потока жидкости Π верна не только для прямоугольника, но и для любой площадки, расположенной в плоскости, нормаль к которой образует тот же угол φ со скоростью $\bar{v}$.



Перейдем теперь к общему случаю. Пусть в некоторой пространственной области задано поле скоростей текущей жидкости, определяемое векторной функцией (*). Возьмем некоторую поверхность σ. Требуется вычислить поток жидкости через эту поверхность, т.е. количество жидкости Π, протекающей за единицу времени через данную поверхность.

Разобьем σ произвольным образом на n элементарных площадок $\Delta\sigma_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, площади которых также обозначим $\Delta\sigma_i$. На каждой площадке выберем по произвольной точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Будем считать эти площадки плоскими и что в пределах каждой площадки скорость жидкости постоянна и равна скорости $\bar{v}_i = \bar{v}(x_i, y_i, z_i)$.

Количество жидкости, протекающей через $\Delta\sigma_i$ за единицу времени, приближенно равно произведению $v_{ni}\Delta\sigma_i$, где v_{ni} - проекция скорости $\bar{v}_i$ на ось, определяемую единичным вектором нормали $\bar{n}_i(\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$ к поверхности в точке M_i, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ - углы, образованные нормалью $\bar{n}_i$ с координатными осями.

Так как $v_{ni} = (\bar{v}_i \bar{n}_i) = P(x_i, y_i, z_i)\cos\alpha_i + Q(x_i, y_i, z_i)\cos\beta_i + R(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma_i$, то

$$v_{ni}\Delta\sigma_i = [P(x_i, y_i, z_i)\cos\alpha_i + Q(x_i, y_i, z_i)\cos\beta_i + R(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma_i]\Delta\sigma_i.$$

Поток жидкости через всю поверхность приближенно выразится формулой:

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i, z_i)\cos\alpha_i + Q(x_i, y_i, z_i)\cos\beta_i + R(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma_i]\Delta\sigma_i. \tag{1}$$

Точное значение потока жидкости через поверхность σ получим в виде поверхностного интеграла первого рода после перехода к пределу интегральной суммы (1), когда $\max diam\Delta\sigma_i \to 0$:

$$\Pi = \iint_{\sigma} [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]d\sigma. \tag{2}$$

Чтобы получить точное значение потока жидкости через поверхность σ в виде общего поверхностного интеграла второго рода преобразуем интегральную сумму (1). Произведения $\cos\alpha_i\Delta\sigma_i$, $\cos\beta_i\Delta\sigma_i$, $\cos\gamma_i\Delta\sigma_i$ являются проекциями элементарной площадки $\Delta\sigma_i$ соответственно на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy. Обозначим эти проекции через $(\Delta\sigma_{yz})_i$, $(\Delta\sigma_{xz})_i$, $(\Delta\sigma_{xy})_i$, то есть

$$(\Delta\sigma_{yz})_i = \cos\alpha_i\Delta\sigma_i, \quad (\Delta\sigma_{xz})_i = \cos\beta_i\Delta\sigma_i, \quad (\Delta\sigma_{xy})_i = \cos\gamma_i\Delta\sigma_i. \tag{3}$$

Площади проекций берутся со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, образует нормаль $\bar{n}_i$ с соответствующей осью острый или тупой угол.

С учетом (3) формула (1) принимает вид:

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i, z_i)(\Delta\sigma_{yz})_i + Q(x_i, y_i, z_i)(\Delta\sigma_{xz})_i + R(x_i, y_i, z_i)(\Delta\sigma_{xy})_i\right] \tag{4}$$

Точное значение потока жидкости через поверхность σ получим в виде общего поверхностного интеграла второго рода после перехода к пределу интегральной суммы (4), когда $\max diam\Delta\sigma_i \to 0$:

$$\Pi = \iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy. \tag{5}$$

Гидромеханический смысл общего поверхностного интеграла второго рода состоит в том, что он равен потоку жидкости через поверхность σ, если $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – проекции скорости жидкости $\bar{v}(x,y,z)$.

Поскольку левые части формул (2) и (5) одинаковы, то, приравняв правые части, получим формулу, связывающую поверхностные интегралы первого и второго рода:

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma.$$

Свойства поверхностного интеграла второго рода

Свойства такие же, как у двойного интеграла, только поверхностный интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности, так как при изменении стороны поверхности направляющие косинусы нормали меняют знаки на обратные.

Вычисление поверхностных интегралов второго рода

Пусть σ задается уравнением $z=\varphi(x,y)$, σ_{xy} – проекция σ на плоскость Oxy.

Тогда
$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\sigma_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy \qquad (*)$$

для верхней стороны поверхности, т.е. в случае, когда $\cos\gamma > 0,$, где γ – угол между нормалью к поверхности и осью Oz,

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{\sigma_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy \qquad (**)$$

для нижней стороны поверхности, т.е. в случае, когда $\cos\gamma < 0.$

Покажем справедливость формул $(*)$ и $(**.)$

По определению:

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\max diam\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(x_i,y_i,z_i)(\Delta\sigma_{xy})_i,$$

где $(\Delta\sigma_{xy})_i$ – величина проекции элементарной области $\Delta\sigma_i$ на плоскость $Oxy,$ т.е. площадь области, в которую проектируется $\Delta\sigma_i$ на плоскость $Oxy,$ взятая со знаком +, если нормаль к поверхности в точке $M_i(x_i,y_i,z_i)$ образует с осью Oz острый угол, и со знаком –, если этот угол тупой.

Поскольку $\sum_{i=1}^{n} R(x_i,y_i,z_i)(\Delta\sigma_{xy})_i = \sum_{i=1}^{n} R[x_i,y_i,\varphi(x_i,y_i)](\Delta\sigma_{xy})_i,$

то, переходя к пределу при $\max diam\Delta\sigma_i \to 0,$ получаем:

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\sigma_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy$$

для верхней стороны поверхности;

$$\iint_{\sigma} R(x,u,z)dxdy = -\iint_{\sigma_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]dxdy$$

для нижней стороны поверхности.

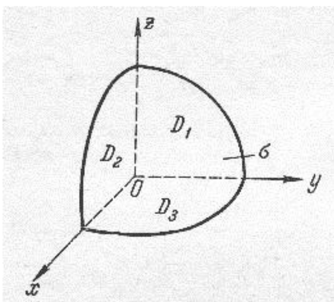
Аналогично вычисляются поверхностные интегралы второго рода $\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz$ и $\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz.$

Складывая результаты вычислений всех трех поверхностных интегралов второго рода, получим общий поверхностный интеграл второго рода.

Пример. Вычислить интеграл

$$\iint_{\sigma} xdydz + dxdz + xz^2 dxdy,$$

где σ – внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1,$ заключенной в первом октанте.



$$I_1=\iint_\sigma xdydz=\iint_{D_1}\sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdr=\frac{\pi}{6},$$

$$I_2=\iint_\sigma dxdz=\iint_{D_2}dxdz=\frac{\pi}{4},$$

$$I_3=\iint_\sigma xz^2dxdy=\iint_{D_3}x\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int_0^1 r\left(1-r^2\right)rdr=\frac{2}{15},$$

$$I=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{2}{15}=\frac{5\pi}{12}+\frac{2}{15}.$$

Лекция 19

Формула Стокса

Мы уже знакомы с формулой английского физика и математика Грина, связывающей двойной интеграл по некоторой плоской области D и общий криволинейный интеграл второго рода по границе L этой области.

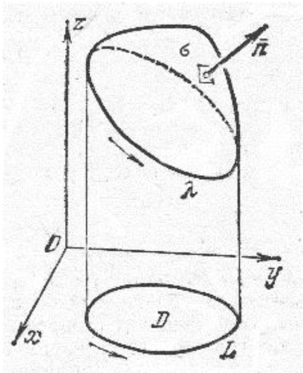
Другой английский физик и математик Стокс вывел формулу, являющуюся обобщением формулы Грина, а, именно, вывел формулу, связывающую поверхностный интеграл первого рода по некоторой поверхности σ и общий криволинейный интеграл второго рода по границе λ этой поверхности σ ($\lambda-$ пространственная кривая).

Теорема. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, то имеет место формула:

$$\iint_\sigma\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=\oint_\lambda Pdx+Qdy+Rdz, \tag{*}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности σ, а λ – граница поверхности.

Формула (*) называется формулой Стокса. Направление интегрирования положительное.



Доказательство. Доказательство теоремы производится путем сведения интеграла по поверхности сначала к двойному интегралу, а затем при помощи формулы Грина к криволинейному.

Предположим сначала, что поверхность σ пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz, не более, чем в одной точке, и пусть $z = z(x, y)$ – уравнение этой поверхности. Преобразуем поверхностный интеграл $I = \iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma,$ считая, что σ – верхняя сторона поверхности; при этом условии $\cos\gamma > 0.$

Когда мы занимались вычислением площади поверхности с помощью двойного интеграла, мы установили, что нормальный вектор к верхней стороне поверхности имеет проекции: $-z'_x, -z'_y, 1.$ Так как направляющие косинусы пропорциональны соответствующим проекциям, то

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{-z'_y}{1} = -z'_y \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = -z'_y\cos\gamma, \quad \text{и поэтому}$$

$$I = -\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}z'_y\right)\cos\gamma\, d\sigma.$$

Приведем этот поверхностный интеграл к двойному. Для этого нужно в подынтегральной функции заменить переменную z ее выражением через x и y согласно уравнению поверхности $z = z(x, y).$ Но при этом подынтегральная функция окажется равной частной производной по y от сложной функции, получающейся из $P(x, y, z)$ после подстановки $z(x, y)$ вместо $z.$

Действительно, $\frac{\partial}{\partial y}P[x,y,z(x,y)]=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}z'_y.$

Таким образом, $I=-\iint\limits_D\frac{\partial P[x,y,z(x,y)]}{\partial y}dxdy,$

где D – проекция поверхности σ на плоскость Oxy.

Применяем формулу Грина:

$I=\oint\limits_L P[x,y,z(x,y)]dx,$ где L – граница области D.

Но $\oint\limits_L P[x,y,z(x,y)]dx=\oint\limits_\lambda P(x,y,z)dx,$ так как на линии λ имеем $z=z(x,y),$ где x и y – координаты точек линии $L,$ являющейся проекцией линии λ на плоскость Oxy. Итак,

$$I=\iint\limits_\sigma\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma=\oint\limits_\lambda Pdx. \qquad (1)$$

Полученная формула верна и для поверхностей более сложного вида. Для доказательства этого нужно сложную поверхность разбить на более простые и к каждой из них применить полученную формулу.

Аналогично доказывается справедливость еще двух соотношений (доказать самим, выбирая каждый раз уравнение поверхности в подходящем виде):

$$\iint\limits_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)d\sigma=\oint\limits_\lambda Qdy, \qquad (2)$$

$$\iint\limits_\sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)d\sigma=\oint\limits_\lambda Rdz. \qquad (3)$$

Сложив почленно (1), (2) и (3), мы получим доказываемую формулу Стокса (*).

Воспользовавшись формулой, связывающей поверхностные интегралы первого и второго рода, левую часть формулы Стокса можно представить в виде общего поверхностного интеграла второго рода и тогда формула Стокса примет вид:

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\lambda} Pdx+Qdy+Rdz. \qquad (**)$$

Если поверхность σ есть кусок плоскости, параллельной плоскости Oxy, то мы получим формулу Грина как частный случай формулы Стокса.

Из формулы Стокса следует, что если

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0, \qquad (4)$$

то общий криволинейный интеграл второго рода по любой пространственной замкнутой кривой λ равен нулю:

$$\oint_{\lambda} Pdx+Qdy+Rdz=0. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что в этом случае общий криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы кривой интегрирования.

Для выполнения равенства (5) условия (4) являются и достаточными, и необходимыми.

При выполнении (4) $Pdx+Qdy+Rdz=dU(x,y,z)$, и, следовательно,

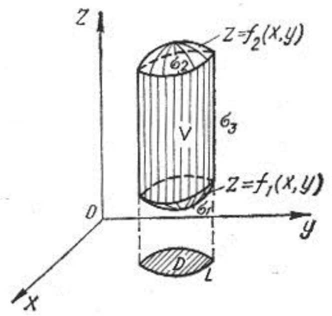
$$\int_{(M)}^{(N)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(M)}^{(N)} dU=U(N)-U(M).$$

Это доказывается так же как соответствующая формула для функции двух переменных.

Формула Остроградского

Формула знаменитого русского математика Михаила Васильевича Остроградского связывает тройной интеграл по пространственной области V с поверхностным интегралом первого рода по границе этой пространственной области σ.

Пусть в пространстве задана правильная трехмерная область V, ограниченная замкнутой поверхностью σ и проектирующаяся на плоскость Oxy в правильную двумерную область D, ограниченную плоской линией L. Мы предположим, что поверхность σ можно разбить на три части $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ так, что уравнения первых двух имеют вид $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$, где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – функции, непрерывные в области D, а σ_3 есть цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz и направляющей L.



Теорема. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своим частными производными первого порядка в области V, то имеет место формула:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_\sigma [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma] d\sigma, \qquad (*)$$

где σ – граница области V и интегрирование по σ производится по ее внешней стороне.

Формула (*) называется формулой Остроградского.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $I = \iiint\limits_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dxdydz.$

Произведем сначала интегрирование по z:

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_D R(x, y, f_2(x, y)) dxdy - \iint\limits_D R(x, y, f_1(x, y)) dxdy.$$

Так как плоская область D является проекцией на плоскость Oxy и поверхности σ_2, и поверхности σ_1, то двойные интегралы в правой части служат выражениями для интегралов $\iint R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma,$ взятых по верхним сторонам этих поверхностей. Значит,

$$I = \iint_{\sigma_2^+} R\cos\gamma\, d\sigma - \iint_{\sigma_1^+} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{\sigma_2^+} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_1^-} R\cos\gamma\, d\sigma.$$

Для удобства дальнейших формул последнее равенство перепишем, прибавив к правой части $\iint_{\sigma_3} R\cos\gamma\, d\sigma = 0$ (т.к. на поверхности σ_3 $\cos\gamma = 0$):

$$I = \iint_{\sigma_2^+} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_1^-} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} R\cos\gamma\, d\sigma.$$

Так как верхняя сторона σ_2, нижняя сторона σ_1 и внешняя сторона σ_3 являются внешними сторонами всей поверхности σ, то

$$I = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma. \tag{1}$$

Аналогично:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint_\sigma Q\cos\beta\, d\sigma, \tag{2}$$

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint_\sigma P\cos\alpha\, d\sigma. \tag{3}$$

Складывая формулы (1), (2), (3), получим формулу Остроградского (*).

Воспользовавшись формулой, связывающей поверхностные интегралы первого и второго рода, правую часть формулы Остроградского можно представить в виде общего поверхностного интеграла второго рода и тогда формула Остроградского примет вид:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \tag{**}$$

где σ – граница области V и интегрирование по σ производится по ее внешней стороне.

III. Теория поля

Лекция 20

Скалярное поле. Поверхности уровня

Предположим, что в каждой точке M некоторой области D нам задано значение скалярной физической величины U, т.е. такой величины, которая полностью характеризуется своим числовым значением. Например, это может быть температура точек неравномерно нагретого тела, плотность распределения электрических зарядов в изолированном наэлектризованном теле, потенциал электрического поля и т.д. При этом U называется скалярной функцией точки; записывается это так: $U = U(M)$.

Область D, в которой определена функция $U(M)$, может совпадать со всем пространством, а может являться некоторой его частью.

Определение. Если в области D задана скалярная функция точки $U(M)$, то говорят, что в этой области задано скалярное поле.

Пока мы будем считать, что скалярное поле стационарное, т.е. что величина $U(M)$ не зависит от времени t. Но бывают и нестационарные поля. Тогда величина U будет зависеть не только от точки M, но и от времени t.

Если скалярное поле отнесено к системе координат $0xyz$, то задание точки M равносильно заданию ее координат x, y, z и тогда функцию $U(M)$ можно записать в обычном виде функции трех переменных: $U(x, y, z)$. Мы пришли , таким образом, к физическому толкованию функции трех переменных.

Определение. Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек, в которых функция U принимает постоянное значение, т.е. $U(x, y, z) = C.$

Уравнение поверхности уровня, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, записывается так:

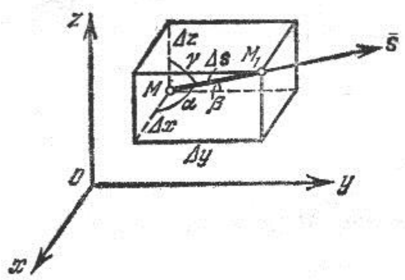
$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0).$$

Если в частном случае скалярное поле плоское, т.е. мы изучаем распределение физической величины в какой-то плоской области, то функция U зависит от двух переменных, например x и y. Линиями уровня этого поля будут линии уровня функции $U(x, y)$: $U(x, y) = C.$

Производная по направлению

Важной характеристикой скалярного поля является скорость изменения поля в заданном направлении.

Пусть в области D задано скалярное поле, т.е. задана функция $U(x, y, z)$. Возьмем точку $M(x, y, z)$ и проведем из нее вектор $\bar{S}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. На векторе $\bar{S}$, на расстоянии ΔS от его начала, рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Таким образом, $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Будем предполагать, что функция $U(x, u, z)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по своим аргументам в области D.



Полное приращение функции $U(x, y, z)$ можно представить так:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \tag{1}$$

где $\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta S \to 0$. Разделим все члены равенства (1) на ΔS:

$$\frac{\Delta U}{\Delta S}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta S}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta S}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta S}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta S}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta S}+\varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta S}. \tag{2}$$

Но: $\frac{\Delta x}{\Delta S}=\cos\alpha,\quad \frac{\Delta y}{\Delta S}=\cos\beta,\quad \frac{\Delta z}{\Delta S}=\cos\gamma.$ Следовательно,

$$\frac{\Delta U}{\Delta S}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma. \tag{3}$$

Предел отношения $\frac{\Delta U}{\Delta S}$ при $\Delta S\to 0$ называется производной от функции $U=U(x,y,z)$ в точке (x,y,z) по направлению вектора $\bar{S}$ и обозначается $\frac{\partial U}{\partial S}$, т.е. $$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta S}=\frac{\partial U}{\partial S}. \tag{4}$$

Таким образом, переходя к пределу в (3), получим:

$$\frac{\partial U}{\partial S}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что , зная частные производные, легко найти производную по любому направлению $\bar{S}.$ Сами частные производные являются частными случаями производной по направлению. Так, например, при $\alpha=0,\quad \beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$ получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial S}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos 0+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Подобно тому как частные производные U'_x,U'_y,U'_z характеризуют скорость изменения функции U в направлении осей координат, так и производная по направлению U'_S будет являться скоростью изменения функции $U(x,y,z)$ в точке M по направлению вектора $\bar{S}.$ Абсолютная величина производной U'_S определяет величину скорости, а знак производной U'_S – характер изменения функции U (возрастание или убывание).

Если поле плоское, то направление вектора $\bar{S}$ вполне определяется углом α его наклона к оси абсцисс. Формулу для производной по направлению в случае плоского поля можно получить из общей формулы, положив $\gamma=\frac{\pi}{2}$ и $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha.$ Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial S}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha.$$

Градиент

В каждой точке области $D,$ в которой задана функция $U=U(x,y,z),$ определим вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных $\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$grad\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}. \qquad (1)$$

Этот вектор называется градиентом функции $U(x,y,z).$ Вместо символа $grad\,U$ можно использовать символ $\nabla U.$

Подчеркнем, что проекции градиента зависят от выбора точки $M(x,y,z)$ и изменяются с изменением координат этой точки. Таким образом, каждой точке скалярного поля, определяемого функцией поля $U(x,y,z),$ соответствует определенный вектор – градиент этой функции. Говорят, что в области D определено векторное поле градиентов.

Следующая теорема устанавливает связь между градиентом и производной по направлению.

Теорема. Пусть дано скалярное поле $U=U(x,y,z)$ и определено в нем поле градиентов: $grad\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.$ Производная $\frac{\partial U}{\partial S}$ по направлению некоторого вектора $\bar{S}$ равняется проекции вектора $grad\,U$ на вектор $\bar{S},$ т.е. $\frac{\partial U}{\partial S}=np_{\bar{S}}\,grad\,U.$

Доказательство. Рассмотрим единичный вектор $\bar{S}_0,$ соответствующий вектору $\bar{S}$: $\bar{S}_0=\bar{i}\cos\alpha+\bar{j}\cos\beta+\bar{k}\cos\gamma.$

Вычислим скалярное произведение векторов $grad\,U$ и $\bar{S}_0$:

$$\left(gradU, \bar{S}_0\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть производная от функции $U(x, y, z)$ по направлению вектора $\bar{S}$. Следовательно, мы можем написать: $\left(gradU, \bar{S}_0\right) = \frac{\partial U}{\partial S}$.

Если обозначим угол между векторами $gradU$ и $\bar{S}_0$ через φ, то можем написать:

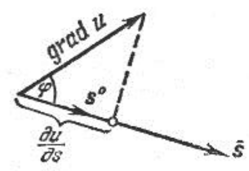
$$|gradU|\cos\varphi = \frac{\partial U}{\partial S} \qquad (3)$$

или

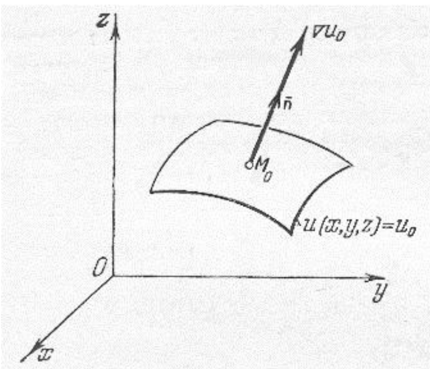
$$np_{\bar{S}_0}\, gradU = \frac{\partial U}{\partial S}. \qquad (4)$$

Теорема доказана.

Из (4) следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$. Это наибольшее значение равно $|gradU|$.



Итак, $|gradU|$ есть наибольшее возможное значение производной $\frac{\partial U}{\partial S}$ в данной точке M, а направление $gradU$ совпадает с направлением вектора с началом в точке M, вдоль которого функция растет быстрее всего, т.е. направление градиента есть направление наискорейшего возрастания функции. Ясно, что в противоположном направлении функция U будет быстрее всего убывать.



Следующая теорема устанавливает связь между направлением градиента функции и поверхностями уровня скалярного поля.

Теорема. Направление градиента функции $U(x, y, z)$ в каждой точке совпадает с направлением нормали к поверхности уровня скалярного поля, проходящей через эту точку.

Эту теорему примем без доказательства.

Таким образом, градиент в каждой точке перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня, проходящей через данную точку, т.е. его проекция на эту плоскость равна нулю. Следовательно, производная по любому направлению, касательному к поверхности уровня, проходящей через данную точку, равна нулю.

Свойства градиента функции

1) $grad(U_1 + U_2) = gradU_1 + gradU_2.$

В самом деле, $grad(U_1 + U_2) = \frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial z}\bar{k} =$

$$= \frac{\partial U_1}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\bar{k} + \frac{\partial U_2}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U_2}{\partial z}\bar{k} = gradU_1 + gradU_2.$$

2) $grad(CU_1) = CgradU_1,$ где C – постоянная.

$$grad(CU_1) = \frac{\partial(CU_1)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(CU_1)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial(CU_1)}{\partial z}\bar{k} = C\frac{\partial U_1}{\partial x}\bar{i} + C\frac{\partial U_1}{\partial y}\bar{j} + C\frac{\partial U_1}{\partial z}\bar{k} =$$

$$= C\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\bar{k}\right) = CgradU_1.$$

3) $grad(U_1 \cdot U_2) = U_2 gradU_1 + U_1 gradU_2.$

$$grad(U_1 \cdot U_2) = \frac{\partial(U_1 \cdot U_2)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(U_1 \cdot U_2)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial(U_1 \cdot U_2)}{\partial z}\bar{k} = U_2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\bar{k}\right) +$$

$$+ U_1\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U_2}{\partial z}\bar{k}\right) = U_2 gradU_1 + U_1 gradU_2.$$

4) $grad\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \frac{U_2 gradU_1 - U_1 gradU_2}{U_2^2} \qquad (U_2 \neq 0).$

$$grad\left(\frac{U_1}{U_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)\bar{k}=\frac{U_2\frac{\partial U_1}{\partial x}-U_1\frac{\partial U_2}{\partial x}}{U_2^2}\bar{i}+$$

$$+\frac{U_2\frac{\partial U_1}{\partial y}-U_1\frac{\partial U_2}{\partial y}}{U_2^2}\bar{j}+\frac{U_2\frac{\partial U_1}{\partial z}-U_1\frac{\partial U_2}{\partial z}}{U_2^2}\bar{k}=\frac{U_2 gradU_1-U_1 gradU_2}{U_2^2}.$$

5) $grad\, f(U)=f'(U)gradU.$

$$grad\; f(U)=\frac{\partial}{\partial x}[f(U)]\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}[f(U)]\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}[f(U)]\bar{k}=$$

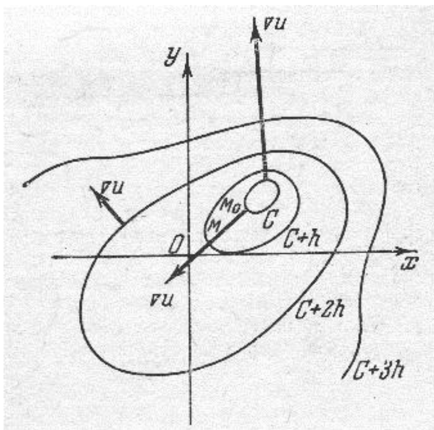
$$=f'(U)\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+f'(U)\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}+f'(U)\frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}=f'(U)gradU.$$

Перечисленные свойства градиента показывают, что правила его отыскания совпадают с правилами отыскания производной функции.

Пример 1. Пусть $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – расстояние от точки до начала координат. Тогда

$$grad\, r=\frac{\partial r}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\bar{k}=\frac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{r}=\frac{\bar{r}}{r}.$$

$grad\, r$ направлен по радиусу-вектору $\bar{r}$, и модуль его равен единице.



Пример 2. Пусть скалярное поле определено функцией $\frac{q}{r}$, где r определено в примере 1. Тогда по свойству 5)

$$grad\,\frac{q}{r}=-\frac{q}{r^2}\,grad\, r=-\frac{q}{r^3}\bar{r}.$$

В плоском поле $U=U(x,y)$ градиент $grad\, U=\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}$ лежит в плоскости Oxy и перпендикулярен к линии уровня.

Если в плоском поле построена достаточно густая сетка линий уровня, то можно с некоторым приближением графически определить модуль и направление градиента. Направление градиента будет перпендикулярно к линии уровня. Производная в этом направлении будет при достаточно малом h приближенно равна

$$\frac{\partial U}{\partial S} \approx \frac{U(M)-U(M_0)}{M_0M} = \frac{h}{M_0M},$$

где M_0 – точка линии уровня $U(x,y)=C,$ а M – точка линии уровня $U(x,y)=C+h.$ Величина h известна, а длина отрезка M_0M может быть измерена на чертеже как расстояние по нормали между соседними линиями уровня. Производная же по направлению градиента равна его модулю, и поэтому

$$|\,gradU\,| \approx \frac{h}{M_0M} = tg\theta$$

(θ характеризует крутизну подъема).

Лекция 21

Векторное поле. Векторные линии

Если в каждой точке M области D задан определенный вектор $\overline{A}(M),$ то будем говорить, что в этой области задано векторное поле.

Мы будем рассматривать стационарные поля, в которых вектор $\overline{A}(M)$ зависит только от точки M и не зависит от времени. Проекции вектора $\overline{A}(M)$ на оси координат обозначим через A_x, A_y, A_z. Если точка M имеет координаты x,y,z то и сам вектор $\overline{A}(M)$ и его проекции будут функциями этих координат и мы можем записать:

$$\overline{A}(M) = A_x(x,y,z)\overline{i} + A_y(x,y,z)\overline{j} + A_z(x,y,z)\overline{k}.$$

Дальше всюду предполагается, что функции A_x, A_y, A_z непрерывны вместе со своими частными производными.

Некоторые частные случаи векторных полей.

1. Однородное поле. Векторное поле называется однородным, если $\overline{A}(M)$ – постоянный вектор, т.е. A_x, A_y, A_z – постоянные величины. Примером однородного поля может служить поле силы тяжести.

2. Плоские поля. Если в выбранной системе координат проекции вектора не зависят от одной из трех переменных x, y, z и одна из проекций равна нулю, например:

$$\overline{A}(M) = A_x(x, y)\overline{i} + A_y(x, y)\overline{j},$$

то поле называется плоским. С плоскими полями очень часто приходится встречаться в гидродинамике при изучении плоских течений жидкости, т.е. таких течений, когда все частицы жидкости движутся параллельно некоторой плоскости, причем скорости частиц, расположенных на одной и той же прямой, перпендикулярной к этой плоскости, одинаковы.

Векторной линией векторного поля называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора, соответствующего этой точке. Векторные линии в конкретных полях имеют ясный физический смысл. Так, если мы рассматриваем поле скоростей текущей жидкости, то векторные линии есть линии тока этой жидкости, т.е. линии, по которым движутся частицы жидкости.

Поток вектора

Пусть векторное поле образовано вектором

$$\overline{A}(M) = A_x\,\overline{i} + A_y\,\overline{j} + A_z\,\overline{k}.$$

Возьмем в этом поле некоторую поверхность σ и выберем на ней определенную сторону. Обозначим через $\overline{n}$ единичный вектор нормали к рассматриваемой стороне поверхности в произвольной ее точке; проекциями вектора $\bar{n}$ служат направляющие косинусы нормали

$$\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}.$$

Рассмотрим поверхностный интеграл по поверхности σ от скалярного произведения вектора поля $\bar{A}(M)$ на единичный вектор нормали $\bar{n}$:

$$\iint_\sigma \left(\bar{A}(M), \bar{n}\right) d\sigma = \iint_\sigma \left(A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma\right) d\sigma. \qquad (*)$$

Если $\bar{A}(M)$ – поле скоростей текущей жидкости, то, как мы ранее установили, интеграл (*) выражает поток жидкости через поверхность σ.

В произвольном векторном поле интеграл (*) будем называть потоком вектора через поверхность σ и обозначать буквой K:

$$K = \iint_\sigma \left(\bar{A}(M), \bar{n}\right) d\sigma.$$

Таким образом, вычисление потока вектора сводится к вычислению интеграла по поверхности. Из определения следует, что K – величина скалярная. Если изменить направление нормали $\bar{n}$ на противоположное, то есть переменить сторону поверхности σ, то поток K изменит знак. Так как $\left(\bar{A}(M), \bar{n}\right) = A_n(M)$ – проекции вектора $\bar{A}(M)$ на направление $\bar{n}$, то можно записать $K = \iint_\sigma A_n(M) d\sigma$. Отсюда следует, что если на некотором участке поверхности $A_n(M) = A_n = const,$ то поток через такой участок равен $A_n Q,$ где Q – площадь этого участка поверхности.

Особый интерес представляет случай, когда σ – замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область V. Если берется внешняя нормаль, то мы будем говорить о потоке изнутри поверхности σ. Он обозначается так: $K = \oiint_\sigma A_n(M) d\sigma.$

Когда векторное поле $\bar{A}(M)$ представляет поле скоростей текущей жидкости, величина потока K дает разность между количеством

жидкости, вытекающей из области V, и количеством жидкости, втекающей в эту область.
Если $K = 0$, то в область V жидкости втекает столько же, сколько и вытекает. Так, например, будет для любой области, расположенной в потоке воды, текущей в реке.

Если же величина K отлична от нуля, например, положительна, то из области V жидкости вытекает больше, чем втекает. Это означает, что в области V имеются источники, питающие поток жидкости. Наоборот, если величина K отрицательна, то это указывает на наличие стоков – мест, где жидкость удаляется из потока.

Дивергенция

Рассмотрим некоторую точку M векторного поля $\overline{A}(M)$ и окружим ее замкнутой поверхностью σ, целиком содержащейся в поле. Вычислим поток вектора через поверхность σ и возьмем отношение этого потока к объему V области V, ограниченной поверхностью σ:

$$\frac{\oint\!\!\oint_{\sigma} \left(\overline{A}(M), \overline{n}\right) d\sigma}{V}.$$

В поле скоростей текущей жидкости это отношение определяет количество жидкости, возникающее в единицу времени в области V, отнесенное к единице объема, то есть, как говорят, среднюю объемную мощность источника; если поток изнутри поверхности σ меньше нуля, то соответственно говорят о средней объемной мощности стока.

Найдем теперь предел отношения

$$\lim_{\sigma \to M} \frac{\oint\!\!\oint_{\sigma} A_n(M) d\sigma}{V}$$

при условии, что σ стягивается в точку M, при этом $V \to 0$.

Если этот предел положителен, то точка M называется источником, а если отрицателен, то стоком. Сама величина предела характеризует мощность источника или стока. В первом случае в любом бесконечно малом объеме, окружающем точку M жидкость возникает, а во втором случае исчезает. Предел этот называется дивергенцией (расходимостью) векторного поля в точке M.

Дивергенцию поля обозначают символом $div\bar{A}(M)$.

Таким образом, $div\bar{A}(M) = \lim\limits_{\sigma \to M} \dfrac{\oint\!\!\oint_{\sigma} A_n(M) d\sigma}{V}$,

где предел вычисляется при условии, что вся поверхность стягивается в точку M.

Теорема. Дивергенция векторного поля $\bar{A}(M) = A_x \,\bar{i} + A_y \,\bar{j} + A_z \,\bar{k}$

выражается формулой $div\bar{A}(M) = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$,

где значения частных производных берутся в точке M.

Доказательство. По формуле Остроградского поток вектора K можно представить в виде:

$$\oint\!\!\oint_{\sigma} \left(\bar{A}(M), \bar{n}\right) d\sigma = \oint\!\!\oint_{\sigma} \left(A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma\right) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Тройной интеграл по теореме о среднем равен произведению объема V на значение подынтегральной функции в некоторой точке M_1 области V, то есть

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dxdydz = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_{M_1} \cdot V.$$

Если σ стягивается в точку M, то точка $M_1 \to M$, и мы получаем:

$$div\overline{A}(M)=\lim_{M_1\to M}\frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{M_1}\cdot V}{V}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Что и требовалось доказать.

Пользуясь выражением для дивергенции, теорему Остроградского можно сформулировать в векторной форме:

$$\oiint\limits_{\sigma}\left(\overline{A}(M),\overline{n}\right)d\sigma=\iiint\limits_{V}div\overline{A}(M)dV.$$

Поток вектора изнутри замкнутой поверхности равен тройному интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции поля. Векторная форма теоремы Остроградского выражает в поле скоростей текущей жидкости тот очевидный факт, что поток жидкости изнутри замкнутой поверхности равен суммарной мощности всех источников и стоков, расположенных внутри поверхности. Если в частности дивергенция во всех точках равна нулю, то равен нулю и поток через любую замкнутую поверхность.

Свойства дивергенции

1. $div\left[C_1\overline{A}_1(M)+C_2\overline{A}_2(M)\right]=C_1div\overline{A}_1(M)+C_2div\overline{A}_2(M),$

где C_1 и C_2 – скалярные постоянные.

Пусть $\overline{A}_1(M)=A_{1x}\,\overline{i}+A_{1y}\,\overline{j}+A_{1z}\,\overline{k},\quad \overline{A}_2(M)=A_{2x}\,\overline{i}+A_{2y}\,\overline{j}+A_{2z}\,\overline{k}.$

Тогда $C_1\overline{A}_1(M)+C_2\overline{A}_2(M)=(C_1A_{1x}+C_2A_{2x})\overline{i}+\left(C_1A_{1y}+C_2A_{2y}\right)\overline{j}+(C_1A_{1z}+C_2A_{2z})\overline{k}.$

Поэтому

$$div\left[C_1\overline{A}_1(M)+C_2\overline{A}_2(M)\right]=C_1\frac{\partial A_{1x}}{\partial x}+C_2\frac{\partial A_{2x}}{\partial x}+C_1\frac{\partial A_{1y}}{\partial y}+C_2\frac{\partial A_{2y}}{\partial y}+C_1\frac{\partial A_{1z}}{\partial z}+C_2\frac{\partial A_{2z}}{\partial z}=$$

$$=C_1div\overline{A}_1(M)+C_2div\overline{A}_2(M).$$

2. Пусть $\overline{A}(M)$ – функция, определяющая векторное поле, а $U(M)$ – скалярное. Тогда

$$div\left[U(M)\cdot\overline{A}(M)\right]=U(M)div\overline{A}(M)+\left(gradU(M),\overline{A}(M)\right).$$

Действительно, $U(M)\cdot\overline{A}(M)=UA_x\,\overline{i}+UA_y\,\overline{j}+UA_z\,\overline{k}$.

Значит,

$$div\left[U(M)\cdot\overline{A}(M)\right]=\frac{\partial(UA_x)}{\partial x}+\frac{\partial(UA_y)}{\partial y}+\frac{\partial(UA_z)}{\partial z}=U\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+$$

$$+U(M)div\overline{A}(M)+\left(gradU(M),\overline{A}(M)\right).$$

Что и требовалось доказать.

Лекция 22

Циркуляция векторного поля

Пусть векторное поле образовано вектором $\overline{A}(M)=A_x\,\overline{i}+A_y\,\overline{j}+A_z\,\overline{k}$. Возьмем в этом поле некоторую линию λ и выберем на ней определенное направление. Обозначим через $\overline{dS}$ вектор, имеющий направление касательной к линии и по модулю равный дифференциалу длины дуги. Направление касательной считается совпадающим с выбранным направлением на линии. Тогда $\overline{dS}=dx\,\overline{i}+dy\,\overline{j}+dz\,\overline{k}$.

Рассмотрим криволинейный интеграл по линии λ от скалярного произведения векторов $\overline{A}(M)$ и $\overline{dS}$:

$$\int_\lambda\left(\overline{A}(M),\overline{dS}\right)=\int_\lambda A_x dx+A_y dy+A_z dz. \qquad (*)$$

В силовом поле интеграл (*) выражает работу при перемещении материальной точки вдоль линии λ.

Если $\overline{A}(M)$ – произвольное векторное поле, а λ – замкнутый контур, то интеграл (*) носит специальное название – циркуляция вектора и обозначается C:

$$C = \oint_{\lambda} \left(\overline{A}(M), \overline{dS}\right).$$

Так как скалярное произведение $\left(\overline{A}(M), \overline{dS}\right) = A_S(M)dS$, где $A_S(M)$ – проекция вектора поля на направление касательной, а dS – дифференциал длины дуги, то циркуляцию можно записать в виде криволинейного интеграла по длине дуги кривой $C = \oint_{\lambda} A_S(M)dS.$

В поле скоростей текущей жидкости $C = 0$ означает, что в потоке нет замкнутых струек жидкости , т.е. водоворотов.

Ротор векторного поля

Рассмотрим некоторую точку M векторного поля $\overline{A}(M)$ и окружим ее плоским контуром $L,$ целиком содержащимся в поле. Вычислим предел отношения циркуляции по плоскому контуру L к площади $S,$ ограниченной этим контуром

$$\lim_{L \to M} \frac{\oint_{L} A_S \, dS}{S}$$

при условии, что контур L стягивается в точку $M,$ оставаясь в одной и той же плоскости.

Как мы сейчас покажем , этот предел будет зависеть только от выбранной точки M и от направления нормали к плоскости, в которой лежит контур $L.$ После того как нормаль проведена к определенной стороне плоскости, направление обхода контура L вполне определено: именно обход должен совершаться против часовой стрелки, если смотреть из конца нормали. Чтобы вычислить указанный предел, преобразуем выражение для циркуляции, воспользовавшись формулой Стокса:

$$\oint_L A_S\,dS = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz =$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали $\bar{n}$, а D – область, ограниченная контуром L.

Последний интеграл по теореме о среднем равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке M_1 области D на величину S площади этой области.

При стягивании контура L в точку M точка $M_1 \to M$, поэтому получаем:

$$\lim_{L\to M} \frac{\oint_L A_S\,dS}{S} = \lim_{M_1\to M} \frac{\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]_{M_1} \cdot S}{S} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma, \qquad (**)$$

где значения всех частных производных берутся в точке M. Правая часть равенства представляет собой как бы скалярное произведение двух векторов: единичного вектора $\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$ – нормали к плоскости, в которой лежит контур L, и вектора, проекции которого равны

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Последний вектор называется ротором (вихрем) векторного поля и обозначается $rot\,\bar{A}(M)$.

Итак,

$$rot\,\bar{A}(M) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\bar{k}\,.$$

Формулу (**) можно теперь записать:

$$\lim_{L\to M}\frac{\oint\limits_L A_S\,dS}{S}=rot_n A(M),$$

где $rot_n A(M)$ – проекция вектора $rot\,\overline{A}(M)$ на вектор $\overline{n}$.

Этот предел будет наибольшим в том случае, когда направление нормали $\overline{n}$ совпадает с направлением $rot\,\overline{A}(M)$.

Из формулы $rot_n A(M)=\lim\limits_{L\to M}\frac{\oint\limits_L A_S\,dS}{S}$

следует, что правая часть этого равенства может быть принята за определение проекции ротора данного поля на произвольный , но фиксированный единичный вектор $\overline{n}$. Это приводит и к новому определению самого ротора, так как достаточно, например, взять три произвольных ортогональных единичных вектора $\overline{n_1},\overline{n_2},\overline{n_3}$, проекциями на которые, как это хорошо известно, однозначно определяется всякий вектор.

С помощью определения ротора теорему Стокса можно сформулировать в векторной форме:

$$\iint\limits_\sigma\left(rot\,\overline{A}(M),\overline{n}\right)d\sigma=\oint\limits_\lambda\left(\overline{A}(M),\overline{dS}\right).$$

Поток ротора поля через поверхность σ равен циркуляции вектора по границе этой поверхности. Направление интегрирования положительное.

Из векторной формы теоремы Стокса следует, что если две поверхности σ имеют одну и ту же границу λ, то потоки ротора через эти поверхности равны между собой.

Свойства ротора

1. $rot\left[C_1\,\overline{A_1}(M)+C_2\,\overline{A_2}(M)\right]=C_1\,rot\,\overline{A_1}(M)+C_2\,rot\,\overline{A_2}(M),$

где C_1 и C_2 – скалярные постоянные.

$$rot\left[C_1\overline{A_1}(M)+C_2\overline{A_2}(M)\right]=\left[\frac{\partial(C_1A_{1z}+C_2A_{2z})}{\partial y}-\frac{\partial(C_1A_{1y}+C_2A_{2y})}{\partial z}\right]\overline{i}+$$

$$+\left[\frac{\partial(C_1A_{1x}+C_2A_{2x})}{\partial z}-\frac{\partial(C_1A_{1z}+C_2A_{2z})}{\partial x}\right]\overline{j}+\left[\frac{\partial(C_1A_{1y}+C_2A_{2y})}{\partial x}-\frac{\partial(C_1A_{1x}+C_2A_{2x})}{\partial y}\right]\overline{k}=$$

$$=C_1\,rot\,\overline{A_1}(M)+C_2\,rot\,\overline{A_2}(M).$$

2. Если $U(M)$ – скалярная функция, $\overline{A}(M)$ – векторная, то

$$rot\,U\overline{A}=U\,rot\,\overline{A}+[grad\,U,A]$$

$$rot\,U\overline{A}=\left[\frac{\partial(UA_z)}{\partial y}-\frac{\partial(UA_y)}{\partial z}\right]\overline{i}+\left[\frac{\partial(UA_x)}{\partial z}-\frac{\partial(UA_z)}{\partial x}\right]\overline{j}+\left[\frac{\partial(UA_y)}{\partial x}-\frac{\partial(UA_x)}{\partial y}\right]\overline{k}=$$

$$=U\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overline{k}\right]+$$

$$+\left(A_z\frac{\partial U}{\partial y}-A_y\frac{\partial U}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(A_x\frac{\partial U}{\partial z}-A_z\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(A_y\frac{\partial U}{\partial x}-A_x\frac{\partial U}{\partial y}\right)\overline{k}=$$

$$=U\,rot\,\overline{A}+\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=U\,rot\,\overline{A}+\left[grad\,U,\overline{A}\right].$$

Лекция 23

Оператор Гамильтона ("набла-вектор")

Введенные нами основные понятия векторного анализа (теории поля): градиент, дивергенция, ротор – удобно представлять с помощью символического вектора ∇ ("набла - вектор"): $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k}$.

Перечислим правила действий с этим вектором.

1. Произведение набла - вектора ∇ на скалярную функцию $U(M)$ дает градиент этой функции:

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = grad\,U.$$

2. Скалярное произведение набла - вектора ∇ на векторную функцию $\bar{A}(M)$ дает дивергенцию этой функции:

$$\left(\nabla, \bar{A}(M)\right) = \nabla \cdot \bar{A}(M) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\left(A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\,\bar{A}(M).$$

3. Векторное произведение набла - вектора ∇ на векторную функцию $\bar{A}(M)$ дает ротор этой функции:

$$\left[\nabla, \bar{A}(M)\right] = \nabla \times \bar{A}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\bar{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\bar{k} = rot\,\bar{A}(M).$$

Таким образом, действия с набла - вектором производятся по обычным правилам действий векторной алгебры, а затем умножение, скажем, $\frac{\partial}{\partial x}$ на скалярную функцию U заменяется производной этой функции по x $\frac{\partial U}{\partial x}$.

Набла - вектор называют еще оператором Гамильтона.

Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называются векторными дифференциальными операциями первого порядка. В них участвуют только первые производные от скалярных функций.

Векторные дифференциальные операции второго порядка

Пусть имеется скалярное поле $U(M)$ и мы нашли градиент этого поля $grad\,U$. Поле градиента является векторным полем, и мы можем искать его дивергенцию и ротор: $div\,grad\,U$ и $rot\,grad\,U$.

Если имеется векторное поле $\overline{A}(M) = A_x\overline{i} + A_y\overline{j} + A_z\overline{k}$, то оно порождает два поля: скалярное поле $div\,\overline{A}(M)$ и векторное поле $rot\,\overline{A}(M)$. Следовательно, мы можем находить градиент первого поля $grad\,div\,\overline{A}(M)$ и дивергенцию и ротор второго поля: $div\,rot\,\overline{A}(M)$ и $rot\,rot\,\overline{A}(M)$.

Всего мы имеем пять векторных дифференциальных операций второго порядка. Особенно важными являются три из них, которые мы рассмотрим подробнее.

а) $div\,grad\,U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$

Действительно, $grad\,U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\overline{k}.$ Образуя дивергенцию этого вектора, мы и получаем написанное равенство. Правая часть его записывается с помощью оператора Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, называется оператором Лапласа от функции U и обозначается ΔU:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Выражение $div\,grad\,U$ можно с помощью набла - вектора записать еще и так:

$$div\,grad\,U = \nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U.$$

Обозначение оператора Лапласа ∇^2 тоже часто употребляется.

б) $rot\,grad\,U = \overline{0}.$

Соотношение это проверяется совсем просто. Каждая скобка в выражении для ротора представляет в этом случае разность вторых смешанных производных функции U, отличающихся лишь порядком дифференцирования, например: $rot_x grad\, U = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0.$

Соотношение б) легко запоминается, если записать его с помощью набла - вектора:

$$rot\, grad\, U = \nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla) U = \overline{0},$$

так как векторное произведение одинаковых "векторов" равно нулю.

в) $div\, rot\, \overline{A}(M) = 0.$

В самом деле,

$$div\, rot\, \overline{A}(M) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} = 0.$$

Если бы мы записали доказываемое соотношение с помощью набла - вектора:

$$div\, rot\, \overline{A}(M) = \nabla \cdot \left(\nabla \times \overline{A}(M)\right),$$

то получили бы смешанное произведение трех "векторов", из которых два вектора одинаковы. Но такое произведение равно нулю.

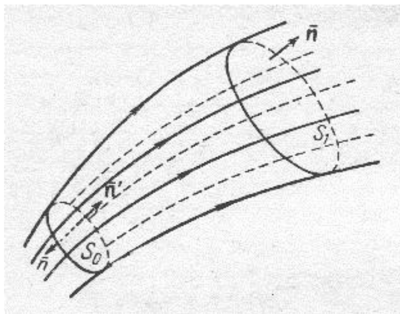
Остальные две векторные операции второго порядка : $grad\, div\, \overline{A}(M)$ и $rot\, rot\, \overline{A}(M)$ – встречаются реже.

Лекция 24

Простейшие векторные поля

Простейшими векторными полями являются такие, для которых либо $div\,\overline{A}(M)=0,$ либо $rot\,\overline{A}(M)=\overline{0},$ либо, наконец, $div\,\overline{A}(M)=0$ и $rot\,\overline{A}(M)=\overline{0}.$ Рассмотрим такие поля подробнее.

I. Трубчатое (соленоидальное) поле.



Векторное поле, для всех точек которого дивергенция равна нулю $div\,\overline{A}(M)=0,$ называется трубчатым или соленоидальным. Поясним смысл этого названия.

Возьмем в поле $\overline{A}(M)$ какую-нибудь площадку S_0 и проведем через каждую точку ее границы векторные линии. Эти линии ограничивают часть пространства, называемую векторной трубкой. Жидкость при своем течении все время движется по такой трубке, не пересекая ее стенок. Рассмотрим часть такой трубки, ограниченную площадкой S_0 и каким-нибудь сечением S_1. Так как по условию $div\,\overline{A}(M)=0,$ то поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю. Следовательно,

$$\iint\limits_S A_n d\sigma+\iint\limits_{S_0} A_n d\sigma+\iint\limits_{S_1} A_n d\sigma=\iiint\limits_V div\,\overline{A}(M)dv=0,$$

где S – боковая поверхность трубки, а $\overline{n}$ – внешняя нормаль.

Так как на боковой поверхности трубки нормали $\overline{n}$ перпендикулярны к векторам поля, то $\iint\limits_S A_n d\sigma=0,$ следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} A_n d\sigma=-\iint\limits_{S_0} A_n d\sigma.$$

Переменив направление нормали на площадке S_0, т.е. взяв внутреннюю нормаль $\overline{n'},$ получим

$$\iint_{S_1} A_n d\sigma = \iint_{S_0} A_{n'} d\sigma.$$

Это значит, что поток вектора в направлении векторных линий через каждое сечение векторной трубки один и тот же, т.е. в поле без источников через каждое сечение векторной трубки протекает одно и то же количество жидкости за единицу времени.

У нас было (формула в)): $div\, rot\, \overline{A}(M) = 0,$ т.е. поле ротора любого векторного поля – трубчатое.

Справедливо и обратное утверждение. Каждое трубчатое поле является полем ротора некоторого векторного поля, т.е. если $div\, \overline{A}(M) = 0,$ то существует такое векторное поле $\overline{B}(M),$ что $\overline{A}(M) = rot\, \overline{B}(M).$ Вектор $\overline{B}(M)$ называют вектором- потенциалом данного поля.

II. Потенциальное (безвихревое) поле.

Если во всех точках поля ротор равен нулевому вектору $rot\, \overline{A}(M) = \overline{0},$ то поле называется потенциальным или безвихревым. Из $rot\, \overline{A}(M) = \overline{0}$ следует, что

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z}. \qquad (*)$$

Написанные равенства представляют условие того, выражение $A_x dx + A_y dy + A_z dz$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$: $A_x dx + A_y dy + A_z dz = dU.$ При этом

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Это значит, что вектор $\overline{A}(M)$ потенциального поля является градиентом скалярного поля: $\overline{A}(M) = grad\, U.$

Функция U называется потенциальной функцией векторного поля или, коротко, потенциалом. Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

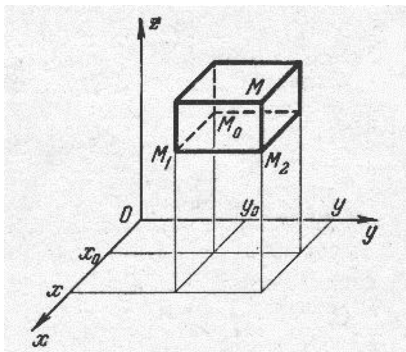
Из формулы б) следует обратное предложение. Поле градиента любой функции $U(x,y,z)$ является потенциальным, а сама функция U – его потенциалом.

В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. При этом предполагается, что контур L можно заключить в односвязную область, во всех точках которой функции A_x, A_y, A_z и их производные непрерывны. С точки зрения течения жидкости равенство нулю циркуляции означает, что в потоке нет замкнутых струек жидкости, т.е. нет водоворотов.

Работа в силовом потенциальном поле равна разности потенциалов в конечной и начальной точках линии L, т.е.

$$\int_{(M_0)}^{(M)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = U(M) - U(M_0). \qquad (**)$$

Изучение потенциального поля значительно облегчается тем, что это поле вполне определяется заданием одной скалярной функции – его потенциала. Проекции вектора поля $\overline{A}(M)$ будут при этом частными производными этой функции по соответствующим координатам. Произвольное же векторное поле требует задания трех скалярных функций – проекций вектора на оси координат.



Величина $U(M_0) = U(x_0, y_0, z_0)$ в формуле (**) играет роль произвольной постоянной. Так как криволинейный интеграл в этой формуле не зависит от пути интегрирования, то мы можем выбрать любой путь для нахождения потенциала $U(M) = U(x,y,z)$. Выберем $M_0 M_1 M_2 M$.

Вдоль $M_0 M_1$: $y = y_0,\ z = z_0,\ dy = 0,\ dz = 0;$

вдоль M_1M_2: $z = z_0,\ dx = 0,\ dz = 0;$

вдоль M_2M: $dx = 0,\ dy = 0.$

Значит, $U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) =$

$$= \int_{x_0}^{x} A_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} A_y(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} A_z(x, y, z)dz.$$

Итак, потенциал $U(x, y, z)$ можно определить по формуле:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} A_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} A_y(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} A_z(x, y, z)dz + C,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – какая-нибудь точка области, C – произвольная постоянная. Во втором интеграле правой части x рассматривается как постоянная, а в третьем – x и y считаются постоянными.

Пример. $dU = (2xyz + \ln y)dx + \left(x^2 z + \dfrac{x}{y}\right)dy + (x^2 y - 2z)dz.$

Выбирая в качестве начальной точки $M_0(0,1,0)$, получим:

$$U(x, y, z) = \int_0^x (2x \cdot 1 \cdot 0 + \ln 1)dx + \int_1^y \left(x^2 \cdot 0 + \frac{x}{y}\right)dy + \int_0^z (x^2 y - 2z)dz + C =$$

$$= \int_1^y \frac{x}{y}dy + \int_0^z (x^2 y - 2z)dz + C = x\ln|y|\Big|_1^y + (x^2 yz - z^2)\Big|_0^z + C = x\ln y + x^2 yz - z^2 + C.$$

Начальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ надо выбирать так, чтобы подынтегральные функции были по возможности более простыми. В рассмотренном примере нельзя было выбирать в качестве начальной точки $(0,0,0)$, так как A_x и A_y в этой точке не определены.

III. Гармоническое поле.

Векторное поле, являющееся одновременно и потенциальным и трубчатым, называется гармоническим. Так как поле является потенциальным, то $\overline{A}(M) = grad\, U,$ где U – потенциал поля. Так как поле еще и трубчатое, то $div\,\overline{A}(M) = div\, grad\, U = 0.$

Согласно формуле а) : $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$

Это уравнение называется уравнением Лапласа. Функции $U,$ подчиняющиеся этому уравнению, называются гармоническими.

IV. Ряды Фурье

Лекция 25

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{1}$$

называется тригонометрическим рядом.

Постоянные числа $a_0, a_n, b_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд (1) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом $2\pi,$ так как $\sin nx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом $2\pi.$

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Дана функция $f(x)$ периодическая с периодом $2\pi.$ При каких условиях для $f(x)$ можно найти тригонометрический ряд, сходящийся к данной функции?

Определение коэффициентов ряда по формулам Фурье

Пусть периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ такова, что она представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi, \pi)$, т.е. является суммой этого ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2}$$

Предположим, что ряд (2) можно почленно интегрировать в промежутке от $-\pi$ до π.

Используем это для вычисления коэффициента a_0. Проинтегрируем обе части равенства (2) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx \right). \tag{3}$$

Вычислим отдельно каждый интеграл, встречающийся в правой части:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx = \frac{a_n \sin nx}{n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx = -\frac{b_n \cos nx}{n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Следовательно, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0$,

откуда
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{4}$$

Для вычисления остальных коэффициентов ряда нам потребуются некоторые определенные интегралы, которые мы и рассмотрим предварительно.

Если n и k – целые числа, то имеют место следующие равенства:

$$\text{если } n \neq k, \text{ то } \quad \left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\text{если же } n = k, \text{ то } \quad \left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Теперь мы можем вычислить коэффициенты a_n и b_n ряда (2).

Для нахождения коэффициента a_n при каком-либо определенном значении $n \neq 0$ умножим обе части равенства (2) на $\cos kx$:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx).$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от $-\pi$ до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx\right).$$

Принимая во внимание формулы (5) и (6), видим, что все интегралы в правой части равны нулю, кроме интеграла с коэффициентом a_k.

Следовательно, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k \pi,$

откуда $$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx. \qquad (7)$$

Умножая обе части равенства (2) на $\sin kx$ и снова интегрируя от $-\pi$ до $\pi,$ найдем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = b_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = b_k \pi,$$

откуда $$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx. \qquad (8)$$

Заменив в формулах (4), (7) и (8) k на $n,$ получим так называемые коэффициенты Фурье для функции $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

а тригонометрический ряд (1) с такими коэффициентами называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Возвратимся теперь к вопросу : какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходился и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках?

Ответ на этот вопрос дает соответствующая теорема.

Прежде, чем сформулировать эту теорему, запишем такое определение: функция $f(x)$ называется кусочно монотонной на отрезке $[a,b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на интервалы $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ так, что на каждом из интервалов функция монотонна, т.е. либо невозрастающая, либо неубывающая.

Из этого определения следует, что если функция $f(x)$ кусочно монотонная и ограниченная на отрезке $[a,b]$, то она может иметь только точки разрыва первого рода. Действительно, если $x=c$ есть точка разрыва функции $f(x)$, то в силу монотонности функции существуют пределы:

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0), \quad \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0),$$

то есть точка c есть точка разрыва первого рода.

Сформулируем теперь теорему, дающую достаточные условия представимости функции $f(x)$ рядом Фурье.

Теорема. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно монотонная и ограниченная на отрезке $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева, т.е. если $x=c$ – точка разрыва функции $f(x)$, то $S(x)\big|_{x=c} = \dfrac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$.

Эту теорему мы примем без доказательства.

Из этой теоремы следует, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье нашли широкое применение в различных отделах математики. Особенно успешно ряды Фурье применяются в математической физике и ее приложениях к конкретным задачам механики и физики.

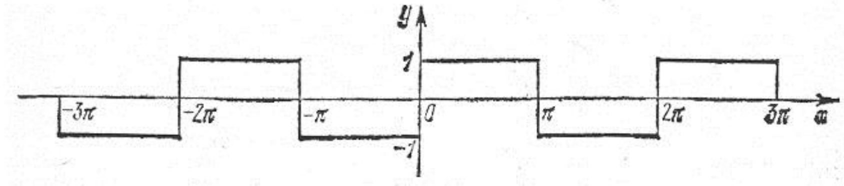
Учение о разложении функций в тригонометрические ряды называют гармоническим анализом.

Лекция 26

Пример разложения функции в ряд Фурье

Периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ определена следующим образом: $f(x)=\begin{cases}-1 & при \quad -\pi<x<0 \\ +1 & при \quad 0\le x\le \pi.\end{cases}$

Эта функция кусочно монотонна и ограничена на отрезке $-\pi \le x \le \pi.$



Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}1\cdot dx\right]=\frac{1}{\pi}(-\pi+\pi)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(1-\cos \pi n)=\begin{cases}0 & при \quad n\ четном \\ \dfrac{4}{\pi n} & при \quad n\ нечетном.\end{cases}$$

Следовательно, $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\cdots+\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}+\cdots\right].$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва.

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Из определения четной функции следует, что если $\psi(x)$ – четная функция, то $\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)dx=2\int_{0}^{\pi}\psi(x)dx.$

Из определения нечетной функции следует, что если $\varphi(x)$ – нечетная функция, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = 0.$

Если в ряд Фурье разлагается четная функция, то произведение $f(x)\sin nx$ есть функция нечетная, а $f(x)\cos nx$ – четная, следовательно,

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx, \\ a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0, \end{cases} \tag{1}$$

т.е. ряд Фурье четной функции содержит только косинусы.

Если в ряд Фурье разлагается нечетная функция $f(x)$, то произведение $f(x)\cos nx$ есть функция также нечетная, а $f(x)\sin nx$ – четная, следовательно,

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \end{cases} \tag{2}$$

т.е. ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы.

Полученные формулы позволяют упрощать вычисления при разыскании коэффициентов Фурье в тех случаях, когда заданная функция является четной или нечетной. Очевидно, что не всякая периодическая функция является четной или нечетной.

Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$

Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом $2l$, вообще говоря, отличным от 2π. Разложим ее в ряд Фурье.

Сделаем замену переменной по формуле $x=\frac{lt}{\pi}$. Тогда функция $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ будет периодической функцией от t с периодом 2π. Ее можно разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le t \le \pi$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right), \tag{1}$$

где $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos ntdt,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin ntdt.$

Возвратимся теперь к старой переменной x :

$x=\frac{l}{\pi}t,\quad t=x\frac{\pi}{l},\quad dt=\frac{\pi}{l}dx.$

Тогда будем иметь:
$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, \\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{cases} \tag{2}$$

Формула (1) получит вид :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{3}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (2).

Это и есть ряд Фурье для периодической функции с периодом *2l.*

Разложение в ряд Фурье функций,

заданных на половине периода

Пусть требуется разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ в интервале $(0,\pi)$ (или, что сводится к этому, в каком-нибудь интервале $(0,l)$). Мы можем по произволу продолжить функцию $f(x)$ на интервал $(-\pi,0)$, но так, чтобы образовавшаяся в интервале $(-\pi,\pi)$

функция $F(x)$, совпадающая с $f(x)$ в интервале $(0,\pi)$, удовлетворяла условиям основной теоремы.

Разложив функцию $F(x)$ в ряд Фурье, получим искомый ряд, представляющий функцию $f(x)$ в интервале $(0,\pi)$; не имеет значения, что он в интервале $(-\pi,0)$ представляет какую-то другую функцию, по существу не связанную с данной функцией $f(x)$.

В частности, $f(x)$ можно продолжить четно на интервал $(-\pi,0)$; значит, график функции $f(x)$ продолжить симметрично оси Oy. При этом $F(x)$ будет четной функцией и ряд будет состоять только из косинусов. Если же $f(x)$ продолжить нечетно на интервал $(-\pi,0)$, значит, график продолжить симметрично относительно начала координат, то $F(x)$ будет нечетной функцией и ряд будет состоять из одних синусов.

Мы приходим к выводу, что если функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье, то в интервале $(0,\pi)$ таких ее разложений существует бесчисленное множество. Значит, можно составить сколько угодно сходящихся рядов Фурье, представляющих в интервале $(0,\pi)$ одну и ту же функцию, а в интервале $(-\pi,0)$ самые разнообразные функции.

V. Приложение.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Для изложения необходимых математических методов использовались книги
Л.С.Понтрягин. Дифференциальные уравнения и их приложения. Москва, «Наука», 1988,
В.В.Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях. Москва, «Наука», 1987.

Для изложения исследования концентрационных автоколебаний использовалась книга
А.М.Жаботинский. Концентрационные автоколебания. Москва, «Наука», 1974.

Книга Жаботинского содержит результаты изучения простейших типов концентрационных колебаний, возникающих в химических и биологических системах.

Периодические процессы в биологических системах известны человечеству с незапамятных времен. Колебания в ходе химических реакций были впервые обнаружены в 19 веке при изучении паров фосфора, углеводородов, СО, а также при исследовании реакций на границе металл – раствор. Последняя группа колебательных реакций сразу была использована для моделирования ряда биологических феноменов. При этом возникли такие характерные названия, как “железный нерв”, “ртутное сердце”. Первое из них относится к реакции растворения железа (железной проволоки) в азотной кислоте. Динамика этой реакции имела внешнее сходство с динамикой нервного возбуждения. Один из вариантов “ртутного сердца” - реакция разложения H_2O_2 на поверхности металлической ртути. При этом происходит периодическое образование и растворение пленки окисла на поверхности ртути. В результате колебаний поверхностного натяжения наблюдаются ритмические пульсации капли, внешне напоминающие биение сердца.

Первоначально было неясно, могут ли колебания быть описаны моделью, основанной на законе действующих масс, согласно которому скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции. Ответ на этот вопрос дал в 1910 году А.Лотка, который предложил математическую модель колебательной химической реакции. Об этой модели и о ее модификации, объясняющей не только химические, но и популяционные колебания (задача – “жертва-хищник”) речь будет идти позже.

Загадка “биологических часов” способствовала резкому увеличению исследований в области химических и биохимических колебаний в начале шестидесятых годов 20 века. С этого момента начинается быстрый рост числа экспериментальных и теоретических работ, происходит постепенное объединение ранее разрозненных областей исследования. Колебательные процессы в биологии и химии становятся предметом специальных симпозиумов в Пущино (1966,1970), Праге (1968), Ханко (1969), Москве (1972).

1. Необходимые сведения из теории дифференциальных уравнений

Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется автономной, если в нее явно не входит независимое переменное или, как мы будем говорить, время t. Это значит, что закон изменения неизвестных функций, описываемый системой уравнений, не меняется с течением времени, как это обычно и бывает с физическими законами.

В дальнейшем будем рассматривать нормальную автономную систему уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x,y) \end{cases} \qquad (1.1)$$

Каждому решению $$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases} \qquad (1.2)$$

автономной системы (1.1) поставим в соответствие движение точки на плоскости, задаваемое уравнениями (1.2), где *x*,*y* – координаты точки на плоскости, а ***t*** – время. В процессе своего движения точка описывает некоторую кривую – траекторию движения, на которой надо указать направление движения. Оказывается, что если наряду с решением (1.2) имеется другое решение, то траектории, соответствующие этим решениям, либо не пересекаются, либо совпадают.

Положение равновесия и замкнутые траектории.

Поставим вопрос о том, может ли траектория, изображающая решение системы, пересекать себя. Оказывается, что возможны два следующих взаимно исключающих случая.

1) Для всех значений ***t*** имеет место равенство

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = a_1 \\ \varphi_2(t) = a_2 \end{cases}$$

где (a_1,a_2) – точка, не зависящая от ***t*** (особая точка).

Таким образом, в этом случае точка $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ в действительности не движется при изменении ***t***, а стоит на месте. Само решение (1.2) и точка (a_1,a_2) в этом случае называются положением равновесия системы (1.1). Особые точки называют еще точками покоя или точками равновесия.

2) Существует такое положительное число *T*, что при произвольном ***t*** имеют место равенства $$\begin{cases} \varphi_1(t+T) = \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t+T) = \varphi_2(t) \end{cases},$$

но при $|\tau_1 - \tau_2| < T$ имеет место хотя бы одно из неравенств $\varphi_1(\tau_1) \neq \varphi_1(\tau_2),\ \varphi_2(\tau_1) \neq \varphi_2(\tau_2)$.

В этом случае решение (1.2) называется периодическим с периодом *T*, а траектория, описываемая решением (1.2), называется замкнутой траекторией или циклом.

Итак, имеется три сорта траекторий: 1) положение равновесия, 2) периодические траектории (циклы), 3) траектории без самопересечений.

Через каждую точку области задания системы (1.1) проходит траектория, изображающая решение системы. Таким образом, вся область заполнена траекториями, причем траектории эти попарно не пересекаются. Среди всех траекторий особо выделяются самопересекающиеся, которые являются либо положениями равновесия, либо циклами.

Фазовая плоскость.

Плоскость, в которой интерпретируются решения автономной системы (1.1) в виде траекторий, называется фазовой плоскостью. Траектории называются фазовыми траекториями.

Для того, чтобы точка (a_1, a_2) была положением равновесия системы (1.1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} f_1(a_1, a_2) = 0 \\ f_2(a_1, a_2) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Таким образом, для отыскания всех положений равновесия системы (1.1) нужно решить систему уравнений (1.3). Эта система представляет собой не систему дифференциальных уравнений, а, как говорят, систему конечных уравнений (производные в нее не входят).

Геометрическая интерпретация решения (1.2) системы уравнений (1.1) ставит в соответствие этому решению кривую $\boldsymbol{L}$ в трехмерном пространстве $\boldsymbol{R}$ переменных $t, x, y,$ определяемую системой уравнений (1.1). Здесь t является одной из координат в пространстве $\boldsymbol{R}$. Переход к интерпретации в двумерном фазовом пространстве $\boldsymbol{P}$ переменных x,y заключается в том, что мы перестаем считать величину t координатой точки, а считаем ее параметром. Таким образом, фазовая траектория $\boldsymbol{K}$ получается из кривой $\boldsymbol{L}$ в результате проектирования пространства $\boldsymbol{R}$ на пространство $\boldsymbol{P}$ в направлении оси t.

Пример. Каждое решение автономной системы уравнений

$\frac{dx}{dt} = -\omega y,\ \ \frac{dy}{dt} = \omega x$ записывается в виде

$x = r\cos(\omega t + \alpha),\ y = r\sin(\omega t + \alpha)$, где r и α – константы. Эта система уравнений определяет в трехмерном пространстве $\boldsymbol{R}$ переменных t, x, y винтовую спираль при $r \neq 0$ и прямую линию (именно ось t) при $r=0$. В фазовой плоскости $\boldsymbol{P}$ переменных x и y эта система определяет окружность при $r \neq 0$ и точку (положение равновесия) при $r=0$.

Можно придать гидродинамический смысл фазовым траекториям и особым точкам, если провести аналогию с плоским стационарным (установившимся) движением несжимаемой жидкости. Фазовые траектории тогда являются траекториями движущихся частиц жидкости, а особые точки представляют собой неподвижные частицы. Замкнутые траектории соответствуют периодическим движениям.

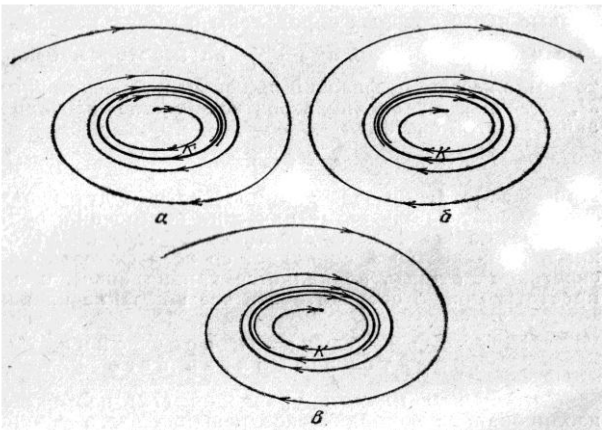
Предельные циклы.

Понятие предельного цикла было введено французским математиком Пуанкаре. Предельным циклом системы (1.1) называется изолированное периодическое решение этой системы. Пусть (1.2) - периодическое решение системы (1.1) и ***K*** – описываемая этим решением замкнутая кривая в плоскости ***P*.** Решение (1.2) (а также траектория ***K***) считается изолированным периодическим решением и называется предельным циклом, если в фазовой картине системы (1.1) на плоскости ***P*** вблизи замкнутой траектории ***K*** не проходит других замкнутых траекторий этой системы. Вопрос о том, как ведут себя траектории системы (1.1) вблизи предельного цикла ***K*** решается следующей теоремой.

Теорема. Пусть решение (1.2) – предельный цикл системы (1.1) и ***K*** – замкнутая траектория, описываемая этим решением на плоскости ***P***. Замкнутая кривая, как известно, разбивает плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю, а так как траектории системы (1.1) не могут пересекаться между собой, то каждая отличная от ***K*** траектория является внутренней или внешней по отношению к траектории ***K***. Оказывается, что как для внешних, так и для внутренних траекторий имеются две взаимно исключающие друг друга возможности поведения вблизи ***K***. Именно, все внутренние траектории, начинающиеся вблизи ***K***, наматываются на ***K***, как спирали, либо при $t \to +\infty$ (рис.*а*), либо при $t \to -\infty$ (рис.*б*). То же самое имеет место и для внешних траекторий (эти же рисунки).

Если все траектории (как внешние, так и внутренние) начинающиеся вблизи ***K*,** наматываются на ***K*** при $t \to +\infty$, то предельный цикл называется устойчивым (рис.*а*). Если все траектории, начинающиеся вблизи **К**, наматываются на **К** при $t \to -\infty$, то предельный цикл **К** называется вполне неустойчивым (рис.*б*); в двух других случаях (т.е. если внутренние траектории наматываются на **К** при $t \to -\infty$, а внешние – при $t \to +\infty$ или наоборот) предельный цикл **К** называется полуустойчивым (рис.*в*).

2. Пример системы вида (1.1), имеющей изолированную замкнутую траекторию



Изолированные замкнутые траектории могут иметь только нелинейные дифференциальные уравнения и системы. Рассмотрим как модель нелинейную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2) \qquad (2.1)$$

Чтобы решить ее, введем полярные координаты r, θ, где $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$. Тогда, продифференцировав соотношения $x^2 + y^2 = r^2$ и $\theta = arctg\frac{y}{x}$ по t , получим равенства

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} \qquad (2.2)$$

Умножая первое уравнение из системы (2.1) на *x*, а второе - на *y* и складывая, с учетом первого равенства из (2.2) находим, что

$$r\frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2) \qquad (2.3)$$

Если же умножить второе уравнение из системы (2.1) на *x*, а первое - на *y* и вычесть, с учетом второго равенства из (2.2) получим соотношение

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = r^2 \qquad (2.4)$$

Система (2.1) имеет единственную особую точку *O(0,0)*. Так как мы интересуемся сейчас только построением траекторий, то можно считать $r > 0$. А тогда уравнения (2.3) и (2.4) означают, что система (2.1) приводится к виду

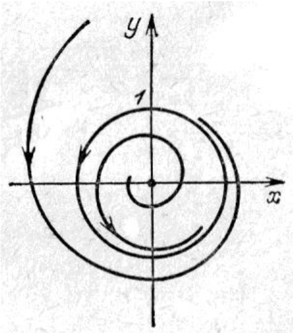
$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 \tag{2.5}$$

Каждое из полученных уравнений системы (2.5) легко интегрируется и все семейство решений, как нетрудно видеть, задается формулами

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad \theta = t + t_0, \tag{2.6}$$

или, в старых переменных x и y, формулами

$$x = \frac{\cos(t + t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad y = \frac{\sin(t + t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}$$



Если теперь в первом уравнении системы (2.6) положить C=0, то получим $r = 1,\ \theta = t + t_0$. Эти равенства определяют замкнутую траекторию – окружность $x^2 + y^2 = 1$. Если $C < 0,$ то ясно, что $r > 1$ и $r \to 1$ при $t \to +\infty$. Если же $C > 0,$ то $r < 1$ и снова $r \to 1$ при $t \to +\infty$. Это означает, что существует единственная замкнутая траектория $r = 1,$ к которой все остальные траектории с течением времени приближаются по спиралям (наматываются на нее), т.е. это устойчивый предельный цикл.

В рассмотренном примере мы смогли в явном виде найти уравнение замкнутой фазовой траектории, однако, в общем случае, конечно, этого сделать нельзя. Поэтому в теории обыкновенных дифференциальных уравнений играют большую роль критерии, которые позволяют хотя бы выделить те области, где может содержаться предельный цикл. Заметим, что замкнутая траектория системы (1.1), если таковая существует, обязательно содержит внутри себя по крайней мере одну особую точку этой системы. Отсюда, в частности, следует, что если в некоторой области фазовой плоскости нет особых точек дифференциальной системы, то в этой области нет и замкнутых траекторий.

3. Простейшие схемы реакций, дающие автоколебания

Системы Лотка

Математическое моделирование концентрационных колебательных систем началось с работы Лотка (Lotka, 1910), в которой рассматривалась система

$$A \quad \to \quad X \quad \to \quad Y \quad \to \tag{3.1}$$

Здесь имеется резервуар A, линейное превращение A в X, автокаталитическое превращение X в Y и линейная убыль Y. Эта модель была применена Лотка для описания как химических, так и экологических систем. Лотка рассматривал открытую систему, т.е. с самого начала пренебрегал расходом A и не учитывал конечных продуктов превращения Y. Кроме того, он описывал автокатализ как элементарную реакцию. Эти допущения приводят к следующей системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = k_0A - k_1xy, \quad \frac{dy}{dt} = k_2xy - k_3y \tag{3.2}$$

В простейшем случае $k_2 = k_1$.

Введем новые безразмерные переменные

$$u = \frac{k_2}{k_3}x, \quad v = \frac{k_3}{k_0A}y, \quad \tau = k_3t \tag{3.3}$$

Тогда (3.2) можно записать в виде

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha(1 - uv), \quad \frac{dv}{d\tau} = uv - v, \tag{3.4}$$

где $\alpha = \frac{k_0k_2A}{k_3^2}$.

Таким образом, качественное поведение системы (3.2) целиком зависит от одного параметра α. У системы (3.4) единственное положение равновесия

$$u_0 = v_0 = 1. \tag{3.5}$$

Для определения характера особой точки переходим к новым переменным

$u_1 = u - 1, \quad v_1 = v - 1.$

Система (3.4) примет вид

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\tau} = \alpha[1 - (u_1 + 1)(v_1 + 1)] \\ \frac{dv_1}{d\tau} = (u_1 + 1)(v_1 + 1) - (v_1 + 1) \end{cases} \tag{3.6}$$

Поскольку вблизи точки (1.1) u_1 и $v_1 \ll 1$, то можно ограничиться исследованием линейной системы (в системе (3.6) пренебречь членами, содержащими $u_1 v_1$). Тогда будем иметь

$$\frac{du_1}{d\tau} = -\alpha u_1 - \alpha v_1, \quad \frac{dv_1}{d\tau} = u_1. \qquad (3.7)$$

В качественной теории дифференциальных уравнений это исследование сводится к определению собственных значений матрицы коэффициентов (3.7), т.е. к решению уравнения $\begin{vmatrix} -\alpha - \lambda & -\alpha \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha = 0$. Отсюда $\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}}{2}$.

Наиболее простой и частный случай, когда оба собственных значения различны и имеют отличные от нуля действительные части. В этом случае стационарная точка является грубой (устойчивым узлом, седлом или устойчивым фокусом). При этом общий динамический характер системы не изменяется при малых изменениях параметров. При $\alpha < 4$ в нашей системе возможны затухающие колебания (т.к. λ_1 и λ_2 - комплексные числа), а стационарная точка будет устойчивым фокусом. (т.к. действительные части λ_1 и λ_2 отрицательны). Частота колебаний будет определяться выражением $\omega = \sqrt{k_0 k_2 A}$.

Следующая модель, изученная Лотка (1920) и позже независимо Вольтерра (Volterra,1931), содержит две последовательные автокаталитические реакции. Эта модель широко известна в экологии под названием “жертва – хищник”. Например: A – удельное количество травы, запас которой считается неисчерпаемым; X – плотность популяции травоядных; Y – плотность популяции хищников.

$$A \quad \to X \quad \to Y \quad \to \qquad (3.8)$$

Предполагая относительно схемы (3.8) то же, что и для схемы (3.1), Лотка и Вольтерра получили следующую систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = k_1 A x - k_2 x y, \quad \frac{dy}{dt} = k_3 x y - k_4 y. \qquad (3.9)$$

После введения безразмерных переменных

$$u = \frac{k_3}{k_4} x, \quad v = \frac{k_2}{k_1 A} y \text{ и } \tau = k_4 t \qquad (3.10)$$

Система (3.9) запишется в виде

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha(u - uv), \quad \frac{dv}{d\tau} = uv - v, \tag{3.11}$$

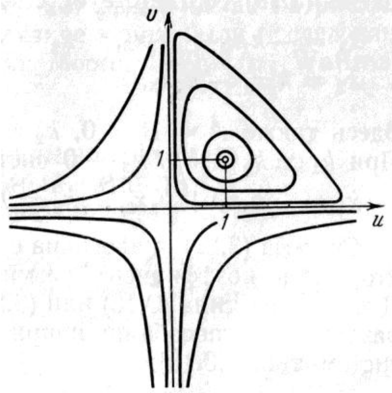
где $\alpha = \frac{k_1 A}{k_4}$.

Уравнение на фазовой плоскости имеет вид

$$\frac{du}{dv} = \alpha \frac{u(1-v)}{v(u-1)}. \tag{3.12}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, оно легко интегрируется

$$e^{-(u+\alpha v)} u v^{\alpha} = C. \tag{3.13}$$



Фазовые траектории, описываемые уравнением (3.13) и лежащие в первом квадранте фазовой плоскости, замкнуты. Особая точка $(u_0 = v_0 = 1)$ является центром.
Начало координат – седло. Оси координат – также интегральные кривые системы (3.11).

Система (3.9) может рассматриваться как предельный случай более сложных цепей реакций. Эти “развернутые” модели описывают как затухающие так и незатухающие колебания (Корзухин, Жаботинский, 1965).

Существует группа однотипных реакций, первая из которых была обнаружена Б.П.Белоусовым. Белоусов (1959) описал колебания цвета раствора в ходе реакции окисления лимонной кислоты броматом, катализатором служили ионы церия. Он подобрал условия, при которых колебания наблюдались достаточно четко в течение нескольких десятков периодов и выявил некоторые существенные детали механизма реакции. Однако механизм, ответственный за колебания, остался невыясненным. Позже работа Белоусова была продолжена А.М.Жаботинским и его сотрудниками. Был открыт класс однотипных реакций, в ходе которых обнаружены автоколебания, и некоторые из них были исследованы достаточно подробно. Было показано, что в гомогенной химической системе могут осуществляться все колебательные режимы, которые наблюдаются в механических и электрических системах.

VI. Рекомендуемая литература

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1976. – Т.2.

2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 2001.

3 *Гусак А.А.* Высшая математика / А.А. Гусак. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – Т.2.

Содержание