«КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНВЕРСИТЕТ»
Кафедра прикладной информатики

Р.М.САФИНА

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ 2013

УДК 519.21
ББК 22.171я73
С21

Рецензенты:
Е.П.Шустова, канд. физ.-мат. наук, доцент
кафедры прикладной информатики КФУ.
А.С.Ситдиков, доктор физ.-мат. наук,
профессор КГЭУ.

С21 **Индивидуальные задания по теории вероятностей: учебно-методическое пособие**. − Казань: Казанский (приволжский) федеральный университет, 2013. – 43 с.

Данное учебно-методическое пособие содержит задачи для закрепления знаний, полученных на лекционных и практических занятиях и при самостоятельном изучении.

Учебно-методическое пособие будет полезно студентам, обучающимся по экономическим направлениям вузов.

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 080100.62 «Экономика», 081100.62 «Государственное и муниципальное управление». Также пособие может быть использовано при обучении студентов других направлений (гуманитарных, социальных и т.д.).

Структура данного учебно-методического пособия соответствует учебной программе курса теории вероятностей и математической статистики и включает такие разделы, как «Случайные события», «Случайные величины». В связи с этим учебно-методическое пособие можно использовать как самостоятельно, так и в комплексе с имеющимися в распоряжении преподавателя и студента учебниками и задачниками.

Каждое задание учебно-методического пособия имеет 20 вариантов и направлено на формирование у студентов умения решать типовые задачи по определенной теме. Различные варианты в задании имеют одинаковую степень сложности, что дает возможность объективно оценить знания студентов.

Электронная версия пособия может быть использована в системе дистанционного обучения.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

При классическом определении за **вероятность события** A принимается отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов (m) к общему числу возможных исходов (n):

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только порядком, называются **перестановками**.

Число всех перестановок находится по формуле $P_n = n!$.

Размещениями называют множества, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число размещений из n по k выражается формулой $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Сочетаниями из n различных элементов по k элементов называются множества, содержащие k элементов из числа n заданных, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k определяется по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Теорема сложения вероятностей двух событий. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема сложения вероятностей n несовместных событий. Вероятность суммы n несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей n событий. Вероятность произведения n зависимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению последовательных условных вероятностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}).$$

Теорема умножения вероятностей n независимых событий. Вероятность произведения n независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Пусть событие A может наступать только одновременно с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. Тогда вероятность события A определяется **по формуле полной вероятности:**

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A / H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i),$$

где события $H_1, H_2, ..., H_n$ - гипотезы, а $P(A / H_i)$ - условная вероятность наступления события A при наступлении $i - й$ гипотезы ($i = 1, 2, ..., n$).

Условная вероятность гипотезы H_i при условии того, что событие A произошло, определяется **по формуле вероятности гипотез или по формуле Байеса** (она позволяет пересмотреть вероятности гипотез после наступления события A):

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исхода других испытаний, то такие испытания называют **независимыми относительно события** A.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит ровно k раз, равна

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}.$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Здесь $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ - функция Гаусса, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx\Phi(x'')-\Phi(x').$$

Здесь $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ - функция Лапласа,

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Замечания.

1. Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ находятся по таблице 1 и 2 Приложения.
2. При значениях аргумента $x>5$ берутся значения $\varphi(x)=0$ и $\Phi(x)=0{,}5$.
3. При отрицательных значениях аргумента x необходимо пользоваться четностью функции $\varphi(x)$ и нечетностью функции $\Phi(x)$.

Формула Пуассона. При больших n и малых p $(p<0{,}1)$ вычисления по формуле Бернулли затруднены. В этих случаях обычно используется формула Пуассона

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda=np.$$

Задача 1. Из 10 проданных за день стиральных машин 4 имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу 5 стиральных машин окажется ровно 2 без скрытых дефектов.

Решение. Пусть событие A - «среди выбранных наудачу 5 стиральных машин окажется ровно 2 без скрытых дефектов».

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать 5 стиральных машин из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 5 $\left(C_{10}^5\right)$.

Найдем число исходов, благоприятствующих событию A. Две стиральные машины из 10-4=6 стиральных машин без скрытых дефектов можно выбрать C_6^2 способами, при этом остальные 5-2=3 стиральные машины должны иметь скрытый дефект; выбрать же 3 стиральные машины из 4 стиральных машин с дефектом можно C_4^3 способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_6^2 \cdot C_4^3$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} : \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 0{,}2381.$$

Задача 2. В книжном магазине имеются отделы учебной, художественной и детской литературы. Вероятность посещения покупателем отдела учебной литературы равна 0,9. Для отделов художественной и детской литературы эта вероятность равна, соответственно, 0,75 и 0,8. В магазин зашел человек. Найти вероятность того, что он посетит: а) все три отдела; б) ровно два отдела; в) ровно один отдел; г) не посетит ни одного отдела.

Решение. Пусть:

событие A_1 - «покупатель посетил отдел учебной литературы», вероятность $P(A_1) = 0{,}9$; тогда событие $\overline{A}_1$ - «покупатель не посетил отдел учебной литературы», вероятность $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$;

A_2 - «покупатель посетил отдел художественной литературы», вероятность $P(A_2) = 0{,}75$; тогда событие $\overline{A}_2$ - «покупатель не посетил отдел художественной литературы», вероятность $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$;

A_3 - «покупатель посетил отдел детской литературы», вероятность $P(A_3) = 0{,}8$; тогда событие $\overline{A}_3$ - «покупатель не посетил отдел детской литературы», вероятность $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

а) Пусть событие A - «покупатель посетил все три отдела», т.е. $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Так как события A_1, A_2, A_3 независимы в совокупности, то по теореме умножения вероятностей:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}54.$$

б) Пусть событие B - «покупатель посетил ровно два отдела». Событие B произойдет, если покупатель посетит только учебный и художественный отделы из трех, или только учебный и детский, или только художественный и детский, т.е.

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \overline{\mathrm{A}}_3 + \mathrm{A}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \mathrm{A}_3 + \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}375.$$

в) Пусть событие C - «покупатель посетил ровно один отдел». Событие C произойдет, если покупатель посетит только учебный отдел из трех, или только художественный, или только детский, т.е.

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \overline{\mathrm{A}}_3 + \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \overline{\mathrm{A}}_3 + \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \mathrm{A}_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}8 = 0{,}08.$$

г) Пусть событие D - «покупатель не посетил ни один отдел», т.е. $D = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$.

$$P(D) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}005.$$

Задача 3. На предприятии, изготовляющем болты, первая машина производит 30%, вторая - 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный болт, произведенный первой машиной, оказался дефектным.

Решение. Пусть:

событие A - «случайно выбранный болт оказался дефектным»,
событие H_1 - «болт изготовлен первой машиной»,
событие H_2 - «болт изготовлен второй машиной»,
событие H_3 - «болт изготовлен третьей машиной».
В соответствии с условием задачи имеем:

$$P(H_1)=0{,}3;\ P(H_2)=0{,}25;\ P(H_3)=0{,}45.$$

$$P(A/H_1)=0{,}02;\ P(A/H_2)=0{,}01;\ P(A/H_3)=0{,}03.$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A)=0{,}3\cdot 0{,}02+0{,}25\cdot 0{,}01+0{,}45\cdot 0{,}03=0{,}022.$$

По формуле Байеса найдем искомую вероятность

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}02}{0{,}022}=0{,}272.$$

Задача 4. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 1/4. Какова вероятность того, что из 10 визитов страхового агента: а) ровно 5 закончатся заключением договора; б) не более двух визитов закончатся заключением договора.

Решение. а) По условию задачи $n=10$, $p=\frac{1}{4}$, $q=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $k=5$. Вероятность $P_{10}(5)$ находим по формуле Бернулли:

$$P_{10}(5)=C_{10}^5\cdot p^5\cdot q^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5=252\cdot\frac{243}{1048576}=0{,}0584.$$

б)

$$P_{10}(k\le 2)=P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)=C_{10}^0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+C_{10}^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9+C_{10}^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^8=$$

$$=1\cdot\frac{59049}{1048576}+10\cdot\frac{19683}{1048576}+45\cdot\frac{6561}{1048576}=\frac{551124}{1048576}\approx 0{,}5256.$$

Задача 5. Каждый из 100 компьютеров в интернет-кафе занят клиентом в среднем в течение 80% рабочего времени. Какова вероятность того, что в момент проверки клиентами будет занято: а) 85 компьютеров; б) от 70 до 90 компьютеров?

Решение. а) По условию $p=0{,}8$. Так как $n=100$ достаточно велико, то применяем локальную формулу Муавра – Лапласа. Вначале определим $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{85-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=1{,}25$.

По таблице приложения найдем $\varphi(1{,}25)=0{,}18265$.

Искомая вероятность $P_{100}(85)=\frac{1}{\sqrt{16}}\cdot 0{,}18265=0{,}0457$.

б) Необходимо найти $P_{100}(70\le k\le 90)$. Применяем интегральную формулу Муавра – Лапласа, предварительно найдя $x'=\frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-2{,}5$ и $x''=\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=2{,}5$

Теперь

$$P_{100}(70\le k\le 90)=\Phi(2{,}5)-\Phi(-2{,}5)=\Phi(2{,}5)+\Phi(2{,}5)=2\Phi(2{,}5)=2\cdot 0{,}4938=0{,}9876.$$

Задача 6. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий: а) в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию; б) в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию.

Решение. Согласно условию $n = 100,\ p = 0{,}01,$ тогда $\lambda = np = 400 \cdot 0{,}01 = 4.$

Пользуясь формулой Пуассона, находим

а) $P_{400}(5) = \dfrac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}1563;$

б) $$\mathrm{P}_{400}(3 \le \mathrm{k} \le 400) = 1 - \mathrm{P}_{400}(0 \le \mathrm{k} \le 2) = 1 - \mathrm{P}_{400}(0) - \mathrm{P}_{400}(1) - \mathrm{P}_{400}(2) =$$
$$= 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 - 0{,}1465 = 0{,}7619.$$

Задание 1. Классическое определение вероятности

1. Из 100 изготовленных деталей 10 имеют дефект. Для проверки были отобраны пять деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей две окажутся бракованными?
2. Изготовлена партия из 200 изделий, в которой оказалось три бракованных. Произведена выборка из пяти изделий. Найти вероятность того, что в выборке не будет ни одного бракованного изделия.
3. Студент знает ответ на 30 вопросов из 50. Какова вероятность ответить правильно на билет, состоящий из 3 вопросов?
4. В аквариуме плавают 24 рыбки, из которых половину составляют гуппи. Кот случайным образом поймал 4 рыбки. Какова вероятность того, что ему достались только гуппи?
5. На полке 26 книг, из которых 17 на русском языке. Наугад берутся 3 книги. Какова вероятность того, что они все на русском языке?
6. В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров 3 будут черными?
7. В мастерской 12 измерительных приборов, из которых 6 проходили настройку. Настройщик наугад берет 2 прибора. Какова вероятность того, что они уже проходили настройку?
8. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Наугад выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 голубых.
9. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает все вопросы.

10. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».
11. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт»?
12. Среди 40 деталей 3 нестандартные. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что они нестандартные.
13. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных окажутся два окрашенных изделия.
14. В урне 11 белых шаров и 9 красных. Наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность того, что они белые?
15. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.
16. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.
17. В группе спортсменов 7 лыжников и 3 конькобежца. Из нее случайным образом выделены три спортсмена. Найти вероятность того, что все выбранные спортсмены окажутся лыжниками.
18. На предприятии из 14 автомобилей 4 неисправных. Какова вероятность того, что среди пяти случайным образом выбранных для осмотра автомобилей окажется два неисправных?
19. В магазин поступило 30 холодильников, пять из них, имеют заводской дефект. Случайным образом выбирается один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?
20. В течение месяца суд вынес 30 приговоров, в том числе 6 – за кражу. Для прокурорского надзора случайным образом выбраны 3 дела. Какова вероятность того, что в их числе окажутся два дела по обвинению в краже?

Задание 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,9 для первого сигнализатора и 0,95 для второго. Найти вероятность того, что при аварии: а) сработает только один сигнализатор; б) сработают оба сигнализатора; в) не сработает ни один сигнализатор; г) сработает хотя бы один сигнализатор.
2. Инженер выполняет расчет, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем справочниках, равны соответственно 0,7; 0,8; 0,6. Найти вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся: а) только в одном справочнике; б) во всех трех справочниках; в) хотя бы в одном справочнике; г) только в двух справочниках.
3. Произведено три выстрела по цели из орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,75; при втором – 0,8; при третьем – 0,9. Определить вероятность того, что будет: а) только одно попадание; б) три попадания; в) хотя бы одно попадание; г) ни одного попадания.
4. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,6; второго – 0,4; третьего – 0,5. Найти вероятность успешного преодоления: а) двух препятствий; б) не менее двух препятствий; в) одного препятствия; г) трех препятствий.
5. Фирма имеет три независимо работающих подразделения. Вероятности того, что по итогам года получит прибыль первое, второе и третье подразделения, равны, соответственно, 0,7; 0,8 и 0,85. Найти вероятность того, что по итогам года: а) все подразделения получат прибыль; б) ни одно подразделение не получит прибыль; в) хотя бы одно подразделение получит прибыль; г) ровно два подразделения получат прибыль.
6. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятности событий: а) только одно отделение получит газеты вовремя; б) все три отделения получат газеты вовремя; в) хотя бы отделение получит газеты вовремя; г) только одно отделение получит газеты вовремя.
7. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,6. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) не более двух экзаменов; г) только один экзамен.

8. Вероятность удачного завершения переговоров для первого менеджера равна 0,8, для второго – 0,9, для третьего – 0,7. Менеджеры одновременно начали переговоры. Найти вероятность того, что: а) все они закончат переговоры удачно; б) только два менеджера закончат переговоры удачно; в) все они завершат переговоры неудачно; г) хотя бы один из них завершит переговоры удачно.
9. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на одном предприятии; г) только на двух предприятиях.
10. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена – 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,1. Какова вероятность того, что: а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен; г) рекорд будет установлен двумя спортсменами.
11. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры; г) хотя бы одна камера.
12. Работы на 4 строительных объектах ведут разные фирмы-подрядчики. Вероятность выполнения работы в установленный срок для первой фирмы равна 0,8, для второй и третьей фирм – 0,7, для четвертой – 0,9. Найти вероятность того, что работы: а) будут завершены в срок на всех объектах; б) будут завершены в срок только на двух объектах; в) не будут завершены вовремя ни на одном объекте; г) будут завершены в срок хотя бы на одном объекте.
13. В городе 3 коммерческих банка, оценка надежности которых – 0,95; 0,90; 0,85 соответственно. В связи с определением хозяйственных перспектив развития города администрацию интересуют ответы на следующие вопросы: а) какова вероятность того, что в течение года обанкротятся все 3 банка; б) что обанкротится хотя бы один банк; в) обанкротится один банк; г) не обанкротится ни один банк.
14. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупок; г) по крайней мере два совершат покупки.
15. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, равна

соответственно 0,2; 0,3; 0,1. Найти вероятность того, что включены: а) два электродвигателя; б) хотя бы один электродвигатель; в) три электродвигателя; г) один электродвигатель.

16. Высажены яблони трех сортов. Вероятность того, что яблоня первого сорта приживется, равна 0,75. Для яблонь второго и третьего сортов эти вероятности равны, соответственно, 0,6 и 0,5. Найти вероятность того, что: а) все высаженные яблони приживутся; б) все яблони погибнут; в) приживется ровно одна яблоня; г) приживется хотя бы одна яблоня.
17. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично», равна для первого студента 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним студентом; б) двумя студентами; в) хотя бы одним; г) ни одним?
18. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку поступающей информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что вероятность отказа за некоторое время Т у каждого их них равна 0,2. Найти вероятность безотказной работы за время Т: а) каждого устройства; б) хотя бы одного устройства; в) одного устройства; г) двух устройств.
19. В соревнованиях участвуют 3 представителя спортивной школы. Вероятность того, что первый спортсмен выполнит норматив мастера спорта, равна 0,4. Для второго и третьего спортсменов эта вероятность равна, соответственно, 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что норматив выполнят: а) все спортсмены; б) только два спортсмена; в) только один спортсмен; г) не выполнит ни один спортсмен.
20. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, - высшего качества, равна, 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) два подшипника; в) хотя бы один подшипник; г) один подшипник.

Задание 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы А, В, С. На долю фирмы А приходится 50% общего объема поставок, В – 30% и С – 20%. Из практики известно, что 10% поставляемых фирмой А деталей – бракованные, фирмой В – 5% и фирмой С – 6%. Какова вероятность того, что взятая наугад и оказавшаяся бракованной деталь получена от фирмы А?

2. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятность выполнения нормы мастера спорта для студентов первой группы равна 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Найти вероятность того, что студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе.
3. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.
4. В спецбольницу поступает в среднем 50% больных с заболеванием сердца, 30% - с заболеванием почек, 20% – с заболеванием печени. Вероятность полного излечения болезни сердца равна 0,7, для болезни почек – 0,8, для болезни печени – 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что больной страдал заболеванием почек.
5. Продукция, выпускаемая на предприятии партиями, попадает для проверки ее на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что партия продукции попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная партия будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная партия при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту партию проверял первый контролер.
6. С одного автомата на сборку поступает 20% деталей, со второго – 30%, с третьего – 50%. Первый автомат дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 0,1%. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на втором автомате.
7. На склад поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46%, третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных деталей для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.
8. В двух одинаковых коробках находятся карандаши. Известно, что 1/3 карандашей в первой коробке и ¼ карандашей во второй – характеризуется твердостью ТМ. Наугад выбирается одна коробка и из нее наугад извлекается один карандаш. Он оказался твердости ТМ. Какова вероятность того, что он извлечен из первой коробки?

9. Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, а во вторую – 0,6. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира нужные ему билеты будут распроданы, равна 0,35 для первой кассы и 0,7 – для второй кассы. Пассажир посетил одну из касс и приобрел билет. Какова вероятность того, что он приобрел его во второй кассе.
10. Дела в прокуратуру поступают из двух отделов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого отдела имеет 10% ошибок, а второго – 20%. Взятое наугад дело не содержит ошибок. Найти вероятность того, что оно поступило из второго отдела.
11. Две перфораторщицы набили по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,5, для второй – 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошибка допущена первой перфораторщицей.
12. Покупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазине, равна 0,4, во втором – 0,6 и в третьем – 0,8. Покупатель купил товар. Найти вероятность того, что он купил его во втором магазине.
13. Автомобили поставляются в автосалон тремя поставщиками: 25% - первым поставщиком, 50% - вторым, 25% - третьим. Вероятности того, что автомобиль в течение года потребует ремонта, равны для этих поставщиков, соответственно, 0,1; 0,2; 0,4. Купленный автомобиль не потребовал ремонта. Какова вероятность того, что он был поставлен первым поставщиком?
14. Человек после работы может возвращаться домой либо автобусом, либо трамваем. Он ездит по-разному: в 1/3 случаях выбирает автобус, а в 2/3 - трамвай. Если он едет автобусом, то в 75% случаях он возвращается домой к шести часам вечера, если же - трамваем, то только в 70% случаев он возвращается домой к шести часам вечера. Найти вероятность того, что он ехал автобусом, если возвратился домой к шести часам вечера.
15. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 второго типа. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,9, а для второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа.
16. Имеются три одинаковые по виду ящика. В первом ящике – 20 белых и 30 черных шаров, во втором – 20 белых и 20 черных шаров, в третьем – 15 черных и 25 белых шаров. Из выбранного наудачу ящика вынули

шар. Вынутый наудачу шар оказался черным. Найти вероятность того, что шар вынут из второго ящика.

17. При исследовании жирности молока коров все стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70%, во второй 23% и в третьей 7% всех коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы коров соответственно равна 0,6; 0,35 и 0,1. Взятая наудачу корова дает молоко жирности не менее 4%. Найти вероятность того, что эта корова из первой группы.

18. На сборку поступили детали с трех автоматов: первый дает 15% деталей, второй – 30%, третий – 55%. Первый автомат допускает 0,1% брака, второй – 0,2% брака, третий – 0,3% брака. Найти вероятность того, что бракованная деталь изготовлена на первом автомате.

19. Курс доллара повышается в течение месяца с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении – с вероятностью 0,5. Фирма по итогам месяца получила прибыль. Какова вероятность того, что курс доллара при этом понижался?

20. В районе 24 человека обучаются на заочном факультете института, из них шесть – мехфаке, двенадцать – на агрофаке и шесть – на экономфаке. Вероятность успешно сдать все экзамены на предстоящей сессии для студентов мехфака, равна 0,6, агрофака – 0,76 и экономфака – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно все экзамены, окажется студентом экономфака.

Задание 4. Формула Бернулли

1. Торговая база обслуживает 6 магазинов. Вероятность получения заказа от магазина равна 0,6. Найти вероятности того, что: а) база получит заказы от 5 магазинов; б) база получит не менее пяти заказов.

2. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 20%. Найти вероятность того, что из пяти случайно отобранных изделий окажется: а) 2 изделия высшего сорта; б) не более 2 изделий высшего сорта.

3. В скольких партиях с равным по силе противником выигрыш более вероятен: в трех партиях из четырех или в пяти из восьми?

4. На прием к врачу записались 5 человек. Вероятность того, что пациенту потребуется сдать кровь на анализ, равна 0,9. Найти вероятность того, что необходимо сдать кровь на анализ: а) 3 пациентам; б) не менее чем 4 пациентам.

5. Вероятность выигрыша по одной облигации трехпроцентного займа равна 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных облигаций выигрышными окажутся: а) три; б) не менее двух.
6. Проверка качества выпускаемых деталей показала, что в среднем брак составляет 10%. Найти вероятность того, что в партии из 8 деталей окажется: а) 3 бракованных детали; б) 3 или 4 бракованных детали.
7. Вероятность выхода из строя за время T одного (любого) элемента равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из шести элементов из строя выйдет: а) половина; б) меньше половины.
8. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 1/3. Найти вероятности того, что из 6 билетов выигрышными будут: а) два билета; б) хотя бы два билета.
9. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80%. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что мишень была поражена: а) пять раз; б) не более пяти раз.
10. Торговый агент в среднем контактирует с восемью потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,1. а) Чему равна для агента вероятность двух продаж в течение одного дня? б) Чему равна вероятность того, что у агента будут хотя бы две продажи в течение дня?
11. Нарушения техники пожарной безопасности фиксируются, в среднем, в 40% организаций. Случайным образом для проверки выбирается 8 организаций. Найти вероятность того, что нарушения будут зафиксированы: а) в 3 организациях; б) в 2 или 3 организациях.
12. Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 0,25. Спортсмен сделал пять выстрелов. Найти вероятность: а) не менее трех попаданий; б) двух попаданий.
13. Вероятность выиграть по одной облигации государственного займа равна 1/3. Найти вероятность того, что, имея 6 облигаций этого займа, можно выиграть: а) по двум облигациям; б) не менее чем по двум облигациям.
14. Найти вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости 5 очков появится: а) хотя бы один раз; б) три раза.
15. В семье четверо детей. Считая, что рождение мальчика или девочки равновозможное, найти вероятности событий: а) в семье три мальчика; б) в семье хотя бы три мальчика.

16. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 80% случаев. Найти вероятность того, что из пяти больных поправятся: а) 4 человека; б) не менее четырех человек.
17. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее пяти студентов.
18. Что вероятнее: выиграть в шахматы у равного по силе противника не менее трех партий из четырех или не менее пяти из восьми? (ничьи во внимание не принимаются)
19. Монету бросают 6 раз. Найти вероятности того, что цифра выпадет: а) 2 раза; б) не менее двух раз.
20. Вероятность того, что станок в течение часа не потребует внимания рабочего, равна 0,6. Предполагая, что неполадки в станках независимы, найти вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребует: а) 2 из 5 обслуживаемых им станков; б) хотя бы один обслуживаемый им станок.

Задание 5. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

1. Кандидата на пост главы муниципального образования поддерживают 80% опрошенных граждан. В выборах принимают участие 450 человек. Какова вероятность того, что за него проголосуют: а) 345 человек; б) от 350 до 385 человек?
2. Имеется 100 станков, работающих независимо друг от друга. Каждый из них включен в течение 0,8 рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольный момент окажутся включенными: а) 70 станков; б) от 70 до 86 станков?
3. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных а) от 70 до 100 деталей; б) 120 деталей.
4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что из 320 выстрелов будет: а) 100 попаданий; б) от 240 до 260 попаданий.
5. Вероятность переключения передач на каждом километре трассы равна 0,25. Найти вероятность того, что на 243-километровом участке этой трассы переключение передач произойдет: а) 70 раз; б) не более 70 раз.
6. На факультете 20% студентов – из сельской местности. Какова вероятность того, что на курсе из 84 человек городских жителей будет: а) 55 человек; б) от 50 до 70 человек?

7. Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит: а) не менее 11 раз; б) 14 раз.
8. Вероятность того, что пара сапог является высшего качества, равна 0,5. В магазин поступило 400 пар сапог. Найти вероятность того, что среди них будет: а) не менее 194 и не более 208 пар высшего качества; б) 150 пар высшего качества.
9. Вероятность отказа электроплиты после оговоренного числа лет работы составляет 0,2. Проведена проверка 100 электроплит. Найти вероятность того, среди них неисправны: а) 20 электроплит; б) менее 20.
10. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 75 раз; б) 65 раз.
11. Вероятность того, что дилер продаст ценную бумагу, равна 0,7. Он предлагает для продажи 100 ценных бумаг. Какова вероятность того, что дилер сможет продать: а) 60 ценных бумаг; б) не меньше 65 ценных бумаг?
12. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найти вероятность того, что среди 900 клемм будет: а) от 790 до 820 годных; б) 750 годных.
13. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,75. В стационаре случайным образом выбрали 100 человек, подвергшихся новому лечению. Какова вероятность того, что среди них окажется: а) ровно 70 выздоровевших; б) от 95 до 100 выздоровевших.
14. Вероятность того, что изделие – высшего сорта, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 1000 изделий: а) 500 – высшего сорта; б) от 450 до 530 изделий высшего сорта.
15. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 800 посеянных семян взойдет: а) не менее 700; б) ровно 650.
16. Покупателям торгового центра предлагается принять участие в лотерее. Выигрышным являются 30% билетов. Найти вероятность того, что из 264 участников лотереи выиграют приз: а) 30 человек; б) от 70 до 84 человек.
17. Было посажено 400 деревьев. Вероятность того, что дерево приживется, равна 0,8. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев будет: а) больше 250; б) от 320 до 360.

18. Вероятность изготовления детали номинальных размеров равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 деталей окажется: а) половина деталей номинальных размеров; б) не менее половины таких деталей.

19. Вероятность того, что работник пройдет проверку на соответствие занимаемой должности, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 320 работников проверку пройдут: а) 350 человек; б) от 280 до 300 человек?

20. Вероятность того, что водитель автомобиля не пристегнут ремнем безопасности, составляет 0,4. Какова вероятность того, что из 75 водителей, остановленных автоинспектором, пристегнуты: а) не менее 60; б) 65 водителей?

Задание 6. Формула Пуассона

1. На прядильной фабрике работница обслуживает 720 веретен. При вращении веретена пряжа рвется в случайные моменты времени с вероятностью 0,008. Найти вероятность того, что за некоторое время произойдет не более 10 обрывов.

2. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника неправильно сброшюрован, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

3. Аппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента за время T равна 0,001 и не зависит от работы других элементов. Найти вероятность отказа не менее двух элементов.

4. Вероятность неправильного заполнения налоговой декларации консультантом по налогообложению равна 0,005. Найти вероятность того, что из 800 заполняемых им в течение квартала деклараций неправильно будут заполнены не более одной декларации.

5. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,011. Определить вероятность того, что среди 1000 поступивших вызовов имеется 7 сбоев.

6. Магазин получил 1000 бутылок с минеральной водой. Вероятность того, что при транспортировке одна бутылка будет разбита, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

7. В страховой компании застраховано 10000 клиентов одного возраста и одной социальной группы. Вероятность наступления страхового случая в течение года составляет 0,006. Найдите вероятность того, что компания за год выплатит страховку 100 клиентам.

8. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого из транзисторов равна 0,0005. Найти вероятность выхода из строя хотя бы одного транзистора.
9. С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0,0005. Найдите вероятность того, что в магазин прибудут 3 испорченных изделия.
10. Вероятность выигрыша крупной суммы по лотерейному билету равна 0,0025. Найти вероятность того, что из 800 человек, купивших по одному лотерейному билету, крупные суммы выиграют менее 3 человек.
11. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,009. Определить вероятность того, что среди 1000 поступивших вызовов имеется 7 сбоев.
12. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%.
13. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на шести веретенах.
14. Среди семян ржи 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном наборе 500 семян обнаружить пять семян сорняков?
15. В среднем в течение года преступники угоняют 1% зарегистрированных в городе автомобилей. Найти вероятность того, что из 300 автомобилей, принадлежащих сотрудникам организации, в течение года будет угнано не более 2 автомобилей.
16. Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года равна 0,0005. Найти вероятность отказа в течение года двух узлов.
17. Среди 1000 человек приблизительно восемь левшей. Какова вероятность того, что среди сотни выбранных наугад человек не окажется ни одного левши?
18. Книга в 500 страниц содержит 800 опечаток. Найти вероятность того, что на странице не менее трех опечаток.
19. Станок изготавливает за смену 100000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,0001. Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено 5 бракованных деталей.
20. Вероятность рождения белого тигра равна 0,02. Найти вероятность того, что среди 100 рожденных тигрят окажется от 1 до 3 белых тигрят.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Дискретной называют такую случайную величину, которая принимает счетное множество значений.

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения в определенном интервале.

Функцией распределения случайной величины X называется функция действительной переменной x, определяемая равенством

$$F(x) = P(X < x),$$

где $P(X < x)$ - вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из полуинтервала $[\alpha, \beta)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ − первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Математическим ожиданием, или средним значением**,** $M(X)$ **дискретной случайной величины X** называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Математическим ожиданием или средним значением **непрерывной случайной величины X** называется значение интеграла

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ - плотность вероятности.

Свойства математического ожидания.

1. $M(C) = C$.
2. $M(kX) = kM(X)$.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Дисперсией $D(X)$ **дискретной случайной величины X** называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Для вычисления дисперсии применяется формула $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx .$$

Для определения дисперсии может быть также использована формула $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$.

Свойства дисперсии.

1. $D(C) = 0$.
2. $D(kX) = k^2 D(X)$.
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением или стандартом) $\sigma(X)$ случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Двумерной называют случайную величину (X, Y)**,** возможные значения которой есть пары чисел (x, y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин.

Ковариацией или корреляционным моментом случайных величин X **и** Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий:

$$\mu_{xy} = M((X - M(X))(Y - M(Y))).$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} **случайных величин** X **и** Y называется отношение ковариации к произведению средних квадратичных отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}, \ -1 \le r_{xy} \le 1.$$

Линейной средней квадратической регрессией Y **на** X называется функция вида

$$y_x = m_y + r_{xy} \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} (x - m_x)$$

где

$$m_x = M(X), \quad m_y = M(Y),$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}, \quad r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Непрерывная случайная величина X имеет **нормальный закон распределения** (закон Гаусса) с параметрами a и σ^2, если плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равно параметру a этого закона, т.е.

$$M(X) = a,$$

а дисперсия – параметру σ^2, т.е.

$$D(X) = \sigma^2.$$

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал (x_1, x_2), равна

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a не превысит величину $\Delta > 0$ (по абсолютной величине), равна

$$P(|X - a| \le \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

Задача 1. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии – 3 прибора. Случайная величина X - число приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

1) Найти закон распределения случайной величины X и ее функцию распределения.

2) Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. 1) Случайная величина X - число приборов, удовлетворяющих требованиям качества, может принимать значения $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$. Для определения вероятности появления каждого из этих значений воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

В нашем случае $n = 3, p = 0{,}9, q = 1 - p = 0{,}1.$

Вычислим

$$P(X = 0) = C_3^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}001;$$

$$P(X = 1) = C_3^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}01 = 0{,}027;$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 3 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}243;$$

$$P(X = 3) = C_3^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 1 \cdot 0{,}729 \cdot 1 = 0{,}729.$$

Для проверки вычислений сложим

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1.$

Следовательно, искомый закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

Для построения функции распределения $F(x)$ случайной величины X пользуемся формулой $F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)$.

1. При $x \le 0$ $F(x) = \sum_{x_k < 0} P(X = x_k) = 0$.

2. При $0 < x \le 1$ $F(x) = \sum_{x_k < 1} P(X = x_k) = P(X = 0) = 0{,}001$.

3. При $1 < x \le 2$ $F(x) = \sum_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}001 + 0{,}027 = 0{,}028$.

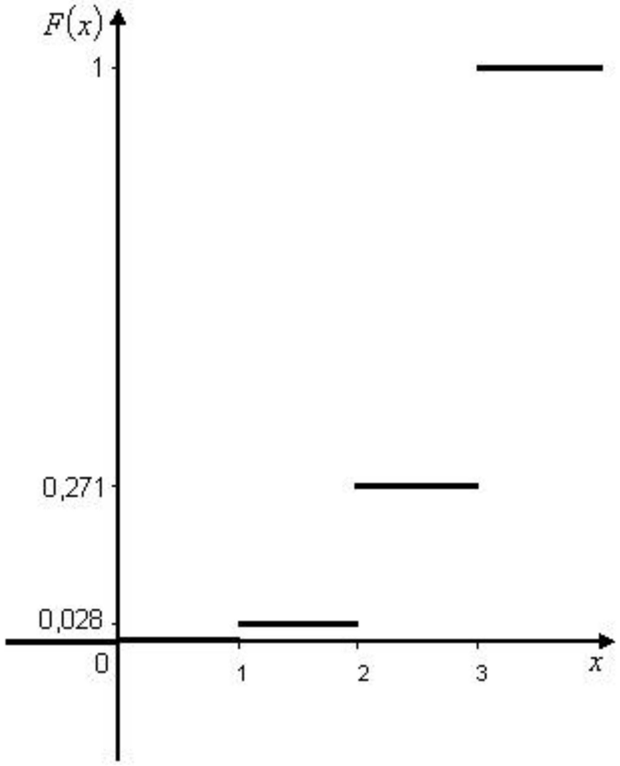
4. При $2 < x \le 3$ $F(x) = \sum_{x_k < 3} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
$= 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 = 0{,}271$.

5. При $x > 3$ $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$= 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{при} \quad x \le 0; \\ 0{,}001; & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ 0{,}028; & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ 0{,}271; & \text{при} \quad 2 < x \le 3; \\ 1; & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения



2) Найдем числовые характеристики случайной величины X.
Математическое ожидание:
$M(X) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}027 + 2 \cdot 0{,}243 + 3 \cdot 0{,}729 = 2{,}7.$
Дисперсия:
$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}001 + 1^2 \cdot 0{,}027 + 2^2 \cdot 0{,}243 + 3^2 \cdot 0{,}729 - 2{,}7^2 = 7{,}56.$
Среднее квадратическое отклонение:
$\sigma(X) = \sqrt{7{,}56} = 2{,}75.$

Задача 2. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \dfrac{x^3}{8} & при \quad 0\le x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал $(0;1)$; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; в) функции распределения изобразить графически.

Решение. а) По свойству функции распределения:

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=\left.\frac{x^3}{8}\right|_{x=1}-\left.\frac{x^3}{8}\right|_{x=0}=\frac{1}{8}-\frac{0}{8}=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

б) Найдем функцию плотности вероятности:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \dfrac{3x^2}{8} & при \quad 0\le x\le 2,\\ 0 & при \quad x>2.\end{cases}$$

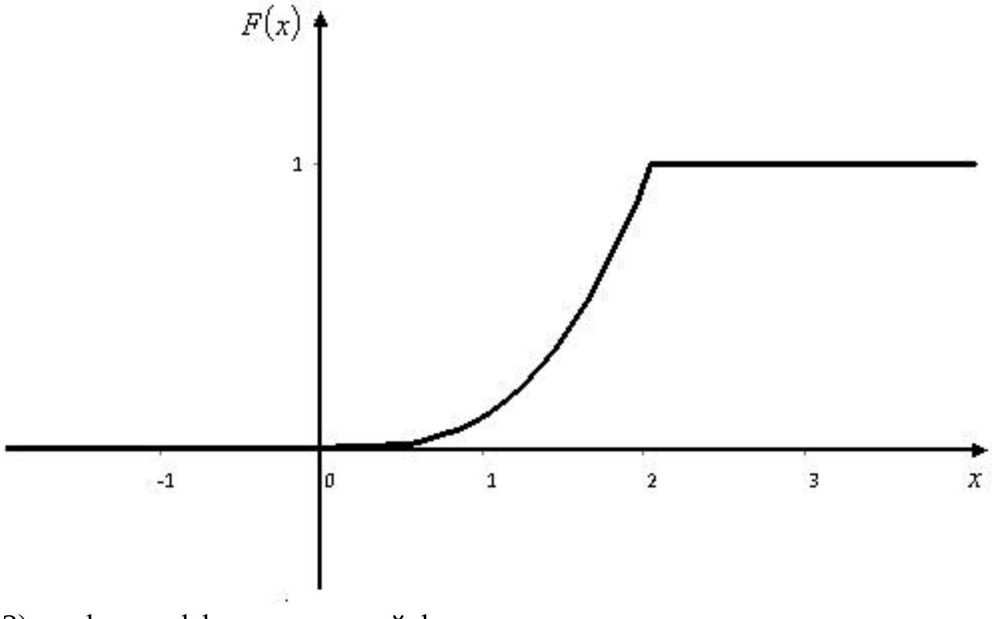
Найдем числовые характеристики непрерывной случайной величины X.

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}\cdot x^2dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2=\frac{3}{8}\cdot\frac{2^4}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5;$$

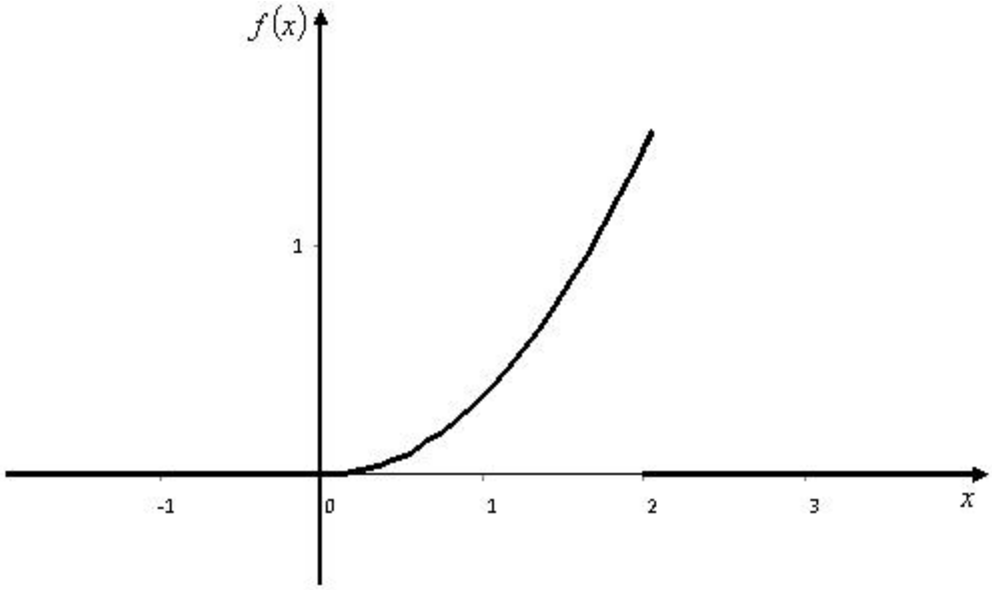
$$D(X)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3x^2}{8}dx-1{,}5^2=\frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx-2{,}25=\frac{3}{8}\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2-2{,}25=2{,}4-2{,}25=0{,}15.$$

в)

1) график интегральной функции распределения



2) график дифференциальной функции



Задача 3. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 150 г и математическим ожиданием 1000 г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет от 900 до 1300 г.

Решение. Случайная величина X - вес вылавливаемых в пруду рыб - нормально распределена.

Используем формулу расчета вероятности попадания, в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X .

$$P(900 < X < 1300) = \Phi\left(\frac{1300-1000}{150}\right) - \Phi\left(\frac{900-1000}{150}\right) = \Phi(2) - \Phi(-0{,}67) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(0{,}67) = 0{,}47725 + 0{,}24857 = 0{,}72582.$$

Задача 4. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y)

Y / X	0	5	10
100	0,1	0,05	0,1
200	0,25	0,2	0,3

Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y .

Решение. Находим вероятности значений $X = 100, X = 200$:

$$P(X = 100) = 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}1 = 0{,}25;$$

$$P(X = 200) = 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}75.$$

Определяем вероятности значений $Y = 0, Y = 5, Y = 10$:

$$P(Y = 0) = 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}35;$$

$$P(Y = 5) = 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}25;$$

$$P(Y = 10) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4.$$

Находим $M(X)$:

$$M(X) = 100 \cdot 0{,}25 + 200 \cdot 0{,}75 = 175.$$

Определяем $M(Y)$:

$$M(Y) = 0 \cdot 0{,}35 + 5 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}4 = 5{,}25.$$

Вычисляем $M(X^2)$ и $M(Y^2)$:

$$M(X^2) = 10000 \cdot 0{,}25 + 40000 \cdot 0{,}75 = 32500.$$

$$M\left(Y^2\right) = 0\cdot 0{,}35 + 25\cdot 0{,}25 + 100\cdot 0{,}4 = 46{,}25.$$

Находим $D(X), D(Y)$:

$$D(X) = 32500 - 175^2 = 32500 - 30625 = 1875.$$

$$D(Y) = 46{,}25 - 5{,}25^2 = 46{,}25 - 27{,}5625 = 18{,}6875.$$

Откуда $\sigma(X) = 43{,}3$; $\sigma(Y) = 4{,}32$.

Ковариация величин X и Y может быть найдена по формуле

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Итак,

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j P\left(X = x_i, Y = y_j\right) =$$

$$= 100\cdot 0\cdot 0{,}1 + 100\cdot 5\cdot 0{,}05 + 100\cdot 10\cdot 0{,}1 + 200\cdot 0\cdot 0{,}25 + 200\cdot 5\cdot 0{,}2 + 200\cdot 10\cdot 0{,}3 = 925.$$

$$\mu_{xy} = 925 - 175\cdot 5{,}25 = 6{,}25,$$

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{6{,}25}{43{,}3\cdot 4{,}32} = 0{,}03.$$

Задание 1. Дискретные случайные величины

1) Найти закон распределения указанной дискретной СВ *X* и ее функцию распределения *F(x)*.
2) Вычислить математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратичное отклонение *σ(X)*.
3) Построить график функции распределения *F(x)*.

1. В партии из 25 изделий 5 изделий высокого качества. Случайно отбирается 3 изделия. СВ X — число изделий высокого качества среди отобранных.
2. Для освещения зала используют 6 электрических лампочек. Для каждой из них вероятность остаться исправной в течение года равна 0,85. СВ X — число перегоревших в течение года лампочек.
3. Покупатель посещает магазины для приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. СВ X — число магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных.
4. В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают 3-х спортсменов. СВ X — число мастеров спорта из отобранных спортсменов.
5. Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. СВ X — число комбайнов, работавших безотказно.

6. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. СВ X — число библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки.
7. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. СВ X — число импортных из четырех наудачу выбранных телевизоров.
8. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. СВ X - число агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу отобранных из общего числа.
9. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбрано 3. СВ X – число телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.
10. В среднем по 10% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. СВ X – число таких договоров среди наудачу выбранных четырех.
11. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. СВ X – число возвращенных в срок кредитов из 5 выданных.
12. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. СВ X – число кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов.
13. Вероятность того, что аудитор допустит ошибку при проверке бухгалтерского баланса, равна 0,05. Аудитору на заключение представлено 2 баланса. СВ X – число правильных заключений на проверяемые балансы.
14. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. СВ X – число положительных заключений на проверяемые балансы.
15. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,15. СВ X – число отказавших элементов.
16. Имеются три базы с независимым снабжением. Вероятность отсутствия на базе нужного товара равна 0,1. Предприниматель решил закупить некий товар. СВ X – число баз, на которых в данный момент этот товар отсутствует.
17. В коробке 20 одинаковых катушек ниток, из них — 4 катушки с белыми нитками. Наудачу вынимают 2 катушки. СВ X – число катушек с белыми нитками среди вынутых.

18. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных.
19. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. СВ X - число дефектных курток среди купленных.
20. Вероятность попадания мячом в корзину при каждом броске для данного баскетболиста равна 0,4; СВ X - число попадания при четырех бросках.

Задание 2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Две независимые дискретные случайные величины X и Y заданы своими законами распределения.

1) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и Y.

2)Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$, $V = XY$.

3) Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z.

4) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 3X - 2Y$.

1.

x_i	-3	-7	1	2		y_j	32	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4		p_j	0,3	0,7

2.

x_i	-3	2	4	6		y_j	3	7
p_i	0,3	0,2	0,2	0,3		p_j	0,9	0,1

3.

x_i	-5	1	2	4		y_j	2	3
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4		p_j	0,4	0,6

4.

x_i	-3	0	2	7		y_j	3	4
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1		p_j	0,2	0,8

5.

x_i	-2	-1	3	8		y_j	1	5
p_i	0,1	0,5	0,2	0,2		p_j	0,7	0,3

6.

x_i	-8	-6	-1	3		y_j	2	8
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4		p_j	0,3	0,7

7.

x_i	-3	-1	0	2		y_j	-3	2
p_i	0,3	0,2	0,2	0,3		p_j	0,5	0,5

8.

x_i	-5	-2	3	7		y_j	1	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4		p_j	0,2	0,8

9.

x_i	-4	-1	3	8		y_j	1	4
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1		p_j	0,6	0,4

10.

x_i	-7	0	2	6		y_j	-3	2
p_i	0,5	0,1	0,3	0,1		p_j	0,3	0,7

11.

x_i	-2	1	3	8		y_j	7	10
p_i	0,1	0,1	0,3	0,5		p_j	0,1	0,9

12.

x_i	-8	-6	-1	5		y_j	3	7
p_i	0,5	0,1	0,2	0,2		p_j	0,2	0,8

13.

x_i	-1	2	4	8		y_j	-2	1
p_i	0,2	0,5	0,1	0,2		p_j	0,8	0,2

14.

x_i	-7	-5	-2	3		y_j	-3	4
p_i	0,4	0,4	0,1	0,1		p_j	0,1	0,9

15.

x_i	-2	0	1	4		y_j	1	3
p_i	0,5	0,1	0,2	0,2		p_j	0,2	0,8

16.

x_i	-4	-2	1	3		y_j	-3	1
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4		p_j	0,4	0,6

17.

x_i	-6	-3	2	1		y_j	-2	8
p_i	0,3	0,3	0,2	0,2		p_j	0,2	0,8

18.

x_i	-5	-1	-2	3		y_j	-8	-1
p_i	0,1	0,5	0,2	0,2		p_j	0,7	0,3

19.

x_i	-2	-1	0	3		y_j	-3	2
p_i	0,2	0,5	0,1	0,2		p_j	0,3	0,7

20.

x_i	6	8	9	10		y_j	-8	2
p_i	0,1	0,1	0,6	0,2		p_j	0,4	0,6

Задание 3. Непрерывные случайные величины

Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Найти: а) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; б) плотность распределения вероятностей случайной величины X; в) математическое ожидание случайной величины X; г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

1. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le \frac{1}{5}, \\ \left(x-\frac{1}{5}\right)^2 & при \quad \frac{1}{5} < x \le \frac{5}{6}, \\ 1 & при \quad x > \frac{5}{6}. \end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x & при \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2. \end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{27}x^2+\frac{2}{9}x & при \quad 0 < x \le 3, \\ 1 & при \quad x > 3. \end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le -2, \\ \frac{1}{49}(x+2)^2 & при \quad -2 < x \le 5, \\ 1 & при \quad x > 5. \end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \left(x-\frac{1}{4}\right)^2 & при \quad 0 < x \le \frac{1}{4}, \\ 1 & при \quad x > \frac{1}{4}. \end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le -1, \\ \frac{1}{16}(x+1)^2 & при \quad -1 < x \le 3, \\ 1 & при \quad x > 3. \end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le -\frac{1}{2}, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 & при \quad -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}, \\ 1 & при \quad x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2 & при \quad -3 < x \le 0, \\ 1 & при \quad x > 0. \end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -1, \\ \frac{1}{25}(x+1)^2 & \text{при} \quad -1<x\le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ \frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -1, \\ \frac{1}{9}(x+1)^2 & \text{при} \quad -1<x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -2, \\ \frac{1}{16}(x+2)^2 & \text{при} \quad -2<x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ \frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -2, \\ \frac{1}{9}(x+2)^2 & \text{при} \quad -2<x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ \frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -1, \\ \frac{1}{4}(x+1)^2 & \text{при} \quad -1<x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

20. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le \frac{1}{4}, \\ \left(x-\frac{1}{4}\right)^2 & \text{при} \quad \frac{1}{4}<x\le \frac{5}{4}, \\ 1 & \text{при} \quad x>\frac{5}{4}. \end{cases}$

Задание 4. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины

1. При изготовлении некоторого изделия его вес X подвержен случайным колебаниям. Стандартный вес изделия равен 30 г, его среднее квадратическое отклонение равно 0,7, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что вес наугад выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 г.
2. Число вагонов, прибывающих в течение суток на грузовой пункт станции, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a=30, \sigma=10$. Определить вероятность прибытия на грузовой пункт от 25 до 35 вагонов в сутки.

3. Удельное содержание витаминов в одном апельсине подчинено закону нормального распределения с математическим ожиданием 0,35 и дисперсией 0,16. С вероятностью 0,9545 определить границы изменения этой случайной величины среди всех фруктов, поступивших в магазин для продажи.

4. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X – диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,5 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2$ мм и математическим ожиданием $a = 0$, найти, сколько будет годных шариков среди ста изготовленных.

5. При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Какова вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия ошибок равна 1370 м^2?

6. Время формирования поездов подчиняется нормальному закону распределения сос средним квадратическим отклонением 5 мин и средним значением 40 мин. Определить вероятность того, что время формирования поезда примет значение в интервале от 35 до 45 мин.

7. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону распределения с параметрами a = 16 км, σ = 100 м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не менее 15,8 км.

8. Станок – автомат изготавливает валики, причем контролируется их диаметр X. Считая, что X – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $a = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2$ мм. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

9. Детали, выпускаемые цехом, имеют диаметры, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 5 см, и дисперсией, равной 0,81 см^2. Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали – от 4 до 7 см.

10. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены закону нормального распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 15$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

11. Случайная величина – период накопления состава на сортировочном пути – распределена по нормальному закону с параметрами $a = 6ч$ и

$\sigma = 1ч$. Какова вероятность того, случайная величина будет заключена между четырьмя и семью часами?

12. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 10 и средним квадратическим отклонением 5. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет в результате эксперимента величина X.

13. Месячная норма выработки деталей рабочими одного из цехов крупного завода распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 1700 деталей и стандартным отклонением 300 деталей. Чему равна вероятность того, что количество изготовленных деталей будет больше 1550, но меньше 1900?

14. Предположим, что в течение года потребление электроэнергии одним из предприятий области есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 950 кВт в сутки и стандартным отклонением, равным 150 кВт. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода потребление электроэнергии более 1200 кВт.

15. Колебание прибытия вагонов на промышленную станцию имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 6 и средним значением, равным 40 вагонам в сутки. Определить вероятность того, что за сутки на станцию прибыло от 37 до 43 вагонов.

16. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартных является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Зная, что длина стандартной детали 40 см, а среднее квадратическое отклонение 0,4 см, определить, какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8.

17. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону распределения с параметрами a = 16 км, σ = 100 м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не более 16,25 км.

18. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднее квадратическое отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадет с вероятностью 0,98.

19. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 3. Вероятность попадания X в интервал (-12,18) равна 0,9973. Чему равна вероятность попадания X в интервал (30,35)?

Записать для случайной величины X формулу плотности вероятности $f(x)$.

20. Рост студентов института подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным 174 см и средним квадратическим отклонением 16 см. Определить вероятность того, что рост случайно выбранного студента будет заключен в пределах от 170 см до 180 см.

Задание 5. Система двух случайных величин

Найти линейную среднюю квадратическую регрессию случайной величины Y на случайную величину X на основе заданного закона распределения двумерной случайной величины

Вариант	Числовые данные				Вариант	Числовые данные			
1	Y X	1	3	4	11	Y X	5	7	9
	2	0,16	0,10	0,28		4	0,14	0,15	0,21
	3	0,14	0,20	0,12		7	0,16	0,20	0,14
2	Y X	2	3	5	12	Y X	1	4	6
	1	0,06	0,18	0,24		3	0,14	0,12	0,13
	4	0,12	0,13	0,27		7	0,13	0,20	0,28
3	Y X	1	2	4	13	Y X	5	8	10
	3	0,12	0,24	0,22		2	0,11	0,13	0,26
	4	0,20	0,15	0,07		6	0,21	0,06	0,23
4	Y X	2	3	4	14	Y X	4	7	9
	1	0,16	0,10	0,28		4	0,22	0,09	0,32
	3	0,14	0,20	0,12		7	0,14	0,17	0,06
5	Y X	2	3	5	15	Y X	8	9	12
	4	0,06	0,18	0,24		1	0,14	0,11	0,18
	6	0,12	0,13	0,27		6	0,23	0,04	0,30
6	Y X	2	3	4	16	Y X	3	6	8
	1	0,16	0,10	0,28		2	0,21	0,07	0,23
	3	0,14	0,20	0,12		8	0,11	0,20	0,18
	Y	2	4	5		Y	3	4	7

7	*X*				17	*X*			
	1	0,12	0,13	0,24		4	0,15	0,23	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		8	0,21	0,09	0,17
8	*Y* / *X*	4	5	6	18	*Y* / *X*	4	5	8
	2	0,06	0,18	0,24		3	0,13	0,14	0,19
	3	0,12	0,13	0,27		5	0,24	0,08	0,22

9	*Y* / *X*	2	4	5	19	*Y* / *X*	6	9	12
	1	0,12	0,13	0,24		5	0,23	0,07	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		9	0,17	0,20	0,18
10	*Y* / *X*	1	3	4	20	*Y* / *X*	5	8	10
	3	0,13	0,24	0,12		2	0,11	0,21	0,14
	6	0,18	0,06	0,27		7	0,20	0,09	0,25
	5	0,10	0,12	0,19		5	0,23	0,12	0,20

ПРИЛОЖЕНИЯ

Значения функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

Таблица 1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3984	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3229	3271	3251	3230	3209	3188	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Окончание табл. 1.

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

Таблица 2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2708	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3696	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4951
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

Окончание табл. 2.

x		*x*		*x*		*x*	
3,0	0,49865	3,5	0,49977	4,0	0,499968	4,5	0,4999966
3,1	0,49903	3,6	0,49984	4,1	0,499979	4,6	0,4999979
3,2	0,49931	3,7	0,49989	4,2	0,499987	4,7	0,4999987
3,3	0,49952	3,8	0,49993	4,3	0,499991	4,8	0,4999992
3,4	0,49966	3,9	0,49995	4,4	0,499995	4,9	0,4999995

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие – 11-е изд., перераб. – М.:Высшее образование, 2006. – 404 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – 9-е изд., стер. – М.:Высш. шк., 2003.- 479 с.
3. Горелова Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel / Г.В. Горелова, И.А.Кацко. – 4-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 475 с.
4. Гусак А.А. Теория вероятностей: справ. пособ. к решению задач / А.А.Гусак, Е.А.Бричикова. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 288 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для вузов / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова, С.П.Данко. – 6-е изд. – М.:ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2006. – 416 с.
6. Красс М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С.Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.: илл.
7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. – М.: Дело, 2000. – 688 с.
8. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2002. – 543 с.
9. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие / Под ред. В.И.Ермакова. – 2-е изд., испр. – М.:ИНФРА – М, 2007. – 575 с.
10. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учебное пособие / В.А.Колемаев, В.Н.Калинина, В.И.Соловьева и др., ГУУ. – М.: 2001. – 87 с.
11. Фадеева Л.Н. Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2006. – 400 с. – (Высшее экономическое образование).
12. Фадеева Л.Н., Жуков Ю.В., Лебедев А.В. Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Задачи и упражнения. – М.: Эксмо, 2007. – 336 с. - (Высшее экономическое образование).

СОДЕРЖАНИЕ

Сафина Римма Марселевна

Индивидуальные задания по теории вероятностей

учебно-методическое пособие