КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

Кафедра математики и экономической информатики

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

для студентов, обучающихся

по направлению 0801000.62 «Экономика»

по темам:

«Дискретная случайная величина», «Непрерывная случайная величина», «Системы случайных величин»

Казань 2013

Обсуждена на заседании кафедры математики и экономической информатики, протокол №7 от 23 января 2013 г.

Утверждена Учебно-методической комиссией института, протокол №16 от 30 апреля 2013 г.

Составители:
к.физ.-мат.н., доцент **Воронцова В.Л.,**
к.пед.н.,ст.преподаватель **Зайнуллина Л.Н.**

Рецензенты:
к.физ.-мат.н., доцент **Хасанова А.Ю.**
к.физ.-мат.н., доцент **Горская Т.Ю.**

Введение

В природе и экономике большинство явлений и процессов характеризуются количественными параметрами, которые изменяются случайным образом, поэтому изучение случайных величин представляет большой теоретический и практический интерес.

Данное методическое пособие способствует более глубокому изучению тем «Дискретная случайная величина», «Непрерывная случайная величина», «Системы случайных величин», которые входят в курс «Теория вероятностей и математическая статистика» и содержит: теорию по данной теме, контрольные вопросы и задания для практической и самостоятельной работы студентов, тестовые задания, список литературы.

В отличие от ранее изданных работ теоретический материал по каждой теме данного учебно-методического пособия дополнен достаточным количеством примеров с подробно разобранными решениями и банком типовых заданий для самостоятельной работы. Кроме того, работа содержит теоретический материал и примеры по вычислению начальных и центральных моментов случайных величин, редко рассматриваемых в классических учебниках по теории вероятности. Приведенные примеры с подробными решениями дают возможность студентам применять теоретические знания, полученные на лекциях, самостоятельно формулировать постановку задачи, составлять экономико-математическую модель, выбирать алгоритм решения поставленной задачи и грамотно ее оформлять.

В тексте имеется экономическая интерпретация полученных решений, что развивает у студентов навыки применения математических методов в экономических исследованиях.

Приведенные контрольные вопросы и тестовые задания предназначены для проверки качества усвоения лекционного материала. Ответы на контрольные вопросы и тестовые задания готовятся студентами самостоятельно и проверяются преподавателем на практических занятиях.

Содержание

Тема «Дискретная случайная величина»

1. Понятие дискретной и непрерывной случайной величины

Случайные события - объекты, имеющие два состояния: событие может либо наступить, либо не наступить. Более сложным объектом является случайная величина, имеющая несколько состояний.

Определение. Величина, которая в зависимости от результатов испытаний принимает то или иное численное значение, называется **случайной величиной**.

Случайные величины делятся на *дискретные* и *непрерывные*.

Определение. Дискретной (прерывной) называется такая случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное (счетное) множество значений.

Счетным называется множество, элементы которого можно пронумеровать числами натурального ряда: 1, 2,..., *n*.

Например, число бракованных деталей среди *n* проверенных; число выпавших «гербов» при *n*–кратном бросании монеты; число девочек. родившихся в течении суток в определенной стране; число учащихся, опрошенных на уроке; число солнечных дней в году. Т.е. случайная величина может принимать отдельные изолированные значения, которые можно заранее перечислить.

Например, X - число шахматных партий, окончившихся ничейным результатом, из трех сыгранных. В этом случае величина X может принять следующие значения: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$.

Рассмотрим дискретную случайную величину X с возможными значениями x_1, x_2, x_3, x_4, …, x_n. В результате опыта случайная величина примет одно и только одно из этих значений. Другими словами, произойдет одно из несовместных событий, образующих полную группу: $X=x_1$, $X=x_2$, $X=x_3$,…, $X=x_n$. Каждое значение дискретной случайной величины имеет определенную вероятность появления. Пусть возможное значение x_1 наступает с вероятностью p_1, значение x_2 - с вероятностью p_2, и так далее, значение x_n -

с вероятностью p_n. Так как указанные события образуют полную группу, то сумма вероятностей появления возможных значений случайной величины равна 1,т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Таким образом, суммарная вероятность, равная 1, распределена между всеми возможными значениями случайной величины.

Определение. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного интервала.

Примерами непрерывной случайной величины служат: время безаварийной работы станка; расход горючего на единицу расстояния; количество осадков, выпавших в сутки.

Рассмотрим **непрерывную случайную величину** на примере дальности полета артиллерийского снаряда.

Предположим, что расчетная дальность полета снаряда 7000 м. Пусть при первом выстреле снаряд пролетел 7020 м, а при втором -7040 м. При последующих выстрелах снаряд может пролететь и 7030, и 6995 м. Другими словами, снаряд может попасть в любую точку некоторого промежутка и невозможно указать какие-либо два возможных значения дальности полета снаряда, между которыми не найдется хотя бы одного возможного значения рассматриваемой случайной величины.

2. Закон распределения дискретной случайной величины.

Определение. *Законом распределения дискретной случайной величины* называется соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Существует **две формы задания закона распределения *дискретной случайной величины***: табличная и графическая. Табличная форма, называемая рядом распределения, представляется в виде двух строк (столбцов). В первой строке записываются все возможные значения случайной величины x_i, в порядке возрастания, во второй - вероятности p_i появления этих значений (таблица 1).

Таблица 1

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Сумма всех значений вероятностей равна единице, то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графическая форма задания закона распределения - это **полигон** (или **многоугольник**) распределения вероятностей. Он представляет собой ломаную линию, соединяющую точки (x_i, p_i) прямоугольной системы координат (рис. 1)

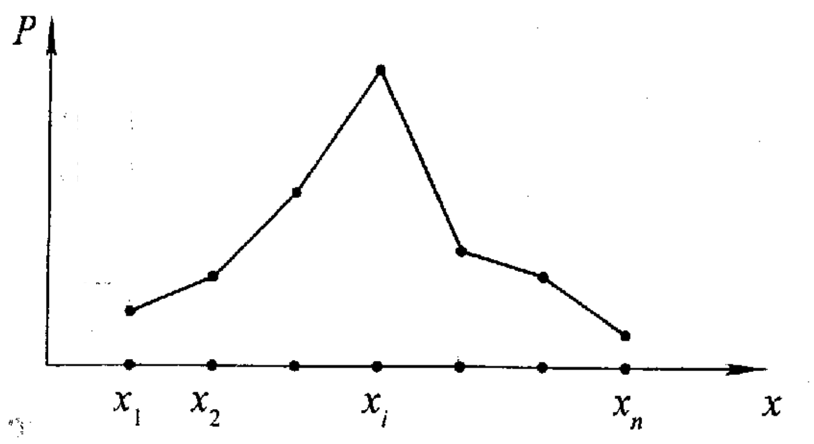

Рис.1

Пример 1

В партии из восьми деталей пять стандартных. Наудачу взяты четыре детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Пусть случайная величина X–число стандартных деталей среди четырех отобранных. Она может принять следующие четыре значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$. Для определения вероятности появления конкретного числа стандартных деталей воспользуемся формулой

$$P(X=k)=\frac{C_m^k C_{n-m}^{l-k}}{C_n^l}$$

где n –число деталей в партии, l -число отобранных деталей, m -число стандартных деталей, k -число стандартных деталей среди отобранных.

Далее имеем

$$P(X=1)=\frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4}=\frac{1}{14}, \quad P(X=2)=\frac{C_5^2 C_3^2}{C_8^4}=\frac{6}{14},$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4}=\frac{6}{14}, \quad P(X=4)=\frac{C_5^4 C_3^0}{C_8^4}=\frac{1}{14},$$

Проверим вычисления. Складывая полученные вероятности, получаем 1/14+6/14+6/14+1/14=1. Искомый ряд распределения имеет вид

X	1	2	3	4
P	1/14	6/14	6/14	1/14

Ряд распределения можно задать графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений. Соединив точки (x_i;y_i) последовательно отрезками прямой линии, получим ломаную, которая называется **многоугольником распределения вероятностей**. Построим многоугольник распределения для нашей задачи (рис.2).

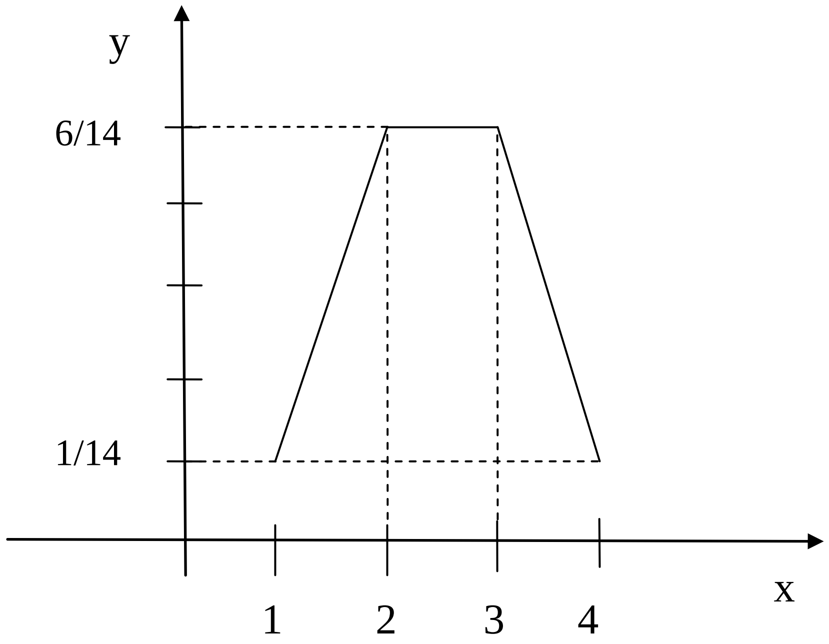

Рис.2

Многоугольник распределения, как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину и является одним из способов (графическим) задания закона распределения.

Сумма ординат многоугольника равна единице. Это свойство многоугольника распределения является определяющим. Если в прямоугольной системе координат дана некоторая ломаная, удовлетворяющая определению функции и обладающая указанным выше свойством, то такая ломаная, очевидно, задает закон распределения некоторой случайной величины.

3. Основные типы задач на составление закона распределения дискретной случайной величины

Наиболее часто встречаются следующие **типы задач** на составление закона распределения.

Тип I. Случайная величина - число наступлений события с постоянной вероятностью *p* в каждом испытании. При составлении закона распределения вероятности вычисляются по формуле Бернулли или по локальной теореме Лапласа, и значения случайной величины начинаются с нуля.

Пример 2.

Вероятность возникновения погрешности при измерении равна 0,3. Проведено три измерения. Составить закон распределения случайной величины – числа измерений, произведенных без погрешности.

<u>Решение.</u> Случайная величина X – {число измерений, произведенных без погрешности}.

p=1-q=0,7; q=0,3; n=3.Наименьшее значение X равно x_1=0, т.е. среди трех измерений нет ни одного с погрешностью. Затем случайная величина X примет значения:x_2=1; x_3=2; x_4=3. Вероятности при составлении закона распределения вычисляются по формуле Бернулли:

$$P_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$p_1 = P_{3,0} = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{0!3!} \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}027$$

$$p_2 = P_{3,1} = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!2!} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}189$$

$$p_3 = P_{3,2} = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!1!} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1 = 0{,}441$$

$$p_4 = P_{3,3} = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{3!0!} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^0 = 0{,}343$$

Закон распределения случайной величины X запишем в виде таблицы.

X	0	1	2	3
P	0,027	0,189	0,441	0,343

Проверим правильность расчетов

$$\sum_{i=0}^{3} p_i = 0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1$$

Пример 3.

Вероятность того, что телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0.6. Составить закон распределения случайной величины – числа телевизоров, не потребующих ремонта в течение гарантийного срока из трех проданных телевизоров.

Решение. СВ X – {число телевизоров, не потребующих ремонта}

p = 0,6, q = 0,4, n=3.

x=0 (все потребуют ремонта)

$P_{3,0} = C_3^0\, p^0 q^3 = 1 \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}064$

x=1 (1 не потребует ремонта)

$P_{3,1} = C_3^1\, p^1 q^2 = 3 \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}288$

x=2 (2 не потребуют ремонта)

$P_{3,2} = C_3^2\, p^2 q^1 = 3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^1 = 0{,}432$

x=3 (все не потребуют ремонта)

$P_{3,3} = C_3^3\, p^3 q^0 = 1 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}216$

Закон распределения имеет следующий вид:

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

$$\sum_{i=0}^{3} p_i = 0{,}064 + 0{,}228 + 0{,}432 + 0{,}216 = 1$$

Тип II. Случайная величина - число испытаний, причем вероятность появления события в одном отдельно взятом испытании постоянна и равна *p*. Вероятности при составлении закона распределения вычисляются по теореме умножения вероятностей для независимых событий и теореме сложения вероятностей для несовместных событий. Значения случайной величины в законе распределения начинаются с единицы.

Пример 4.

Прибор укомплектовывается тремя однотипными блоками. Контролер проверяет последовательно каждый блок на работоспособность. Как только выявляется неработающий блок, прибор бракуется. Составить закон распределения случайной величины-числа проверяемых блоков, если вероятность появления неисправного блока равна 0,2.

Решение. Случайная величина X –{ число проверяемых блоков}. Событие A={появления исправного блока прибора}. Вероятность появления исправного блока прибора равна P(A)=p=1-0,2=0,8; тогда $P(\overline{A}) = q = 0{,}2$; число блоков прибора n=3. Значения случайной величины X=1;2;3. Случайная величина X примет значение x_1=1, если первый же проверяемый блок оказывается неработающим и прибор бракуется, тогда $p_1 = P(\overline{A}) = q = 0{,}2$.

Случайная величина X примет значение x_2=2, если первый проверяемый блок работающий, а второй – нет, тогда $p_2 = P(A\overline{A}) = P(A)\cdot P(\overline{A}) = pq = 0{,}16$.

Случайная величина X примет значение x_3=3, если первые два блока работающие, а третий – неработоспособный или все три блока – работоспособны, тогда

$$p_3 = P\left(AA\overline{A} + AAA\right) = P(A)\cdot P(A)\cdot P(\overline{A}) + P(A)\cdot P(A)\cdot P(A) = p^2q + p^3 =$$
$$= 0{,}8^2\cdot 0{,}2 + 0{,}8^3 = 0{,}128 + 0{,}512 = 0{,}64$$

Запишем закон распределения случайной величины X в виде таблицы

X	1	2	3
P	0,2	0,16	0,64

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}64 = 1$$

Пример 5.

Даются четыре попытки включить двигатель до первой успешной попытки. вероятность того, что двигатель включится, равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток завести двигатель.

Решение. СВ X – {число попыток завести двигатель}

p = 0,8, q = 0,2, n =4.

x=1 (двигатель заведется сразу)

$p_1=p=0,8$

x=2 (заведется со второй попытки)

$p_2 = qp=0,2\cdot 0,8=0,16$

x=3 (заведется с третьей попытки)

$p_3 = qqp=0,2\cdot 0,2\cdot 0,8=0,032$

x=4 (заведется с четвертой попытки или не заведется совсем)

$p_4 = qqqp + qqqq = 0,2\cdot 0,2\cdot 0,2\cdot 0,8 + 0,2\cdot 0,2\cdot 0,2\cdot 0,2 = 0,0064+0,0016=0,008$

Закон распределения имеет следующий вид:

X	1	2	3	4
P	0,8	0,16	0,032	0,008

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}8 + 0{,}16 + 0{,}032 + 0{,}008 = 1$$

Тип III. Случайная величина - число наступлений события с различной вероятностью в каждом испытании. При составлении закона распределения вероятности вычисляются по теореме умножения вероятностей для независимых событий и теореме сложения вероятностей для несовместных событий. А значения случайной величины начинаются с нуля.

Пример 6.

В библиотеке выдают учебную литературу. Вероятность того, что отдельный студент получит учебник по математике, равна 0,8, статистике- 0,6, макроэкономике - 0,4. Составить закон распределения случайной величины X-числа учебников, которые получит студент.

Решение.

$p_1=0,8$ $q_1=0,2$

$p_2=0,6$ $q_2=0,4$

$p_3=0,4$ $q_3=0,6$

Пусть случайная величина X-{число учебников, которые получит студент}.

Наименьшее значение, которое может принимать случайная величина X, равно $x_1=0$, то есть студент не получит ни одного учебника.

Вычислим вероятности при составлении закона распределения:

$x_1=0 \quad p_1^*=q_1q_2q_3=0,2\cdot 0,4\cdot 0,6=0,048$

$x_2=1 \quad p_2^*=p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3=$

$=0,8\cdot 0,4\cdot 0,6+0,2\cdot 0,6\cdot 0,6+0,2\cdot 0,4\cdot 0,4=0,296$

$x_3=2 \quad p_3^*=p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3=$

$=0,8\cdot 0,6\cdot 0,6+0,8\cdot 0,4\cdot 0,4+0,2\cdot 0,6\cdot 0,4=0,464$

$x_4=3 \quad p_4^*=p_1p_2p_3 =0,192$

Запишем закон распределения случайной величины X

X	0	1	2	3
P	0,048	0,296	0,464	0,192

$$\sum_{i=0}^{3} p_i = 0,048 + 0,296 + 0,464 + 0,192 = 1$$

Пример 7.

Вероятности своевременного прибытия такси №1 равна 0,8, такси №2 – 0,9, такси №3 – 0,95. Составить закон распределения случайной величины – числа такси, которые прибудут вовремя к месту вызова.

Решение. СВ X – {число машин прибывших вовремя}

$p_1 = 0,8$, $q_1 = 0,2$, $p_2 = 0,9$, $q_2 = 0,1$, $p_3 = 0,95$, $q_3 = 0,05$.

x=0 (все опоздали)

$p^*_1= q_1q_2q_3 = 0,2\cdot 0,1\cdot 0,05 = 0,001$

x=1 (одно такси прибудет вовремя)

$p^*_2 = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = 0,8\cdot 0,1\cdot 0,05+ 0,2\cdot 0,9\cdot 0,05+0,2\cdot 0,1\cdot 0,95=0,032$

x=2 (два такси прибудет вовремя)

$p^*_3 = p_1p_2q_3 + q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3 = 0,8\cdot 0,9\cdot 0,05+ 0,2\cdot 0,9\cdot 0,95+0,8\cdot 0,1\cdot 0,95=0,283$

x=3 (все прибудут вовремя)

$p^*_4 = p_1p_2p_3 = 0,8\cdot0,9\cdot0,95 = 0,684$

Закон распределения имеет следующий вид:

X	0	1	2	3
P	0,001	0,032	0,283	0,684

$$\sum_{i=0}^{3} p_i = 0{,}001 + 0{,}032 + 0{,}283 + 0{,}684 = 1$$

Тип IV. Случайная величина-число испытаний, причем вероятности появления события в одном отдельно взятом испытании различны. При составлении закона распределения вероятности вычисляются либо по классическому определению вероятности либо по теоремам сложения и умножения вероятностей, а значения случайной величины начинаются с единицы.

Пример 8.

Два баскетболиста поочередно бросают мяч в корзину до первого удачного броска. Общее число бросков не превышает четырех. Составить закон распределения случайной величины-числа бросков, если при каждом броске вероятность пропасть для первого баскетболиста 0,7, для второго-0,6.

Решение. Пусть случайная величина X – число бросков. Вероятность попасть для первого баскетболиста $p_1=0,7$; $q_1=0,3$. Для второго – $p_2=0,6$; $q_2=0,4$. Значения случайной величины X:1,2,3.

Если первый баскетболист с первого же броска попал в корзину, тогда $x_1=1$ $p_1^*=0,7$.

Если первый баскетболист не попал, второй делает бросок и попадает, то $x_2=2$ и $p_2^*=q_1p_2=0,3\cdot0,6=0,18$.

Если и первый и второй не попали, то следующая попытка у первого, если он попадет в корзину, то $x_3=3$ и $p_3^*==q_1q_2p_1=0,3\cdot0,4\cdot0,7=0,084$.

Если первый баскетболист опять не попал, а второй делает бросок и либо попадает, либо не попадает, то x_4=4 и

$p_4^*=q_1q_2q_1p_2 + q_1q_2q_1q_2= 0,3\cdot 0,4\cdot 0,3\cdot 0,6+0,3\cdot 0,4\cdot 0,3\cdot 0,4=0,036$.

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	1	2	3	4
P	0,7	0,18	0,084	0,036

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,7 + 0,18 + 0,084 + 0,036 = 1$$

Пример 9.

Спортсмен стреляет в мишень до первого удачного попадания, при этом ему дается три попытки. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при втором - 0.8, при третьем – 0.9. Составить закон распределения случайной величины – числа выстрелов в мишень.

<u>Решение</u>. СВ X – {число выстрелов в мишень}

$p_1 = 0,6$, $q_1 = 0,4$, $p_2 = 0,8$, $q_2 = 0,2$, $p_3 = 0,9$, $q_3 = 0,1$

x=1 (попадет после первого выстрела)

$p^*_1 = p_1$=0,6

x=2 (попадет после второго выстрела)

$p_2^* = q_1p_2=0,4\cdot 0,8=0,32$

x=3 (попадет после третьего выстрела или не попадет совсем)

$p_3^* = q_1p_2p_3 + q_1q_2q_3 = 0,4\cdot 0,2\cdot 0,9+ 0,4\cdot 0,2\cdot 0,1 = 0,08$

Закон распределения имеет следующий вид:

X	1	2	3
P	0,6	0,32	0,08

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 0,6 + 0,32 + 0,08 = 1$$

4. Функция распределения дискретной случайной величины.

Определение. ***Функцией распределения случайной величины X*** называют функцию *F(x),* которая определяет для каждого значения аргумента *x* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее *x*

$$F(X)=P(X < x) \quad (1)$$

Если $x = a$, то $F(a) = P(X < a)$.

Задание случайной величины X с помощью функции распределения *F(x)* универсально, так как этим способом задаются дискретные и непрерывные случайные величины.

Отметим большую значимость и глубокий смысл равенства (1). В левой части этого равенства находится «обыкновенная» функция действительного аргумента, а в правой – переменная вероятность. Эта формула связывает один из важных разделов математики, изучающий функции действительного аргумента, с теорией вероятности, где изучаются, в частности, случайные события, которые могут произойти, а могут и не произойти в результате опыта.

Для дискретной случайной величины *X,* принимающей значения x_1, x_2, ... , x_n, функция распределения *F(x)* имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \qquad (2)$$

где символ $x_i < x$ под знаком суммы означает, что суммирование распространяется на все те значения случайной величины, которые по своей величине меньше числа *x*.

Функция *F(x)* **дискретной случайной величины** X разрывна и возрастает скачками при переходе через точки возможных ее значений, причем величина скачка равна вероятности соответствующего значения.

Таблица 2

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Построим функцию распределения случайной величины X, ряд распределения которой представлен в табл.2.

При $x \le x_1$ $F(x) = P(X < x_1) = 0$;

При $x_1 < x \le x_2$ $F(x) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = p_1$;

При $x_2 < x \le x_3$ $F(x) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2$;

……………………………………………………………………………………….

При

$$x_{n-1} < x \le x_n \quad F(x) = P(X < x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \ldots + P(X = x_{n-1}) = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1};$$

При

$$x > x_n \quad F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \ldots + P(X = x_n) = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1.$$

График построенной функции изображен на рис. 3.

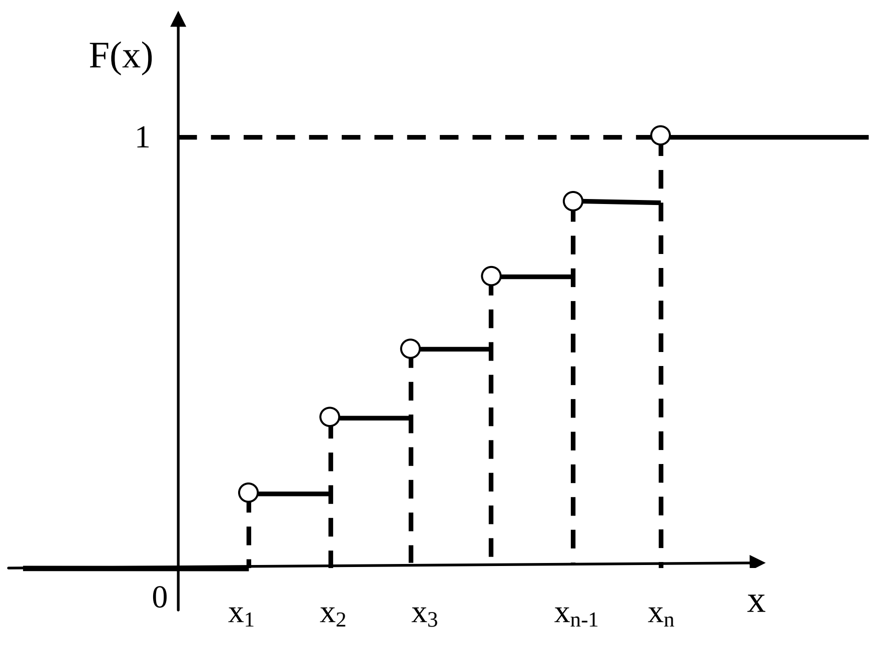

Рис.3

Для дискретной случайной величины график функции распределения представляет собой разрывную ступенчатую линию. Когда переменная x проходит через какое-нибудь из возможных значений случайной величины, значение функции распределения меняется скачкообразно, т.е. функция имеет скачок в тех точках, в которых случайная величина принимает конкретное значение согласно ряду распределения, причем величина скачка равна вероятности этого значения. Сумма величин всех скачков функции распределения равна единице. В интервалах между значениями случайной величины функция F(x) постоянна.

Пример 10.

Используя результаты решения примера 1, построить функцию распределения случайной величины X и ее график.

$$P(X=1)=\frac{C_5^1C_3^3}{C_8^4}=\frac{1}{14},\ P(X=2)=\frac{C_5^2C_3^2}{C_8^4}=\frac{6}{14},$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3C_3^1}{C_8^4}=\frac{6}{14},\ P(X=4)=\frac{C_5^4C_3^0}{C_8^4}=\frac{1}{14},$$

Искомый ряд распределения имеет вид

X	1	2	3	4
P	1/14	6/14	6/14	1/14

При $x \le 1\ \ F(x)=P(X<1)=0$;

При $1<x\le 2\ \ F(x)=P(X<2)=P(X=1)=1/14$;

При $2<x\le 3\ \ F(x)=P(X<3)=P(X=1)+P(X=2)=1/14+6/14=1/2$;

При $3<x\le 4\ \ F(x)=P(X<4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$
$=1/14+6/14+6/14=13/14$

При $x>4\ \ F(x)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$;
$=1/14+6/14+6/14+1/14=1$

Полученные результаты объединим в таблицу:

F(x)	0	1/14	1/2	13/14	1
Интервал	$(-\infty;1]$	(1;2]	(2;3]	(3;4]	$(4;+\infty]$

График функции F(x) изображен на рис.4

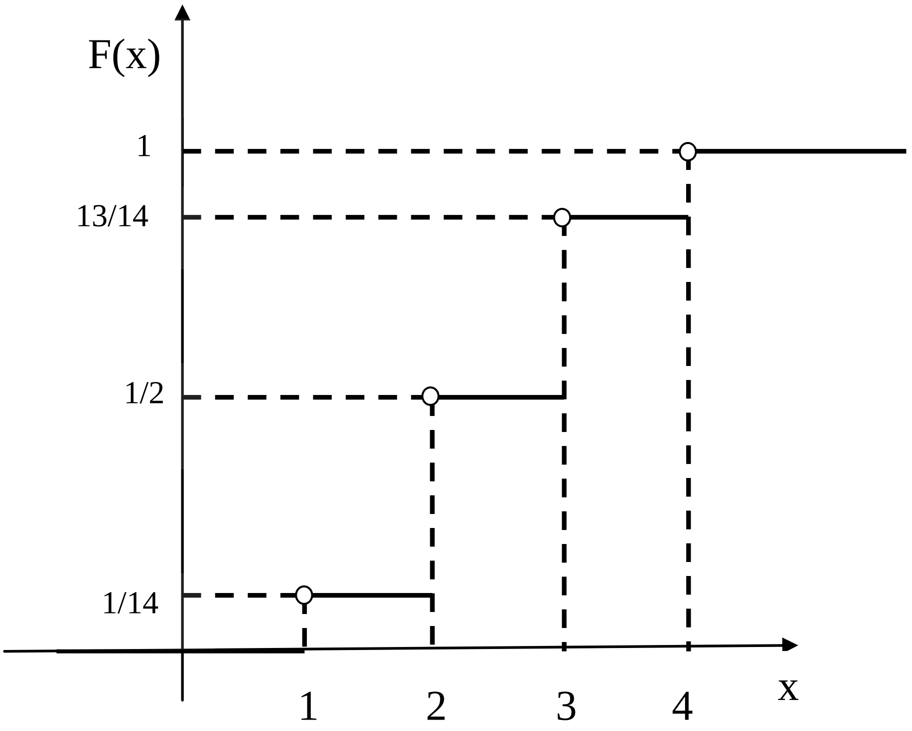

Рис.4

5. Математические операции над дискретными случайными величинами

Пусть даны две случайные величины X и Y и известны их законы распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Y	y_1	y_2	…	y_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Суммой (разностью, произведением) двух независимых случайных величин X и Y является новая случайная величина $Z = X + Y$ ($Z= X - Y$, $Z= XY$), возможные значения которой составлены из суммы (разности, произведения) каждого значения случайной величины X с каждым возможным значением случайной величины Y.

Например, независимые случайные величины X - производительность труда первого рабочего, Y- производительность труда второго рабочего, тогда новая случайная величина $Z = X + Y$ - общая производительность двух рабочих;

случайные величины: *X* - доход предприятия, *Y* - расход предприятия, тогда случайная величина *Z*= *X* - *Y* - прибыль предприятия.

Алгоритм составления закона распределения комбинаций случайных величин следующий:

1. Составляются значения случайной величины Z, являющиеся комбинацией значений случайных величин *X* и Y.
2. Вероятности каждого возможного значения независимой случайной величины *X* перемножаются с вероятностями каждого возможного значения случайной величины *Y,* так как Z представляет собой совместное наступление случайных величин *X* и *Y*.
3. Если встретятся одинаковые значения случайной величины Z, то их вероятности складываются (как вероятности несовместных событий).
4. Значения случайной величины Z записываются в возрастающем порядке.

Пример 11. Даны законы распределения коэффициентов использования оборудования по времени в двух цехах, работающих независимо друг от друга

X	0,7	0,8	0,9
P	0,3	0,5	0,2

Y	0,9	1,0
P	0,7	0,3

Составить закон распределения величины Z=X+Y.

Решение.

X	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	0,9
Y	0,9	1,0	0,9	1,0	0,9	1,0
Z=X+Y	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9
P	0,21	0,09	0,35	0,15	0,14	0,06

Т.к. есть одинаковые значения величины Z=X+Y: z_2=1,7 и z_3=1,7 ; z_4=1,8 и z_5=1,8 , то складываем соответствующие вероятности несовместных событий: $P(z_2+z_3)=0{,}44$; $P(z_4+z_5)=0{,}29$

Запишем результаты в таблицу:

Z	1,6	1,7	1,8	1,9
P	0,21	0,44	0,29	0,06

6. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Закон распределения дает полную характеристику ДСВ с вероятностной точки зрения. Но часто бывают необходимы количественные показатели СВ, которые могли бы выразить существенные особенности заданного распределения. К такими показателям относятся *числовые характеристики СВ* – математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Пусть задан закон распределения случайной величины

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Определение. ***Математическим ожиданием*** *M(X)* дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины x_i, на соответствующие значения вероятностей p_i (i= 1,…,*n*).

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Математическое ожидание интерпретируется как среднее значение случайной величины, вокруг которого распределены все возможные значения случайной величины.

Математическое ожидание имеет размерность случайной величины *X*.

Свойства математического ожидания.

1 . Математическое ожидание постоянной величины *C* равно самой постоянной

$$M(C) = C,\ C = const.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы двух независимых случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий этих случайных величин $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$,

Аналогично для *n* независимых случайных величин

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин *X* и *Y* равно произведению математических ожиданий этих случайных величин

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Аналогично для *n* независимых случайных величин

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$$

Определение. ***Дисперсией D(X) дискретной случайной величины*** называется математическое ожидание квадрата отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания

$D(X) = M[X - M(X)]^2$.

Дисперсия обозначается еще и так: $\sigma^2(X)$ Как видно из определения, дисперсия всегда положительна.

Дисперсия случайной величины означает разброс или рассеяние значений случайной величины около ее среднего значения (математического ожидания).

Зная закон распределения, дисперсию можно записать:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \right)^2$$

Чаще применяют другую, более удобную для расчетов формулу дисперсии. Выведем ее, используя свойства математического ожидания

$D(X)= M[X- M(X)]^2 = M[X^2 - 2X \cdot M(X) + +(M(X))^2]= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2$

или $$D(X) = \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины.

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины *C* равна нулю *D(C)=0*

2. Постоянный множитель С выносится за знак дисперсии в квадрате

$$D(CX)=C^2D(X)$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин *X* и *Y* равна сумме дисперсий этих величин

$$D(X+Y) =D(X)+D(Y)$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин *X* и *Y* равна сумме дисперсий этих величин

$$D(X-Y)= D(X)+D(Y)$$

5. Дисперсия произведения двух независимых случайных величин *X* и *Y* равна

$$D(X \cdot Y)=D(X) \cdot D(Y)+D(X) \cdot (M(Y))^2+D(Y) \cdot (M(X))^2.$$

Определение. *Средним квадратическим (стандартным) отклонением* $\sigma(X)$ дискретной случайной величины *X* называется квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Среднее квадратическое отклонение имеет размерность случайной величины.

Определение. *Коэффициентом вариации V* случайной величины *X* называется отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию $V = \frac{\sigma(X)}{M(X)}$

Иногда значение *V* выражается в процентах: $V = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \cdot 100\%$

Коэффициент *V* (безразмерная величина) указывает на разброс значений случайной величины около его среднего значения.

Определение. **Начальным моментом** k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени этой случайной величины

$$\nu_k = M(X^k).$$

Для дискретной случайной величины

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \,.$$

Начальный момент первого порядка есть математическое ожидание случайной величины X

$$\nu_1 = M(X)$$

Через начальные моменты можно записать дисперсию

$$D(X) = \nu_2 - (\nu_1)^2 \quad (3)$$

Определение. **Центральным моментом** s-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание s–ой степени отклонения значений этой случайной величины от своего математического ожидания

$$\boldsymbol{\mu}_s = M(X - M(X))^s$$

Для дискретной случайной величины

$$\boldsymbol{\mu}_s = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^s p_i$$

Для любой случайной величины центральный момент первого порядка всегда равен нулю

$$\mu_1 = M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0$$

Центральным моментом 2-го порядка случайной величины X является дисперсия

$$\mu_2 = M(X - M(X))^2 = D(X) \quad (4)$$

Используя формулы (3) и (4) можно записать связь начальных и центральных моментов:

$$\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2 \cdot \nu_1 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3 \cdot \nu_1 + 6\nu_2 \cdot \nu_1^2 - 3\nu_1^4$$

Если M(X)=0, то начальные и центральные моменты совпадают.

Моменты выше второго порядка применяют для более подробного описания распределения.

Пример 12. Найти математическое ожидание и дисперсию величины Z.

Z	1,6	1,7	1,8	1,9
P	0,21	0,44	0,29	0,06

$M(Z)=1{,}6\cdot 0{,}21+1{,}7\cdot 0{,}44+1{,}8\cdot 0{,}29+1{,}9\cdot 0{,}06=1{,}72$

$D(Z)=M(Z^2)-(M(Z))^2$

Чтобы вычислить $M(Z^2)$ составим таблицу для Z^2

Z^2	2,56	2,89	3,24	3,61
P	0,21	0,44	0,29	0,06

$M(Z^2)=2{,}56\cdot 0{,}21+2{,}89\cdot 0{,}44+3{,}24\cdot 0{,}29+3{,}61\cdot 0{,}06=2{,}9654.$

$(M(Z))^2=2{,}9584$

$D(Z)=2{,}9654-2{,}9584=0{,}007.$

Пример 13.

Дан закон распределения, найти числовые характеристики M(X), D(X), δ(X).

x	1	2	3
p	0,6	0,32	0,08

$M(X)= 1\cdot 0{,}6+ 2\cdot 0{,}32+ 3\cdot 0{,}08=1{,}48$

$D(X)= 1\cdot 0{,}6+ 4\cdot 0{,}32+ 9\cdot 0{,}08 – 1{,}48^2 =0{,}4096$

$\delta(X)=0{,}64$

Теоремы о математическом ожидании и дисперсии числа появлений события в *n* независимых испытаниях

Пусть А – некоторое случайное событие. ***Индикатором события А*** называется случайная величина Х, равная 1, если событие А происходит, и равная 0, если событие А не происходит.

Пусть задан закон распределения индикатора события А

X	0	1
P	q	p

Теорема 1. Математическое ожидание индикатора события *A* равно вероятности появления события *A*

$$M(X) = p.$$

Теорема 2. Дисперсия индикатора события *A* равна произведению *pq*

$$D(X) = pq.$$

Теорема 3. Математическое ожидание случайной величины, числа появлений события *A* в *n* независимых испытаниях равно произведению *np*

$$M(X) = np.$$

Теорема 4. Дисперсия случайной величины - числа появлений события *A* в *n* независимых испытаниях, равна произведению *npq*

$$D(X)=npq$$

Пример 14.

Всхожесть семян некоторого сорта пшеницы составляет 93%. Определить математическое ожидание и дисперсию числа всходов, если высажено 70 семян.

Решение. Вероятность того, что семена взойдут p=0,93, q=1-p=0,07, n=70.

$M(X)=np=70\cdot 0{,}93=65{,}1$.

$D(X)=npq=70\cdot 0{,}93\cdot 0{,}07=4{,}557$.

Контрольные вопросы

1. Что называется случайной величиной, дискретной и непрерывной случайной величиной?
2. Что называется законом распределения дискретной случайной величины? Как составляется закон распределения?
3. Какие числовые характеристики имеет дискретная случайная величина?
4. Какова интерпретация математического ожидания?
5. Какие Вам известны свойства математического ожидания?
6. Что называется дисперсией, средним квадратическим отклонением? Какие Вы знаете свойства дисперсии?
7. Что такое индикатор события?
8. Какова формулировка теорем о математическом ожидании и дисперсии числа появлений события в *n* независимых испытаниях?
9. Как составляется закон распределения комбинаций случайных величин?
10. Что такое начальные и центральные моменты?

7. Задания для самостоятельной работы по теме «Дискретная случайная величина»

Решить задачу в соответствии со своим вариантом.

1. Стрелок стреляет в тире в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). В ружье стрелка 3 патрона. Составить закон распределения случайной величины – числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

2. На подносе лежат три булочки. Вероятность того, что в булочке есть изюм, равна 0,2. Составить закон распределения случайной величины – числа булочек с изюмом, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

3. Даются 4 попытки завести мотоцикл до первой успешной попытки. Вероятность того, что мотоцикл заведется, равна 0,5. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток, в результате которых можно завести мотоцикл, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

4. Вероятность выбраться на машине из колеи с первой попытки равна 0,5 , со второй – 0,8 , с третьей – 0,6 , с четвертой 0,4. Водитель делает не более четырех попыток. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток вывести машину из колеи, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).
5. Новобранцу даются 4 попытки выстрелить из ружья в мишень до первого успешного попадания. Вероятность того, что новобранец попадет, равна 0,2. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток, сделанных новобранцем, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).
6. На дополнительной сессии студенту даются 3 попытки пересдать экзамен. Вероятность , что студент сдаст экзамен с первой попытки, равна 0,4 , со второй 0,6 , с третьей – 0,8. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток сдать экзамен, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).
7. Вероятность своевременного прибытия 3-х пожарных машин к очагу возгорания составляют соответственно 0,9, 0,8 и 0,85. Составить закон распределения случайной величины – числа пожарных машин, прибывших вовремя к очагу возгорания, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).
8. Вероятность производства нестандартного изделия на фабрике равна 0,05. ОТК из каждой партии берет одно за другим, но не более 3-х изделий. При обнаружении среди них первого нестандартного изделия вся партия задерживается. Составить закон распределения случайной величины – числа нестандартных изделий, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

9. В одном из отделов магазина продают одежду. Вероятность, что покупатель купит брюки или рубашку или свитер, равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины – числа купленных покупателем изделий, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

10. Баба-Яга задала Ивану – царевичу загадку и три попытки отгадать её. Вероятность отгадать загадку с первого раза, равна 0,4 , со второго – 0,5, с третьего раза – 0,7. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток отгадать загадку, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

11. Стрелок стреляет в тире в цель 3 раза. Вероятности попадания при каждом выстреле соответственно равны 0,4, 0,5 и 0,6. Составить закон распределения случайной величины – числа попаданий в цель, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

12. Вероятность проигрыша по лотерейному билету, равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины – числа выигрышных билетов, из имеющихся трех билетов, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

13. Даются 3 попытки завести мотоцикл до первой успешной попытки. Вероятность того, что мотоцикл заведется, равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток, в результате которых можно завести мотоцикл, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

14. В одном из отделов магазина продают одежду. Вероятность того, что покупатель купит брюки, равна 0,5, что купит рубашку – 0,8, что свитер – 0,9. Составить закон распределения случайной величины – числа купленных покупателем изделий, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

15. Вероятность выбраться на машине из колеи с первой попытки равна 0,4 , со второй – 0,7 , с третьей – 0,9. Водитель делает не более трех попыток.

Составить закон распределения случайной величины – числа попыток вывести машину из колеи, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. В зоомагазине продают трех симпатичных котят. Вероятность приобрести хозяина для каждого котенка равна 0,4. Составить закон распределения случайной величины – числа купленных котят, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Мальчик играет в игровые автоматы до первого выигрыша, при этом денег у него хватит только на три игры. Вероятность того, что мальчику улыбнется фортуна, равна 0,1. Составить закон распределения случайной величины – числа выигрышей, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

18. Змей Горыныч задал Ивану – царевичу загадку и три попытки отгадать её. Вероятность отгадать загадку с первого раза, равна 0,5 , со второго – 0,6, с третьего раза – 0,9. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток отгадать загадку, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

19. Детский новогодний подарок состоит из конфет. Вероятность того, что в подарочном пакете попадется конфета «Мишка на севере», равна 0,8, что «Конти» - 0,9, что конфета «Степ» - 0,6. Составить закон распределения случайной величины – числа конфет, которые попадут в новогодний подарочный пакет, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

20. В районной пожарной части находятся три машины. Вероятность своевременного прибытия на пожар для каждой машины, равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины – числа машин, которые прибудут вовремя к очагу возгорания, построить функцию распределения и ее график. Найти: M(X), D(X), σ(X).

21. На витрине лежат три торта. Вероятность того, что в составе торта есть сгущенное молоко, равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины – числа тортов со сгущенкой, построить функцию распределения и ее график. Найти: M(X), D(X), σ(X).

22. На дополнительной сессии студенту даются 3 попытки пересдать экзамен. Вероятность сдать экзамен с каждой попытки равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток сдать экзамен, построить функцию распределения и ее график. Найти: M(X), D(X), σ(X).

23. В зоомагазине продают трех симпатичных крольчат. Вероятность того, что купят первого крольчонка, равна 0,5, что второго – 0,6, что третьего – 0,3. Составить закон распределения случайной величины – числа купленных крольчат, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

24. В городе проводятся общероссийские соревнования по прыжкам с шестом. Каждому спортсмену дается не более трех попыток. Вероятность взять нужную высоту с первой попытки для данного спортсмена равна 0,6, со второй попытки – 0,8, с третьей – 0.9. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток взять нужную высоту, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

25. На станке изготавливается 80% стандартных болтов. Составить закон распределения случайной величины – числа стандартных болтов из трех проверенных, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

26. Вероятность обнаружения просроченной молочной продукции на прилавках магазина известной розничной сети равна 0,4. ОТК из каждой партии молочной продукции берет на проверку одно за другим, но не более 4-х изделий. При обнаружении среди них первого просроченного изделия вся партия молочной продукции задерживается. Составить закон распределения случайной величины – числа проверок, построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

27. В букмекерской конторе делаются ставки на лошадей, среди которых есть три фаворита. Вероятность, что лошадь по кличке «Ласка» придет первой, равна 0,9, что лошадь по кличке «Казань» - 0,8, что лошадь по кличке «Хаят» - 0,95. Составить закон распределения случайной величины – числа лошадей-фаворитов, которые займут призовые места (расстановка мест не важна), построить функцию распределения и ее график. Найти M(X), D(X), σ(X).

8. Тестовые задания по теме «Дискретная случайная величина»

1. Дискретной называется такая случайная величина, которая принимает

1) только одно значение

2) только конечное множество значений

3) конечное или бесконечное счетное множество значений

4) бесконечное несчетное множество значений

2. Графическая форма задания закона распределения дискретной случайной величины представляет собой

1) прямую линию

2) полигон

3) параболу

4) график некоторой непрерывной функции

3. Сумма всех вероятностей значений дискретной случайной величины равна

1) 0

2) 1

3) -1

4) $+\infty$

4. Табличная форма задания закона распределения случайной величины называется

1) суммой распределения

2) множеством распределения

3) рядом распределения

4) полем распределения

5. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} x^2{}_i \cdot p_i$

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

4) $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$

6. Математическое ожидание от константы С равно

1) 0

2) 1

3) С

4) C^2

7. Математическое ожидание случайной величины M(CX+CY) равно

1) 0

2) 2C

3) CM(X) + CM(Y)

4) C^2 M(X) + C^2 M(Y)

8. Дан закон распределения дискретной случайной величины.

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,2	0,6

Начальный момент первого порядка равен

1) 0

2) 2,4

3) 6,4

4) 0,64

9. Математическое ожидание случайной величины $M(CX \cdot AY+B)$, где C, A, B – некоторые постоянные, равно

1) $CM(X) \cdot AM(Y)$
2) $CM(X) \cdot AM(Y) + B$
3) 0
4) $C^2\, M(X) \cdot A^2\, M(Y) + B$

10. Математическое ожидание от $M(M(M(X)))$ равно

1) 0
2) $M(X)$
3) $3M(X)$
4) $M^3(X)$

11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X.

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,1	0,6

Математическое ожидание $M(X)$ равно

1) 1
2) 2,3
3) 1,3
4) 6,1

12. Проводятся n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании. Математическое ожидание СВ - числа появлений события A в n независимых испытаниях равно

1) np
2) p
3) npq
4) q

13. Дан закон распределения дискретной случайной величины X.

x_i	1	2	3
p_i	0,5	0,3	0,2

Математическое ожидание $M(X)$ равно

1) 1
2) 1,7
3) 2,7
4) 3,5

14. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле

1) $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ - (\sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i)^2$
2) $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i)^2$
3) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i \ - (\sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i)^2$
4) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$

15. Дисперсия от константы С равна

1) 0
2) С
3) C^2
4) $C^2D(X)$

16. Дисперсия случайной величины D(CX- AY+B), где С, А, В – некоторые постоянные, равна

1) CD(X) – AD(Y) + D(B)
2) CD(X) + AD(Y)
3) C^2 D(X) – A^2 D(Y)
4) C^2 D(X) + A^2 D(Y)

17. Коэффициент вариации случайной величины X вычисляется по формуле:

1) $V = \frac{\sigma(X)}{M(X)}$
2) $V = \frac{D(X)}{M(X)}$
3) $V = \frac{M(X)}{D(X)}$
4) $V = \frac{M(X)}{\sigma(X)}$

18. Дисперсия случайной величины D(CX+Y+B), где С, В – некоторые постоянные, равна

1) $CD(X) + D(Y) + D(B)$

2) $CD(X) + D(Y)$

3) $C^2 D(X) + D(Y) + D^2(B)$

4) $C^2 D(X) + D(Y)$

19. $D(X) = 5$, $D(Y) = 2$, тогда $D(X+2Y)$ равно

1) 7

2) 9

3) 13

4) 1

20. $D(X) = 5$, $D(Y) = 2$, тогда $D(X - 2Y)$ равно

1) 3

2) 1

3) 9

4) 13

21. Дан закон распределения дискретной случайной величины X.

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,1	0,6

Дисперсия D(X) равна

1) 0,81

2) 2,3

3) 1,3

4) 6,1

22. Квадрат среднеквадратического отклонения случайной величины X равен

1) D(X)

2) $\sqrt{D(X)}$

3) M(X)

4) $D^2(X)$

23. Проводятся 5 независимых испытаний с вероятностью p=0,3 появления события A в каждом испытании. Математическое ожидание СВ - числа появлений события A в n независимых испытаниях равно

1) 1,5
2) 5
3) 1,05
4) 0,3

24. Дан закон распределения дискретной случайной величины.

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,2	0,6

Центральный момент первого порядка равен

1) 0
2) 2,4
3) 6,4
4) 0,64

25. Проводятся 5 независимых испытаний с вероятностью p=0,3 появления события A в каждом испытании. Дисперсия СВ - числа появлений события A в n независимых испытаниях равна

1) 1,5
2) 5
3) 1,05
4) 0,3

26. Начальный момент для дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

1) $\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$

2) $\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$

3) $\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i^k$

4) $\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i^k$

28. Средние квадратические отклонения $\sigma(X) = 2$ и $\sigma(Y) = 3$. Тогда выражение $D(4X-Y)$ равно

1) 73
2) 5
3) 55
4) 35

Тема «Непрерывная случайная величина»

9. Функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства

Непрерывная случайная величина имеет бесконечно несчетное множество значений, поэтому задать ее в форме ряда распределения не представляется возможным.

Существуют две формы задания **непрерывной случайной величины**: **функция распределения** и **плотность распределения вероятностей**.

Определение. ***Функцией распределения случайной величины X*** называют функцию *F(x),* которая определяет для каждого значения аргумента *x* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее *x*

$$F(X)=P(X < x)$$

Если $x = a$, то $F(a) = P(X < a)$.

Задание случайной величины X с помощью функции распределения *F(x)* универсально, так как этим способом задаются дискретные и непрерывные случайные величины.

Функция *F(x)* называется **интегральной функцией** распределения.

Геометрически *F(x)* определяет вероятность того, что значения случайной величины *X* в результате опыта окажутся левее точки *x* числовой оси *Ox* (рис. 5) Вероятность того, что случайная величина X окажется левее точки x, будет зависеть от положения точки x, т.е. являться функцией аргумента x.

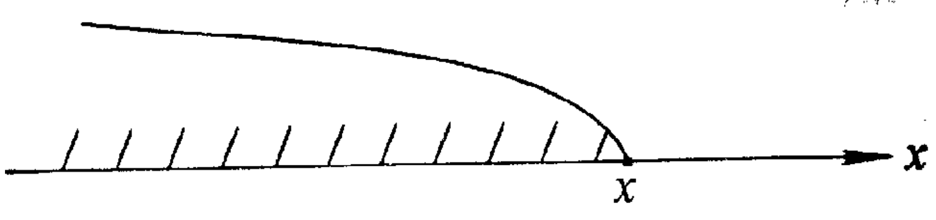

Рис.5

Для **непрерывной случайной величины** X функция *F(x)* является непрерывной в любой точке, дифференцируемой всюду, кроме, быть может, некоторых точек, где имеет место излом.

Свойства функции распределения.

1.Функция *F(x)* есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей,

$$0 \le F(X) \le 1.$$

2. Вероятность того, что случайная величина примет значение, удовлетворяющее двойному неравенству $a \le X \le b$, равна приращению *F(x)* на этом интервале

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) \qquad (5)$$

3. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция, то есть $F(x_2) > F(x_1)$ если $x_2 > x_1$.

Это свойство вытекает из 2-го свойства F*(x)*. Так как

$P(x_1 \le X < x_2) > 0,\ mo\ F(x_2) \ge F(x_1)$

Следствие. Перейдем к пределу в равенстве (5) при $x_2 \to x_1$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x_2 \to x_1} P(x_1 \le X < x_2) = P(X = x_1), \\ &\lim_{x_2 \to x_1} (F(x_2) - F(x_1)) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(X = x_1) = 0.$$

Таким образом, вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение, равна нулю. Поэтому в равенстве (5) можно записать

$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b)$

4. Если случайная величина *X* задана на всей числовой оси Ох, то **выполняются следующие соотношения:**

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \qquad (6)$$

Действительно, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$, как вероятность невозможного события, а $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = P(X < +\infty) = 1$, как вероятность достоверного события.

10. Плотность распределения вероятностей и ее свойства

Пусть дана непрерывная случайная величина *X*, функция распределения которой *F(x),* непрерывная и дифференцируемая. Найдем вероятность попадания случайной величины *X* на элементарный участок
$(x;\ x+\Delta\ x)$.

$$F(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Определение. Предел отношения вероятности попадания непрерывной случайной величины *X* на элементарный участок $(x + \Delta x)$ к длине этого участка Δx, когда $\Delta x \to 0$, называется ***плотностью распределения*** непрерывной случайной величины *X* и обозначается *f(x)*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x)$$

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Следовательно, $f(x) = F'(x)$ (7)

Геометрический смысл функции *f(x)* следующий: площадь криволинейной трапеции, построенной на отрезке $[x, x + \Delta x]$ равна вероятности попадания случайной величины *X* в интервал $(x, x + \Delta x)$.
Функцию *f(x)* называют также ***дифференциальной функцией*** или *дифференциальным законом распределения* случайной величины X.
Функция *f(x)* существует только для **непрерывны**х случайных величин.
Графическое изображение *f(x)* называется кривой распределения.

Свойства плотности распределения.

1. Плотность распределения неотрицательна, так как *f(x)* есть производная от неубывающей функции *F(x).*

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина *X* примет значения на интервале $(a < X < b)$, равна

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Это свойство вытекает из равенства (5) с использованием (7) и формулы Ньютона - Лейбница:

F(b) - F(a)=P(a < x < b),

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Или $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Геометрическая интерпретация: *P(a < X < b)*–площадь фигуры между кривой распределения, прямыми *x=a, x=b* и осью *Ox*.

3. Функция распределения *F(x)* равна

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

В самом деле, $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

4. Интеграл от плотности распределения в пределах $(-\infty; +\infty)$ равен 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Подставив в равенство (8) $a = -\infty$, $b = +\infty$ и используя свойство (6), имеем:

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F'(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Геометрически это свойство означает, что площадь, ограниченная кривой распределения и осью *Ox,* равна единице.

Пример 15.

Функция распределения случайной величины X задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \, x<-\pi/4\\ 1/2\sin\left(x-\pi/4\right)+1/2 \;\; при -\pi/4\le x\le 3\pi/4\\ 1 \;\; при \, x>3\pi/4\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 \;\; при \, x<-\pi/4\\ 1/2\cos\left(x-\pi/4\right) при -\pi/4\le x\le 3\pi/4\\ 0 \;\; при \, x>3\pi/4\end{cases}$$

Пример 16. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения вероятностей F(x) .

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Необходимо определить функцию плотности распределения *f(x).*

<u>Решение</u>: пользуясь определением, находим производную от функции F(x) на каждом из заданных интервалов.

$$f\left(x\right)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 2(x-2), & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Пример 17. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; при \, x<0\\ (x-3)^2/9 \, при \, 0\le x\le 3\\ 0 \;\; при \, x>3\end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения *F(x).*

Воспользуемся формулой :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \cdot$$

Если x < 0,то *f(x)*=0, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

Если $0 \le x < 3$, то *f(x)*=$(x-3)^2/9$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{(x-3)^2}{9} dt = \left.\frac{(t-3)^3}{27}\right|_0^x = \frac{(x-3)^3}{27} + 1;$$

Если x > 3, то *f(x)*=0, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{3} \frac{(t-3)^2}{9} dt + \int_{3}^{x} 0dt = \left.\frac{(t-3)^3}{27}\right|_0^3 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при\, x < 0 \\ (x-3)^3/27 + 1 \ \ при\, 0 \le x \le 3 \\ 1 \ \ при\, x > 3 \end{cases}$$

Построим график функции *F(x)*:

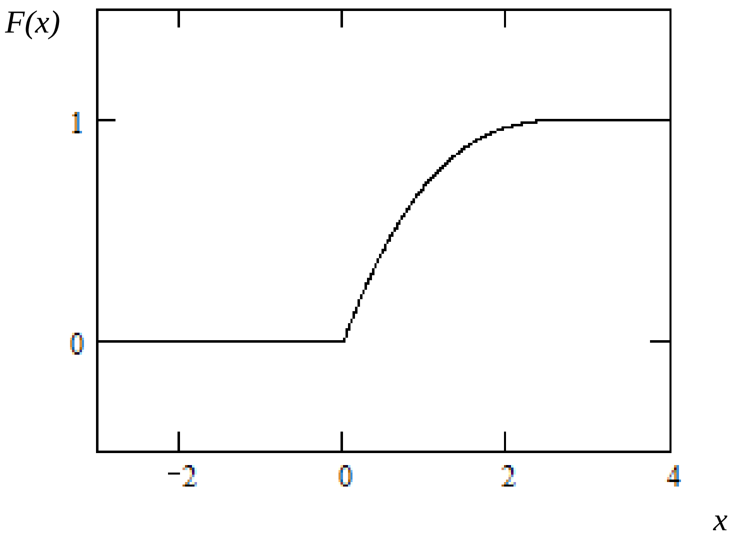

Рис.6.

11. Числовые характеристики непрерывной случайной величины. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии

Непрерывная случайная величина имеет те же числовые характеристики, что и дискретная случайная величина.

Пусть задана непрерывная случайная величина *X,* возможные значения которой принадлежат всей оси *Ox,* известна плотность распределения *f(x)*.

Математическое ожидание *M(X)* непрерывной случайной величины *X,* возможные значения которой принадлежат интервалу (a; b), определяется выражением: $M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx$

Если возможные значения непрерывной случайной величины *X* принадлежат всей числовой оси *Ox,* то математическое ожидание *M(X)* определяется сходящимся несобственным интегралом вида:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Дисперсией D(X) непрерывной случайной величины *X,* заданной на интервале (*a;b*), является определенный интеграл вида:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$$

Чаще для расчета дисперсии применяют более удобную формулу

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины *X* принадлежат всей числовой оси *Ox,* то дисперсия *D(x)* определяется несобственным интегралом вида:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$$

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины *X* (аналогично дискретной) называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$$

Свойства *M(X)* и D*(X),* рассмотренные для дискретных случайных величин, имеют место и для непрерывных случайных величин.

Начальный момент k-го порядка непрерывной случайной величины X вычисляется по формуле:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

Центральный момент s-го порядка непрерывной случайной величины X вычисляется как:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M(X)\right)^s f(x)dx$$

Пример 18. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины, заданной интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x \le -2, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} \quad при -2 < x \le 2, \\ 1 \text{ } при \text{ } x > 2. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Найдем дифференциальную функцию $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{1}{4}, & -2 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание

$$M(x) = \int_{-2}^{2} xf(x)dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{1}{4} dx = 0$$

(Подынтегральная функция нечетная, пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Найдем искомую дисперсию, учитывая, что M(x)=0;

$$D(x)=\int_{-2}^{2}[x-M(x)]^2\; f(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}dx=$$

$$=\frac{2}{4}\int_0^2 x^2dx=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Пример 19. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения вероятностей $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ mx^3, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) коэффициент m;
2) найти интегральную функцию распределения F(x), построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины;
4) вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (0; 0,5).

Решение: 1) коэффициент m найдем, используя равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

Тогда интеграл по бесконечному промежутку можно представить в виде суммы трех интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{+\infty} f(x)dx=1$$

Подставляя соответствующие значения функции *f(x)*, получаем

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} mx^3dx+\int_{1}^{+\infty} 0dx=1$$

$$m\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 1$$

Отсюда m=4 и функцию $f(x)$ можно переписать в виде:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 4x^3, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

2) Найти интегральную функцию распределения *F(x)*.

Воспользуемся формулой :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \cdot$$

Если $x\le 0$, то *f(x)*=0, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

Если $0<x\le 1$, то *f(x)* = $4x^3$, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} 4t^3dt=\frac{4t^4}{4}\Big|_0^x = x^4;$$

Если x > 1, то *f(x)* = 0, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{1} 4t^3dt+\int_{1}^{x} 0dt=\frac{4t^4}{4}\Big|_0^1 = 1$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^4, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Построим график функции F(x):

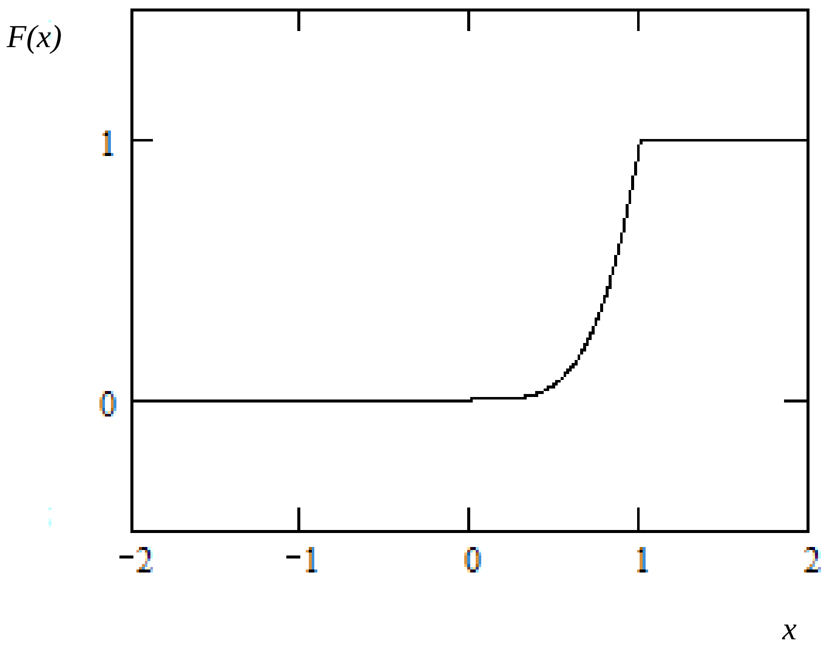

Рис.7.

3) Вычислим математическое ожидание

$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = \frac{4}{5} \cdot x^5 |_0^1 = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Вычислим дисперсию

$D(X) = \int_b^a x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(X)\right)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3 dx - (0.8)^2 = \frac{4}{6} x^6 |_0^1 - 0{,}64$

$\approx 0{,}67 - 0{,}64 \approx 0{,}03$

4) Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (0; 0,5)

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_0^{0.5} 4x^3\, dx = x^4 |_0^{0.5} = 0{,}5^4 = 0{,}0625$

Пример 20. Случайная величина X задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; при \; x < -2, \\ \left(-\frac{1}{4}\right)x^3 \; при \; -2 \le x \le 0 \\ 0 \; при \; x > 0 \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты до четвертого порядка.

Начальный момент определяется так:

$$\nu_k = M(X^k)$$

Для непрерывной случайной величины

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

Найдем начальные моменты

$$\nu_1 = M(X) = -\frac{1}{4}\int_{-2}^{0} x^4 dx = -\frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{0} = -1{,}6;$$

$$\nu_2 = M\left(X^2\right) = -\frac{1}{4}\int_{-2}^{0} x^5 dx = -\frac{1}{4}\frac{x^6}{6}\Big|_{-2}^{0} = 8/3 \approx 2{,}67;$$

$$\nu_3 = M\left(X^3\right) = -\frac{1}{4}\int_{-2}^{0} x^6 dx = -\frac{1}{4}\frac{x^7}{7}\Big|_{-2}^{0} = -32/7 \approx -4{,}57;$$

$$\nu_4 = M\left(X^4\right) = -\frac{1}{4}\int_{-2}^{0} x^7 dx = -\frac{1}{4}\frac{x^8}{8}\Big|_{-2}^{0} = 8\,.$$

Центральный момент определяется так:

$$\mu_s = M(X - M(X))^s$$

Для непрерывной случайной величины

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M(X)\right)^s f(x)dx$$

Используя связь начальных и центральных моментов:

$$\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2 \cdot \nu_1 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3 \cdot \nu_1 + 6\nu_2 \cdot \nu_1^2 - 3\nu_1^4,$$

найдем центральные моменты

$$\mu_2 = D(X) = \nu_2 - \nu_1^2 \approx 2{,}67 - (1{,}6)^2 \approx 0{,}11;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 \approx -4{,}57 + 3 \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}67 - 2 \cdot (1{,}6)^3 \approx 0{,}054;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 \approx 8 - 4 \cdot 1{,}6 \cdot (-4{,}57) + 6 \cdot (1{,}6)^2 \cdot 2{,}67 - 3 \cdot (1{,}6)^4 \approx 58{,}5984$$

Контрольные вопросы

1. Что такое функция распределения случайной величины?
2. Какими свойствами обладает функция распределения?
3. Что такое плотность распределения непрерывной случайной величины?
4. Какими свойствами обладает дифференциальная функция?
5. Какие числовые характеристики имеет непрерывная случайная величина?
6. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины?
7. Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины?

12. Задания для самостоятельной работы по теме «Непрерывная случайная величина»

Задание. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения вероятностей $f(x)$. Найти в соответствии с данными, приведенными в варианте:

1) коэффициент m;
2) найти интегральную функцию распределения F(x), построить ее график;

3) математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины;

4) вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (c, d).

Для вариантов с 1 по 10 решить задачу 1;

для вариантов с 11 по 20 решить задачу 2;

для вариантов с 21 по 27 решить задачу 3.

Задача 1

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \le a,\\ mx^k, & a < x \le b,\\ 0, & x > b.\end{cases}$$

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	0	1	2	3	1	2	0	1	0	3
b	2	2	3	4	3	3	2	2	1	4
k	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1
c	0	1	2	0	1	2	1	1	0	0
d	0	1,5	2,5	0,5	2	2,5	2	1,5	0,5	1

Задача 2

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{m}{x}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Задача 3

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ me^{kx}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

№ варианта	21	22	23	24	25	26	27
a	0	0	0	0	0	1	1
b	1	1	1	2	2	2	2
k	2	2	3	2	3	2	3
c	0	0,5	0,75	0	1	1	1,5
d	0,5	1	1	1	2	1,5	2

13. Тестовые задания по теме «Непрерывная случайная величина»

1.Непрерывной называется такая случайная величина, которая принимает

1) конечное или бесконечное счетное множество значений

2) только одно значение

3) бесконечное счетное множество значений

4) бесконечное несчетное множество значений

2. Выберите две формы задания непрерывной случайной величины

1) функция распределения и ряд распределения

2) полигон и ряд распределения

3) функция распределения и плотность распределения

4) плотность распределения и ряд распределения

3. Для непрерывной случайной величины X и конкретного значения ***a*** вероятность P(X = ***a*)** равна

1) 0

2) 1

3) $+\infty$

4) $-\infty$

4. Если непрерывная случайная величина X задана на всей числовой оси OX, то $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ равен

1) 0

2) 1

3) -1

4) $-\infty$

5. Функция распределения F(x) обладает следующим свойством

1) $0 \le F(x) \le 1$

2) $F(x) \ge 0$

3) $F(x) \le 1$

4) $0 < F(x) < 1$

6. Функция распределения F(x) равна

1) F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

2) F(x) = $\int_{-\infty}^{x} xf(x)dx$

3) F(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

4) F(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

7. Если *f*(*x*) - плотность распределения непрерывной случайной величины, то она равна

1) $\int_{-\infty}^{x} F(x)dx$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$

3) $F''(x)$

4) $F'(x)$

8. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \;\; npu \; x<0 \\ 2x/9 \; npu \; 0\le x\le 3 \\ 0 \;\; npu \; x>3 \end{cases}$$

Интегральная функция распределения *F(x)* при $x>3$ равна

1) 0

2) $\frac{2x}{9}$

3) 1

4) $\frac{x^2}{9}$

9. Если f(x) - плотность распределения непрерывной случайной величины, то интеграл на всей числовой оси $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ равен

1) 1

2) 0

3) $+\infty$

4) $-\infty$

10. Плотность распределения f(x)

1) неотрицательна

2) отрицательна

3) неположительная

4) положительна

11. Математическое ожидание M(X) непрерывной случайной величины X, заданной на всей числовой оси, определяется по формуле:

1) $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$

2) $M(X) = \int_{a}^{b} x \cdot f(x)dx$

3) $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx$

4) $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

12. Начальный момент непрерывной случайной величины определяется по формуле

1) $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$

2) $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f^k(x)dx$

3) $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

4) $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^k(x)dx$

13. Дисперсия D(X) непрерывной случайной величины X, заданной на всей числовой оси, определяется по формуле:

1) $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2$

2) $D(X) = \int_{a}^{b} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2$

3) $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M(X)$

4) $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dx - (M(X))^2$

14. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения вероятностей F(x) . Выберите верную функцию F(x)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ (x-1), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ (x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}-1, & x\le 1,\\ (x-1)\ , & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ (x-1)\ , & 1<x\le 2,\\ 2, & x>2.\end{cases}$$

15. Дисперсия D(X) непрерывной случайной величины, заданной на интервале (a, b) вычисляется как:

1) D(X) = $\int_b^a x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2$
2) D(X) = $\int_b^a x \cdot f(x)dx - (M(X))^2$
3) D(X) = $\int_b^a x^2 \cdot f(x)dx - \mathrm{M(X)}$
4) D(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2$

16. Дана функция плотности $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Математическое ожидание равно

1) 1
2) 2
3) ⅔

4) 0,5

17. Если непрерывная случайная величина X задана на всей числовой оси OX, то $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ равен

1) 0

2) 1

3) -1

4) $+\infty$

18. Центральный момент второго порядка непрерывной случайной величины X равен

1) M(X)

2) D(X)

3) σ (X)

4) $\sqrt{V(X)}$

19. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности распределения вероятностей f(x) . Выберите верную функцию f(x)

1) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}5x, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}5x, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0,\\ 0{,}5x, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}5x, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

20. Дана функция плотности f(x)

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка (0, 0,2) равна

1) 0
2) 0, 0053
3) 0,04
4) 1

21. $\int_b^a x^2 \cdot f(x)dx = 7,$ а $M(X) = 2{,}5.$ Значение D(X) равно

1) 4,5
2) 9,5
3) 0,75
4) 0,5

22. Центральный момент порядка s для непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

1) $\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M(X)\right)^s f(x)dx$

2) $\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M(X)\right)^2 f(x)dx$

3) $\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M(X)\right) f(x)dx$

4) $\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M(X)\right)^s f^s(x)dx$

23. $\int_b^a x^2 \cdot f(x)dx = 4,$ D(X) =2,75 . Значение M(X) равно

1) 1,5
2) 2,25
3) 6,75
4) - 2,25

24. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; при \; x<0\\ 2x/9 \; при \; 0\le x\le 3\\ 0 \;\; при \; x>3\end{cases}$$

Интегральная функция распределения *F(x)* при $x \le 0$ равна

1) 0

2) $\frac{2x}{9}$

3) 1

4) $\frac{x^2}{9}$

25. M(X) = 0,5 , D(X) =0,75 . Значение $\int_b^a x^2 \cdot f(x)dx$ равно

1) 1

2) 1,25

3) 0.25

4) 0,5

26. Среднее квадратическое отклонение σ (X) непрерывной случайной величины равно

1) D(X)

2) $\sqrt{D(X)}$

3) $\sqrt{V(X)}$

4) $D^2(X)$

27. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; при \; x<0\\ 2x/9 \; при \; 0\le x\le 3\\ 0 \;\; при \; x>3\end{cases}$$

28.Интегральная функция распределения *F(x)* при $0 \le x \le 3$ равна

1) 0

2) $\frac{2x}{9}$

3) 1

4) $\frac{x^2}{9}$

Тема «Системы случайных величин»

14. Системы случайных величин.

Закон распределения двумерной случайной величины

Рассмотрим систему двух дискретных случайных величин (X;Y).

Пусть X принимает n значений: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; Y-m значений: $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Обозначим через p_{ij} вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y - значение y_j.

Закон распределения такой системы случайных величин задается матрицей распределения, представленной в таблице 3.

Таблица 3

X\Y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	…	$p_{1,j}$	…	$p_{1,m}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	…	$p_{2,j}$	…	$p_{2,m}$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	$p_{i,1}$	$p_{i,2}$	…	$p_{i,j}$	…	$p_{i,m}$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	…	$p_{n,j}$	…	$p_{n,m}$

$p_{ij}=P(X=x_i;Y=y_j),\ i=1,2,\ldots n; j=1,2,\ldots,m$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Определение. Прямоугольная таблица чисел из n строк и m столбцов называется матрицей.

Если задана такая таблица закона распределения системы двух СВ, то по ней можно составить закон распределения каждой отдельной СВ.

Найдем $P(X = x_i) = \sum_i p_{ij}$ -суммирование по i-той строке.

$P(Y = y_j) = \sum_j p_{ij}$ - суммирование по j-тому столбцу.

Пример 21. Имеется портфель акций, состоящий из двух типов акций, отличающихся по ожидаемым нормам прибыли. Составить закон распределения случайных величин X и Y. Закон распределения системы случайных величин задается матрицей распределения, представленной в таблице 4.

Таблица 4

Глуб. Спад	Рост	Мощн. рост		
X\Y	0,4	0,2	0,3	
Глуб.спад	0,3	0,2	0,15	0,05
Рост	0,1	0,1	0,11	0,14
Мощн.рост	0,5	0,08	0,05	0,12

X	0,3	0,1	0,5
P	0,4	0,35	0,25

Y	0,4	0,2	0,3
P	0,38	0,31	0,31

P_{x1}=0,2+0,15+0,05=0,4 P_{y1}=0,2+0,1+0,08=0,38

P_{x2}=0,1+0,11+0,14=0,35 P_{y2}=0,15+0,11+0,05=0,31

P_{x3}=0,08+0,05+0,12=0,25 P_{y3}=0,05+0,14+0,12=0,31

Условным законом распределения одной из величин, входящих в систему (X,Y), называется закон распределения Y при условии, что $X=x_i$, или закон распределения X при условии $Y=y_j$.

В нашем случае

$$P(Y = y_j / X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_j) / P(X = x_i);$$

$$P(X = x_i / Y = y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) / P(Y = y_j)$$

$$P(Y = y_3 / X = x_1) = P_{13} / P_{x1} = \frac{0{,}05}{0{,}4} = 0{,}125;$$

$$P(X = x_3 / Y = y_1) = P_{31} / P_{y1} = \frac{0{,}08}{0{,}38} = \frac{4}{19}$$

Определение. СВ X и Y, образующие систему, называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая.

Необходимым и достаточным условием **независимости** дискретных СВ X,Y является равенство

$$P_{ij} = P_{xi} \cdot P_{yj} \quad (i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m)$$

В примере 21 P_{11}=0,2; P_{x1}=0,4; P_{y1}=0,38

$P_{x1} \cdot P_{y1} = 0{,}4 \cdot 0{,}38 = 0{,}152 \neq P_{11} = 0{,}2 \Rightarrow$ X и Y не являются независимыми.

Найдем условные распределения и условные математические ожидания

X=x_1=0,3 (для составления таблицы условного распределения значения вероятностей берем из 1-ой строки таблицы1 и делим каждое значение на P_{x1})

Y	0,4	0,2	0,3
P	$\frac{0{,}2}{0{,}4}$	$\frac{0{,}15}{0{,}4}$	$\frac{0{,}05}{0{,}4}$

$$M(Y / X = x_1) = 0{,}4 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}4} + 0{,}2 \cdot \frac{0{,}15}{0{,}4} + 0{,}3 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}4} = 0{,}3125$$

X=x_2=0,1 (значения вероятностей берем из 2-ой строки таблицы1 и делим каждое значение на P_{x2})

Y	0,4	0,2	0,3
P	$\frac{0{,}1}{0{,}35}$	$\frac{0{,}11}{0{,}35}$	$\frac{0{,}14}{0{,}35}$

$$M(Y / X = x_2) = 0{,}4 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}35} + 0{,}2 \cdot \frac{0{,}11}{0{,}35} + 0{,}3 \cdot \frac{0{,}14}{0{,}35} \approx 0{,}297$$

X=x_3=0,5 (значения вероятностей берем из 3-ой строки таблицы1 и делим каждое значение на P_{x3})

Y	0,4	0,2	0,3
P	$\frac{0,08}{0,25}$	$\frac{0,05}{0,25}$	$\frac{0,12}{0,25}$

$$M(Y/X=x_3)=0,4\cdot\frac{0,08}{0,25}+0,2\cdot\frac{0,05}{0,25}+0,3\cdot\frac{0,12}{0,25}=0,312$$

Y=y_1=0 (значения вероятностей берем из 1-ого столбца таблицы1 и делим каждое значение на P_{y1})

X	0,3	0,1	0,5
P	$\frac{0,2}{0,38}$	$\frac{0,1}{0,38}$	$\frac{0,08}{0,38}$

$$M(X/Y=y_1)=0,1\cdot\frac{0,1}{0,2}+0,2\cdot\frac{0}{0,2}+0,4\cdot\frac{0,1}{0,2}=0,25$$

Y=y_2=0,2 (значения вероятностей берем из 2-ого столбца таблицы1 и делим каждое значение на P_{y2})

X	0,3	0,1	0,5
P	$\frac{0,15}{0,31}$	$\frac{0,11}{0,31}$	$\frac{0,05}{0,31}$

$$M(X/Y=y_2)=0,3\cdot\frac{0.15}{0,31}+0,1\cdot\frac{0,11}{0,31}+0,5\cdot\frac{0,05}{0,31}=0,266$$

Y=y_3=0,3 (значения вероятностей берем из 3-го столбца таблицы1 и делим каждое значение на P_{y3})

X	0,3	0,1	0,5
P	$\frac{0,05}{0,31}$	$\frac{0,14}{0,31}$	$\frac{0,12}{0,31}$

$$M(X/Y=y_3)=0{,}3\cdot\frac{0{,}05}{0{,}31}+0{,}1\cdot\frac{0{,}14}{0{,}31}+0{,}5\cdot\frac{0{,}12}{0{,}31}=0{,}287$$

15. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Начальные и центральные моменты. Ковариация и коэффициент корреляции.

Наиболее распространенными числовыми характеристиками системы двух СВ являются начальные и центральные моменты разных порядков.

Определение. **Начальным моментом** порядка $k+s$ называется математическое ожидание от произведения X^kY^s

$$\nu_{k,s}=M(X^kY^s)$$

Определение. **Центральным моментом** порядка $k+s$ называется математическое ожидание от произведения отклонений

$$\mu_{k,s}=M((X-M(X))^k(Y-M(Y))^s)$$

Или по-другому

$$\nu_{k,s}=\sum_{i,j}x_i^k y_j^s p_{ij}$$

$$\mu_{k,s}=\sum_{i,j}(x_i-M(X))^k(y_j-M(Y))^s\cdot p_{ij}$$

.

Наиболее распространены моменты первого и второго порядков (порядок-это $k+s$)

$$\nu_{1,0}=M(X^1Y^0)=M(X);$$

$$\nu_{0,1}=M(X^0Y^1)=M(Y);$$

$$\mu_{1,0}=M(X-M(X))=0;$$

$$\mu_{0,1}=M(Y-M(Y))=0;$$

$$\mu_{2,0}=M((X-M(X))^2)=D(X);$$

$$\mu_{0,2}=M((Y-M(Y))^2)=D(Y);$$

$$\mu_{1,1} = M(X - M(X))(Y - M(Y))$$

$\mu_{1,1}$ называется **ковариацией** или **корреляционным моментом** и обозначается *cov(X,Y)* или

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) \cdot p_{ij};$$

$$D(X) = \operatorname{cov}(X,X); \quad D(Y) = \operatorname{cov}(Y,Y)$$

Отношение

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

называется **коэффициентом корреляции**.·

$\sigma_x = \sigma_x(X) = \sqrt{D(X)}$ -среднеквадратическое отклонение случайной величины X;

$\sigma_y = \sigma_y(Y) = \sqrt{D(Y)}$ - среднеквадратическое отклонение случайной величины Y.

Экономический смысл числовых характеристик системы (X,Y) :

M(X) и M(Y) – это ожидаемые нормы прибыли по двум типам акций;

D(X) или $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ показывает степень разброса вероятностного распределения норм прибыли компании X, а значит, степень риска инвестиционного проекта X.

D(Y) и $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$ аналогично показывают степень риска инвестиционного проекта Y.

Коэффициент ковариации измеряет две величины:

1) вариацию нормы прибыли по двум типам акций;
2) тенденцию движения двух типов акций вверх и вниз.

Если коэффициент ковариации положительный и большой, то обе группы акций изменяются в одном направлении, обе вверх или обе вниз. Значит есть риск разориться при покупке этих видов акций одновременно.

Если коэффициент ковариации отрицательный и большой, то одни акции идут вверх, а другие - вниз. Покупка акций такого типа обеспечивает большую стабильность.

Если коэффициент ковариации принимает очень маленькие значения, то эти типы акций изменяются каждый по-своему независимо друг от друга, связь между ними очень мала.

Для двух известных законов распределения случайных величин X и Y из **примера 21** вычислим их математические ожидания и средние квадратические отклонения

X	0,3	0,1	0,5
P	0,4	0,35	0,25

Y	0,4	0,2	0,3
P	0,38	0,31	0,31

M(X) = 0,3·0,4+0,1·0,35+0,5·0,25 =0,28

M(Y) = 0,4·0,38+0,2·0,31+0,3·0,31=0,307

D(X) =0,09·0,4 +0,01·0,35+0,25·0,25 – $(0,28)^2$ =0,0236

D(Y) = 0,16·0,38+0,04·0,31+0,09·0,31 – $(0,307)^2$ = 0,006851

$$\sigma_x = \sigma_x(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0{,}1536$$

$$\sigma_y = \sigma_y(Y) = \sqrt{D(Y)} = 0{,}0828$$

Тогда **ковариация** вычисляется как

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) \cdot p_{ij};$$

Или можно по более удобной для счета формуле:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \sum_i x_i p_i \cdot \sum_j y_j p_j$$

cov(X,Y) = 0,3·0,4·0,2+ 0,3·0,2·0,15+ 0,3·0,3·0,05+ 0,1·0,4·0,1+

+ 0,1·0,2·0,11+ 0,1·0,3·0,14+ 0,5·0,4·0,08+ 0,5·0,2·0,05 +

+ 0,5·0,3·0,12 - 0,28·0,307 = 0,00094

Так как коэффициент ковариации принимает очень маленькое значение, то эти типы акций изменяются каждый по-своему.

Вычислим **коэффициент корреляции** между X и У

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_y}$$

$$r_{xy} = \frac{0{,}00094}{0{,}1536 \cdot 0{,}0828} = 0{,}0739$$

И связи между ними нет.

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей распределения двумерной случайной величины?
2. Каков математический смысл элементов матрицы распределения?
3. Что называется начальным и центральным моментами первого и второго порядков двумерной дискретной случайной величины?
4. Что такое условный закон распределения *X* для двумерной случайной величины *(X, Y)*?
5. Каково определение коэффициента ковариации?
6. Что такое коэффициент корреляции?

16. Задания для самостоятельной работы по теме «Системы случайных величин»

Решить задачу в соответствии с вариантом.

Система двух дискретных случайных величин X и Y задается в виде таблицы (см. вариант).

1. Найти условные распределения и условные математические ожидания
2.Вычислить коэффициент корреляции между величинами X и Y. Сделать вывод о тесноте их связи.
3. Вычислить коэффициент ковариации между величинами X и Y. Сделать вывод.

Вариант 1

Y / X	1	3	4
2	0,15	0,1	0,25
3	0,15	0,2	0,15

Вариант 2

Y / X	1	3	4
2	0,1	0,1	0,1
3	0,3	0,2	0,2

Вариант 3

Y / X	1	3	4
2	0,1	0,1	0,1
3	0,2	0,2	0,3

Вариант 4

Y / X	2	3	5
1	0,2	0,1	0,2
4	0,2	0,15	0,15

Вариант 5

Y / X	2	3	5
1	0,2	0,15	0,15
4	0,2	0,1	0,2

Вариант 6

Y / X	2	3	5
1	0,1	0,2	0,15
4	0,3	0,1	0,15

Вариант 7

Y / X	0	2	4
6	0,35	0,1	0,1
8	0,25	0,1	0,1

Вариант 8

Y / X	0	2	4
6	0,15	0,2	0,2
8	0,25	0,1	0,1

Вариант 9

Y / X	0	2	4
6	0,25	0,2	0,1
8	0,25	0,1	0,1

Вариант 10

Y / X	1	3	5
2	0,15	0,2	0,25
4	0,15	0,1	0,15

Вариант 11

Y / X	1	3	5
2	0,25	0,2	0,15
4	0,15	0,1	0,15

Вариант 12

Y / X	1	3	5
2	0,15	0,2	0,15
4	0,15	0,2	0,15

Вариант 13

Y / X	2	4	5
1	0,15	0,15	0,2
3	0,2	0,1	0,2

Вариант 14

Y / X	2	4	5
1	0,2	0,1	0,2
3	0,15	0,15	0,2

Вариант 15

Y / X	2	4	5
1	0,05	0,25	0,2
3	0,2	0,1	0,2

Вариант 16

Y / X	3	4	5
1	0,1	0,25	0,2
2	0,1	0,25	0,1

Вариант 17

Y / X	3	4	5
1	0,1	0,15	0,2
2	0,1	0,35	0,1

Вариант 18

Y / X	3	4	5
0	0,2	0,2	0,2
8	0,1	0,1	0,2

Вариант 19

Y / X	1	2	3
4	0,25	0,15	0,1
5	0,2	0,2	0,1

Вариант 20

Y / X	1	2	3
4	0,1	0,1	0,1
5	0,3	0,25	0,15

Вариант 21

Y / X	1	2	3
1	0,35	0,2	0,1
4	0,15	0,1	0,1

Вариант 22

Y / X	1	2	3
1	0,15	0,1	0,1
4	0,35	0,2	0,1

Вариант 23

Y / X	2	3	5
1	0,25	0,1	0,1
5	0,35	0,1	0,1

Вариант 24

Y / X	2	3	5
1	0,15	0,1	0,2
5	0,15	0,1	0,3

Вариант 25

Y / X	1	3	5
5	0,2	0,2	0,2
7	0	0,2	0,2

Вариант 26

Y / X	2	4	6
3	0,25	0,15	0,1
5	0,15	0,15	0,2

Вариант 27

Y / X	3	4	5
0	0,25	0,15	0,2
8	0,15	0,15	0,1

17. Тестовые задания по теме «Системы случайных величин»

1.Коэффициент ковариации для системы двух случайных величин вычисляется по формуле:

1) $\operatorname{cov}(X,Y)=\sum\limits_{i,j}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))\cdot p_{ij}$

2) $\operatorname{cov}(X,Y)=\sum\limits_{i,j}(x_i-M(X))(y_j-M(X))\cdot p_{ij}$

3) $\operatorname{cov}(X,Y)=\sum\limits_{i,j}(x_i-M(X))^2(y_j-M(Y))\cdot p_{ij}$

4) $\operatorname{cov}(X,Y)=\sum\limits_{i,j}(x_i-M(X))^2(y_j-M(Y))^2\cdot p_{ij}$

2.Система двух дискретных случайных величин X и Y задается в виде таблицы.

Y / X	3	4	5
0	0,25	0,15	0,2
8	0,15	0,1	0,1

1) Закон распределения двух случайных величин задан верно

2) Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$$\sum_i x_{ij} < \sum_j y_{ij}$$

3) Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$$p_{11} + p_{12} + p_{13} \neq p_{21} + p_{22} + p_{23}$$

4) Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$$\sum_{i,j} p_{ij} \neq 1$$

3.Если коэффициент ковариации cov(X,Y) большой и положительный, то справедливо:

1) обе группы акций изменяются в одном направлении, обе вверх или обе вниз

2) один тип акций идет вверх, другой – вниз

3) один тип акций растет, другой остается неизменным

4) один тип акций падает, другой остается неизменным

4.Начальным моментом порядка k+s называется:

1) математическое ожидание от произведения $X^k Y^s$

2) дисперсия от произведения $X^k Y^s$

3) среднее квадратическое отклонение от произведения $X^k Y^s$

4) коэффициент ковариации от произведения $X^k Y^s$

5.Если коэффициент ковариации cov(X,Y) большой и отрицательный, то справедливо:

1)обе группы акций изменяются в одном направлении, обе вверх или обе вниз

2)один тип акций идет вверх, другой – вниз

3) один тип акций растет, другой остается неизменным

4) один тип акций падает, другой остается неизменным

6.Начальный момент первого порядка $\nu_{1,0}$ равен

1) M(X)

2) D(X)

3) 0

4) M(Y)

7.Начальный момент первого порядка $\nu_{0,1}$ равен

1) M(X)

2) D(X)

3) 0

4) M(Y)

8.Центральный момент первого порядка $\mu_{1,0}$ равен

1)M(X)

2)D(X)

3)0

4)M(Y)

9.Центральный момент второго порядка $\mu_{2,0}$ равен

1)M(X)

2)D(X)

3)0

4)D(Y)

10.Коэффициент корреляции для системы двух случайных величин вычисляется по формуле:

1) $r_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

2) $r_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x}$

3) $r_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_y}$

4) $r_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma^2{}_x \cdot \sigma^2{}_y}$

11.Центральный момент второго порядка $\mu_{0,2}$ равен

1)M(X)

2)D(X)

3)0

4)D(Y)

12.Система двух дискретных случайных величин X и Y задается в виде таблицы.

Y \ X	3	4	5
1	0,25	0,15	0,2
7	0,15	0,15	0,1

1) Закон распределения двух случайных величин задан верно

2) Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$$\sum_i x_{ij} < \sum_j y_{ij}$$

3) Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$$p_{11} + p_{12} + p_{13} \neq p_{21} + p_{22} + p_{23}$$

4) Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$$p_{11} + p_{21} \neq p_{12} + p_{22}$$

13.Экономически M(X) означает:

1) Ожидаемую норму прибыли от акций типа X

2) Ожидаемую норму убытка от акций типа X

3) Тенденцию движения вниз акций типа X

4) Тенденцию движения вверх акций типа X

14. Вычислены коэффициенты ковариации для двух типов акций X и Y. Покупка акций обеспечивает большую стабильность в случае, когда

1) cov (X,Y) = 0,85

2) cov (X,Y) = - 0,01

3) cov (X,Y) = 0,005

4) cov (X,Y) = - 0,97

15.Экономически M(Y) означает:

1)Ожидаемую норму прибыли от акций типа Y

2)Ожидаемую норму убытка от акций типа Y

3)Тенденцию движения вниз акций типа Y

4) Тенденцию движения вверх акций типа Y

16.Экономически D(X) или $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ означают

1) Ожидаемую норму прибыли от акций типа X
2) степень риска инвестиционного проекта X
3) Тенденцию движения вниз акций типа X
4) Тенденцию движения вверх акций типа X

17. Коэффициент ковариации cov (X,X) – это

1) M(X)

2)D(X)

3) r_{xy}

4) $\mu_{0,2}$

18. Коэффициент ковариации cov (Y,Y) – это

1) M(Y)

2)D(Y)

3) r_{xy}

4) $\mu_{0,2}$

19. Система двух дискретных случайных величин X и Y задается в виде таблицы.

Y / X	3	4	5
6	0,2	0,15	0,2
8	0,15	0,1	0,1

1)Закон распределения двух случайных величин задан верно

2)Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$$\sum_i x_{ij} > \sum_j y_{ij}$$

3)Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$p_{11} + p_{21} \neq p_{12} + p_{22}$

4)Закон распределения двух случайных величин задан неверно, так как

$\sum_{i,j} p_{ij} \neq 1$

20. Начальный момент порядка k+s вычисляется по формуле:

1) $\nu_{k,s} = \sum_{i,j} x_i^k y_j^s p_{ij}$

2) $\nu_{k,s} = \sum_{i,j} x_i^k y_j^s$

3) $\nu_{k,s} = \sum_{i,j} x_i^k y_j^s p_{ij}^{k+s}$

4) $\nu_{k,s} = \sum_{i,j} x_i^s y_j^k p_{ij}$

21. Центральный момент первого порядка $\mu_{0,1}$ равен

1)M(X)

2)D(X)

3)0

4)M(Y)

22. СВ X и Y, образующие систему случайных величин называются независимыми, если

1) $\sum_i x_{ij} \neq \sum_j y_{ij}$

2) закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая случайная величина.

3) закон распределения Y составлен при условии, что X=x_i

4) закон распределения X составлен при условии, что Y=y_j.

23. Если $P_{11}= P_{x1}* P_{y1}$, то случайные величины X и Y

1) зависимые

2) независимые

3) имеют одинаковые математические ожидания

4) имеют одинаковые дисперсии

24. Экономически D(Y) или $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$ означают

1) Ожидаемую норму прибыли от акций типа Y

2) Тенденцию движения вниз акций типа Y

3) степень риска инвестиционного проекта Y

4) Тенденцию движения вверх акций типа Y

25. Если коэффициент ковариации cov(X,Y) принимает очень маленькие значения, то

1) обе группы акций X и Y изменяются в одном направлении, обе вверх или обе вниз

2) один тип акций идет обязательно вверх, другой – вниз

3) один тип акций растет, другой остается неизменным

4) группы акций X и Y изменяются каждый по-своему независимо друг от друга и связь между ними очень мала.

26. Вычислены коэффициенты ковариации для двух типов акций X и Y. Покупка акций обеспечивает большую стабильность в случае, когда

1) cov (X,Y) = 0,001

2) cov (X,Y) = 0,88

3) cov (X,Y) = -0.89

4) cov (X,Y) = -0.02

27. Коэффициент ковариации cov(X,Y) вычисляется по формуле

1) $\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \sum_i x_i p_i \cdot \sum_j y_j p_j$

2) $\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \sum_i x_i \cdot \sum_j y_j$

3) $\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$

4) $\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j - \sum_i x_i \cdot \sum_j y_j$

Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов, ч.2. / Под ред. Р.Ш. Марданова. - Казань: Изд-во КФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – 576 с.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие/ Под ред. В. И. Ермакова – М.: ИНФРА-М, 2005. – 575 с.
4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб.пособие/ Под ред. В.И. Ермакова. – 2-ое изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 575 с. – (100 лет РЭА им. Г.В. Плеханова).