Е.М. Карчевский, М.М. Карчевский

Лекции по геометрии и алгебре

Учебное пособие

Казанский федеральный университет

2011

Оглавление

Предисловие

Книга написана на основе лекций по алгебре и геометрии, которые читаются для студентов первого курса института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

Многие вопросы, затронутые в книге, активно обсуждались с сотрудниками кафедр прикладной и вычислительной математики КФУ. Авторы приносят им свою искреннюю признательность. Рукопись книги была прочитана Ю.А. Альпиным, Н.Б. Плещинским, М.Р. Тимербаевым, Р.Р. Шагидуллиным. Авторы с благодарностью учли их замечания.

Глава 1

Вспомогательный материал

§ 1. Комплексные числа

1. Из школьного курса математики известно, что не всякое квадратное уравнение имеет решение. Самый простой пример — уравнение

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Очевидно, никакое вещественное x не может быть корнем этого уравнения. Ситуация меняется, если ввести в рассмотрение новое число, так называемую *мнимую единицу*. Будем обозначать ее через i и полагать, что

$$i^2 = -1.$$

Тогда уравнение (1.1) будет иметь корень $\alpha_1 = i$. Естественно положить, что $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Тогда и число $\alpha_2 = -i$ является корнем уравнения (1.1), т. е. уравнение (1.1), как и аналогичное уравнение

$$x^2 - 1 = 0,$$

имеет два различных корня. Рассматривая уравнение

$$x^2 + q = 0,$$

где $q > 0$, естественно принять, что оно имеет два корня

$$\alpha_1 = i\sqrt{q} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -i\sqrt{q}.$$

Числа вида ib, где b — вещественное число, называют *мнимыми*.

Рассмотрим теперь общее квадратное уравнение, записывая его для удобства в приведенном виде:

$$x^2 - 2px + q = 0. \tag{1.2}$$

Элементарные преобразования дают

$$(x - p)^2 + q - p^2 = 0.$$

Будем считать, что $q - p^2 > 0$, т. е. дискриминант уравнения (1.2) отрицателен.

Теперь естественно положить, что корнями уравнения (1.2) являются числа

$$\alpha_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad \alpha_2 = p - i\sqrt{q - p^2}. \tag{1.3}$$

Это числа новой природы. Они имеют вид $a + ib$, где a и b — вещественные числа. Их называют *комплексными числами.* В частном случае, когда $b = 0$, считают, что комплексное число $a + ib$ совпадает с вещественным числом a, а при $a = 0$ — с мнимым числом ib.

Обычно, комплексное число будем обозначать буквой z:

$$z = x + iy.$$

Говорят, что x — *вещественная часть* комплексного числа z, а y — его *мнимая часть*. Обозначим x через $\operatorname{Re} z$, а y — через $\operatorname{Im} z$. Таким образом, можно написать, что

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

По определению два комплексных числа *равны*, если совпадают соответственно их вещественные и мнимые части.

2. Естественно теперь попытаться проверить, что числа α_1, α_2, определенные в (1.3), — корни уравнения (1.2), т. е. при подстановке их в равенство (1.2) последнее обращается в тождество, но для этого надо уметь выполнять *алгебраические операции* над комплексными числами. Дадим соответствующие определения.

Под *суммой* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ понимается комплексное число $z = x + iy$, где $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$:

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2,$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2.$$

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется число

$$z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Ясно, что если z — разность комплексных чисел z_1 и z_2, то $z_2 + z = z_1$.

Например, сумма комплексных чисел $z_1 = 1 + i2$ и $z_2 = 3 + i4$ равна числу

$$z = (1 + i2) + (3 + i4) = (1 + 3) + i(2 + 4) = 4 + i6,$$

а их разность — числу

$$z = (1 + i2) - (3 + i4) = (1 - 3) + i(2 - 4) = -2 - i2.$$

Комплексное число вида $0+0i$ называется *нулевым*. Будем обозначать его символом 0. Для любого комплексного числа z справедливы равенства
$$z+0=z, \quad 0+z=z.$$

Определяя *произведение* комплексных чисел, будем действовать, как при перемножении обычных двучленов, учитывая при этом, что $i^2=-1$. Получаем, таким образом,

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

т. е. по определению

$$\mathrm{Re}\,(z_1z_2)=\mathrm{Re}\,z_1\mathrm{Re}\,z_2-\mathrm{Im}\,z_1\mathrm{Im}\,z_2, \tag{2.1}$$
$$\mathrm{Im}\,(z_1z_2)=\mathrm{Re}\,z_1\mathrm{Im}\,z_2+\mathrm{Re}\,z_2\mathrm{Im}\,z_1. \tag{2.2}$$

Вычислим, например, произведение чисел $z_1=1+i2$ и $z_2=3+i4$:

$$z_1z_2=(1+i2)\cdot(3+i4)=(1\cdot 3-2\cdot 4)+i(1\cdot 4+3\cdot 2)=-5+i10.$$

Для любого комплексного числа z

$$z0=0z=0.$$

Упражнение. Убедиться, что определенные выше операции сложения и умножения комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над вещественными числами:

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$ — *коммутативность*, или *перестановочность*,

2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ — *ассоциативность*, или *сочетательность*,

3) $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ — *дистрибутивность*, или *распределительность*.

По определению полагаем $z^2=zz$, и, вообще,

$$z^n=zz\cdots z,$$

где сомножитель z повторяется n раз.

Упражнение. Непосредственной подстановкой показать, что формулы (1.3) дают корни уравнения (1.2).

Комплексное число z назовем результатом *деления* комплексного числа z_1 на z_2, если
$$zz_2=z_1. \tag{2.3}$$

Покажем, что если $z_2 \neq 0$, то z как решение уравнения (2.3) существует и определяется единственным образом. В самом деле, используя формулы (2.1), (2.2), запишем (2.3) более подробно:

$$xx_2 - yy_2 + i(xy_2 + x_2y) = x_1 + iy_1. \tag{2.4}$$

Приравнивая соответственно вещественные и мнимые части, получим

$$xx_2 - yy_2 = x_1, \tag{2.5}$$
$$xy_2 + yx_2 = y_1. \tag{2.6}$$

Единственно возможным решением этой системы уравнений будет

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{2.7}$$

$$y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{2.8}$$

Формулы (2.7), (2.8) определяют правило деления комплексных чисел.

Разделим, например, комплексное число $z_1 = 1 + i2$ на $z_2 = 3 + i4$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i2}{3 + i4} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2} + i\,\frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 4}{3^2 + 4^2} = \frac{11}{25} + i\,\frac{2}{25}.$$

Важно подчеркнуть, что все введенные нами операции в случае, когда операнды вещественны, совпадают с соответствующим операциями над вещественными числами (проверьте!).

Таким образом, множество комплексных чисел можно считать расширением множества вещественных чисел.

3. Число $\overline{z} = x - iy$ называют *сопряженным* по отношению к комплексному числу $z = x + iy$ (часто говорят, что числа z и $\overline{z}$ *комплексно сопряжены*). Ясно, что

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2. \tag{3.1}$$

Отметим также, что

$$z + \overline{z} = 2x, \quad z - \overline{z} = i2y, \quad z\overline{z} = x^2 + y^2.$$

4. Вещественное неотрицательное число $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$. Очевидно, что

$$\text{если } |z| = 0, \text{ то } x = 0, \ y = 0, \text{ т. е. } z = 0. \tag{4.1}$$

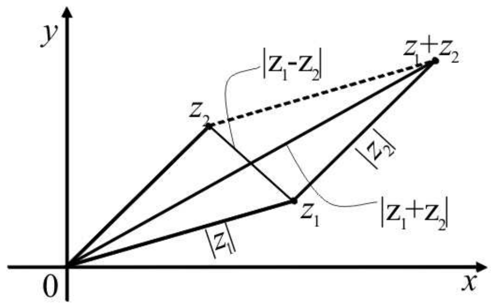


Рис. 1. К неравенствам (4.3), (4.4).

Элементарные вычисления показывают, что для любых двух комплексных чисел $z_1,\ z_2$ справедливо равенство

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|. \tag{4.2}$$

Упражнение. Используя хорошо известное неравенство

$$2|xy| \leqslant (x^2 + y^2),$$

справедливое для любых вещественных чисел x, y, убедиться, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{4.3}$$

Соотношения (4.1)–(4.3) показывают, что с модулем комплексного числа можно оперировать так же, как и с модулем вещественного числа.

Заметим, что $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$, следовательно,

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Точно так же

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Таким образом,

$$||z_2| - |z_1|| \leqslant |z_1 - z_2|. \tag{4.4}$$

5. Напомним, что с каждым вещественным числом x можно связать точку на числовой прямой. Аналогичная (но более сложная) геометрическая интерпретация полезна и для комплексных чисел.

Введем на плоскости декартову систему координат (x, y) и поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = x + iy$ точку с координатами (x, y).

При этом модуль комплексного числа это расстояние от точки (x, y) до начала координат (сделайте рисунок!).

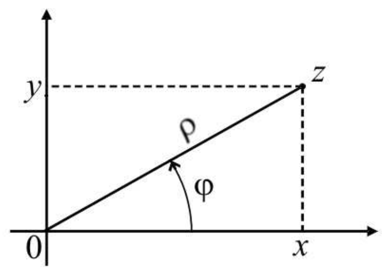


Рис. 2. К тригонометрической форме комплексного числа.

Взаимносопряженные числа симметричны относительно оси x (сделайте рисунок!).

Напомним, что при сложении векторов их одноименные координаты складываются. Поэтому суммирование чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ соответствует сложению векторов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (сделайте рисунок!).

Неравенства (4.3), (4.4) можно интерпретировать теперь как хорошо известные неравенства для сторон треугольника (см. рис 1).

6. Каждое комплексное число (кроме нуля) можно однозначно охарактеризовать двумя параметрами: модулем и углом φ, отсчитываемым от положительного направления оси x против часовой стрелки (см. рис. 2). Угол φ меняется в пределах от 0 до 2π и называется *аргументом* комплексного числа z. Часто используют обозначения $\varphi = \arg z$,

$$\rho = |z|. \tag{6.1}$$

Получим явное выражение z через $|z|$ и $\arg z$. Имеем

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right).$$

При этом (см. рис. 2)

$$\frac{x}{|z|} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{|z|} = \sin\varphi, \tag{6.2}$$

т. е.

$$z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi). \tag{6.3}$$

Соотношения (6.1)–(6.3) дают так называемое *тригонометрическое представление* комплексного числа.

7. Тригонометрическая запись комплексных чисел позволяет по-новому взглянуть на алгебраические операции над ними и получить ряд полезных формул.

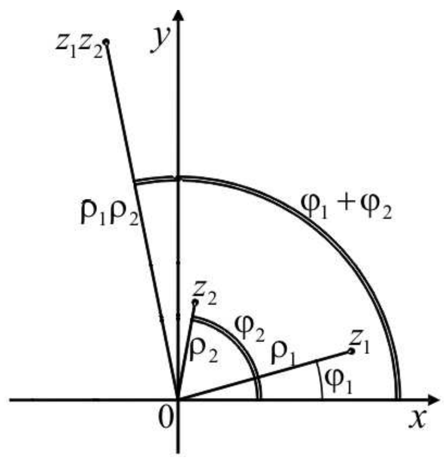


Рис. 3. К умножению комплексных чисел.

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Перемножая эти числа и используя известные тригонометрические соотношения, получим

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right), \tag{7.1}$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (см. рис. 3).

Вычислим, например, произведение чисел

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле (7.1) имеем

$$z_1z_2 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Здесь нужно отметить, что число $\varphi_1 + \varphi_2$ может выйти из отрезка $[0, 2\pi]$, но вследствие периодичности тригонометрических функций мы можем отождествлять их аргументы, отличающиеся на величину, кратную 2π. Это замечание дает возможность корректно определить аргумент произведения двух любых комплексных чисел. Аналогичное относится и к другим операциям над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

Запишем уравнение (2.3), используя тригонометрическое представление комплексных чисел и формулу (7.1)

$$\rho\rho_2(\cos(\varphi+\varphi_2) + i\sin(\varphi+\varphi_2)) = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1). \tag{7.2}$$

Отсюда

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \tag{7.3}$$

т. е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Разделим, например, комплексное число

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{на} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле (7.3) имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Получим формулу для вычисления степеней комплексного числа. Используя (7.1), непосредственно получаем, что

$$z^2 = zz = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

и, вообще, для любого целого числа n (включая нуль и отрицательные целые числа)

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{7.4}$$

Формулу (7.4) называют *формулой Муавра.*[1)]

Возведем, например, комплексное число

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

в третью степень:

$$z^3 = \rho^3\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right) = 27\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

8. Обратимся к задаче извлечения корня степени n, $n \geqslant 1$ — целое, из комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, т. е. к отысканию такого числа $\tilde{z} = \tilde{\rho}(\cos\tilde{\varphi} + i\sin\tilde{\varphi})$, что

$$\tilde{z}^n = \tilde{\rho}^n(\cos n\tilde{\varphi} + i\sin n\tilde{\varphi}) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{8.1}$$

Понятно, что поставленная задача будет решена, если положить

$$\tilde{\rho} = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\tilde{\varphi} = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где под корнем из ρ понимается арифметическое значение корня из неотрицательного числа. Таким образом, показано, что числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right), \ \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8.2}$$

[1)] Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre; 1667–1754) — английский математик французского происхождения.

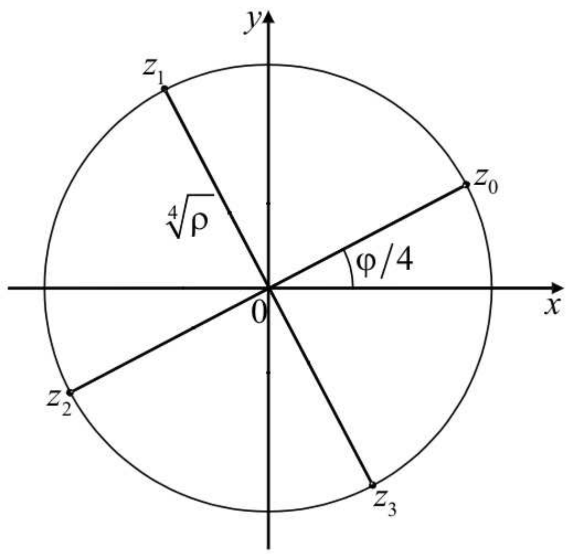


Рис. 4. К вычислению корня степени n из комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Здесь $n = 4$, $z_k = \sqrt[4]{\rho}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $\varphi_k = \varphi/4 + k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$.

являются корнями степени n из числа z. Придавая k значения, большие, чем $n - 1$, в силу периодичности тригонометрических функций мы будем повторять циклически уже найденные значения корней.

Например, корни четвертой степени из комплексного числа

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

вычисляются по формулам

$$z_k = \sqrt[4]{3}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\pi}{8} + k\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Итак, у любого комплексного числа (кроме нуля) существует n различных корней степени $n \geqslant 1$. Все они расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат и делят ее на n равных частей (см. рис. 4).

Естественно поставить вопрос, можно ли указать корни из числа z, отличные от найденных. Ответ отрицательный. Чтобы убедиться в этом, надо обратиться к пункту 5 следующего параграфа, трактуя при этом (8.1) как уравнение для отыскания корней полинома степени n.

Формулу (8.2) часто записывают в несколько иной форме. Положим

$$q_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Очевидно, $q_k^n = 1$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, т. е. q_k — корни степени n из единицы. Нетрудно проверить, что

$$z_k = z_0 q_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом, вычислив корень

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho}\,(\cos\varphi/n + i\sin\varphi/n)\,,$$

все остальные можно получить последовательными сдвигами на угол $2\pi/n$ по окружности.

§ 2. Многочлены

1. *Многочленом (полиномом)* называют функцию вида

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n. \tag{1.1}$$

Здесь $a_0, \dots, a_n$ — фиксированные комплексные числа, называемые *коэффициентами* многочлена, $n \geqslant 0$ — целое число, называемое *порядком* или *степенью* многочлена, a_n называется *старшим коэффициентом* многочлена, переменная z может принимать любые комплексные значения. Таким образом, каждому комплексному числу z однозначно ставится в соответствие комплексное число $P_n(z)$.

Понятно, что сумма многочленов $P_n(z)+Q_m(z)$ — многочлен, причем степень его не больше максимального из чисел m и n.

Произведение многочленов $P_n(z)Q_m(z)$ — многочлен, степень которого есть сумма степеней, т. е. $m+n$.

Многочлен тождественно равен нулю, если все его коэффициенты нули.

Естественно поставить вопрос, будут ли все коэффициенты многочлена равны нулю, если сам многочлен тождественно равен нулю. Это действительно так, но доказательство удобно будет выполнить несколько позже. Как ни странно, наиболее просто оно проводится при изучении систем линейных алгебраических уравнений (см. § 3, гл. 3, с. 76).

2. Введем и исследуем операцию деления многочленов.

2.1. Теорема (о делении многочленов). *Для любых двух многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$, $n \geqslant m$ можно найти такие многочлены $q_{n-m}(z)$ и $r_{m-1}(z)$, что*

$$P_n(z) = Q_m(z)q_{n-m}(z) + r_{m-1}(z). \tag{2.1}$$

Многочлены $q_{n-m}(z)$ и $r_{m-1}(z)$, удовлетворяющие условию (2.1), *определяются по многочленам $P_n(z)$, $Q_m(z)$ однозначно.*

Доказательство. Для упрощения записей будем считать, что старший коэффициент многочлена Q_m равен единице. Случай, когда этот коэффициент — произвольное ненулевое число, требует очевидных изменений в выписываемых ниже формулах. Итак, пусть

$$
\begin{aligned}
&P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \\
&Q_m(z) = z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0, \\
&q_{n-m}(z) = c_{n-m} z^{n-m} + c_{n-m-1} z^{n-m-1} + \cdots + c_0, \\
&r_{m-1}(z) = d_{m-1} z^{m-1} + d_{m-2} z^{m-2} + \cdots + d_0.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты многочленов P_n, Q_m даны, а коэффициенты многочленов q_{n-m}, r_{m-1} требуется найти. Проводя элементарные выкладки, соберем коэффициенты при одинаковых степенях z в правой части (2.1) и приравняем их соответствующим коэффициентам многочлена P_n:

$$
\begin{aligned}
&a_n = c_{n-m}, \\
&a_{n-1} = c_{n-m-1} + c_{n-m} b_{m-1}, \\
&a_{n-2} = c_{n-m-2} + c_{n-m-1} b_{m-1} + c_{n-m} b_{m-2}, \\
&\dots\dots\dots \\
&a_m = c_0 + c_1 b_{m-1} + c_2 b_{m-2} + \cdots + c_m b_0, \\
&a_{m-1} = d_{m-1} + c_0 b_{m-1} + c_1 b_{m-2} + \cdots + c_{m-1} b_0, \\
&\dots\dots\dots \\
&a_0 = d_0 + c_0 b_0.
\end{aligned}
$$

Полученные соотношения представляют собой систему уравнений относительно коэффициентов многочленов q_{n-m}, r_{m-1}. Эта система легко решается. Сначала находятся коэффициенты c_j последовательно, в порядке убывания индексов:

$$
\begin{aligned}
&c_{n-m} = a_n, \\
&c_{n-m-1} = a_{n-1} - c_{n-m} b_{m-1}, \\
&c_{n-m-2} = a_{n-2} - c_{n-m-1} b_{m-1} - c_{n-m} b_{m-2}, \\
&\dots\dots\dots \\
&c_0 = a_m - c_1 b_{m-1} - c_2 b_{m-2} - \cdots - c_m b_0.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Затем с использованием уже найденных значений c_j вычисляются коэффициенты d_j:

$$
\begin{aligned}
&d_{m-1} = a_{m-1} - c_0 b_{m-1} - c_1 b_{m-2} - \cdots - c_{m-1} b_0, \\
&d_{m-2} = a_{m-2} - c_0 b_{m-2} - c_1 b_{m-3} - \cdots - c_{m-2} b_0, \\
&\dots\dots\dots \\
&d_0 = a_0 - c_0 b_0. \ \Box
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Здесь и далее символ $\Box$ обозначает конец доказательства.

Описанный в ходе доказательства теоремы способ вычисления коэффициентов многчленов q_{n-m}, r_{m-1} называется *схемой Горнера*[1]. Она широко применяется на практике.

Формулу (2.1) интерпретируют как *деление* многочлена P_n на многочлен Q_m; q_{n-m} — *частное* от деления, r_{m-1} — *остаток*. В случае, когда многочлен r_{m-1} оказывается равным нулю, говорят, что многочлен P_n *делится* на многочлен Q_m (иногда говорят, что *делится нацело*).

Замечание. Из формул, полученных в ходе доказательства теоремы, очевидно, следует, что если P_n, Q_m являются многочленами с действительными коэффициентами, то коэффициенты многочленов q_{n-m}, r_{m-1} — действительные числа.

Пример. В качестве примера применения схемы Горнера разделим

$$P_4(z) = 2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 \quad \text{на} \quad Q_2(z) = z^2 - 3z + 1,$$

т. е. найдем такие многочлены

$$q_2(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \quad \text{и} \quad r_1(z) = d_1 z + d_0,$$

что выполняется равенство

$$P_4(z) = Q_2(z) q_2(z) + r_1(z).$$

В нашем примере $n = 4$ а $m = 2$. Сначала по формулам (2.2) вычислим коэффициенты c_2, c_1 и c_0:

$$\begin{aligned} &c_2 = a_4 = 2, \\ &c_1 = a_3 - c_2 b_1 = -3 - 2(-3) = 3, \\ &c_0 = a_2 - c_1 b_1 - c_2 b_0 = 4 - 3(-3) - 2 \cdot 1 = 11. \end{aligned}$$

Затем по формулам (2.3) найдем коэффициенты d_1 и d_0:

$$\begin{aligned} &d_1 = a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = -5 - 11(-3) - 3 \cdot 1 = 25, \\ &d_0 = a_0 - c_0 b_0 = 6 - 11 \cdot 1 = -5. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$q_2(z) = 2z^2 + 3z + 11, \quad r_1(z) = 25z - 5.$$

3. *Корнем* многочлена $P_n(z)$ называется число α такое, что

$$P_n(\alpha) = 0.$$

---

[1] Уильям Джордж Горнер (William George Horner; 1786–1837) — английский математик.

3.1. Теорема (Безу[1]). *Пусть $n \geqslant 1$, α — произвольное комплексное число. Тогда многочлен $P_n(z) - P_n(\alpha)$ делится на $z - \alpha$.*

Доказательство. По теореме о делении многочленов

$$P_n(z) - P_n(\alpha) = q_{n-1}(z)(z - \alpha) + r,$$

где r — число (многочлен нулевой степени). Полагая в этом равенстве $z = \alpha$, получим, что $r = 0$, т. е.

$$P_n(z) - P_n(\alpha) = q_{n-1}(z)(z - \alpha). \ \Box$$

Из теоремы Безу очевидным образом вытекает

3.2. Следствие. *Многочлен P_n тогда и только тогда делится на $z - \alpha$, когда α — корень этого многочлена.*

Число α называется корнем *кратности* $k \geqslant 1$ многочлена P_n, если $P_n(z)$ делится на $(z - \alpha)^k$:

$$P_n(z) = (z - \alpha)^k q_{n-k}(z),$$

а $q_{n-k}(z)$ не делится на $(z - \alpha)$, т. е. α не является корнем многочлена $q_{n-k}(z)$.

Если кратность корня равна единице, то корень называют *простым.*

4. Исследуя свойства корней полинома, для упрощения записей обычно переходят к *приведенному* (часто говорят *нормированному*) полиному, получающемуся делением всех коэффициентов исходного полинома на его старший коэффициент.

Очевидно, что любой корень исходного полинома является корнем приведенного полинома и, наоборот, любой корень приведенного полинома — корень исходного полинома.

4.1. Теорема (основная теорема алгебры). *Всякий полином*

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad n \geqslant 1,$$

имеет хотя бы один корень.

Доказательство теоремы проводится методами математического анализа и вынесено в приложение (см. с. 218).

[1] Этьен Безу (Etienne Bezout; 1730–1783) — французский математик.

5. Пусть $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$. По основной тереме алгебры полином P_n имеет корень. Обозначим его через α_1. Пусть этот корень имеет кратность $k_1 \geqslant 1$. Тогда

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1} q_{n-k_1}(z).$$

Если $k_1 = n$, то, очевидно, $q_{n-k_1} = 1$. В противном случае полином $q_{n-k_1}(z)$ имеет корень. Обозначим его через α_2. Понятно, что α_2 является корнем полинома P_n, причем по построению отличным от α_1. Пусть кратность α_2 (как корня полинома q_{n-k_1}) равна k_2. Тогда

$$q_{n-k_1}(z) = (z - \alpha_2)^{k_2} q_{n-k_2}(z),$$

следовательно,

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} q_{n-k_2}(z).$$

Ясно, что k_2 — кратность α_2 как корня полинома P_n. Продолжая это процесс, получим, что

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \cdots (z - \alpha_m)^{k_m}, \tag{5.1}$$

где $k_1,\ k_2,\ \dots, k_m$ — целые числа, не меньшие единицы, и такие, что

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Таким образом, всякий полином степени n имеет n корней (с учетом их кратности).

5.1. Теорема. *Полином P_n степени n не может иметь больше чем n корней.*

Доказательство. В самом деле, пусть $P_n(\alpha) = 0$ и α не совпадает ни с одним из чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. По следствию из теоремы Безу имеем $P_n(z) = (z - \alpha)q_{n-1}(z)$, откуда на основании (5.1) получаем, что

$$(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \cdots (z - \alpha_m)^{k_m} = (z - \alpha)q_{n-1}(z).$$

Правая часть этого равенства при $z = \alpha$ равна нулю, а левая не равна нулю. Полученное противоречие означает, что никакое число, отличное от $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, не может быть корнем полинома P_n. $\square$

6. Занумеруем корни полинома P_n целыми числами от 1 до n, повторяя каждый корень столько раз, какова его кратность, и запишем (5.1) в виде

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n).$$

Раскрывая скобки в правой части равенства, приводя подобные и приравнивая коэффициенты при степенях z соответствующим коэффициентам в левой части, получим формулы, выражающие коэффициенты полинома P_n через его корни:

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

$$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_0 = (-1)^n \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

Закономерность образования этих формул очевидна: в каждой последующей строке количество сомножителей увеличивается на единицу, складываются всевозможные произведения различных сомножителей.

Полученные формулы называются *формулами Вьета* (часто пишут Виета)[1)].

7. Пусть все коэффициенты полинома

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ \dots + a_0$$

есть вещественные числа, тогда если α — корень этого полинома, то и сопряженное число $\overline{\alpha}$ — корень полинома P_n.

Доказательство этого утверждения сразу вытекает из формулы

$$\overline{P}_n(z) = \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ \dots + a_0,$$

получающейся непосредственным применением соотношений (3.1), с. 7, и того очевидного факта, что если $P_n(\alpha) = 0$, то и $\overline{P_n(\alpha)} = 0$.

Таким образом, все множество комплексных корней полинома с вещественными коэффициентами разбивается на пары комплексно сопряженных чисел.

Отсюда сразу следует, что у полинома с вещественным коэффициентами **нечетного** порядка существует по крайней один вещественный корень.

Заметим, что при любых z, α имеем

$$(z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) = z^2 + pz + q,$$

где $p = -\alpha - \overline{\alpha} = -2\operatorname{Re}\alpha$, $q = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$ — вещественные числа. Поэтому, объединяя в пары сопряженные корни, разложение (5.1) для

[1)] Франсуа Виет (Francois Viete; 1540–1603) — французский математик, основоположник символической алгебры. По образованию и основной профессии — юрист.

полинома P_n с вещественными коэффициентами можно представить в виде

$$P_n(z) = (z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\cdots(z-\alpha_s)^{k_s}(z^2+p_1z+q_1)\cdots \\ \cdots(z^2+p_tz+q_t), \quad (7.1)$$

где s — количество различных вещественных корней полинома P_n, а t — количество пар комплексно сопряженных корней этого полинома.

Полагая, что z в равенстве (7.1) — вещественное число, можно сказать, что полином с вещественными коэффициентами допускает представление в виде произведения линейных и квадратичных вещественных сомножителей.

Пример. Нетрудно видеть, что одним из корней полинома

$$P_3(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = z^3 - 6z + 9$$

является число $\alpha = -3$. Разделим многочлен $P_3(z)$ на

$$Q_1(z) = z + b_0 = z + 3,$$

т. е. найдем такой многочлен

$$q_2(z) = c_2z^2 + c_1z + c_0,$$

что выполняется равенство

$$P_3(z) = Q_1(z)q_2(z).$$

Вычисления проведем с помощью схемы Горнера. Их удобно оформить в виде таблицы:

$b_0 = 3$	$a_3 = 1$	$a_2 = 0$	$a_1 = -6$	$a_0 = 9$
		$c_2b_0 =$ $= 1 \cdot 3 = 3$	$c_1b_0 =$ $= (-3)3 = -9$	$c_0b_0 =$ $= 3 \cdot 3 = 9$
	$c_2 = a_3 =$ $= 1$	$c_1 = a_2 - c_2b_0 =$ $= -3$	$c_0 = a_1 - c_1b_0 =$ $= 3$	$r_0 = a_0 - c_0b_0 =$ $= 0$

Итак,

$$q_2(z) = z^2 - 3z + 3,$$

а остаток r_0 равен нулю, поскольку многочлен $P_3(z)$ нацело делится на $z+3$:

$$P_3(z) = (z+3)\left(z^2 - 3z + 3\right).$$

Очевидно, число $\alpha = -3$ не является корнем полинома $q_2(z)$. Поэтому α — простой корень полинома $P_3(z)$. Для того, чтобы найти оставшиеся два его корня, надо решить квадратное уравнение

$$z^2 - 3z + 3 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен -3, следовательно, оно не имеет вещественных корней. Таким образом, полином третьего порядка $P_3(z)$ с вещественными коэффициентами мы представили в виде произведения линейного и квадратичного вещественных сомножителей.

§ 3. Определители второго и третьего порядков

1. Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 — заданные, вообще говоря, комплексные числа, x_1, x_2 требуется найти.

Решим эту систему, используя метод исключения неизвестных. Этот метод обычно называют *методом Гаусса*[1)]. Поделим обе части первого уравнения на a_{11}:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Затем умножим полученное уравнение на a_{21} и вычтем почленно это уравнение из второго уравнения системы:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

Подставляя найденное выражение для x_2 в первое уравнение системы (1.1), легко найти выражение для x_1:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

Понятно, что формулы (1.2), (1.3) имеют смысл, если

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Формулы (1.2), (1.3) полезно записать в несколько ином виде. Введем соответствующие определения и обозначения.

Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

называют *матрицей второго порядка*. Величину

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.5}$$

---

1) Иоганн Карл Фридрих Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauss; 1777–1855) — немецкий математик, астроном и физик.

называют *определителем* матрицы A. Для определителя используют следующие обозначения:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Равенства (1.2), (1.3) теперь можно записать в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Полученные формулы называют *формулами Крамера*[1)].

Формулы (1.2), (1.3) не имеют смысла, когда

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

или

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

т. е. строки определителя $|A|$ пропорциональны. Если при этом и

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

то первое и второе уравнения системы (1.1), фактически, совпадают, и она имеет бесконечное множество решений. Если $|A| = 0$, но

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

то первое и второе уравнения системы (1.1) противоречивы, система *несовместна*, не имеет ни одного решения.

Примеры. 1) Определитель матрицы системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5, \\ 3x_1 + 4x_2 &= 6, \end{aligned}$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

[1)]Габриэль Крамер (Gabriel Cramer; 1704–1752) — швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры.

Система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 12}{-2} = -4, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 15}{-2} = \frac{9}{2}\,.$$

2) Определитель матрицы системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6, \end{aligned}$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

При этом

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}.$$

Уравнения системы, фактически, совпадают. Система имеет бесчисленное множество решений.

3) Система

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6, \end{aligned}$$

не имеет решений, так как ее определитель равен нулю, но $b_1/b_2 \neq a_{12}/a_{22}$.

2. Обратимся к системе трех уравнений с тремя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \tag{2.1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \tag{2.2}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \tag{2.3}$$

Из ее коэффициентов можно составить *матрицу третьего порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Получим формулы для решения системы, вновь используя метод Гаусса. Поделим обе части уравнения (2.1) на a_{11}. Полученное уравнение умножим на a_{21} и вычтем почленно из уравнения (2.2). Аналогично поступим с уравнением (2.3). В результате система (2.1)–(2.3) преобразуется к виду

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \tag{2.5}$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}\right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21}\right) x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21}, \tag{2.6}$$

$$\left(a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31}\right) x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31}\right) x_3 = b_3 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{31}. \tag{2.7}$$

Теперь из уравнений (2.6), (2.7) исключим неизвестную x_2 по аналогии с тем, как мы исключали неизвестную x_1 из системы (1.1). После элементарных преобразований получим

$$x_3 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{2.8}$$

Упражнение. Вывести равенство (2.8).

Знаменатель полученной дроби называют *определителем* матрицы A, т. е. по определению

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Заметим, что числитель дроби в правой части (2.8) аналогичен знаменателю, а именно, множители при определителях второго порядка заменены на b_1, b_2, b_3 соответственно. Формуле (2.8) поэтому можно придать вид

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{2.10}$$

Зная выражение для x_3, из уравнения (2.6) найдем выражение для x_2, а затем при помощи уравнения (2.5) — для x_1. Можно избежать этих громоздких вычислений, действуя следующим образом.

Запишем систему (2.1)–(2.3) в виде

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + a_{12}x_2 &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{22}x_2 &= b_2,\\
a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + a_{32}x_2 &= b_3.
\end{aligned}
$$

Теперь, фактически, вновь используя формулу (2.10), получим

$$
x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}}. \tag{2.11}
$$

Аналогично,

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}}. \tag{2.12}
$$

Формулы (2.10)–(2.12) имеют смысл, если определитель матрицы A не равен нулю. Полное исследование разрешимости линейных систем с тремя неизвестными в случае, когда определитель $|A|$ равен нулю, довольно сложно. Впоследствии мы рассмотрим этот вопрос применительно к системам с произвольным числом неизвестных.

3. Формулам (2.10)–(2.12) мы придадим в дальнейшем более симметричный вид, но сначала изучим свойства определителей третьего порядка.

1) Вычислим входящие в (2.9) определители второго порядка, раскроем скобки и соберем вместе слагаемые с одинаковыми знаками. Получим:

$$
\begin{aligned}
|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} &- \\
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}&.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Для того, чтобы подметить закономерность расстановки знаков в этой сумме нам полезно будет ввести некоторые новые понятия и обозначения.

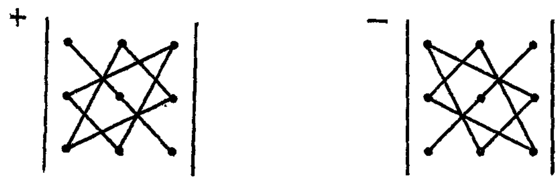


Рис. 5. Правило расстановки знаков в определителе третьего порядка

Три целых числа $1, 2, 3$ можно расположить шестью различными способами:

$$123,\ 231,\ 312,\ 321,\ 213,\ 132. \tag{3.2}$$

Иначе говоря, из трех чисел, можно составить шесть различных *перестановок*.

В дальнейшем будет удобно записывать перестановки в виде $n_1n_2n_3$, подразумевая под n_i одно из чисел $1, 2, 3$. Причем, конечно, все числа n_1, n_2, n_3 считаются различными.

Рассмотрим некоторую конкретную перестановку $n_1n_2n_3$ и составим все пары чисел n_in_j, где $i < j$. Понятно, что таких пар всего три: n_1n_2, n_1n_3 и n_2n_3. Говорят, что пара чисел n_in_j, где $i < j$, образует *инверсию*, если $n_i > n_j$. Каждой перестановке соответствует определенное количество инверсий, а именно, 0, 1, 2, или 3. Количество инверсий в перестановке $n_1n_2n_3$ будем обозначать через $\sigma(n_1, n_2, n_3)$.

Перестановку $n_1n_2n_3$ будем называть *четной*, если ей соответствует четное количество инверсий (нуль считается четным числом). В противном случае перестановка называется *нечетной*.

Нетрудно убедиться, что первые три из перестановок (3.2) четные, а остальные нечетные.

Каждое слагаемое в выражении определителя (3.1) имеет вид

$$\pm a_{1n_1}a_{2n_2}a_{3n_3},$$

причем знак плюс ставится в том случае, когда перестановка $n_1n_2n_3$ четная. В противном случае ставится знак минус. Равенство (3.1) с использованием введенных обозначений можно записать в виде

$$|A| = \sum_{n_1n_2n_3} (-1)^{\sigma(n_1n_2n_3)} a_{1n_1}a_{2n_2}a_{3n_3}, \tag{3.3}$$

где символ $\sum\limits_{n_1n_2n_3}$ означает суммирование, которое распространяется на всевозможные перестановки $n_1n_2n_3$.

Для запоминания способа расстановки знаков в (3.1) полезно использовать схему, представленную на рисунке 5.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0.$$

2) Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице A.

Матрица A^T состоит из тех же элементов, что и матрица A, но расположенных в другом порядке. Первый столбец матрицы A^T состоит из элементов первой строки матрицы A. Аналогичное справедливо и для последующих столбцов матрицы A^T.

Вычисляя по формуле (3.1) определитель матрицы A^T, получим

$$|A^T| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \quad (3.4)$$

Сравнивая $|A^T|$ и $|A|$, легко заметить, что они различаются только порядком следования сомножителей в соответствующих слагаемых и порядком расположения этих слагаемых.

Таким образом, определитель не меняется при транспонировании матрицы.

Все дальнейшие свойства определителей формулируются в терминах их строк. По только что доказанному свойству 2) они будут справедливы и для столбцов.

3) Непосредственно из формулы (3.3) вытекает, что если все элементы некоторой строки определителя — нули, то определитель равен нулю.

4) Если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы определителей. Запишем соответствующую формулу применительно к первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Справедливость данного свойства проверяется непосредственным использованием формулы (3.3):

$$\sum_{n_1n_2n_3}(-1)^{\sigma(n_1n_2n_3)}(a_{1n_1}+b_{1n_1})a_{2n_2}a_{3n_3}=\sum_{n_1n_2n_3}(-1)^{\sigma(n_1n_2n_3)}a_{1n_1}a_{2n_2}a_{3n_3}+$$
$$+\sum_{n_1n_2n_3}(-1)^{\sigma(n_1n_2n_3)}b_{1n_1}a_{2n_2}a_{3n_3}.$$

Аналогично доказывается, что общий множителей элементов строки можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

и, вообще,

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11}+\beta b_{11} & \alpha a_{12}+\beta b_{12} & \alpha a_{13}+\beta b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Это свойство часто формулируют так: определитель *линеен* по каждой строке.

5) Если в определителе две строки совпадают, то он равен нулю. Будем считать, что совпадают две первые строки. Для других пар строк выкладки полностью аналогичны. Запишем равенство (3.1), заменяя элементы второй строки на равные им элементы первой строки:

$$|A| = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{13}a_{11}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{12}a_{31} - a_{12}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{32}. \quad (3.5)$$

Легко заметить, что для каждого слагаемого со знаком плюс находится одно слагаемое, состоящее из тех же сомножителей, но со знаком минус, значит, $|A| = 0$.

6) Если в определителе поменять местами две строки, то знак его изменится на противоположный, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Действительно, в силу только что доказанного свойства 5) имеем, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Последовательно используя свойство 4), левую часть этого равенства можно записать в виде суммы четырех слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вследствие свойства 5) первое и последнее слагаемые этой суммы равны нулю, поэтому

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. равенство (3.6) справедливо.

Переставляя столбцы определителей, (2.11), (2.12) можно записать в виде

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{3.7}$$

Теперь формулам, дающим решение системы (2.1)–(2.3), можно придать компактный вид

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1, 2, 3, \tag{3.8}$$

где $\Delta = |A|$, а Δ_i получается из $|A|$ заменой i-того столбца столбцом правой части системы (2.1)–(2.3). Формулы (3.8) называют *формулами Крамера*.

Продолжим изучение свойств определителей третьего порядка.

7) Определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. Опять проведем доказательство, рассматривая первую и вторую строки. Используя свойство 3), получим

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} & a_{13}+\alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель равен нулю, так как его первая и вторая строки совпадают.

8) Получим необходимое и достаточное условие равенства определителя $|A|$ нулю. Будем говорить, что строки определителя *линейно зависимы*, если существуют числа α, β, γ, не все равные нулю, и такие, что

$$\alpha a_{1j} + \beta a_{2j} + \gamma a_{3j} = 0, \ j = 1, 2, 3.$$

В дальнейшем будем для определенности считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда

$$a_{1j} = c_1 a_{2j} + c_2 a_{3j}, \ j = 1, 2, 3, \tag{3.9}$$

где $c_1 = -\beta/\alpha, \ c_2 = -\gamma/\alpha$. Говорят, что в этом случае первая строка есть *линейная комбинация* второй и третьей строк.

Покажем, что определитель $|A|$ равен нулю тогда и только тогда, когда его строки линейно зависимы.

Пусть для строк определителя выполнено условие (3.9). Умножим вторую строку определителя на $-c_1$ и прибавим к первой. Величина определителя не изменится. Умножим третью строку на $-c_2$ и прибавим к первой строке преобразованного определителя. Вновь величина определителя не изменится, но первая строка определителя, очевидно, будет содержать только нулевые элементы и потому определитель будет равен нулю.

Пусть определитель $|A|$ равен нулю. Рассмотрим все определители второго порядка, получающиеся из $|A|$ вычеркиванием одного столбца и одной строки, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Если не все элементы определителя $|A|$ равны нулю (в такой ситуации доказываемое утверждение выполняется тривиальным образом), то возможны два случая: 1) все эти определители второго порядка равны нулю, 2) хотя бы один из них отличен от нуля.

Рассмотрим второй случай. Первый рассматривается аналогично, причем рассуждения оказываются более простыми. Будем считать, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, что не снижает общности рассуждений, так как этого всегда можно добиться, переставляя строки и столбцы и не меняя при этом величины определителя A. Действительно, такие перестановки могут изменить лишь знак определителя, а он, как мы полагаем, равен нулю.

Воспользовавшись формулой (2.9), отсюда получим, что

$$a_{13} = c_1 a_{23} + c_2 a_{33}, \tag{3.10}$$

где

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}, \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}.$$

Далее, определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

равен нулю, так как у него два последних столбца совпадают. Записывая этот определитель по формуле (2.9), получим как и раньше, что

$$a_{12} = c_1 a_{22} + c_2 a_{32}. \tag{3.11}$$

Наконец, рассматривая нулевой определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix},$$

получим, что

$$a_{11} = c_1 a_{21} + c_2 a_{31}. \tag{3.12}$$

Равенства (3.10)–(3.12) означают, что первая строка определителя есть линейная комбинация второй и третьей строк.

9) Получим так называемую формулу разложения определителя по строке. Используя свойство 4), запишем следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обозначив через A_{1j} множители при соответствующих элементах первой строки определителя $|A|$, можем написать

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{3.13}$$

Преобразуем определители A_{1j}, $j = 1, 2, 3$. Умножим первую строку A_{11} на a_{21} и вычтем из второй, затем умножим первую строку на a_{31} и вычтем из третьей. Получим в результате

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично,

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

Определитель A_{1j} называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{1j}.

Определитель M_{1j} второго порядка, получающийся из A_{1j} вычеркиванием первой строки и j-того столбца, называется *минором*, соответствующим элементу a_{1j} определителя $|A|$.

Вообще, алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ получается заменой в $|A|$ элемента a_{ij} единицей, всех остальных элементов i-той строки и j-того столбца нулями.

Минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ — определитель второго порядка, получающийся из $|A|$ вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Установим связь между алгебраическим дополнениями и минорами. Меняя местами первый и второй столбец, получим, что

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3.14}$$

Аналогично, выполняя две перестановки столбцов и потому не меняя знака, получим, что

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{3.15}$$

Теперь, понятно, что достаточно научиться вычислять определитель A_{11}. Используя формулу (3.1), получим

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11}.$$

Вследствие (3.14), (3.15) будем иметь, что $A_{12} = -M_{12}$, $A_{13} = M_{13}$. Формуле (3.13) можно придать вид

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Нетрудно сообразить, что справедливы общие формулы

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \tag{3.16}$$

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3} \tag{3.17}$$

разложения определителя по i-той строке, где $i = 1, 2, 3$.

Можно написать и аналогичную формулу *разложения определителя по столбцу*

$$|A| = a_{1i}(-1)^{i+1}M_{1i} + a_{2i}(-1)^{i+2}M_{2i} + a_{3i}(-1)^{i+3}M_{3i}, \tag{3.18}$$

где $i = 1, 2, 3$.

Подчеркнем, что знаки в формулах (3.17), (3.18) определяются количеством перестановок строк и столбцов в алгебраическом дополнении A_{ij}, необходимых для того, чтобы переместить единицу на позицию первого элемента первой строки.

Пример. Вычислим определитель разложением по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 - 4(-6) + 7(-3) = 0.$$

Тот же определитель вычислим разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -4(-6) + 5(-12) - 6(-6) = 0.$$

Используем теперь свойство 7) для вычисления того же определителя. Умножим сначала первый столбец на два и вычтем из второго столбца. Придем к равенству

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & -6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Затем умножим первый столбец на три и вычтем из третьего столбца. Получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & -6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по первой строке, найдем его значение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

Отметим в заключение, что на формулу (2.9) можно смотреть теперь, как на разложение определителя по третьему столбцу.

10) Пусть $i \neq k$. Тогда

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0. \tag{3.19}$$

Действительно, выражение в левой части (3.19) можно интерпретировать, как разложение определителя по k-той строке, которая состоит из элементов i-той строки. Определитель с двумя равными строками равен нулю.

Соотношениям (3.16), (3.19) полезно придать общую форму

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, 3, \tag{3.20}$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \tag{3.21}$$

так называемый *символ Кронекера*[1)].

[1)] Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker; 1823–1891) — немецкий математик.

Глава 2

Введение в аналитическую геометрию

§ 1. Векторная алгебра

1. В этой главе мы будем использовать только вещественные числа. Рассматривается трехмерное евклидово[1] пространство. Вводится *декартова*[2] *система координат*. Это означает следующее. Фиксируется некоторая точка пространства (в дальнйшем она всегда будет обозначатся символом 0 (ноль)) и называется *началом системы координат*. Задаются три попарно ортогональные прямые, проходящие через точку 0. Задается единица длины и направление отсчета от точки 0 на каждой прямой.

Положение точек на этих прямых будем определять вещественными числами x_1, x_2, x_3 (т. е. будем интерпретировать эти прямые как вещественные оси). Будем называть их в дальнейшем *осями координат*.

Понятно, что теперь положение каждой точки в пространстве взаимнооднозначно определяется заданием трех чисел x_1, x_2, x_3, называемых *координатами точки* (геометрический смысл координат поясняется на рис. 1, a).

Точки пространства будем обозначать малыми латинскими буквами: x, y, z, … Будут использоваться и обозначения с явным указанием координат, например $x = (x_1, x_2, x_3)$. Иногда нам придется нумеровать различные точки пространства. В этом случае номер (индекс) будем писать сверху, например, $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$.

Как обычно, направленные отрезки будем называть *векторами*. На рисунках (при необходимости) направление вектора будем указывать стрелкой. Векторы, имеющие равные длины и одинаковые направления, считаются равными (см. рис. 2 a). С каждой точкой x пространства взаимнооднозначно связан вектор, соединяющий ее с началом координат (см. рис. 1, b). Концом этого вектора считается точка x.

---

[1]Евклид или Эвклид (ок. 300 г. до н. э.) — древнегреческий математик. Мировую известность приобрёл благодаря сочинению по основам математики «Начала».

[2]Рене Декарт (Rene Descartes; лат. Renatus Cartesius — Картезий; 1596–1650) — французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

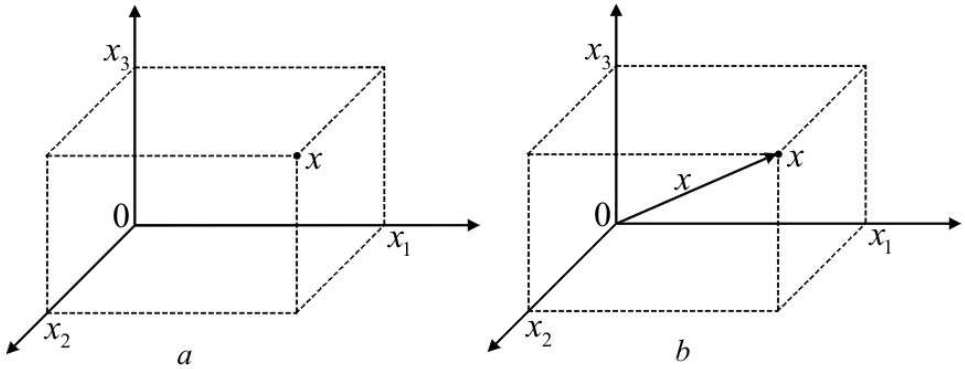


Рис. 1. Декартовы координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ (a). Вектор x (b).

Вектор, соответствующий точке 0, будем называть *нулевым*.

Векторы будем обозначать теми же символами, что и соответствующие им точки пространства.

Координаты точки x будем называть *декартовыми координатами вектора* x. Геометрический смысл декартовых координат вектора очевиден. Это — длины проекций вектора x (с учетом знака) на соответствующие оси координат.

Длину вектора x часто называют *модулем* и обозначают через $|x|$. Лишь один вектор имеет нулевую длину. Это — вектор 0. Из теоремы Пифагора сразу же вытекает, что для любого вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

2. Определим теперь так называемые *алгебраические операции над векторами.* Будем опираться при этом на знакомые из школьного курса физики правила действия с силами, приложенными к материальной точке.

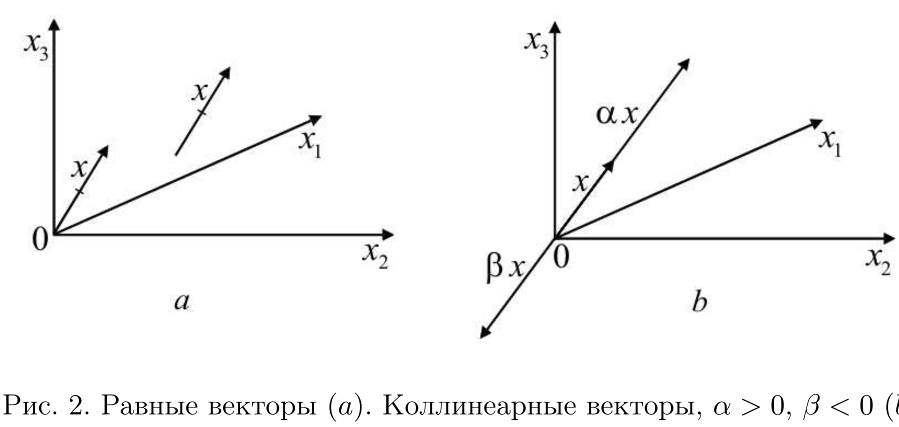


Рис. 2. Равные векторы (a). Коллинеарные векторы, $\alpha > 0$, $\beta < 0$ (b).

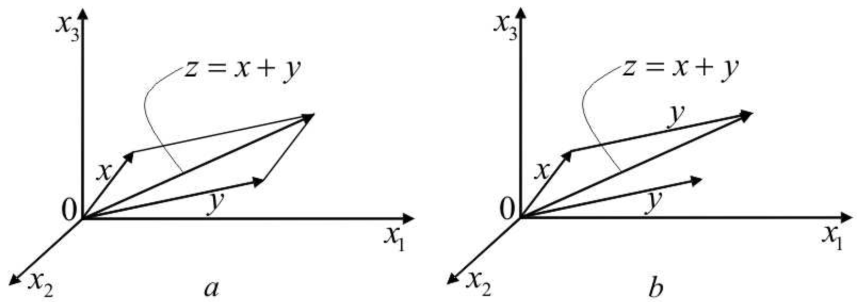


Рис. 3. Сложение векторов. Правило параллелограмма (a) и правило треугольника (b).

1) *Умножение вектора на число.* Пусть заданы вещественное число α и вектор x. Вектор y называется произведением α и x (пишется $y = \alpha x$), если $|y| = |\alpha||x|$, а направление y совпадает с направлением вектора x при положительном α и противоположно направлению x при отрицательном α.

Поясним, что умножение любого вектора на нуль дает нулевой вектор, умножение любого числа на нулевой вектор также дает нулевой вектор.

Векторы, лежащие на одной прямой, называют *коллинеарными* (см. рис 2, b). Понятно, при любых α и x векторы $y = \alpha x$ и x коллинеарны. Наоборот, если векторы x, y коллинеарны, и хотя бы один из них не нуль (например, x), то найдется такое число α, что $y = \alpha x$.

2) *Сложение векторов.* Вектор z называется суммой векторов x и y (пишется $z = x+y$), если он образует диагональ параллелограмма, построенного на векторах x, y (см. рис. 3, a).

Нетрудно видеть, что $x + y = y + x$, т. е., как говорят, операция сложения векторов *коммутативна* (*перестановочна*).

Упражнение. Интерпретируйте правило сложения векторов в предельном случае, когда слагаемые коллинеарны.

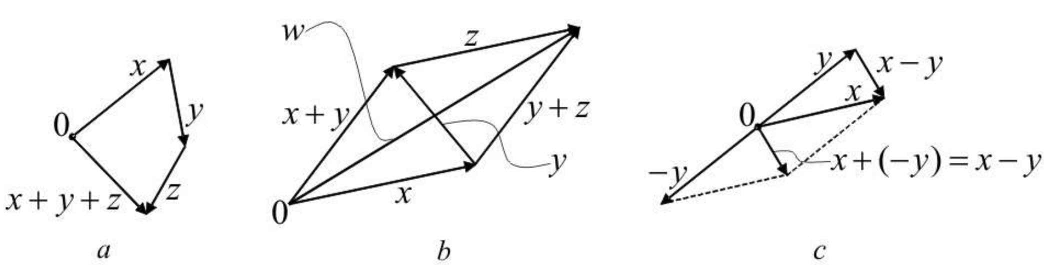


Рис. 4. Сложение векторов: (a) сумма трех векторов; (b) к правилу ассоциативности $w = x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$; ($c$) вычитание векторов, $x + (-y) = x - y$, $x = y + (x - y)$.

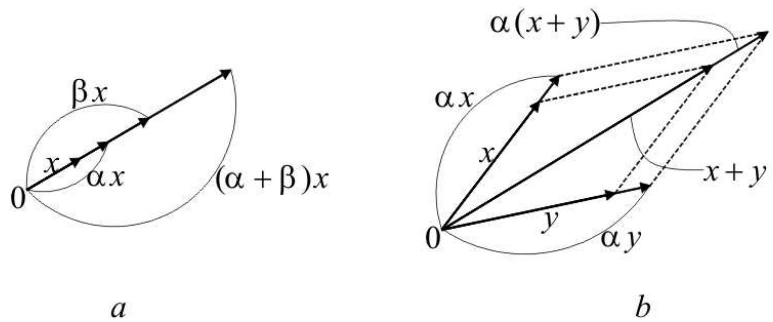


Рис. 5. К дистрибутивности умножения на скаляр (a) и по сложению векторов (b).

Иногда удобнее описывать то же самое правило сложения векторов иначе: от конца вектора x откладывается вектор y, вектор z замыкает треугольник (см. рис. 3, b).

Аналогично можно описать правило сложения нескольких векторов (см. рис. 4, a).

Нетрудно видеть, что операция сложения векторов *ассоциативна* (см. рис. 4, b), т. е. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Вектор z называется *разностью* векторов x и y (см. рис 4, c), если $x = z + y$. Понятно, что $z = x + (-1)y = x + (-y)$.

Из рисунка 5 сразу усматриваются следующие свойства, связывающие операции сложения векторов и и умножения вектора на число:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Эти свойства называют свойствами *дистрибутивности* (*распределительности*).

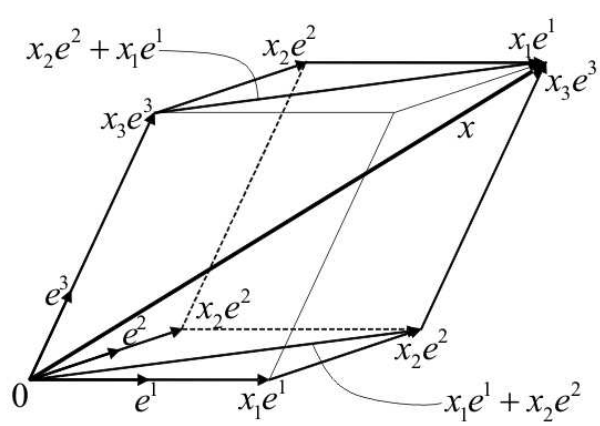


Рис. 6. Разложение вектора по базису, $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$.

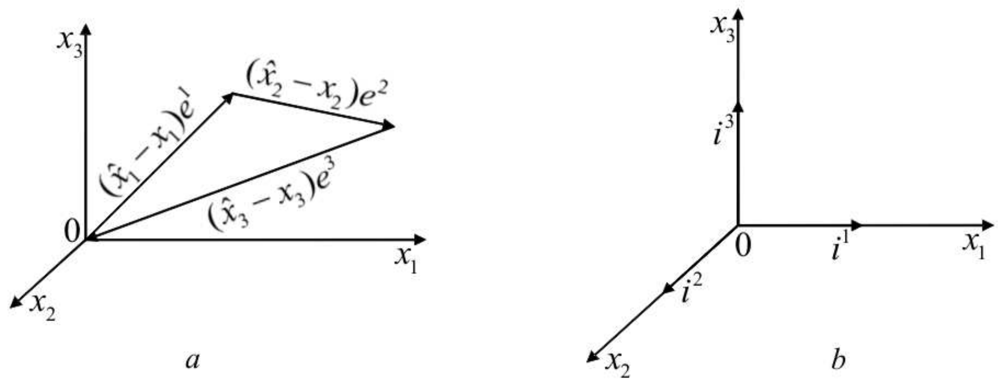


Рис. 7. К доказательству единственности разложения вектора по неортогональному базису (a). Декартов базис (b).

3. *Базис. Разложение вектора по базису.* Будем говорить, что векторы *компланарны*, если они лежат в одной плоскости. Фиксируем произвольным образом три некомпланарных вектора. Обозначим их через e^1, e^2, e^3. Очевидно, что любой вектор x можно представить в виде (см. рис. 6)

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3.$$

Будем писать также $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Говорят, что векторы e^1, e^2, e^3 образуют *базис* пространства. Числа x_1, x_2, x_3 называют *координатами вектора в* этом *базисе*. Они однозначно определяются вектором x (если базис фиксирован). Действительно, если предположить, что возможно еще одно разложение

$$x = \widehat{x}_1e^1 + \widehat{x}_2e^2 + \widehat{x}_3e^3,$$

то

$$(\widehat{x}_1 - x_1)e^1 + (\widehat{x}_2 - x_2)e^2 + (\widehat{x}_3 - x_3)e^3 = 0.$$

Следовательно, векторы $(\widehat{x}_1 - x_1)e^1$, $(\widehat{x}_2 - x_2)e^2$, $(\widehat{x}_3 - x_3)e^3$ образуют треугольник и, значит, лежат в одной плоскости (см. рис. 7, a), чего не может быть, так как по условию векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны.

Особую роль играет базис, составленный из трех попарно ортогональных векторов единичной длины (см. рис. 7, b). Они образуют так называемый *декартов базис.* Мы будем обозначать его через i^1, i^2, i^3. Координаты вектора в этом базисе есть его декартовы координаты.

Базис, составленный из трех произвольных некомпланарных векторов, иногда называют *обобщенным декартовым базисом.*

Далее в этом параграфе под координатами вектора понимаются обобщенные декартовы координаты. Случаи, когда используются декартовы координаты, оговариваются особо.

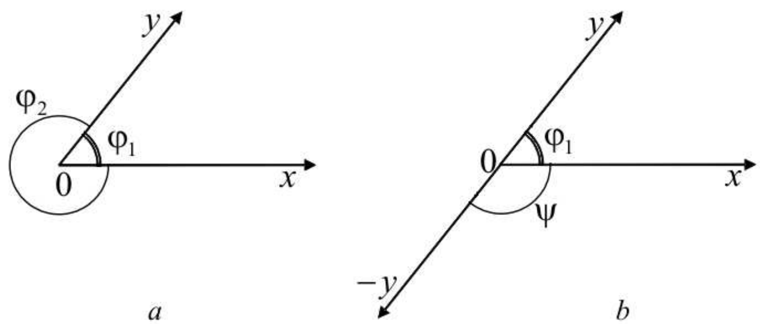


Рис. 8. Угол φ_1 между векторами x и y (a). Угол $\psi = \pi - \varphi_1$ между векторами x и $-y$ (b).

4. *Представление алгебраических операций через координаты.* Пусть α — произвольное число. Используя свойство дистрибутивности, получим

$$\alpha x = (\alpha x_1)e^1 + (\alpha x_2)e^2 + (\alpha x_3)e^3,$$

т. е. при умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число. Будем также писать

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

Далее, пусть $x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3$, $y = y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3$. Тогда, опираясь на свойства ассоциативности и дистрибутивности, получим

$$x + y = (x_1 + y_1)e^1 + (x_2 + y_2)e^2 + (x_3 + y_3)e^3,$$

т. е. при сложении векторов их компоненты складываются.

Будем также писать

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

и, вообще,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Например, даны векторы $x = (1, 2, 4)$, $y = (5, 6, 7)$. Вычислим координаты вектора $z = 2x - y$. Получим $z = (2 - 5, 4 - 6, 8 - 7) = (-3, -2, 1)$.

5. *Скалярным произведением векторов* x и y называется число

$$(x, y) = |x||y|\cos(x, y). \tag{5.1}$$

Здесь $\cos(x, y)$ — косинуса угла между векторами x, y. Под углом между двумя векторами подразумевают тот угол, который не превосходит π (см. рис. 8, a).

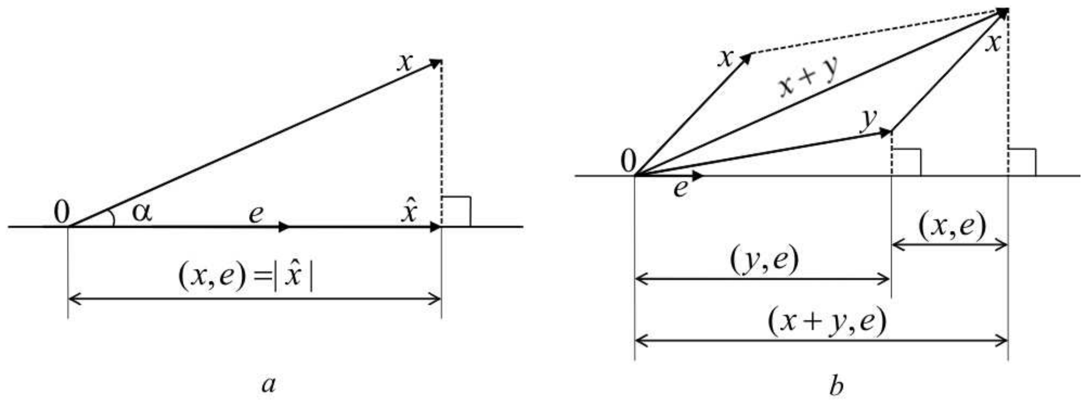


Рис. 9. Проекция вектора (a). К аддитивности скалярного произведения (b).

Понятие скалярного произведения векторов возникает, например, в физике при проектировании силы на заданное направление.

Длина *проекции* (с учетом знака) вектора x на прямую, параллельную вектору e единичной длинны, равна скалярному произведению (x, e) (см. рис. 9, a):

$$(x, e) = |x||e| \cos(x, e) = |x||e| \cos \alpha = |x| \cos \alpha.$$

Очевидно, что для *ортогональности* двух ненулевых векторов необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

Если один из сомножителей — нуль, то и скалярное произведение равно нулю.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $(x, y) = (y, x)$ для любых векторов x, y — *симметрия*,

2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для любых векторов x, y и для любого вещественного числа α — *однородность*,

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для любых векторов x, y, z — *аддитивность*,

4) $(x, x) = |x|^2 \geqslant 0$ для любого вектора x, и если $(x, x) = 0$, то $x = 0$ — *положительная определенность*.

Заметим, что из свойств 2), 3) вытекает, что

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

для любых векторов x, y, z и для любых вещественных чисел α, β. Это свойство часто называют свойством *линейности* скалярного произведения векторов по первому аргументу.

Убедимся в справедливости свойств 1)–4).

Свойство 1) — непосредственное следствие определения.

Свойство 2) при $\alpha \geqslant 0$ очевидно, а при $\alpha < 0$ надо заметить, что умножение одного вектора на отрицательное число превращает угол между векторами в дополнительный до π и, стало быть, меняет знак косинуса угла (см. рис. 8, b).

Если $z = 0$, то свойство 3) очевидно, выполняется для любых x, y. Если $z \neq 0$, то, используя свойство 2), получим

$$(x + y, z) = |z|(x + y, e),$$

где $e = |z|^{-1}z$, причем, очевидно, $|e| = 1$. Теперь достаточно доказать равенство

$$(x + y, e) = (x, e) + (y, e).$$

Слева в этом равенстве — проекция вектора $x + y$ на прямую, параллельную вектору e, а справа — сумма проекций векторов x и y на эту же прямую (см. рис. 9, b). Понятно, что две эти величины совпадают.

Свойство 4) выполняется очевидным образом.

Отметим еще, что для любых x, y справедливо неравенство

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|,$$

Это неравенство называют *неравенством Коши*[1)]. Очевидно также, что для любых x, y справедливо неравенство

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

называемое *неравенством треугольника* (см. рис. 3, b).

6. Укажем формулу вычисления скалярного произведения векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ через их координаты. Воспользовавшись установленными только что свойствами скалярного произведения, получим

$$(x, y) = (x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3) = \sum_{k,l=1}^{3} x_k y_l (e^k, e^l). \quad (6.1)$$

Использованные здесь символы означают суммирование по всем значениям индексов $k, l = 1, 2, 3$ (всего — девять слагаемых).

Полученная формула показывает, что для вычисления скалярного произведения двух любых векторов надо знать скалярные произведения всех (шести) пар базисных векторов.

[1)] Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy; 1789–1857) — французский математик.

Проще всего вычисляется скалярное произведение векторов по их декартовым координатам. Действительно, в этом случае $(e^k, e^l) = \delta_{kl}$, следовательно,

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Приведем в заключение очевидную, но полезную, формулу, выражающую косинус угла между векторами через их декартовы координаты:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Пример. Треугольник xyz задан декартовыми координатами вершин (сделайте рисунок!):

$$x = (2, 1, -1), \quad y = (3, 2, -1), \quad z = (3, 1, 0). \tag{6.2}$$

Требуется найти угол α при вершине x. Сначала находим векторы

$$y - x = (1, 1, 0) \quad \text{и} \quad z - x = (1, 0, 1).$$

Затем вычисляем их длины $|y-x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|z-x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, скалярное произведение $(y-x, z-x) = 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 = 1$ и, наконец, косинус угла при вершине x:

$$\cos\alpha = \frac{(y - x, z - x)}{|y - x||z - x|} = \frac{1}{2},$$

следовательно, $\alpha = \pi/3$.

7. *Векторное произведение векторов* естественным образом возникает в физике при введении понятия момента силы относительно данной точки.

Пусть в пространстве фиксирована некоторая базисная система векторов e^1, e^2, e^3. Введем понятие *ориентации базиса.* Будем говорить, что тройка базисных векторов e^1, e^2, e^3 имеет *правую ориентацию*, если с конца вектора e^3 кратчайший поворот от e^1 к e^2 совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка имеет *левую ориентацию* (см. рис. 10, a).

Векторным произведением вектора x на вектор y называется вектор z, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) $|z| = |x||y|\sin(x, y)$[1)],

2) вектор z ортогонален каждому из векторов x и y,

3) вектор z направлен так, что тройка векторов x, y, z имеет ту же ориентацию, что и фиксированный выше базис пространства (см. рис. 10, b).

[1)]Последний множитель — синус угла (минимального) между векторами x и y.

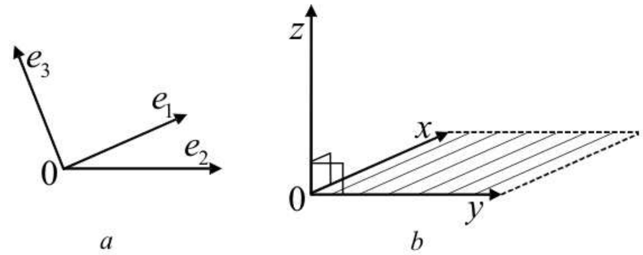


Рис. 10. К определению векторного произведения: левый базис (a), $z = [x, y]$ (b).

Векторное произведение векторов x, y будем обозначать через $[x, y]$.

Отметим, что $|[x, y]|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах x, y (см. рис. 10, b).

Ясно, что необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $[x, y] = -[y, x]$ для любых векторов x, y — *антисимметричность* (*кососимметричность*),

2) $[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$ для любых векторов x, y и любого вещественного числа α — *однородность* по первому аргументу,

3) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ для любых векторов x, y — *аддитивность* по первому аргументу.

Убедимся в справедливости свойств 1)–3). Проверка свойств 1), 2) аналогична проверке свойств 1), 2) скалярного произведения. При этом надо учесть, что если в тройке векторов поменять местами первые два вектора, то тройка меняет ориентацию на противоположную; если умножить первый вектор на отрицательное число, то тройка также меняет ориентацию на противоположную.

Для проверки третьего свойства заметим, что при $z = 0$ оно выполняется тривиальным образом. Если $z \neq 0$, то, поделив равенство 3) на $|z|$ и используя затем свойство 2), нетрудно убедиться, что достаточно доказать справедливость равенства

$$[x + y, e] = [x, e] + [y, e], \tag{7.1}$$

где e — произвольный вектор единичной длины. Построение векторного произведения $[x, e]$ можно описать следующим образом. Сначала вектор x проектируется на плоскость, ортогональную вектору e. Затем полученный вектор поворачивается в этой плоскости так, чтобы он стал ортогональным вектору x и при этом получилась тройка нужной ориентации (см. рис. 11, a). Заметим, что возможность такого описания построения векторного произведения обеспечивается

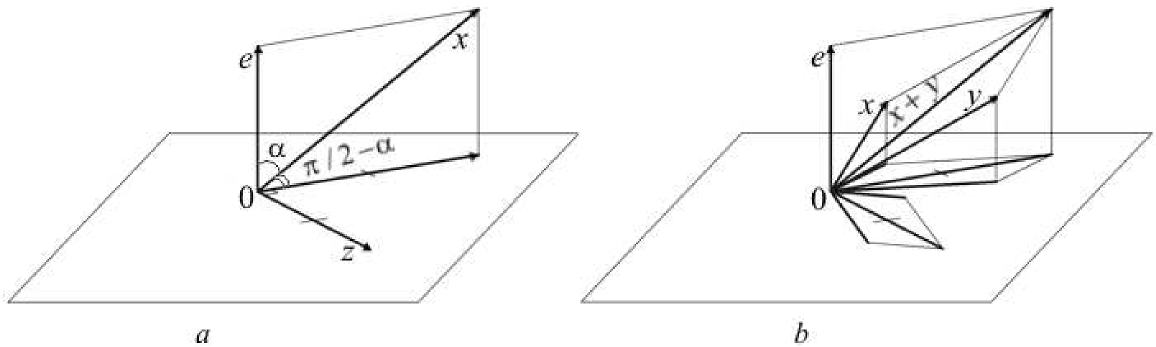


Рис. 11. К доказательству аддитивности векторного произведения. Произведение вектора x на вектор e единичной длины, $z = [x, e]$, $|z| = |x| \sin\alpha = |x| \cos(\pi/2 - \alpha)$ (a). К равенству $[x + y, e] = [x, e] + [y, e]$ (b).

хорошо известным равенством $\sin\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$. После выполнения указанных геометрических построений равенство (3.4) становится очевидным (см. рис. 11, b).

Получим теперь выражение для векторного произведения векторов $x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3$, $y = y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3$ через их координаты. Последовательно используя свойства 1)–3) и учитывая, что $[z, z] = 0$ для любого вектора z, можно написать

$$\begin{aligned}
[x, y] &= x_1[e^1, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3] + x_2[e^2, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3] + \\
&+ x_3[e^3, y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3] = -x_1[y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3, e^1] - \\
&- x_2[y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3, e^2] - x_3[y_1 e^1 + y_2 e^2 + y_3 e^3, e^3] = \\
&= (x_1 y_2 - x_2 y_1)[e^1, e^2] + (x_1 y_3 - x_3 y_1)[e^1, e^3] + \\
&+ (x_2 y_3 - x_3 y_2)[e^2, e^3]. \quad (7.2)
\end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить векторное произведение произвольных векторов, нужно уметь строить векторные произведения векторов базиса.

Проще всего вычисляются векторные произведения векторов декартова базиса. Непосредственно из определения вытекает (см. рис. 7, b), что

$$[i^1, i^2] = i^3, \quad [i^1, i^3] = -i^2, \quad [i^2, i^3] = i^1,$$

следовательно, в декартовых координатах

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2) i^1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) i^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i^3. \quad (7.3)$$

Для запоминания этого равенства полезна следующая запись:

$$[x, y] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (7.4)$$

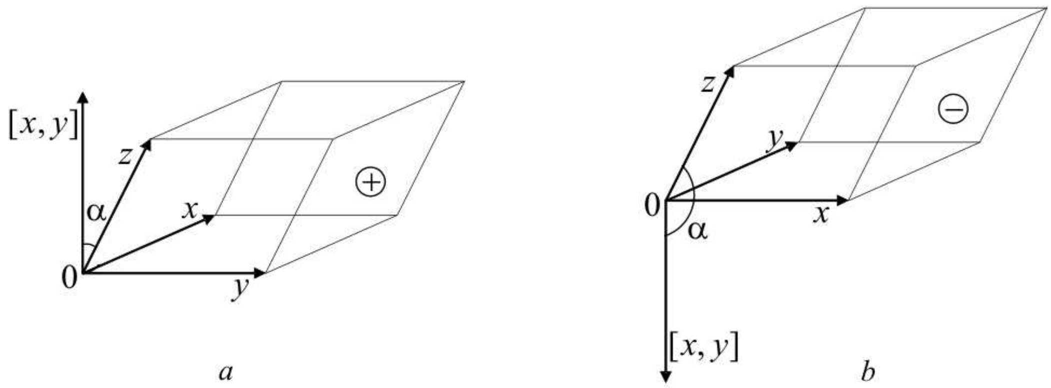


Рис. 12. Смешанное произведение векторов (x, y, z). Угол α между векторами $[x, y]$ и z острый (a), тупой (b).

Если (формально) разложить этот определитель по первой строке, получим (7.3).

Пример. Декартовы координаты векторов x, y, z заданы равенствами (6.2). Найдем векторное произведение векторов $y-x$, $z-x$ (сделайте рисунок!). По формуле (7.4)

$$[y-x, z-x] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i^1 - i^2 - i^3,$$

или $[y-x, z-x] = (1, -1, -1)$.

8. *Смешанным произведением векторов* x, y, z называется число $(x, y, z) = ([x, y], z)$. Поясним, что сначала строится вектор $[x, y]$, затем этот вектор скалярно умножается на вектор z.

Смешанное произведение векторов имеет отчетливый геометрический смысл. Если векторы $[x, y]$ и z образуют острый угол, это — объем параллелепипеда, построенного на векторах x, y, z. В противном случае — это объем параллелепипеда, построенного на векторах x, y, z, взятый со знаком минус (см. рис. 12).

Отсюда сразу вытекает, что при перестановке любых двух сомножителей в смешанном произведении абсолютная величина его не меняется, а знак меняется на противоположный, например,

$$(x, y, z) = -(y, x, z), \quad (x, y, z) = -(x, z, y).$$

Ясно, что необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Получим выражение для смешанного произведения векторов

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3, \; y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3, \; z = z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3$$

через их координаты. Используя формулу (7.2), можем написать

$$(x, y, z) = ((x_1y_2 - x_2y_1)[e^1, e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1, e^3] + \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2, e^3], z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3).$$

Раскроем здесь скобки, используя линейность и симметрию скалярного произведения, описанное выше правило изменения знака смешанного произведения, а также тот очевидный факт, что если два сомножителя в смешанном произведении совпадают, то оно равно нулю. Получим

$$(x, y, z) = \{(x_1y_2 - x_2y_1)z_3 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1)\}(e^1, e^2, e^3).$$

Выражение в фигурных скобках — разложение определителя третьего порядка по последней строке. Поэтому

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (e^1, e^2, e^3).$$

Поскольку $(e^1, e^2, e^3) \neq 0$ (векторы базиса некомпланарны), то отсюда сразу вытекает, что необходимое и достаточное условие компланарности векторов x, y, z есть равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

составленного из компонент векторов относительно любого базиса.

Если базис декартов, то, очевидно, $(e^1, e^2, e^3) = 1$, т. е. в декартовых координатах

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{8.1}$$

Вычислим, например, смешанное произведение векторов x, y, z, декартовы кооординаты которых заданы равенствами (6.2). Имеем (сделайте рисунок!)

$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Упражнение. Пусть векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны, Положим $Q = (e^1, e^2, e^3)$,

$$e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2].$$

Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 некомпланарны, причем $(e_k, e^l) = \delta_{kl}$.

Говорят, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют *взаимный базис*. Базис e^1, e^2, e^3 называют при этом *основным*. Равенство (7.2), фактически, дает правило вычисления компонент вектора $[x, y]$ при разложении его по взаимному базису, если известны компоненты векторов x, y при разложении их по основному базису.

Упражнение. Вычислить скалярное произведение (x, y), разлагая вектор x по основному базису, а y — по взаимному.

9. Примеры задач, решаемых методами векторной алгебры.

9.1. Расстояние между двумя точками. Даны точки

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

Найти расстояние между ними.

Искомое расстояние равно длине вектора $y - x$. Но, как мы знаем, $y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$, и по формуле (6.1) получаем

$$|y - x| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^{3} (x_k - y_k)(x_l - y_l)(e^k, e^l)}. \tag{9.1}$$

В декартовых координатах

$$|y - x| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

9.2. Уравнение сферы. Написать уравнение сферы радиуса R с центром в точке $x^0 = (x_1^0, x_3^0, x_3^0)$.

По определению сфера — это множество всех точек пространства, равноудаленных от данной. Следовательно, для любой точки x, лежащей на сфере, $|x - x^0| = R$, или

$$|x - x^0|^2 = R^2.$$

Это и есть уравнение сферы. Запишем его в координатной форме. Используя формулу (9.1), получаем

$$\sum_{k,l=1}^{3} (x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0)(e^k, e^l) = R^2.$$

В декартовых координатах

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = R^2.$$

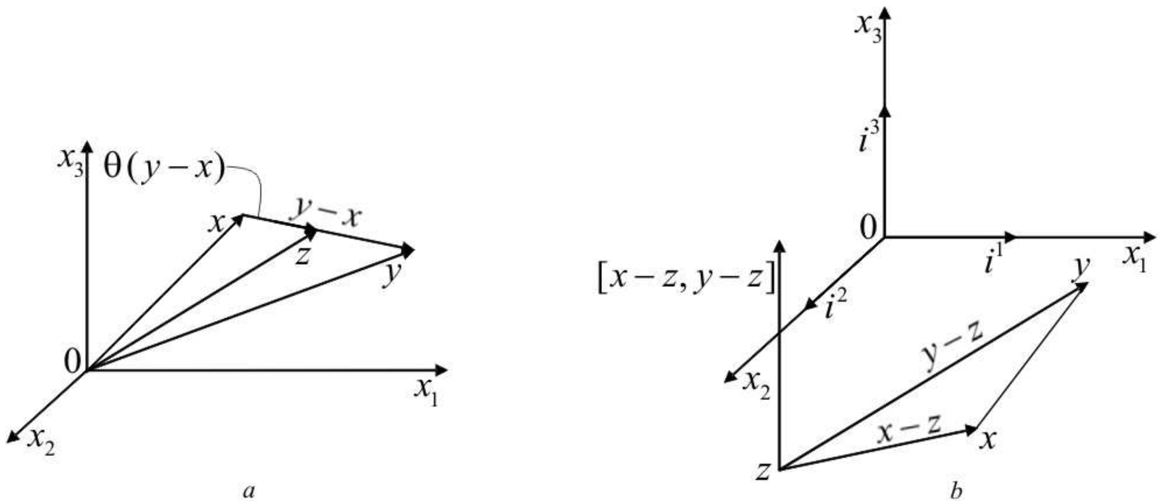


Рис. 13. К уравнению отрезка прямой, $z = x + \theta(y - x)$ (a). К вычислению площади треугольника xyz (b).

9.3. Уравнение отрезка прямой. Деление отрезка в данном отношении. Рассмотрим две точки $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Положим

$$z = x + \theta(y - x), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{9.2}$$

Нетрудно видеть, что при изменении θ от нуля до единицы, точка z пробегает отрезок прямой, соединяющий точки x и y (см. рис. 13, a). Говорят, что (9.2) — уравнение отрезка прямой (в пространстве).

Ясно, что $|z - x| = \theta|y - x|$, т. е. точка z (при данном θ) делит отрезок в отношении $\theta : (1 - \theta)$. В частности, при $\theta = 1/2$ отрезок делится пополам. Запишем уравнение (9.2) в координатной форме

$$z_i = x_i + \theta(y_i - x_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

При $\theta = 1/2$ получаем координаты середины отрезка

$$z_i = (x_i + y_i)/2, \quad i = 1, 2, 3.$$

9.4. Площадь треугольника. Рассмотрим плоскость, отнесенную к декартовой системе координат x_1, x_2 и на этой плоскости треугольник с вершинами $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ (см. рис. 13, b).

Поставим задачу, выразить площадь треугольника через координаты его вершин. Нам будет удобно трактовать плоскость x_1, x_2 как координатную плоскость $x_3 = 0$ трехмерной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3.

Построим векторы $x-z$, $y-z$ (см. рис. 13, b) и составим их векторное произведение. Получим вектор, направленный вдоль оси x_3. Длина этого вектора будет равна удвоенной площади треугольника xyz.

Координаты вектора $[x-z, y-z]$ определим по формуле (7.3). Понятно, что среди них только одна, третья, будет отлична от нуля. Она, очевидно, будет равна

$$\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, с точностью до знака $|[x - z, y - z]|$ совпадет с величиной этого определителя. Отсюда вытекает, что с точностью до знака площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}. \tag{9.3}$$

Часто используют и такую форму записи:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}. \tag{9.4}$$

Пример. Вычислить площадь треугольника (сделайте рисунок!) с вершинами в точках $x = (1, 1)$, $y = (2, 2)$, $z = (-1, 3)$. Используем формулу (9.4), а затем выполним очевидные элементарные преобразования определителя:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4/2 = 2.$$

Упражнение. Покажите, что определители (9.3), (9.4) совпадают.

§ 2. Прямые на плоскости

1. Приведем сначала различные формы уравнения прямой на плоскости. Плоскость отнесем к декартовой системе координат x_1, x_2. Как и ранее, точки $x = (x_1, x_2)$ будут отождествляться с векторами (см. рис. 14, a).

1.1. *Прямую l, проходящую через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ параллельно вектору $e = (e_1, e_2)$* зададим уравнением (см. рис. 14, b)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{1.1}$$

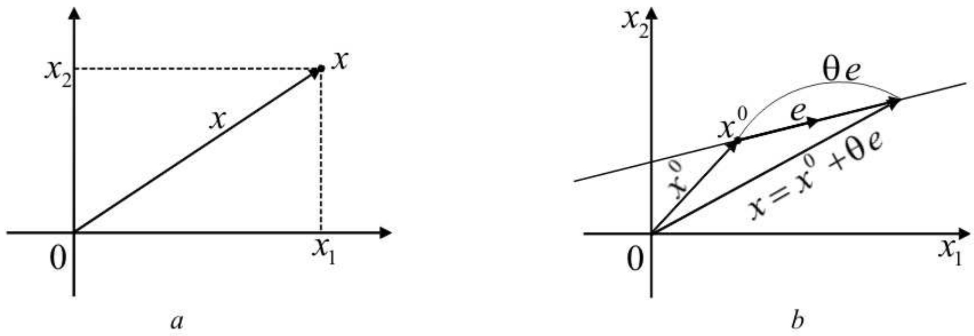


Рис. 14. Декартовы координаты точки $x = (x_1, x_2)$ и вектор x (a). К уравнению прямой, проходящей через точку x^0 параллельно вектору e (b).

1.2. В каком то смысле альтернативный способ описания: прямая — это множество всех векторов, ортогональных данному вектору p (прямая, проходящая через начало координат), сдвинутое параллельно p на расстояние d от начала координат (см. рис. 15), т. е. для точек прямой выполнено уравнение

$$(x, p) - d = 0, \tag{1.2}$$

где $p = (p_1, p_2)$ — заданный вектор единичной длины. Поясним, что d — проекция x на направление p, одна и та же для всех точек прямой. Знак d показывает, в какую сторону (по отношению к p) выполняется сдвиг (см. рис. 15). Уравнение (1.2) называют *нормальной формой уравнения прямой.* Нужно напомнить, что поскольку мы пользуемся декартовыми координатами, то $(x, p) = p_1x_1 + p_2x_2$.

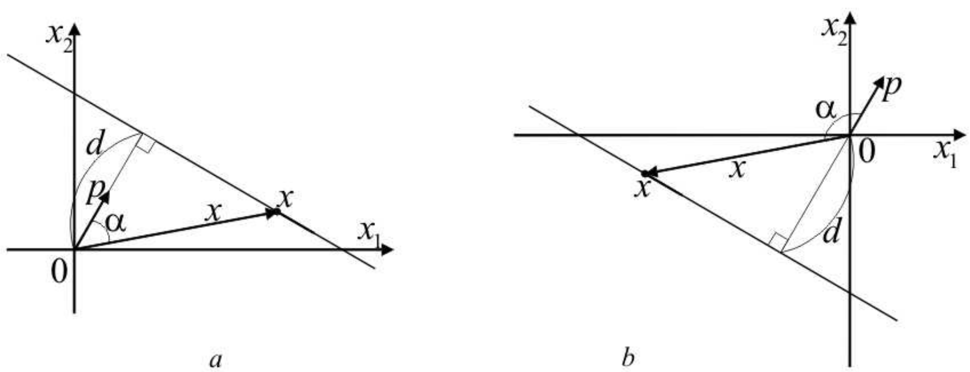


Рис. 15. К нормальному уравнению прямой: $d > 0$, угол α между векторами p и x острый (a); $d < 0$, угол α между векторами p и x тупой (b).

1.3. Записывая уравнения (1.1), (1.2) в координатах, получаем уравнения прямой в формах, знакомых из школьной математики:

$$(x_2 - x_2^0) = k(x_1 - x_1^0), \quad k = e_2/e_1, \tag{1.3}$$

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \tag{1.4}$$

$$x_2 = kx_1 + b. \tag{1.5}$$

Геометрический смысл участвующих в (1.3)–(1.5) коэффициентов также хорошо знаком читателю. Поясним только, что k — тангенс угла наклона прямой к оси x_1.

1.4. Из уравнения прямой в любой из форм (1.3)–(1.5) элементарными эквивалентными преобразованиями нетрудно получить уравнение в форме (1.1) или (1.2). Получим, например, нормальное уравнение прямой из уравнения в так называемой *общей форме* (1.4). Для этого поделим обе части уравнения (1.4) на $\sqrt{a^2+b^2}$ и положим

$$p_1 = a/\sqrt{a^2+b^2}, \quad p_2 = b/\sqrt{a^2+b^2}, \quad d = -c/\sqrt{a^2+b^2}.$$

Поскольку $p_1^2 + p_2^2 = 1$, то полученная форма записи уравнения прямой будет нормальной.

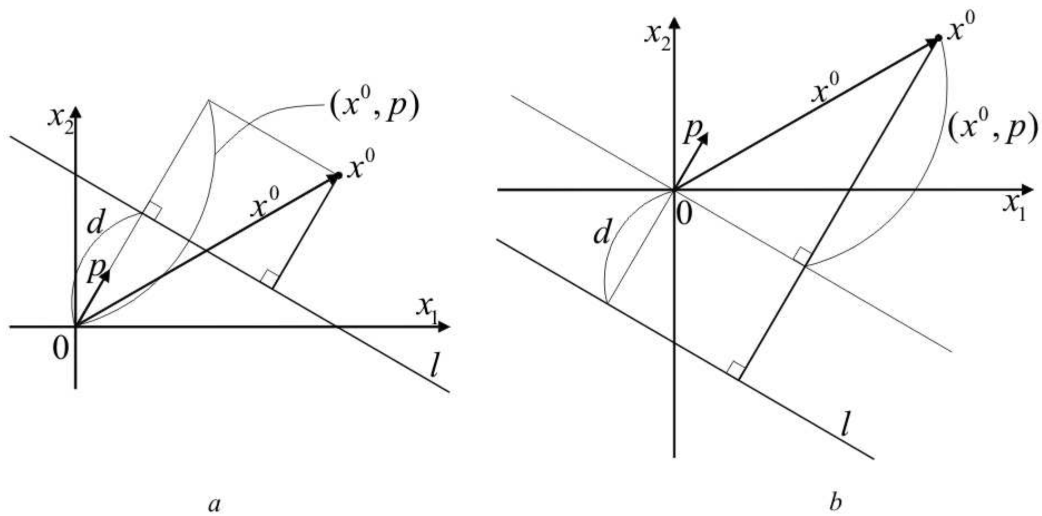


Рис. 16. К вычислению расстояния от точки до прямой: $d > 0$ (a), $d < 0$ (b).

2. Решим некоторые задачи, связанные с исследованием взаимного расположением прямых и точек на плоскости.

2.1. Определить *расстояние от точки* $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ *до прямой* l. Проще всего эта задача решается, когда прямая l задана нормальным уравнением (1.2). Действительно, поскольку $|p| = 1$, то (x^0, p) —

величина проекции вектора x^0 на прямую, параллельную p, следовательно, величина $\delta = (x^0, p) - d$ есть отклонение точки x^0 от прямой l (см. рис. 16). Причем знак δ показывает по какую сторону от прямой l расположена точка x^0. Расстояние от точки x^0 до прямой l равно $|(x^0, p) - d|$.

Пример. Найти расстояние от точки $x^0 = (1, -2)$ до прямой $3x_1 - 4x_2 - 26 = 0$ (сделайте рисунок!). Сначала приведем прямую к нормальному виду: $\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{26}{5} = 0$, т. е. $p = (3/5, -4/5)$, $d = 26/5$. Теперь вычислим $\delta = 3/5 + 8/5 - 26/5 = -3$. Расстояние точки от прямой равно трем.

2.2. Даны две прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Требуется исследовать *взаимное расположение* этих *прямых*, т. е. выяснить, пересекаются ли эти прямые и указать точку их пересечения.

Эта задача была нами полностью решена в § 3, с. 20. Действительно, фактически, поставленная задача эквивалентна исследованию условий разрешимости системы линейных уравнений (2.1). Здесь надо различать три случая.

1) Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Тогда система уравнений (2.1) имеет единственное решение x_1, x_2 при любых b_1, b_2. Точка $x = (x_1, x_2)$ — точка пересечения прямых.

2) Определитель Δ равен нулю, но определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

а следовательно, и определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

отличны от нуля. Тогда система (2.1) не имеет решений, т. е. прямые l_1, l_2 параллельны.

3) Все три определителя Δ, Δ_1, Δ_2 — нули. Это условие эквивалентно существованию числа $\alpha \neq 0$ такого, что

$$a_{21} = \alpha a_{11}, \quad a_{22} = \alpha a_{12}, \quad b_2 = \alpha b_1$$

Система (2.1) имеет бесконечное множество решений (фактически, уравнения системы совпадают). Прямые l_1, l_2 совпадают.

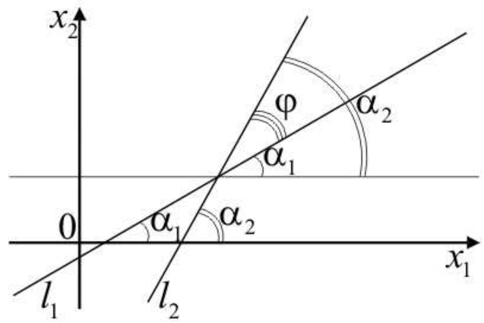


Рис. 17. Угол между прямыми.

2.3. Найти *угол между прямыми* $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис. 17). Так как $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, $\mathrm{tg}\alpha_1 = k_1$, $\mathrm{tg}\alpha_2 = k_2$, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2\,\mathrm{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Упражнения.

1) Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (1.1).

2) Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (1.2).

3) Используя выражение для тангенса угла между прямыми, покажите, что при $k_1 = k_2$ прямые параллельны, при $k_1k_2 = -1$ ортогональны.

§ 3. Плоскости и прямые в пространстве

1. Уравнение плоскости. Рассматривается трехмерное евклидово пространство. Пусть e^1 и e^2 — неколлинеарные векторы в трехмерном пространстве, а x^0 — произвольный вектор. Уравнение

$$x = x^0 + \alpha_1e^1 + \alpha_2e^2, \quad -\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty, \tag{1.1}$$

определяет *плоскость* π, *проходящую через точку* x_0. Говорят, что эта плоскость *натянута на векторы* e^1, e^2 (см. рис. 18).

Пусть p — единичный вектор. Уравнение

$$(x, p) - q = 0 \tag{1.2}$$

определяет множество векторов, концы которых, принадлежат плоскости, ортогональной вектору p и отстоящей от начала координат на расстояние q (см. рис. 18). Знак q определяет направление сдвига

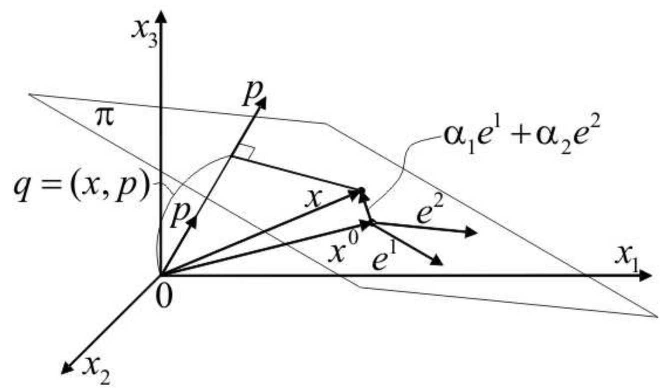


Рис. 18. К уравнению плоскости, проходящей через точку x^0, натянутой на векторы e^1 и e^2; а также к нормальному уравнению плоскости $(x, p) - q = 0$.

плоскости (по отношению к направлению вектора p). Уравнение (1.2) называют *нормальным уравнением плоскости*. Напомним, что нормальное уравнение прямой (1.2), с. 50, имеет аналогичный вид.

Запишем уравнение (1.1) в координатной форме (здесь и далее до конца главы используются только декартовы координаты)

$$x_1 - x_1^0 = \alpha_1 e_1^1 + \alpha_2 e_1^2, \tag{1.3}$$

$$x_2 - x_2^0 = \alpha_1 e_2^1 + \alpha_2 e_2^2, \tag{1.4}$$

$$x_3 - x_3^0 = \alpha_1 e_3^1 + \alpha_2 e_3^2. \tag{1.5}$$

Полагая, что $x \neq x^0$, рассмотрим определитель

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix}.$$

Равенства (1.3)–(1.5) означают, что если точка x принадлежит плоскости π, то столбцы этого определителя линейно зависимы, следовательно, он равен нулю. Наоборот, равенство нулю этого определителя означает, что его столбцы линейно зависимы и, поскольку векторы e^1, e^2 линейно независимы, то выполнены равенства (1.3)–(1.5).

Таким образом, уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.6}$$

есть *уравнение плоскости* (в координатной форме), *проходящей через точку x^0 и натянутой на векторы e^1, e^2*. Раскрывая определи-

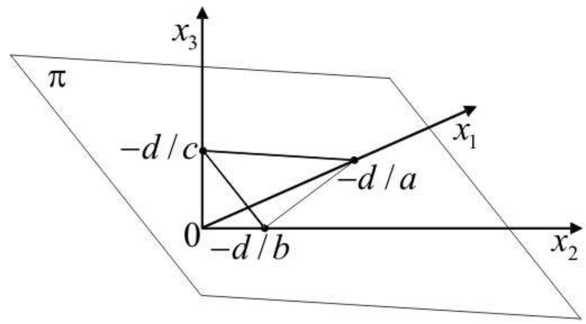


Рис. 19. Точки пересечения плоскости с осями координат.

тель $\Delta(x)$ (например, по первому столбцу) запишем уравнение плоскости π в виде

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0. \tag{1.7}$$

Здесь числа a, b, c, d очевидным образом выражаются через координаты векторов e^1, e^2, x^0. Уравнение вида (1.7) называют *общим уравнение плоскости.*

Аналогично уравнению прямой уравнения (1.1), (1.2), (1.7) можно эквивалентно преобразовывать из одной формы в другую.

Упражнения.

1) Преобразовать уравнение (1.7) к нормальному виду.
Ответ:

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c), \quad q = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.$$

2) Показать, анализируя общее уравнение плоскости, что:
если $a = 0$, $b = 0$, то плоскость параллельна координатной плоскости x_1, x_2;
если $a = 0$, то плоскость параллельна оси x_1;
если $d = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

3) Показать, что $\alpha = -d/a$, $\beta = -d/b$, $\gamma = -d/c$ — координаты точек пересечения плоскости с осями x_1, x_2, x_3 (см. рис. 19), проанализировать случаи, когда соответствующие знаменатели — нули.

4) Показать, что косинус угла φ между плоскостями, задаваемыми уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0,$$

можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}. \tag{1.8}$$

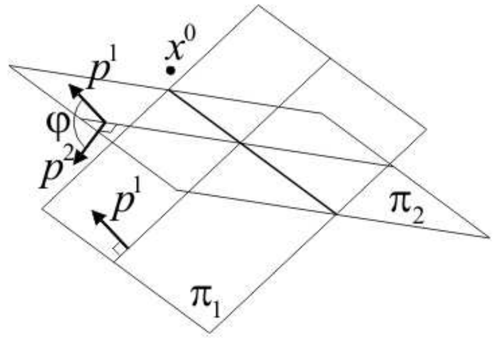


Рис. 20. Плоскости π_1, π_2.

5) Используя уравнение (1.6), написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Проанализировать случай, когда эти точки лежат на одной прямой.

6) Используя нормальное уравнение плоскости (1.2), найти отклонение данной точки x^0 от плоскости.

Пример. Даны плоскости π_1 и π_2, описываемые уравнениями

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0, \tag{1.9}$$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0, \tag{1.10}$$

и точка $x^0 = (1, 1, 8)$. Определить величину того угла между плоскостями π_1, π_2, которому принадлежит точка x^0.

Приведем уравнения (1.9), (1.10) к нормальному виду. Имеем

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3, \quad \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7,$$

следовательно, нормальный вид уравнения (1.9) есть

$$(p^1, x) - q_1 = 0, \tag{1.11}$$

где $p^1 = \dfrac{1}{3}(2, -1, 2)$, $q_1 = 1$, а для уравнения (1.10) получаем

$$(p^2, x) - q_2 = 0, \tag{1.12}$$

где $p^2 = \dfrac{1}{7}(6, 2, -3)$, $q_2 = -8/7$. Заметим далее, что

$$(p^1, x^0) - q_1 = \frac{1}{3}(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 - 3) = 14/3 > 0,$$

$$(p^2, x^0) - q_2 = \frac{1}{7}(6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 8 + 8) = -8/7 < 0.$$

Поэтому конец вектора p^1 и точка x^0 лежат по одну сторону от плоскости π_1, а конец вектора p^2 и точка x^0 лежат по разные стороны от плоскости π_2 и, следовательно, точка принадлежит углу φ (см. рис. 20). Угол φ равен углу между векторами p^1, p^2. Используя формулу (1.8), получим

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21}, \quad \varphi \approx 0.44\pi.$$

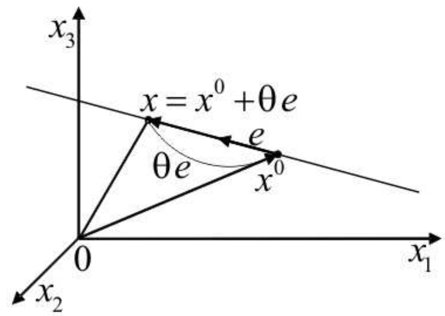


Рис. 21. Прямая в пространстве.

2. Прямая в пространстве. Уравнение

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty, \tag{2.1}$$

определяет *прямую, проходящую через точку* x^0 *параллельно вектору* $e = (e_1, e_2, e_3)$ (см. рис. 21).

Запишем уравнение (2.1) в координатах

$$x_1 - x_1^0 = \theta e_1, \tag{2.2}$$

$$x_2 - x_2^0 = \theta e_2, \tag{2.3}$$

$$x_3 - x_3^0 = \theta e_3. \tag{2.4}$$

Исключая из этих уравнений параметр θ, получим

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}. \tag{2.5}$$

Множество всех точек $x = (x_1, x_2, x_2)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям (2.5), образуют прямую, проходящую через точку x^0 параллельно вектору e. Уравнения (2.5) называют *каноническими уравнениями прямой.*

Упражнение. Интерпретируйте случай, когда какой-либо знаменатель в (2.5) обращается в нуль.

3. Задачи на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве.

3.1. Найти расстояние d от прямой l, заданной уравнением (2.1), до точки $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$.

Искомым расстоянием является длина перпендикуляра, опущенного из точки x^1 на прямую l (см. рис. 22, a). Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах e и $x^1 - x^0$. Площадь этого параллелограмма равна $|[e, x^1 - x^0]|$, следовательно, $d = |[e, x^1 - x^0]|/|e|$.

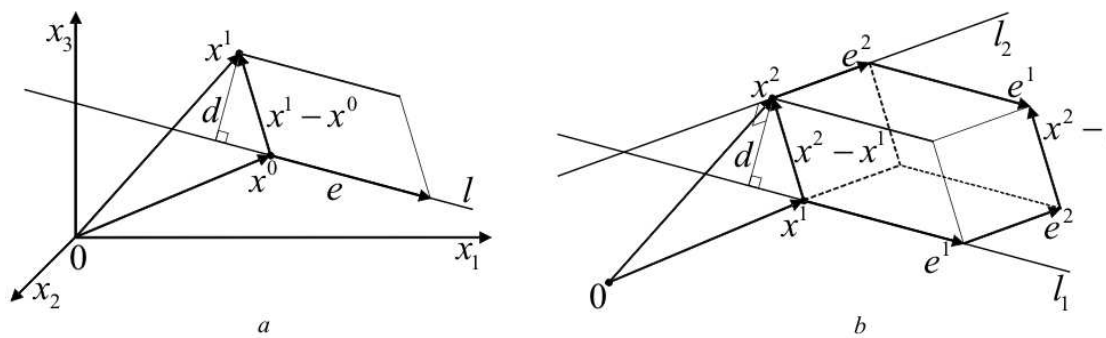


Рис. 22. К вычислению расстояния от точки до прямой (a) и между прямыми (b).

Для того, чтобы выразить входящие сюда величины через координаты точек x^0, x^1 и компоненты вектора e, нужно, в частности, воспользоваться формулой (7.3), с. 44, для компонент векторного произведения.

3.2. Найти расстояние d между прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad -\infty < \theta < \infty,$$
$$x = x^2 + \theta e^2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Искомое расстояние, очевидно, есть длина отрезка прямой. Этот отрезок ортогонален l_1 и l_2, концы его лежат на l_1 и l_2 (см. рис. 22, b). Построим параллелепипед на векторах e^1, e^2 и $x^2 - x^1$. Понятно, что d — высота этого параллелепипеда и, следовательно, d есть отношение его объема к площади основания.

Таким образом, $d = |(e^1, e^2, x^2 - x^1)|/|[e^1, e^2]|$. Осталось выразить все входящие в эту формулу величины через координаты точек x^1, x^2 и компоненты векторов e^1, e^2 (см. (7.3), с. 44, и (8.1), с. 46).

3.3. Найти угол φ между прямой l, заданной уравнением (2.1), с. 57, и плоскостью π, заданной нормальным уравнением (1.2), с. 53.

Угол φ является дополнительным к углу ψ между направляющим вектором прямой e и нормальным вектором плоскости p, следовательно,

$$\sin\varphi = \cos\psi = \cos(e, p) = \frac{(e, p)}{|e||p|} = \frac{e_1 p_1 + e_2 p_2 + e_3 p_3}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}.$$

3.4. Определить общие точки прямой l, заданной уравнением (2.1), с. 57, и плоскости π, заданной уравнением (1.7), с. 55.

Подставим значения x_1, x_2, x_3 из (2.2)–(2.4), с. 57, в уравнение (1.7), с. 55. После элементарных преобразований получим

$$a x_1^0 + b x_2^0 + c x_3^0 + d + \theta(a e_1 + b e_2 + c e_3) = 0. \tag{3.1}$$

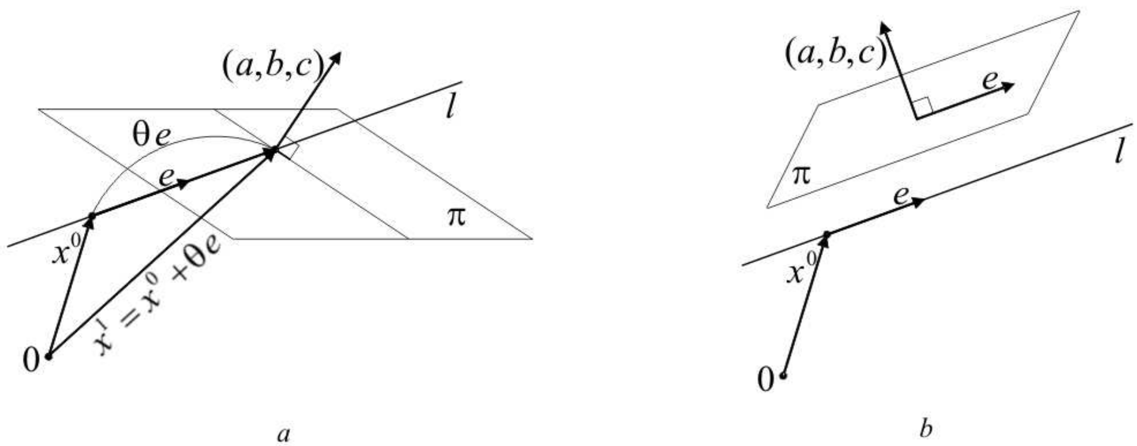


Рис. 23. К определению точки пересечения прямой и плоскости (a). Прямая l, параллельная плоскости π (b).

Возможны следующие случаи.

1) $ae_1 + be_2 + ce_3 \neq 0$. Это означает, что прямая l не параллельна плоскости π (почему?). Из уравнения (3.1) находим

$$\theta = \theta_1 = -\frac{ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d}{ae_1 + be_2 + ce_3}.$$

Точка $x^1 = x^0 + \theta_1 e$ — точка пересечения прямой и плоскости (см. рис. 23, a).

2) $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, но $ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d \neq 0$. Уравнение (3.1) не имеет решений. Прямая l проходит через точку x^0, не принадлежащую плоскости π, параллельно плоскости π (см. рис. 23, b).

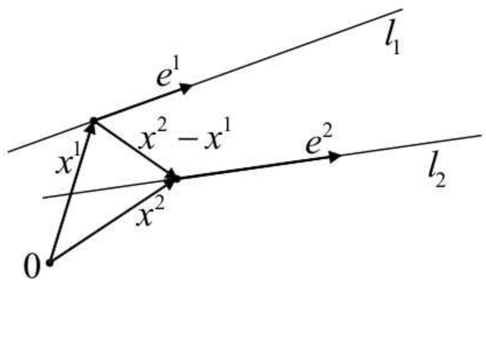
3) $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, $ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d = 0$. Любое $\theta \in (-\infty, \infty)$ — решение уравнения (3.1). Прямая l лежит в плоскости π.

3.5. Выяснить условия, при которых две прямые l_1 и l_2, задаваемые уравнениями

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad \theta \in (-\infty, \infty),$$
$$x = x^2 + \theta e^2, \quad \theta \in (-\infty, \infty),$$

лежат в одной плоскости.

Если прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, то векторы $x^2 - x^1$, e^1, e^2 лежат в одной плоскости (см. рис. 24, a), иначе говоря, компланарны. Обратно, если векторы $x^2 - x^1$, e^1, e^2 компланарны, то прямые l_1, l_2 лежат в одной плоскости. Используя результаты п. 8, с. 45, непосредственно получаем, что для принадлежности прямых l_1, l_2 одной и той же плоскости необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение $(x^2 - x^1, e^1, e^2)$ равнялось нулю.



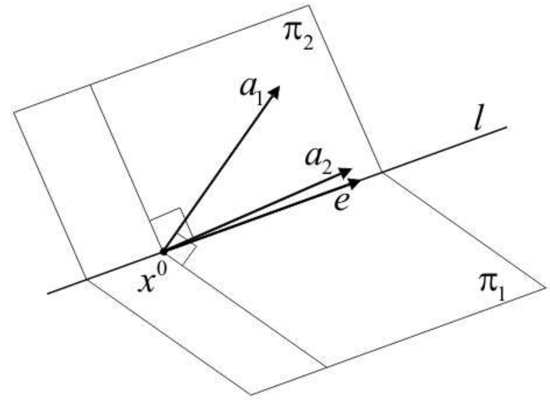


Рис. 24. К компланарности прямых l_1 и l_2 (a). К построению уравнения прямой, по которой пересекаются две плоскости (b).

3.6. Написать уравнение прямой l, являющейся пересечением двух различных и не параллельных плоскостей π_1, π_2, задаваемых уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0. \tag{3.2}$$

Найдем сначала какую-либо точку, принадлежащую обеим плоскостям (см. рис. 24, b). Иными словами, найдем какое-то решение x_1, x_2, x_3 системы уравнений (3.2). По условию плоскости не параллельны, следовательно, векторы

$$a^1 = (a_1, b_1, c_1) \quad \text{и} \quad a^2 = (a_2, b_2, c_2),$$

нормальные к ним, не коллинеарны. Значит не выполняется хотя бы одно из равенств

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Примем для определенности, что $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Положим $x_3 = 0$, тогда из (3.2) получаем

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= -d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 &= -d_2. \end{aligned}$$

Решая эту систему, приходим к выводу, что точка

$$x^0 = \left(\frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ 0\right)$$

принадлежит прямой l, по которой пересекаются плоскости π_1, π_2.

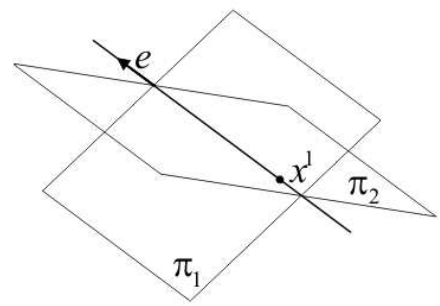


Рис. 25. К выводу уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости π_1, π_2.

Найдем теперь направляющий вектор e этой прямой. Вектор e ортогонален каждому из векторов a^1 и a^2, следовательно, можно взять вектор e, равным их векторному произведению:

$$e = [a^1, a^2] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Таким образом, найдены точка x^0, принадлежащая прямой l и вектор e, параллельный этой прямой, следовательно, уравнение прямой l можно записать, например, в виде (2.1), с. 57.

Пример. Найдем уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости π_1, π_2, определяемые уравнениями (1.9), (1.10), с. 56 (см. рис. 25).

Положим $x_3 = 0$ в уравнениях (1.9), (1.10), получим систему уравнения для отыскания первых двух координат точки, принадлежащей пересечению плоскостей π_1, π_2:

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 + 8 = 0.$$

Решение этой системы: $x_1 = -1/5$, $x_2 = -17/5$, т. е. точка $x^1 = (-1/5, -17/5, 0)$ принадлежит пересечению плоскостей (1.9), (1.10). Вектор e, параллельный искомой прямой, определим по формуле

$$e = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -i^1 + 18i^2 + 10i^3, \tag{3.4}$$

или $e = (-1, 18, 10)$. По формуле (2.1), с. 57 множество точек искомой прямой описывается уравнением $x = (-1/5, -17/5, 0) + \theta(-1, 18, 10)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$. Более подробно,

$$x_1 = -1/5 - \theta, \quad x_2 = -17/5 + 18\theta, \quad x_3 = 10\theta, \quad \theta \in (-\infty, \infty).$$

Глава 3

Системы линейных уравнений, матрицы, определители

§ 1. Перестановки

1. Рассмотрим множество n целых чисел: $M_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Эти числа можно располагать в различном порядке. Каждое такое расположение называют *перестановкой*. Например, возможны перестановки:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \tag{1.1}$$

$$2, 1, 3, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Вообще, перестановку будем записывать в виде

$$n_1, n_2, \ldots, n_n \tag{1.3}$$

Каждая перестановка определяет взваимнооднозначное отображение множества M_n на себя. При этом отображении числу 1 соответствует число n_1, числу 2 соотвествуе n_2 и т. д.

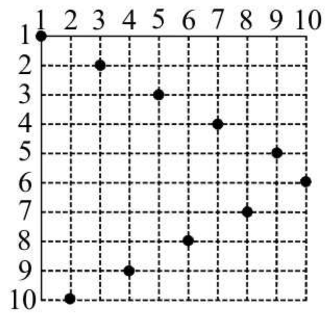
Можно построить график такого отображения. Он будет представлять собой n точек, расположенных в узлах целочисленной решетки. Причем на каждой вертикальной линии этой решетки лежит ровно одна точка графика, и на каждой горизонтальной линии этой решетки лежит ровно одна точка графика (см. рис. 1, a). Понятно, что перестановка однозначно определяется ее графиком и наоборот задание графика однозначно определяет перестановку (запишите перестановку, изображенную на рис. 1, a!).

Количество всех перестановок множества M_n принято обозначать символом P_n. Покажем, что

$$P_n = 123 \cdots n. \tag{1.4}$$

Здесь записано произведение всех первых n членов натурального ряда. Принято обозначение $123 \cdots n = n!$ (читается *n-факториал*).

Для $n = 1$ и $n = 2$ формула (1.4), очевидно, справедлива. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что равенство $P_{n-1} = (n-1)!$ верно. Возьмем теперь некоторую перестановку множества M_{n-1} и добавим к ней элемент n. Его можно



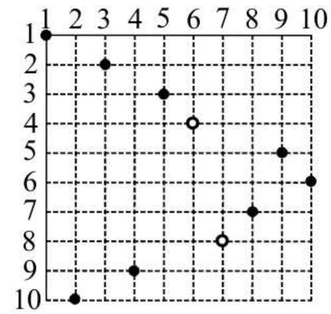


Рис. 1. Пример перестановки из десяти элементов (a). Перестановка b получена из перестановки a транспозицией (4,8).

поставить первым, вторым, и, наконец, последним, т. е. n-ым. Понятно, что таким образом можно создать n перестановок по каждой перестановке множества M_{n-1}, и, поскольку по индуктивному предположению $P_{n-1} = (n-1)!$, то формула (1.4) доказана.

2. Будем говорить, что элементы n_i, n_j, $i < j$, перестановки (1.3) образуют *инверсию*, если $n_i > n_j$. Например, в перестановке (1.1) нет инверсий, а в перестановке (1.2) только одна инверсия, ее образуют элементы n_1, n_2. Полезно отметить, что если соединить отрезком на графике перестановки точки (i, n_i) и (j, n_j), то он будет иметь отрицательный наклон для точек, образующих инверсию.

Количество всех инверсий данной перестановки будем обозначать через

$$\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)$$

и называть *сигнатурой* перестановки.

Перестановка называется *четной*, если ее сингнатура — четное число (нуль, как обычно, полагаем четным числом). В противном случае перестановка называется *нечетной*.

Таким образом, все перестановки разбиваются на два непустых класса: четные перестановки и нечетные перестановки. Например, перестановка (1.1) четная, а перестановка (1.2) нечетная.

Говорят, что в перестановке выполнена *транспозиция*, если поменяли местами два ее элемента. Чтобы определить транспозицию данной перестановки, нужно задать номера двух, переставляемых элементов. Например, можно сказать, что перестановка (1.2) получена из перестановки (1.1) транспозицией (1,2). Еще один пример транспозиции показан на рисунке 1.

2.1. Теорема. *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда выполняется транспозиция соседних элементов перестановки. Обозначим их n_i и n_{i+1}. Очевидно, что пары, содержащие один из элементов n_i или n_{i+1}, в совокупности не приобретут и не потеряют инверсии при такой транспозиции (она сможет лишь перейти от одной пары такого сорта к другой). Инверсия для пар, не содержащих ни n_i ни n_{i+1}, измениться вообще не сможет. Пара n_i, n_{i+1} обязательно либо приобретет, либо потеряет инверсию. Это означает что сигнатура перестановки при транспозиции соседних элементов изменится ровно на единицу.

Пусть теперь выполняется транспозиция двух произвольных элементов. Для простоты записей можно считать, что меняются местами элементы n_1 и n_k, $k > 2$. Эту транспозицию можно, очевидно, реализовать путем последовательных транспозиций соседних элементов. Сначала переместим первый элемент на $k+1$ место, меняя его местами последовательно со вторым, с третьим и т. д. элементами. Это можно сделать за $k-1$ шагов. Затем переместим k-й элемент на первое место, переставляя его с $k-1$, $k-2$ и т. д., со вторым элементом. Это потребует $k-2$ шагов. Итак, выполнив $2k-3 = 2(k-1)-1$ (нечетное количество) транспозиций соседних элементов мы поменяем местами элементы n_1 и n_k.

Таким образом, сигнатура перестановки при любой транспозиции (i,k) меняется на нечетное число и потому четность перестановки меняется. □

2.2. Теорема. *При любом n количества четных и нечетных перестановок совпадают.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы вытекает, что всякую четную перестановку можно превратить в нечетную, поменяв местами каких-либо два ее элемента. Справедливо и обратное. Это означает, что между множеством всех четных перестановок и множеством всех нечетных перестановок (множества M_n) можно установить взаимнооднозначное соответствие. Эти два множества конечны, поэтому имеют равные количества элементов. □

§ 2. Определители

1. *Квадратной матрицей* порядка n называется таблица, состоящая из n строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Здесь a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$, — числа, вообще говоря, комплексные.

Определитель матрицы порядка n может быть введен по аналогии с определителями второго и третьего порядка в ходе решения системы линейных уравнений с n неизвестными. Однако, нам будет удобно опираться непосредственно на обобщение формулы (3.3), с. 25.

Определителем матрицы A назовем величину

$$|A| = \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}. \tag{1.2}$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\Delta = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Поясним, что определителем матрицы порядка n является сумма $n!$ слагаемых, составленная следующим образом: слагаемыми служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, причем слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка $n_1, n_2, \dots, n_n$ четная, и со знаком минус — в противоположном случае.

Вследствие теоремы 2.2, с. 64, количество слагаемых в (1.2) со знаком плюс равно количеству слагаемых со знаком минус.

Отметим также, что элементы матрицы, участвующие в слагаемом определителя, соответствующем перестановке $n_1, n_2, \dots, n_n$, изображаются точками графика этой перестановки (см. рис. 1, с. 63).

Говорят, что элементы $a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{nn_n}$ составляют *диагональ* матрицы. Диагональ называется *четной*, если перестановка $n_1, \dots, n_n$ четная и — *нечетной* в противном случае.

Упражнение. Докажите равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Поясним, что слева — определитель порядка n, а справа — порядка $n-1$.

2. Переходим к изучению основных свойств определителей. Все они являются обобщением свойств определителей третьего порядка и их доказательства зачастую не требуют дополнительных сколько-нибудь сложных рассуждений. В этих случаях мы ограничиваемся только формулировками соответствующих утверждений.

1) Если одна из строк (или один из столбцов) определителя состоит только из нулей, то этот определитель равен нулю. Доказательство сразу же следует из того, что каждая диагональ матрицы A содержит в этом случае нулевой элемент.

2) Определитель линеен по каждой строке (по каждому столбцу).

3) Если в определителе две строки (или два столбца) совпадают, то он равен нулю. Пусть совпадают строки с номерами k и l, $k < l$. Множество всех диагоналей матрицы A можно представить в виде объединения множества пар

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{kn_k}, \dots, a_{ln_l}, \dots, a_{nn_n},$$

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{kn_l}, \dots, a_{ln_k}, \dots, a_{nn_n}.$$

Диагонали каждой такой пары имеют противоположные четности, так как соответствующие им перестановки получены одна из другой при помощи транспозиции (n_k, n_l). Произведения же элементов этих диагоналей совпадают, так как по предположению

$$a_{kn_k} = a_{ln_k}, \quad a_{kn_l} = a_{ln_l}.$$

Это означает, что слагаемые в (1.2), отвечающие каждой такой паре, в сумме дают нуль, следовательно, $|A| = 0$. Доказательство равенства нулю определителя, у которого два столбца совпадают, проводится аналогично.

4) При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

5) Определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. То же самое справедливо и для столбцов определителя.

6) Введенные ранее понятия алгебраических дополнений и миноров дословно переносятся на случай определителей произвольного порядка. Без каких либо изменений проходит и доказательство формулы, аналогичной формуле (3.20), с. 33. При этом нужно использовать равенство (1.4). Таким образом, для любого определителя |A|

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \qquad (2.1)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Справедлива и формула разложения определителя по столбцу:

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \qquad (2.2)$$

Пример. Вычислим определитель пятого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Сначала добьемся того, чтобы все элементы третьего столбца, кроме последнего, были нулями. Для этого умножим последнюю строку на три и прибавим ко второй, а затем умножим последнюю строку на четыре вычтем из четвертой строки. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по третьему столбцу, получим

$$\Delta = (-1)^{3+5}(-1) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем теперь определитель так, чтобы все элементы первого столбца, кроме второго, были нулями. С этой целью умножим вторую строку на два и прибавим к первой, затем умножим вторую строку на три и вычтем из третьей и, наконец, умножим вторую строку на два и вычтем из последней, получим:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, будем иметь

$$\Delta = -(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель третьего порядка, разложив его по третьей строке:

$$\Delta = 36 \begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix} - (-33) \begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix} + (-24) \begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix} =$$
$$= 36(-72) - (-33)(-104) + (-24)(-208) = -1032.$$

7) Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к A. Поясним, что матрицы A и A^T состоят из одних и тех же элементов. Первая строка матрицы A^T составлена из элементов первого столбца матрицы A, вторая строка — из элементов второго столбца матрицы A и т. д.

Определители матриц A и A^T совпадают.

Докажем это утверждение индукцией по порядку определителя. Для определителя второго порядка равенство $|A| = |A^T|$ выполняется очевидным образом. Предположим справедливость этого равенства для произвольного определителя порядка $n-1$ и покажем, что тогда оно верно и для произвольного определителя порядка n. Представим $|A|$ в виде разложения по первой строке:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}. \qquad (2.4)$$

Определитель $|A^T|$ разложим по первому столбцу:

$$|A^T| = a_{11}M_{11}^T - a_{12}M_{21}^T + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{n1}^T. \qquad (2.5)$$

Здесь M_{ij}^T — минор определителя $|A^T|$, соответствующий элементу этого определителя, находящегося в позиции i, j. По предположению индукции имеем, что $M_{ij}^T = M_{ji}$, следовательно, $|A^T| = |A|$.

8) Будем говорить, что строки матрицы A *линейно зависимы*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все одновременно равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_n a_{nj} = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Для того, чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее строки были линейно зависимы.

То, что из линейной зависимости строк вытекает равенство нулю определителя, доказывается точно так же, как и для определителя третьего порядка.

Докажем обратное утверждение. Пусть $|A|=0$. Рассмотрим все определители порядка $n-1$, которые получаются вычеркиванием одной строки и одного столбца из матрицы A.

Если все они окажутся равными нулю, перейдем к определителям порядка $n-2$ и т. д. В конце концов, либо все элементы матрицы A окажутся равными нулю, и тогда доказываемое утверждение будет выполнено тривиальным образом, либо найдется определитель порядка $k \geqslant 1$, отличный от нуля и полученный вычеркиванием $n-k$ строк и столбцов матрицы A, а все определители большего порядка будут нулями. Поскольку при перестановке строк и при перестановке столбцов меняется лишь знак определителя, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что этот определитель (обозначим его через d_k) составлен из элементов первых k строк и первых k столбцов матрицы A.

Рассмотрим определитель d_{k+1}, составленный из первых $k+1$ строк и первых $k+1$ столбцов матрицы A. По предположению он равен нулю. Разложив этот определитель по элементам последнего столбца, получим, что

$$\alpha_1 a_{1k+1} + \alpha_2 a_{2k+1} + \dots + \alpha_k a_{kk+1} + d_k a_{k+1k+1} = 0. \qquad (2.6)$$

Подчеркнем, что $d_k \neq 0$, а числа $\alpha_1, \ \dots, \ \alpha_k$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов последнего столбца определителя d_{k+1}. Важно отметить, что они зависят только от элементов первых k столбцов определителя d_{k+1}.

Переставляя столбцы определителя $|A|$, мы можем составить последний столбец определителя d_{k+1} из элементов

$$a_{1j}, \ a_{2j}, \ \dots, \ a_{kj}, \ a_{k+1j}, \quad j = k+2, \ k+3, \ \dots, \ n.$$

По предположению этот определитель равен нулю. Выполняя разложение по его последнему столбцу, получим, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = k+2, \ k+3, \ \dots, \ n. \qquad (2.7)$$

Наконец, поместив на место $k+1$ столбца определителя $|A|$ его же столбец с номером $j \leqslant k$, мы получим, нулевой определитель (как определитель с равными столбцами). По той же причине и определитель d_{k+1} будет равен нулю. Вновь выполняя разложение по последнему столбцу этого определителя, получим, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{2.8}$$

Теперь можно написать:

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} + 0 \cdot a_{k+2j} + \dots + 0 \cdot a_{nj} = 0,$$

где $j = 1, 2, \dots, n$; $d_k \neq 0$, т. е. строки матрицы A линейно зависимы.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, то, очевидно, для того, чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее столбцы были линейно зависимы.

3. Приведем примеры вычисления определителей, часто возникающих в различных разделах алгебры.

3.1. Определитель треугольной матрицы. Матрицу A называют *верхней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Матрицу A называют *нижней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Если матрица A треугольная, то

$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \tag{3.1}$$

Докажем это утверждение применительно к верхней треугольной матрице. Справедливость формулы (3.1) для нижней треугольной матрицы A сразу вытекает из того, что $|A| = |A^T|$ и A^T — верхняя треугольная матрица.

Для матриц первого и второго порядков формула (3.1), очевидно, справедлива. Для доказательства этой формулы при произвольном n используем метод математической индукции, т. е. предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка она уже доказана, и рассмотрим определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель $|A|$ по первому столбцу, получим:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

К определителю, стоящему в правой части, применимо предположение индукции, т. е. он равен произведению $a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$, поэтому

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

3.2. *Определитель Вандермонда*[1]. Так называют определитель вида

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что при любом $n \geqslant 2$ определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leqslant j < i \leqslant n$:

$$d = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

Доказываемая формула очевидно справедлива при $n = 2$. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка формула уже доказана, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

Рассмотрим определитель d. Умножим предпоследнюю строку на a_1 и вычтем из последней. Затем вычтем из $(n-1)$-й строки строку с номером $(n-2)$, умноженную на a_1, и так далее. Наконец, умножим первую строку на a_1 и вычтем из второй. В результате такой последовательности преобразований получим

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 & \dots & a_n^2 - a_1a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

[1] Александр Теофил Вандермонд (Alexandre-Theophile Vandermonde; 1735–1796) — французский музыкант и математик.

Разлагая определитель d по первому столбцу, получим определитель $(n-1)$-го порядка:

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что общим множителем всех элементов первого столбца является $a_2 - a_1$, общим множителем всех элементов второго столбца является $a_3 - a_1$ и т. д. Поэтому

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

где последний множитель — определитель Вандермонда $(n-1)$-го порядка. Следовательно,

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

§ 3. Крамеровские системы линейных уравнений

1. В этом параграфе будем рассматривать системы линейных уравнений, у которых количество неизвестных равно числу уравнений:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \tag{1.1}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

составленная из коэффициентов уравнений, называется *матрицей системы* (1.1). Будем предполагать, что $|A| \neq 0$. В этом случае систему уравнений (1.1) называют *крамеровской*. Набор чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ называют *столбцом правой части* (или просто *правой частью*) системы (1.1). Если правая часть системы нулевая, т. е. $b_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то система называется *однородной.* Однородная система уравнений всегда имеет решение. Например, можно положить $x_1, x_2, \ldots, x_n = 0$. Такое решение называют *тривиальным.*

1.1. Теорема. *Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторого набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, среди которых по крайней мере одно не равно нулю, справедливы равенства

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array} \tag{1.3}$$

Это показывает, что столбцы матрицы A линейно зависимы, т. е. ее определитель равен нулю, но по условию теоремы определитель $|A|$ не равен нулю. Значит предположение о наличии нетривиального решения у однородной крамеровской системы неверно. $\square$

1.2. Теорема. *При любой правой части крамеровская система не может иметь двух различных решений.*

Доказательство. Предположим противное и пусть

$$x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1$$

и

$$x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$$

представляют собой два различных решения системы (1.1), т. е.

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 = b_1, \\ a_{21}x_1^1 + a_{22}x_2^1 + \ldots + a_{2n}x_n^1 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \ldots + a_{nn}x_n^1 = b_n. \end{array} \tag{1.4}$$

и

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 = b_1, \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_n^2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = b_n. \end{array} \tag{1.5}$$

Положим

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \ \ldots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

и вычтем почленно одноименные уравнения систем (1.4), (1.5). В результате получим, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — решение однородной системы (1.3). Но тогда по теореме 1.1 имеем, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, т. е. предположение о наличии двух различных решений системы (1.1) неверно. $\square$

1.3. Теорема. *Крамеровская система уравнений при любой правой части имеет решение.*

Доказательство. Фактически, мы сконструируем решение системы (1.1), опираясь на формулу (2.1), с. 67. Будем разыскивать решение системы (1.1) в виде

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \cdots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.6}$$

где коэффициенты c_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, подлежат определению. Подставляя выражения (1.6) в уравнения системы (1.1) и собирая в левых частях этих уравнений коэффициенты при одинаковых b_i, получим

$$\begin{aligned} b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \cdots + a_{in}c_{n1}) +& \\ + b_2(a_{i1}c_{12} + a_{i2}c_{22} + \cdots + a_{in}c_{n2}) + \cdots& \\ \cdots + b_i(a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \cdots + a_{in}c_{ni}) + \cdots& \\ \cdots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \cdots + a_{in}c_{nn}) = b_i& \end{aligned} \tag{1.7}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$. Понятно, что если выбрать коэффициенты c_{ik} так, чтобы выполнялись условия

$$a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots + a_{in}c_{nk} = \delta_{ik}, \tag{1.8}$$

где $i, k = 1, 2, \ldots, n$, δ_{ik} — символ Кронекера, то формулы (1.6) будут давать решение системы (1.1). Сравнивая соотношения (1.8) с формулами (2.1), с. 67, нетрудно заметить, что если положить

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.9}$$

то условия (1.8) будут выполнены. Подставляя найденные выражения для c_{ik} в (1.6), получим следующие формулы для решения системы (1.1):

$$x_i = (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n)/|A|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.10}$$

Используя разложение определителя по столбцу, соотношения (1.10) можно переписать в более компактном виде:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Здесь $\Delta = |A|$, Δ_i — определитель, который получается заменой i-го столбца определителя Δ правой частью системы (1.1). □

Формулы (1.11) называют *формулами Крамера.*

Пример. Решим при помощи формул Крамера систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Подсчитаем соответствующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

По формулам Крамера

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1, \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = -1, \quad x_3 = \Delta_3/\Delta = -2, \quad x_4 = \Delta_4/\Delta = 1.$$

Замечание. В вычислительной практике формулы Крамера используются очень редко. Чаще для решения систем линейных алгебраических уравнений применяются различные варианты метода исключения неизвестных (метода Гаусса, см. с. 90).

2. В качестве примера применения теории крамеровских систем построим так называемую интерполяционную формулу Лагранжа.

2.1. Теорема. *Пусть* $z_0, z_1, \ldots, z_n$ *— попарно различные числа,* $h_0, h_1, \cdots, h_n$ *— произвольные числа. Тогда существует и притом только один полином* $P_n(z)$ *такой, что*

$$P_n(z_j) = h_j,\ j = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Доказательство. Условия (2.1) представляют собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов полинома P_n. Определитель этой системы — определитель Вандермонда (см. с. 71). Он, очевидно, не равен нулю, поэтому система уравнений (2.1) имеет единственное решение при любой правой части. □

2.2. Теперь ясно, что, если полином степени n всюду (на самом деле, по крайней мере в $n + 1$ различных точках) равен нулю, то все его коэффициенты — нули.

2.3. Нетрудно построить в явном виде полином, удовлетворяющий условиям (2.1), а именно, решение задачи дает *интерполяционная формула Лагранжа*[1)]

$$P_n(z) = P_n(z_0)\Phi_0(z) + P_n(z_1)\Phi_1(z) + \cdots + P_n(z_n)\Phi_n(z), \tag{2.2}$$

где Φ_j — полином степени n, удовлетворяющий условиям

$$\Phi_j(z_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, j - 1, j + 1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

$$\Phi_j(z_j) = 1, \tag{2.4}$$

для $j = 0, 1, 2 \ldots, n$.

Как показано, в п. 5, с. 17, полином своими корнями определяется с точностью до постоянного множителя, т. е.

$$\Phi_j(z) = A_j(z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_{j-1})(z - z_{j+1})\cdots(z - z_n).$$

Используя (2.4), найдем значение постоянной:

$$A_j = \frac{1}{(z_j - z_0)(z_j - z_1)\cdots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\cdots(z_j - z_n)},$$

т. е.

$$\Phi_j(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_{j-1})(z - z_{j+1})\cdots(z - z_n)}{(z_j - z_0)(z_j - z_1)\cdots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\cdots(z_j - z_n)},$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

[1)] Жозеф Луи Лагранж (фр. Joseph Louis Lagrange, итал. Giuseppe Lodovico Lagrangia; 1736–1813) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

§ 4. Алгебра матриц

1. Выше было введено понятие квадратной матрицы. *Прямоугольной матрицей* A размера $m \times n$ называется таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Элементами таблицы служат числа a_{ij} (вообще говоря, комплексные). Иногда будем явно указывать размеры матрицы A и обозначать ее через $A(m, n)$.

Отметим некоторые частные случаи. При $m = n$ получаем *квадратную матрицу*. Ее размер (говорят также *порядок*) будем обозначать одной буквой n.

Если $m = 1$, а n произвольно, получаем *матрицу-строку* (или, просто, *строку*)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{1.2}$$

Говорят, что эта строка имеет *длину* n.

Если $n = 1$, а m произвольно, получаем *матрицу-столбец* (или, просто, *столбец*)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Говорят, что этот столбец имеет *длину* m. Подчеркнем, что при записи строк и столбцов второй индекс, обычно, не пишут. Столбцы или строки часто будем называть *векторами*.

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы нули. Нулевая матрица обозначается символом 0.

2. Опишем некоторые специальные виды квадратных матриц.

2.1. Говорят, что элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* квадратной матрицы A. Квадратная матрица D называется *диагональной*, если $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$, или, подробнее,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Для диагональной матрицы будем использовать также обозначение

$$D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}).$$

Диагональная матрица называется *единичной*, если $d_{ii} = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Единичную матрицу будем обозначать буквой I:

$$I = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right). \tag{2.2}$$

2.2. Матрица P_{ik} называется *матрицей перестановки*, если она получена из единичной матрицы перестановкой строк с номерами i, k. Например, матрицами перестановок третьего порядка являются матрицы

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Напомним, что квадратная матрица L называется *нижней треугольной*, если все ее элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю:

$$L = \left(\begin{array}{cccc} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{array} \right), \tag{2.3}$$

квадратная матрица U называется *верхней треугольной*, если все ее элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю:

$$U = \left(\begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{array} \right). \tag{2.4}$$

2.4. Квадратная матрица

$$L_k = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \tag{2.5}$$

называется *элементарной нижней треугольной*. Поясним, что эта матрица отличается от единичной матрицы лишь элементами k-го столбца.

3. Умножение матрицы на число, сложение матриц. *Произведением матрицы A и числа α* называется матрица

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(все элементы матрицы A умножаются на число α).

Суммой двух матриц A, B одинаковых размеров называется матрица C того же размера с элементами $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$. Пишут $C = A+B$.

Упражнение. Убедиться, что введенные операции обладают следующим свойствами:

1) $A + 0 = A$,
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3) $A + B = B + A$,
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Отметим, что сумма двух нижних (верхних) треугольных матриц — нижняя (верхняя) треугольная матрица.

4. Умножение строки на столбец. По определению *произведение строки x и столбца y* одинаковой длины n есть число:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{4.1}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10.$$

5. Умножение матрицы на вектор. *Произведением матрицы A* размера $m \times n$ *и вектора x* длины n называется вектор y длины m с элементами

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Символически это записывают так:

$$y = Ax.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Поясним, что умножение матрицы на вектор выполняется следующим образом: столбец x последовательно накладывается на строки матрицы A, соответствующие элементы попарно перемножаются а затем полученные m величин суммируются. В результате получаются элементы вектора y.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из определения вытекает, что для любых чисел α, β и для любых векторов x, y (подходящей длины) справедливо равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay. \tag{5.1}$$

Говорят поэтому, что операция умножения матрицы на вектор *линейна*.

6. Умножение строки на матрицу. *Произведением строки* x длины m *и матрицы* A размера $m \times n$ называется строка y длины n с элементами

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Символически это записывают так:

$$y = xA.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\big(y_1, y_2, \dots, y_n\big) = \big(x_1, x_2, \dots, x_m\big) \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right).$$

Поясним, что умножение строки на матрицу выполняется следующим образом: столбцы матрицы A последовательно накладывается на строку x, соответствующие элементы попарно перемножаются а затем полученные n величин суммируются. В результате получаются элементы строки y.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из определения вытекает, что для любых чисел α, β и для любых строк x, y (подходящей длины) справедливо равенство

$$(\alpha x + \beta y)A = \alpha xA + \beta yA. \tag{6.1}$$

Говорят поэтому, что операция умножения строки на матрицу *линейна*.

7. С использованием введенных операций система n линейных уравнений с n неизвестными (1.1), с. 72, может быть записано так:

$$Ax = b, \tag{7.1}$$

где A — заданная квадратная матрица, b — заданный вектор, x — искомый вектор, или в виде

$$xA = b, \tag{7.2}$$

где b — заданная строка, x — искомая строка. В дальнейшем мы чаще будем пользоваться формой записи (7.1).

8. Умножение прямоугольных матриц. Пусть A — матрица размера $m \times n$, B — матрица размера $n \times p$. Матрица C размера $m \times p$ называется *произведением матриц* A, B, если ее элементы определяются по правилу

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qj}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, p. \tag{8.1}$$

Пишут $C = AB$, или, более подробно,

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Полезно пояснить, что элементы каждого столбца матрицы C вычисляются как результат умножения матрицы A на соответствующий столбец матрицы B. Точно так же элементы каждой строки матрицы C получаются как результат умножения соответствующей строки матрицы A на матрицу B. Отметим также, что элемент c_{ij} есть результат умножения i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц зависит от порядка сомножителей. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B называют *перестановочными*, если $AB = BA$. Перестановочные матрицы существуют. Например,

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для любой квадратной матрицы A

$$AI = IA = A.$$

Отметим следующие свойства операции умножения матриц:

1) $(A + B)C = AC + BC$,
2) $C(A + B) = CA + CB$,
3) $A(BC) = (AB)C$.

Понятно, что размеры участвующих здесь матриц должны быть согласованы так, чтобы все операции имели смысл.

Элементарно проверяется, что 1), 2) следуют из (6.1), (5.1) соответственно. Для доказательства свойства 3) заметим, что элементы матрицы $D = A(BC)$ есть числа вида $d_{ij} = a_i(Bc_j)$, где a_i — i-ая строка матрицы A, c_j — j-й столбец матрицы C. Элементы матрицы $F = (AB)C$ — это числа $f_{ij} = (a_i B)c_j$. Поэтому достаточно доказать, что $x(By) = (xB)y$ для любой строки x и любого столбца y. Понятно, что их длины должны быть согласованы с размерами матрицы B. Будем полагать, что матрица B имеет m строк и n столбцов. Элементарные вычисления дают

$$x(By) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i y_j,$$

аналогично,

$$(xB)y = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j.$$

Получившиеся суммы отличаются лишь порядком следования слагаемых и потому совпадают.

Упражнения.

1) Показать, что вектор $P_{ik}x$ получается из вектора x перстановкой элементов с номерами i, k.

2) Как следствие показать, что матрица $P_{ik}A$ получается из матрицы A перестановкой строк с номерами i, k.

3) Показать, что если L, M — нижние треугольные матрицы, то матрица LM — нижняя треугольная. Показать, что аналогичное верно и для верхних треугольных матриц.

4) Показать, что нижняя треугольная матрица L равна произведению элементарных нижних треугольных матриц L_k (см. (2.5)), т. е. $L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n$.

Указание. Проведите вычисления в соответствии со следующей расстановкой скобок: $L = L_1(L_2 \cdots (L_{n-2}(L_{n-1}L_n) \ldots)$, т. е. сначала перемножьте $L_{n-1}L_n$, результат умножьте слева на L_{n-2} и т. д.

5) Показать, что для любой квадратной матрицы A

$$\det(P_{ik}A) = \det P_{ik} \det A = -\det A.$$

6) Показать, что для любой квадратной матрицы A и элементарной нижней треугольной матрицы L_k:

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A. \tag{8.3}$$

Решение. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — вектор. Элементарные вычисления дают

$$L_k a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ l_{k,k} a_k \\ l_{k+1,k} a_k + a_{k+1} \\ l_{k+2,k} a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k} a_k + a_n \end{pmatrix}.$$

Такой вид будут иметь столбцы матрицы $L_k A$. Полученное равенство показывает, что определитель $\det(L_k A)$ можно преобразовать следующим образом: из k-ой строки вынести общий множитель l_{kk}, затем умножить эту строку на l_{jk} и вычесть из j-ой строки последовательно для всех $j = k+1, k+2, \ldots, n$. В результате получим равенство (8.3).

7) Опираясь на предыдущие упражнения и правило вычисления определителя треугольной матрицы (см. с. 70), показать, что для любой квадратной матрицы A и любой нижней треугольной матрицы L

$$\det(LA) = \det L \, \det A. \tag{8.4}$$

Показать, что если R — верхняя треугольная матрица, то

$$\det(RA) = \det R \, \det A. \tag{8.5}$$

9. *Транспонирование матриц.* Определенная на с. 68 операция транспонирования квадратных матриц естественным образом распространяется на прямоугольные матрицы.

Понятно, что при транспонировании размеры матрицы меняются местами. В частности, матрица-строка становится матрицей-столбцом.

Отметим основные свойства операции транспонирования.

1) Для любой матрицы A справедливо равенство $(A^T)^T = A$.

2) Для любых чисел α, β и любых матриц A, B одинаковых размеров

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$$

(поэтому говорят, что операция транспонирования *линейна*).

3) Если операция умножения матриц AB имеет смысл, то: а) операция умножения $B^T A^T$ также имеет смысл; б) $(AB)^T = B^T A^T$.

Все сформулированные здесь утверждения, кроме утверждения 3, б), непосредственно вытекают из определений и их проверка предлагается читателю.

Докажем утверждение 3, б). Элемент с номерами i, j матрицы $(AB)^T$ это — результат умножения j-й строки матрицы A на i-й столбец матрицы B. Элемент с номерами i, j матрицы $B^T A^T$ это — результат умножения i-й строки матрицы B^T и j-го столбца матрицы A^T. Элементы i-й строки матрицы B^T совпадают с элементами i-го столбца матрицы B, а элементы j-го столбца матрицы A^T совпадают с элементам j-ой строки матрицы A. Последнее замечание завершает доказательство утверждения 3, б).

10. Обратная матрица. В этом пункте мы будем широко использовать результаты теории крамеровских систем (см. § 3, с. 72).

10.1. Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю. В противном случае матрица A называется *невырожденной*.

10.2. Если A, B — невырожденные матрицы, матрица $C = AB$ также невырождена. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что однородная система линейных уравнений

$$ABx = 0 \tag{10.1}$$

имеет только тривиальное решение. Последнее верно, так как, поскольку матрица A невырождена, то $Bx = 0$, а поскольку B невырождена, то $x = 0$.

10.3. Если одна из матриц A, B вырождена, то матрица $C = AB$ также вырождена. Действительно, в этом случае достаточно установить, что система (10.1) имеет нетривиальное решение. Пусть матрица B вырождена. Тогда существует вектор $x \neq 0$ такой, что $Bx = 0$, значит $ABx = 0$.

Пусть теперь A вырождена, а B невырождена. Существует вектор $y \neq 0$ такой, что $Ay = 0$. Так как B невырождена, существует единственный вектор x такой, что $Bx = y$, причем x не равен нулю, так как $y \neq 0$. Вновь, получаем, что $ABx = 0$ при $x \neq 0$.

10.4. Матрица X называется *правой обратной* к квадратной матрице A, если

$$AX = I. \tag{10.2}$$

Матрица Y называется *левой обратной* к квадратной матрице A, если

$$YA = I. \tag{10.3}$$

Вырожденная матрица не имеет правой обратной матрицы. Действительно, если правая обратная матрица X существует, то

$$\det(AX) = \det(I) = 1.$$

С другой стороны $\det(AX) = 0$, так как A вырождена. Точно так же доказывается невозможность существования левой обратной у вырожденной матрицы.

10.5. Если $\det(A) \neq 0$, то правая обратная матрица существует и определяется единственным образом. Действительно, обозначим через x^k столбцы матрицы X, а через i^k столбцы матрицы I. Уравнение (10.2) распадается на совокупность систем уравнений

$$Ax^k = i^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{10.4}$$

Поскольку матрица A невырождена, каждая из этих систем имеет единственное решение. Точно так же доказывается существование и единственность левой обратной матрицы.

10.6. На самом деле, правая и левая обратные матрицы совпадают. Действительно, если $YA = I$, то $YAX = X$, но $AX = I$, т. е. $Y = X$.

10.7. В соответствии с вышесказанным матрицу X будем называть *обратной матрицей* к матрице A, если $AX = XA = I$. Обратную матрицу к матрице A обозначают через A^{-1}.

10.8. Укажем явный вид матрицы A^{-1}. Введем в рассмотрение так называемую *присоединенную* к матрице A *матрицу*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Формулы (2.1), с. 67, можно записать в матричном виде

$$A\tilde{A} = |A|I. \tag{10.5}$$

Отсюда вытекает, что если $|A| \neq 0$, то

$$A^{-1} = |A|^{-1}\tilde{A} \tag{10.6}$$

есть матрица, обратная матрице A.

Пример. Построим матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим сначала определитель матрицы A, разлагая его по первой строке:

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь подсчитаем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, & A_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\
A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

По формуле (10.6)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

10.9. Отметим некоторые свойства обратной матрицы.

1) Матрица A^{-1} невырождена, $(A^{-1})^{-1} = A$. Это утверждение — очевидное следствие равенства $AA^{-1} = I$.

2) Если матрицы A, B невырождены, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Действительно, $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$.

3) Если матрица A невырождена, то матрица A^T невырождена и

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Невырожденность матрицы A^T — следствие равенства $|A^T| = |A|$. Используя свойство 3 б), с. 84, можем написать

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$

т. е. матрица $(A^{-1})^T$ обратна к A^T.

Упражнения.

1) Пусть матрицы A_1, $A_2, \ldots, A_p$ невырождены. Показать, что

$$(A_1A_2\cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1}A_{p-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

2) Пусть P_{ik} — матрица перестановки. Показать, что $P_{ik}^{-1} = P_{ik}$.

3) Пусть L_k есть элементарная нижняя треугольная матрица и $l_{kk} \neq 0$. Показать, что

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1/l_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -l_{k+1,k}/l_{k,k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -l_{n,k}/l_{k,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Пусть L — нижняя треугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали отличны от нуля. Показать, что матрица L^{-1} существует и является нижней треугольной матрицей. Показать, что аналогичное верно и для верхней треугольной матрицы.

11. Опишем еще некоторые классы матриц, часто возникающих в различных задачах линейной алгебры. В настоящем пункте мы приведем и некоторые простейшие свойства этих матриц. Более подробное исследование различных классов квадратных матриц будет проведено в гл. 5.

11.1. Пусть A — прямоугольная матрица. Матрица $A^* = (\bar{A})^T$ называется *сопряженной* по отношению к матрице A. Поясним, что элементы матрицы $\bar{A}$ комплексно сопряжены по отношению к элементам матрицы A. Нетрудно видеть, что

$$(A^*)^* = A, \quad (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \quad (A+B)^* = A^* + B^*.$$

11.2. Квадратная матрица A называется *эрмитовой*[1)] (*самосопряженной*), если $A = A^*$.

Определитель эрмитовой матрицы — вещественное число. В самом деле, поскольку $\det(A^*) = \det((\overline{A})^T) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$, то для эрмитовой матрицы $\det(A) = \overline{\det(A)}$.

11.3. Любая квадратная матрица A представима в виде

$$A = H_1 + iH_2, \tag{11.1}$$

здесь H_1, H_2 — эрмитовы матрицы, i — мнимая единица. Матрицы H_1, H_2 однозначно определяются матрицей A. Возможность представления (11.1) вытекает из очевидного тождества

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$$

[1)] Шарль Эрмит (Charles Hermite; 1822–1901) — французский математик.

и легко проверяемых соотношений

$$(A + A^*)^* = A + A^*, \quad \left(\frac{1}{i}(A - A^*)\right)^* = \frac{1}{i}(A - A^*).$$

Если предположить, что наряду с (11.1) возможно представление

$$A = \widetilde{H}_1 + i\widetilde{H}_2$$

с эрмитовыми матрицами $\widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$, то

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) + i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0.$$

Переходя к сопряженным матрицам, получим

$$(H_1 - \widetilde{H}_1) - i(H_2 - \widetilde{H}_2) = 0.$$

Складывая почленно два этих равенства, будем иметь, что $H_1 = \widetilde{H}_1$, но тогда и $H_2 = \widetilde{H}_2$, т. е. представление (11.1) однозначно.

11.4. Матрицы, у которых все элементы вещественны, называют *вещественными* матрицами.

Вещественная эрмитова матрица A называется *симметричной*. Для такой матрицы $A = A^T$.

Вещественная матрица A называется *кососимметричной*, если $A = -A^T$.

11.5. Для любой квадратной вещественной матрицы справедливо представление

$$A = A_1 + A_2, \tag{11.2}$$

где A_1 симметричная, A_2 кососимметричная матрицы. Такое представление единственно,

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

11.6. Матрица A называется *унитарной*, если $AA^* = I$, $A^*A = I$, иными словами, если $A^{-1} = A^*$. Из этого определения сразу следует, что определитель унитарной матрицы по модулю равен единице. Нетрудно видеть, что произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

Важным примером унитарной матрицы является диагональная матрица, диагональ которой состоит из чисел q_1, q_2, $\ldots$, q_n, равных единице по модулю, n — порядок матрицы. Проверка унитарности этой матрицы элементарна и поручается читателю.

11.7. Вещественная унитарная матрица называется *ортогональной* матрицей. Определитель ортогональной матрицы может быть равен только плюс единице или минус единице. Примеры ортогональных матриц: матрица перестановки P_{kl}, матрица второго порядка

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — любое вещественное число.

§ 5. Метод Гаусса

1. В основе метода Гаусса, как, впрочем, и многих других методов решения систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

лежит следующее утверждение.

Пусть матрица B невырождена. Тогда система уравнений

$$BAx = Bb \tag{1.2}$$

эквивалентна системе (1.1), т. е. решение системы (1.2) — решение системы (1.1) и, наоборот, решение системы (1.1) — решение системы (1.2).

Действительно, пусть x — решение системы (1.2). Тогда

$$B(Ax - b) = 0,$$

но матрица B невырождена, следовательно, $Ax - b = 0$. Обратное утверждение очевидно.

Матрица B выбирается так, чтобы матрица BA была проще матрицы A и решение системы (1.2) находилось легче, чем решение системы (1.1).

В методе Гаусса матрица B конструируется при помощи элементарных нижних треугольных матриц так, чтобы матрица BA была верхней треугольной. Тогда решение системы (1.2) становится тривиальной задачей.

2. Переходим к описанию *метода Гаусса* решения крамеровских систем. Выберем среди элементов первого столбца матрицы A максимальный по модулю. Пусть — это элемент a_{i1}. Он не может оказаться равным нулю, так как тогда все элементы первого столбца матрицы A — нули и, значит, $|A| = 0$, но система по предположению крамеровская, т. е. определитель матрицы A не нуль.

Умножим обе части уравнения на матрицу перестановки P_{i1}. В дальнейшем будем обозначать эту матрицу через P_1 (заметим, что она равна единичной, если максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы A есть a_{11}). Получим

$$A_1 x = b^1, \tag{2.1}$$

где $A_1 = P_1 A$, $b^1 = P_1 b$. Поясним, что матрица A_1 получается из матрицы A перестановкой первой и i-й строк, столбец b^1 получается из столбца b перестановкой первого и i-го элементов. Элементы матрицы A_1 обозначим через $a_{kl}^{(1)}$, элементы столбца b^1 — через b_k^1. По построению $a_{11}^{(1)} \neq 0$.

Умножим обе части уравнения (2.1) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,1} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ l_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $l_{11} = 1/a_{11}^{(1)}$, $l_{21} = -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}, \ \dots, \ l_{n1} = -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$. Получим

$$A_2 x = b^2, \tag{2.3}$$

где $A_2 = L_1 A_1$, $b^2 = L_1 b^1$. Вычисляя произведение $L_1 A_1$, найдем, что

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Умножение L_1 на A_1 равносильно следующему преобразованию матрицы A_1: все элементы первой строки матрицы A_1 делятся на $a_{11}^{(1)}$, затем для всех $i = 2, \dots, n$ первая стока умножается на $a_{i1}^{(1)}$ и вычитается из i-й строки матрицы A_1. Аналогично, элементы столбца b^2 вычисляются по формулам $b_1^2 = b_1^1/a_{11}^{(1)}$, $b_i^2 = b_i^1 - b_1^2 a_{i1}^{(1)}$, где $i = 2, \dots, n$.

Важно подчеркнуть, что все элементы первого столбца матрицы A_2, кроме первого, оказываются при этом равными нулю.

Выберем среди элементов $a_{22}^{(2)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{n2}^{(2)}$ максимальный по модулю. Пусть этот элемент есть $a_{i2}^{(2)}$. Он не может равняться нулю. Действительно, если он равен нулю, то все числа $a_{22}^{(2)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{n2}^{(2)}$ — нули и тогда, вычисляя $\det(A_2)$ разложением по первому столбцу, получим, что $\det(A_2) = 0$. С другой стороны, используя то, что L_1 — элементарная нижняя треугольная матрица, а P_1 — либо единичная матрица, либо матрица перестановки, можем написать, что

$$\det(A_2) = l_{11}\det(P_1A) = \det(P_1A)/a_{11}^{(1)} = \pm\det(A)/a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

Умножим обе части уравнения (2.3) на матрицу $P_2 = P_{2i}$, т. е. поменяем местами вторую и i-ю строки матрицы A_2. Получим

$$\tilde{A}_2x = P_2L_1P_1b, \tag{2.5}$$

где

$$\tilde{A}_2 = P_2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(2)} & \tilde{a}_{23}^{(2)} & \ldots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \tilde{a}_{n2}^{(2)} & \tilde{a}_{n3}^{(2)} & \ldots & \tilde{a}_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части уравнения (2.5) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & l_{2,2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & l_{n-1,2} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & l_{n,2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $l_{22} = 1/\tilde{a}_{22}^{(2)}$, $l_{32} = -\tilde{a}_{32}^{(2)}/\tilde{a}_{22}^{(2)}, \ldots, l_{n2} = -\tilde{a}_{n2}^{(2)}/\tilde{a}_{22}^{(2)}$. Получим

$$A_3x = L_2P_2L_1P_1b,$$

где $A_3 = L_2\tilde{A}_2 = L_2P_2L_1P_1A$. Нетрудно убедиться, что

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \ldots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \ldots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Важно подчеркнуть, что все элементы второго столбца матрицы A_3, кроме первых двух, — нули.

Продолжая этот процесс, в конце концов получим систему уравнений

$$Ux = f \tag{2.6}$$

(очевидно, эквивалентную исходной), где

$$U = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A, \tag{2.7}$$

$$f = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 b,$$

причем

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \ldots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{3n-1}^{(4)} & a_{3n}^{(4)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

есть верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

Решение системы (2.6) не вызывает затруднений. Из последнего уравнения этой системы находим $x_n = f_n$, из предпоследнего

$$x_{n-1} = f_{n-1} - a_{n-1,n}^{(n)} x_n \tag{2.9}$$

и так далее, наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = f_1 - a_{1,2}^{(2)} x_2 - a_{1,3}^{(2)} x_3 - \ \ldots \ - a_{1,n}^{(2)} x_n. \tag{2.10}$$

Таким образом, реализация метода Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе, называемым *прямым ходом метода Гаусса*, исходная система преобразуется к системе с треугольной матрицей. На втором этапе, называемым *обратным ходом метода Гаусса*, решается система с треугольной матрицей.

Замечание. Выбор максимального по модулю элемента столбца при выполнении прямого хода метода Гаусса минимизирует влияние ошибок округления в расчетах на компьютере. Если не заботиться об ошибках округления, то на очередном шаге прямого хода метода Гаусса можно выбирать любой ненулевой элемент столбца.

3. Вычисление определителя методом Гаусса. Из (2.7), используя формулы из упражнений на с. 87, получаем

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U, \tag{3.1}$$

откуда, используя формулы из упражнений на с. 83, будем иметь

$$\det A = \det(P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U) = \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} = \\ = \pm \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1}. \tag{3.2}$$

При этом мы учли, что $\det U = 1$. Нетрудно убедиться (см. упражнение 3 на с. 87), что

$$\det L_i^{-1} = \tilde{a}_{ii}^{(i)},$$

следовательно,

$$\det A = \pm a_{11}^{(1)} \tilde{a}_{22}^{(2)} \cdots \tilde{a}_{nn}^{(n)}. \tag{3.3}$$

Знак здесь определяется количеством перестановок строк, выполненных в ходе реализации прямого хода метода Гаусса. Если оно четно, выбирается знак плюс. В противном случае — минус. Таким образом, определитель матрицы может быть вычислен в ходе реализации метода Гаусса.

Пример. Решим методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + 15x_3 &= 60, \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ 9x_3 &= 34, \\ 9x_1 + 6x_2 - \ \ 3x_3 &= 12. \end{aligned}$$

Выпишем матрицу системы уравнений и столбец правой части

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 3 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 34 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Максимальный элемент первого столбца матрицы A есть $a_{31} = 9$. В соответствии с описанным выше алгоритмом матрица A_1 и столбец b^1 равны соответственно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 60 \end{pmatrix}$$

(поменяли местами первую и третью строки матрицы A, первый и последний элементы столбца b). Делим первую строку матрицы A_1 на 9, умножаем ее на 3 и вычитаем из второй и третьей срок; делим первый элемент столбца b^1 на 9, затем умножаем его на 3 и вычитаем из второго и третьего элементов столбца b^1. В результате получаем

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 30 \\ 56 \end{pmatrix}.$$

Максимальным из чисел $a_{22}^{(2)}$, $a_{32}^{(2)}$ является $a_{32}^{(2)}$, поэтому меняем местами вторую и третью строки матрицы A^2, а также второй и третий элемент столбца b^2. Получим

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 56 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Делим вторую строку матрицы $\tilde{A}_2$ и второй элемент столбца $\tilde{b}^2$ на 4. Получаем

$$\tilde{\tilde{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{b}}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Наконец, делим последнюю строку матрицы $\tilde{\tilde{A}}_2$ и последний элемент столбца $\tilde{\tilde{b}}^2$ на 10. Получаем

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Теперь выполняем обратный ход метода Гаусса. Последовательно находим $x_3 = 3$, $x_2 = 14 - 3 \cdot 4 = 2$, $x_1 = 4/3 - (2/3) \cdot 2 + (1/3) \cdot 3 = 1$.

В ходе реализации метода Гаусса мы, фактически, подсчитали и определитель матрицы A. По формуле (3.3) его абсолютная величина равна произведению *ведущих* элементов метода Гаусса, т. е. тех чисел, на которые приходилось выполнять деление при приведении матрицы A к треугольному виду. В рассматриваемом примере — это $9, 4, 10$. Было выполнено две перестановки строк, следовательно, определитель равен произведению ведущих элементов: $\det(A) = 360$.

4. Теорема. *Определитель произведения произвольных квадратных матриц A и B равен произведению их определителей:*

$$\det(AB) = \det A \det B. \tag{4.1}$$

Доказательство. Если матрица A вырождена, то, как было установлено выше (см. п. 10.3 , с. 85), матрица AB также вырождена, и в этом случае равенство (4.1) тривиально выполняется. Если матрица A невырождена, то, применяя (3.1), получим

$$AB = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U B.$$

В этом произведении каждый сомножитель, кроме B, есть либо матрица перестановки, либо треугольная матрица, следовательно,

$$\det(AB) = \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} \det U \det B =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} \det B, \quad (4.2)$$

но (см. (3.2))

$$\prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} = \det A,$$

т. е. равенство (4.1) доказано. □

5. Задачи.

1) Пусть A — квадратная матрица. Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \quad \Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы A. Показать, что если

$$\text{все главные миноры матрицы } A \text{ отличны от нуля,} \quad (5.1)$$

то, реализуя метод Гаусса, можно полагать все матрицы $P_1, \ldots, P_n$ равными единичной матрице, т. е. опускать операцию поиска максимального по модулю элемента в соответствующих столбцах.

2) Показать, что если выполнено условие (5.1), то матрица A представима в виде

$$A = LU, \quad (5.2)$$

где L — нижняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали, U — верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

Равенство (5.2) определяет так называемое *треугольное разложение* матрицы A.

3) Показать, что матрицы L, U с указанными свойствами определяются равенством (5.2) однозначно.

4) Показать, что условие (5.1) необходимо для того, чтобы матрицу A можно было представить в виде (5.2).

§ 6. Блочные матрицы

1. Во многих случаях оказывается полезным «разрезать» матрицу на блоки, т. е. преставить ее в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где элементы A_{ij}, в свою очередь, являются матрицами.

Размеры блоков предполагаются согласованными, т. е. все блоки, стоящие в одной строке, должны иметь одинаковое число строк, все блоки, стоящие в одном столбце, должны иметь одинаковое число столбцов. Одна и та же матрица может быть разбита на блоки различными способами (см. рис. 2).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Рис. 2. Примеры разбиения матрицы на блоки.

Нетрудно убедиться, что с блочными матрицами можно действовать по тем же формальным правилам, что и с обычными. Так, если наряду с матрицей (1.1) ввести в рассмотрение матрицу

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

причем такую, что для любой пары индексов i, j размеры блоков A_{ij}, B_{ij} совпадают, то матрица $C = A+B$ может быть представлена как блочная с блоками $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Если

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{np} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

то матрица $C = AB$ может быть представлена как блочная с блоками

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^{n} A_{iq}B_{qj}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, p. \tag{1.4}$$

При этом, конечно, требуется, чтобы все произведения $A_{iq}B_{qj}$ имели смысл, т. е. горизонтальные и вертикальные размеры перемножаемых блоков должны быть согласованы.

2. Получим некоторые полезные формулы для вычисления определителей блочных матриц.

2.1. Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} I & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

есть блочная 2×2 матрица, I — единичная матрица, A_{22} — квадратная матрица, A_{12} — прямоугольная, вообще говоря, матрица. Тогда

$$|A| = |A_{22}|. \tag{2.2}$$

Справедливость равенства (2.2) легко устанавливается разложением по первому столбцу. Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где A_{11} — квадратная матрица, то $|A| = |A_{11}|$.

2.2. Теорема. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где A_{11}, A_{22} — квадратные матрицы. Тогда

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|. \tag{2.5}$$

Доказательство. Покажем сначала, что если матрица A_{11} вырождена, то $|A| = 0$. Обозначим через n_1 порядок матрицы A_{11}, через n_2 — порядок матрицы A_{22}. Если $|A_{11}| = 0$, то существует вектор x^1 длины n_1, не равный нулю, и такой, что $A_{11}x^1 = 0$. Тогда для ненулевого вектора $x = (x^1, 0, \ldots, 0)$ длины $n_1 + n_2$, очевидно, имеем $Ax = 0$, следовательно $|A| = 0$. Таким образом, показано, что

если $|A_{11}| = 0$, то равенство (2.5) выполняется тривиальным образом. Пусть теперь $|A_{11}| \neq 0$. Нетрудно убедиться, что справедливо равенство
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$
и, следовательно,
$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}.$$
Для завершения доказательства достаточно воспользоваться результатами предыдущего пункта. □

Упражнения.

1) Пусть
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
есть блочно треугольная матрица, A_{ii}, $i = 1, \dots, n$, — произвольные квадратные матрицы. Доказать, что $|A| = |A_{11}||A_{22}| \cdots |A_{nn}|$.

2) Пусть
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$
есть блочная матрица A_{11}, A_{22} — квадратные матрицы, причем $|A_{11}| \neq 0$. Показать, что
$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|. \tag{2.7}$$

Указание. Вычислить произведение матриц
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Замечание. Равенство (2.7) можно рассматривать как обобщение формулы для вычисления определителя второго порядка.

Глава 4

Векторные пространства

§ 1. Линейные пространства. Евклидовы пространства

1. При изучении операций над векторами трехмерного евклидова пространства (см. § 1 гл. 2) было показано, что, фиксируя в пространстве некоторый базис, можно установить взаимнооднозначное соответствие между векторами и упорядоченными тройками вещественных чисел (координатами вектора в этом базисе). При этом операции над векторами могут быть, фактически, заменены операциями над их координатами.

Аналогичная ситуация возникает и во многих других разделах математики и ее приложений, когда приходится иметь дело с объектами, описываемыми конечными наборами вещественных, а зачатую и комплексных, чисел. При этом естественным образом возникает понятие многомерного координатного пространства как множества упорядоченных наборов чисел с введенными на этом множестве алгебраическими операциями.

В этой главе мы будем систематически заниматься конструированием и изучением такого рода пространств. Сначала будет введено пространство $\mathbf{R}^n$, представляющее собой множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел, потом пространство $\mathbf{C}^n$, состоящее из упорядоченных наборов комплексных чисел. Мы ограничимся при этом лишь определениями и описанием простейших свойств этих пространств, поскольку в дальнейшем будут введены и изучены более общие линейные пространства. Результаты, которые будут получены для этих пространств, распространяются и на пространства $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$.

2. *Пространство* $\mathbf{R}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вещественных чисел, $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Элементы пространства $\mathbf{R}^n$ будем называть *векторами*, или *точками*, числа x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — *компонентами* вектора x.

Два вектора $x, y \in \mathbf{R}^n$ будем считать *равными* тогда и только тогда, когда $x_k = y_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *нулевым* и обозначать символом 0.

Вектор

$$i^k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}),$$

у которого компонента с номером k равна единице, а все остальные компоненты — нули, будем называть *единичным*. В пространстве $\mathbf{R}^n$ есть ровно n единичных векторов: i^1, i^2, $\ldots$, i^n.

На пространстве $\mathbf{R}^n$ вводятся линейные операции: *умножение векторов на вещественные числа* (скаляры) и *сложение векторов*.

Именно, по определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \mathbf{R}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbf{R}^n$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Отметим следующие свойства введенных операций. Для любых $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ и для любых вещественных чисел α, β:

1) $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3) $x + 0 = x$ — *нейтральность* нулевого вектора;

4) $x+(-x) = 0$, где по определению $-x = (-1)x$, — существование для каждого вектора *противоположного*;

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Тождества 1)–8) называются *аксиомами линейного пространства*. Их справедливость очевидным образом вытекает из определения линейных операций над элементами $\mathbf{R}^n$.

Нетрудно заметить, что аксиомы 1)–8) в точности соответствуют свойствам линейных операций над векторами трехмерного евклидова пространства (см. § 1, гл. 2).

Важно иметь в виду, что $\mathbf{R}^1$ одновременно является и линейным пространством и множеством всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать $\mathbf{R}^1$ через $\mathbf{R}$.

2.1. Вещественное евклидово пространство. Будем говорить, что на пространстве $\mathbf{R}^n$ задано *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $x, y \in \mathbf{R}^n$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) и при этом выполнены так называемые *аксиомы скалярного* *произведения* (соответствующие свойствам скалярного произведения векторов трехмерного евклидова пространства):

1) $(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbf{R}^n$, равенства $(x, x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in \mathbf{R}^n$;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Из 2), 3) очевидным образом вытекает, что

4) $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$ для любых $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Если на пространстве $\mathbf{R}^n$ введено скалярное произведение, то его называют *вещественным евклидовым пространством.*

Можно указать бесчисленное множество способов введения скалярного произведения на пространстве $\mathbf{R}^n$, например, можно положить

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Такое скалярное произведение на $\mathbf{R}^n$ называют *стандартным.* Проверка аксиом 1)–3) для стандартного скалярного произведения не вызывает никаких затруднений.

Укажем еще целый класс скалярных произведений. Фиксируем n положительных чисел $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n$ и положим

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k y_k. \tag{2.1}$$

Справедливость аксиом 1)–3) очевидна. Меняя числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, получаем различные скалярные произведения.

Можно показать, что если определить *длину* (*модуль*) вектора $|x|$ при помощи соотношения $|x| = \sqrt{(x, x)}$, то длина вектора из $\mathbf{R}^n$ будет обладать свойствами, аналогичными свойствам длины вектора в трехмерном евклидовом пространстве, а именно:

1) $|x| \geqslant 0$ для любого вектора $x \in \mathbf{R}^n$, равенство $|x| = 0$ эквивалентно равенству $x = 0$;

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для любых $x \in \mathbf{R}^n$ и $\alpha \in \mathbf{R}$;

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ для любых $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Неравенство 3) называют *неравенством треугольника* (*неравенством Минковского*[1)]).

1)Герман Минковский (Hermann Minkowski; 1864–1909) — немецкий математик.

Важно понимать, что, определяя различными способами скалярное произведение на $\mathbf{R}^n$, мы получаем различные вещественные евклидовы пространства.

Пространство $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением часто называют *n-мерным арифметическим пространством.* Это пространство играет важную роль во многих разделах математики. Например, оно систематически используется в математическом анализе при изучении функций многих вещественных переменных.

3. *Пространство* $\mathbf{C}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ комплексных чисел, $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число.

Элементы пространства $\mathbf{C}^n$ будем называть *векторами*, или *точками*, числа x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — *компонентами* вектора x.

Два вектора $x, y \in \mathbf{C}^n$ будем считать *равными* тогда и только тогда, когда $x_k = y_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *нулевым* и обозначать символом 0.

Вектор i^k, у которого компонента с номером k равна единице, а все остальные компоненты — нули, будем называть *единичным.* В пространстве $\mathbf{C}^n$ есть ровно n единичных векторов: $i^1, i^2, \ldots, i^n$.

На пространстве $\mathbf{C}^n$ вводятся линейные операции: *умножение векторов на комплексные числа* (скаляры) и *сложение векторов.*

Именно, по определению для любого комплексного числа α и любого $x \in \mathbf{C}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbf{C}^n$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Отметим, что, фактически, мы уже встречались с таким линейным пространством, а именно, множество всех матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц (см. п. 3, с. 79) естественно интерпретировать как пространство $\mathbf{C}^{nm}$ векторов длины nm. Векторы записывались в виде прямоугольных таблиц, но с точки зрения операций умножения вектора на число и сложения векторов это не имеет значения.

Для линейных операций, введенных на пространстве $\mathbf{C}^n$, также справедливы свойства, выраженные равенствами 1)–8) с. 101.

Важно иметь в виду, что $\mathbf{C}^1$ одновременно является и линейным пространством и множеством всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать $\mathbf{C}^1$ через $\mathbf{C}$.

3.1. Комплексное евклидово пространство. Будем говорить, что на пространстве $\mathbf{C}^n$ задано *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $x, y \in \mathbf{C}^n$ поставлено в соответствие число (x, y), вообще говоря, комплексное, и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*:

1) $(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbf{C}^n$, равенства $(x, x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для любых $x, y \in \mathbf{C}^n$, напомним, что черта означает переход к комплексно сопряженному числу, и отметим, что в отличие от вещественного евклидова пространства скалярное произведение в комплексном евклидовом пространстве некоммутативно;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $x, y, z \in \mathbf{C}^n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Из 2), 3) очевидным образом вытекает, что

4) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$ для любых $x, y, z \in \mathbf{C}^n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Если на пространстве $\mathbf{C}^n$ введено скалярное произведение, то его называют *комплексным евклидовым пространством* (часто говорят также: *унитарное пространство*).

Можно указать бесчисленное множество способов введения скалярного произведения на пространстве $\mathbf{C}^n$, например, можно положить

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k.$$

Такое скалярное произведение на $\mathbf{C}^n$ называют *стандартным*. Проверка аксиом 1)–3) не вызывает никаких затруднений. На $\mathbf{C}^n$ также можно ввести скалярное произведение аналогичное (2.1).

Длину (*модуль*) вектора $|x|$ определяют при помощи соотношения $|x| = \sqrt{(x, x)}$. При этом выполняются свойства 1)–3) с. 102.

4. Во многих разделах математики широко используются и более общие конструкции, чем пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$.

Говорят, что множество $\mathbf{X}$ является *линейным пространством над полем вещественных чисел*, или просто *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов $x, y \in \mathbf{X}$ определена операция сложения, т. е. определен элемент $z = x + y \in \mathbf{X}$, называемый *суммой* элементов x, y; для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ и любого вещественного числа α определен элемент $\alpha x \in \mathbf{X}$, называемый *произведением* α и x.

Предполагается, что для этих двух операций выполнены *аксиомы линейного пространства*, аналогичные свойствам пространства $\mathbf{R}^n$ (см. 1)–8) с. 101):

1) $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3) существует единственный элемент $0 \in \mathbf{X}$ такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента $x \in \mathbf{X}$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства $\mathbf{X}$;

4) для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ существует единственный элемент x' такой, что $x+x' = 0$; элемент x' называют *противоположным* элементу x;

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Если при определении пространства $\mathbf{X}$ допускается умножение на комплексные числа, то $\mathbf{X}$ называется *линейным пространством над полем комплексных чисел*, или *комплексным линейным пространством*. При этом предполагается, что выполняются аксиомы 1)–8).

Элементы линейного пространства $\mathbf{X}$ часто будем называть *векторами*, а само пространство — *векторным*.

В дальнейшем на протяжении всей книги буквам $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ будем обозначать линейные пространства. Если не оговорено противное, пространства будут предполагаться комплексными.

4.1. Упражнение. Проверить, что вводимые ниже множества являются линейными пространствами, т. е. для определенных на них операций выполняются аксиомы 1)–8). В некоторых случаях делаются необходимые указания.

1) Множество всех векторов трехмерного евклидова пространства с введенными обычным образом операциями умножения вектора на число и сложения векторов (см. § 1, гл. 2).

2) Множество всех вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале (a, b) вещественной оси, является вещественным линейным пространством, если определить обычным образом понятие суммы двух функций и умножение функции на вещественное число.

3) Множество всех вещественных функций, определенных и непрерывных на замкнутом отрезке $[a, b]$ вещественной оси, является вещественным линейным пространством. Это пространство обозначают через $C[a, b]$. При проверке того, что $C[a, b]$ — линейное пространство, надо иметь в виду, что сумма двух непрерывных функций есть непрерывная функция, при умножении функции на любое число непрерывность функции также сохраняется.

4) Множество всех функций из пространства $C[a, b]$, равных нулю в некоторой фиксированной точке c из отрезка $[a, b]$, — вещественное линейное пространство.

5) Множество всех полиномов с комплексными коэффициентами, на котором обычным образом определены операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число, является комплексным линейным пространством.

6) Множество $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n, где $n \geqslant 0$, есть фиксированное целое число, является комплексным линейным пространством. Здесь надо иметь в виду, что сумма полиномов есть полином, степень которого не превосходит максимальной степени слагаемых.

4.2. Упражнения.

1) Рассмотрим множество всех положительных функций, определенных на вещественной оси. Определим на этом множестве операцию сложения функций f и g как их произведение, а операцию умножения функции f на число α как возведение ее в степень α. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

2) Рассмотрим множество всех четных функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$. Определим на этом множестве операцию сложения двух функций как их произведение, а операцию умножения функции на число будем понимать обычным образом. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

5. Будем говорить, что на вещественном линейном пространстве $\mathbf{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие вещественное число (x, y), и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*, задаваемые соотношениями вида 1)–3) с. 102. Если на линейном вещественном пространстве $\mathbf{X}$ введено скалярное произведение, его называют *вещественным евклидовым пространством.*

6. Будем говорить, что на комплексном линейном пространстве $\mathbf{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие, вообще говоря, комплексное число (x, y), и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*, задаваемые соотношениями вида 1)–3) с. 104. Если на линейном комплексном пространстве $\mathbf{X}$ введено скалярное произведение, его называют *комплексным евклидовым (унитарным) пространством.*

7. Упражнение. Проверить, что в рассматриваемых ниже примерах аксиомы скалярного произведения выполнены.

1) Множество всех векторов трехмерного пространства с введенными обычным образом линейными операциями и скалярным произведением (см. § 1, гл. 2) — вещественное евклидово пространство. В дальнейшем будем обозначать это пространство через $\mathbf{V}_3$.

2) Пусть p — интегрируемая положительная на интервале (a, b) вещественной оси вещественная функция. Пространство $C[a, b]$ превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов f, g пространства $C[a, b]$ по формуле

$$(f, g) = \int\limits_a^b p(x) f(x) g(x) dx. \tag{7.1}$$

3) Для любой пары

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$$

элементов пространства $\mathbf{Q}_n$ определим скалярное произведение по формуле

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^{n} \rho_j a_j \overline{b}_j,$$

где ρ_0, ρ_1, ..., ρ_n — заданные положительные числа. После введения таким образом скалярного произведения пространство $\mathbf{Q}_n$ становится комплексным евклидовым пространством.

§ 2. Неравенство Коши — Буняковского

1. Тождество Пифагора[1)]. Пусть a, b — векторы трехмерного евклидова пространства $\mathbf{V}_3$, причем векторы $a - b$ и b ортогональны,

[1)]Пифагор Самосский (570-490 гг. до н. э.) — древнегреческий философ и математик.

т. е. $(a-b,b)=0$ [1]. Тогда по теореме Пифагора

$$|a|^2 = |a-b|^2 + |b|^2. \tag{1.1}$$

Пусть теперь a, b — векторы произвольного евклидова пространства $\mathbf{X}$ такие, что $(a-b,b)=0$. Тождество (1.1) (*тождество Пифагора*) справедливо и в этом случае, если положить, что $|v|=\sqrt{(v,v)}$ для любого вектора $v\in\mathbf{X}$. Действительно, проводя элементарные выкладки, будем иметь

$$\begin{aligned}|a|^2 = (a,a) = (a-b+b,a-b+b) = \\ &= (a-b,a-b)+(b,b)+(a-b,b)+(b,a-b) = \\ &= (a-b,a-b)+(b,b)+(a-b,b)+\overline{(a-b,b)} = \\ &\qquad = (a-b,a-b)+(b,b) = |a-b|^2+|b|^2.\end{aligned}$$

2. Векторы a,b из линейного пространства $\mathbf{X}$ будем называть *коллинеарными* (*пропорциональными*, *линейно зависимыми*), если существуют числа α, β, не равные одновременно нулю, такие, что

$$\alpha a + \beta b = 0.$$

Понятно, что в этом случае либо $a=\gamma b$, либо $b=\delta a$, где γ, δ — некоторые числа.

Примеры.

1) Единичные векторы i^k, i^l пространства $\mathbf{C}^n$ при $k\neq l$ неколлинеарны (докажите).

2) Векторы $x^1=(1+i,3,2-i,5)$, $x^2=(2,3-3i,1-3i,5-5i)\in\mathbf{C}^4$ пропорциональны, так как $2/(1+i)=(3-3i)/3=(1-3i)/(2-i)=(5-5i)/5=1-i$.

3. Теорема. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— евклидово пространство. Для любых векторов* $x,y\in\mathbf{X}$ *справедливо неравенство*

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y), \tag{3.1}$$

Равенство в (3.1) *достигается тогда и только тогда, когда векторы* x,y *пропорциональны.*

Неравенство (3.1) называют неравенством Коши — Буняковского[2].

[1] Можно сказать, что вектор b получен проектированием вектора a на прямую, параллельную вектору b.

[2] Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) — русский математик

Доказательство. Если $y = 0$, то неравенство (3.1) превращается в тривиальное равенство, и при любом $x \in \mathbf{X}$ векторы x, y пропорциональны, так как $0x + y = 0$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $y \neq 0$. Нетрудно видеть, что[1)]

$$\left(x - \frac{(x,y)}{|y|^2}y, \frac{(x,y)}{|y|^2}y\right) = 0,$$

поэтому, полагая $a = x$, $b = \dfrac{(x,y)}{|y|^2}y$ в тождестве (1.1), получаем, что

$$|x|^2 = \left|x - \frac{(x,y)}{|y|^2}y\right|^2 + \frac{|(x,y)|^2}{|y|^2}\,. \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что $|x|^2 \geqslant |(x,y)|^2/|y|^2$, а это неравенство эквивалентно (3.1). Если $|x|^2 = |(x,y)|^2/|y|^2$, т. е. неравенство (3.1) превращается в равенство, то из (3.2) получаем, что

$$\left|x - \frac{(x,y)}{|y|^2}y\right|^2 = 0,$$

откуда вытекает, что $x = ((x,y)/|y|^2)y$, следовательно, векторы x, y пропорциональны. Обратно, если векторы x, y пропорциональны, то, как нетрудно убедится, левая и правая части (3.1) совпадают. $\square$

4. Величина $|x| = \sqrt{(x,x)}$ называется *длиной* (*модулем*) вектора x. Неравенство (3.1) часто записывают в виде

$$|(x,y)| \leqslant |x||y| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}. \tag{4.1}$$

Введенное понятие длины, обладает свойствами, аналогичными свойствам длины вектора в трехмерном евклидовом пространстве, а именно:

1) $|x| \geqslant 0$ для любого вектора $x \in \mathbf{X}$, равенство $|x| = 0$ эквивалентно равенству $x = 0$;

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для любых $x \in \mathbf{X}$ и $\alpha \in \mathbf{C}$;

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ для любых $x, y \in \mathbf{X}$.

Неравенство 3) называют *неравенством треугольника* (*неравенством Минковского*).

[1)] Геометрически вектор $\dfrac{(x,y)}{|y|^2}y$ получен проектированием вектора x на прямую, параллельную вектору y.

Справедливость утверждений 1), 2) очевидна. Покажем, что неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши — Буняковского. В самом деле,

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = |x|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + |y|^2.$$

Вследствие (4.1) справедливо неравенство $|\operatorname{Re}(x,y)| \leqslant |x||y|$, откуда получаем, что

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству 3).

5. По аналогии с трехмерным евклидовым пространством векторы x, y естественно называть *ортогональными*, если $(x,y) = 0$.

Пример. Векторы i^k, $i^l \in \mathbf{C}^n$ при $k \neq l$ ортогональны относительно стандартного скалярного произведения.

6. Из неравенства (4.1) вытекает, что если $\mathbf{X}$ — вещественное евклидово пространство, то $(x,y)/|x||y| \in [-1,1]$ для любых не равных нулю векторов $x, y \in \mathbf{X}$. Это дает возможность ввести понятие *угла между векторами* x, y, а именно, принимают, что $\cos(x,y) = (x,y)/|x||y|$.

§ 3. Линейная зависимость векторов

1. Линейно зависимые системы векторов. В предыдущем параграфе было введено понятие линейной зависимости двух векторов пространства $\mathbf{X}$. Обобщая это понятие, будем говорить, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$, $m \geqslant 1$, *линейно зависима*, если существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = 0. \tag{1.1}$$

Пример. Система векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

из пространства $\mathbf{R}^3$ линейно зависима, так как, положив

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 2,$$

получим

$$x_1a^1 + x_2a^2 + x_3a^3 + x_4a^4 = 4\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Полезно отметить, что это не единственный набор коэффициентов x_1, x_2, x_3, x_4, при котором линейная комбинация $x_1a^1 + x_2a^2 + x_3a^3 + x_4a^4$ обращается в нуль. Например,

$$2a^1 + a^2 - a^3 = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0,$$

$$3a^2 + a^3 - 2a^4 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 0.$$

Определению линейной зависимости векторов удобно придать матричную формулировку. Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \dots, a^m\}$ — упорядоченный набор векторов из пространства $\mathbf{X}$; для $x \in \mathbf{C}^m$ положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1a^1 + x_2a^2 + \dots + x_ma^m.$$

Можно сказать тогда, что векторы a^1, $a^2, \dots,$ a^m *линейно зависимы*, если существует ненулевой вектор $x \in \mathbf{C}^m$ такой, что

$$\mathcal{A}_m x = 0.$$

Будем говорить, что вектор $a \in \mathbf{X}$ *линейно выражается* через векторы b^1, b^2, $\dots$, b^p, $p \geqslant 1$ (является *линейной комбинацией* этих векторов), если существует вектор $x \in \mathbf{C}^p$ такой, что

$$a = x_1b^1 + x_2b^2 + \dots + x_pb^p,$$

в матричной записи:

$$a = \mathcal{B}_p x.$$

Упражнения.

1) Доказать, что система векторов линейно зависима, если она содержит линейно зависимую подсистему, в частности, если она содержит нулевой вектор.

2) Доказать, что для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно зависимой необходимо и достаточно, чтобы она содержала вектор a^k, который линейно выражается через остальные.

2. Говорят, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ *линейно выражаются* через систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$, если существует матрица $X(p,m)$ такая, что
$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m). \tag{2.1}$$
В более подробной записи это означает, что
$$a^k = \sum_{j=1}^{p} x_{j,k} b^j, \quad k = 1, \dots, m.$$

2.1. *Свойство транзитивности*: если система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражаются через систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$, а та, в свою очередь, — через систему векторов $\{c^i\}_{i=1}^q$, то система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{c^i\}_{i=1}^q$.

Действительно, по определению имеем
$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{C}_q Y(q,p),$$
Подставляя в первое из этих равенств выражение для $\mathcal{B}_p$, получим
$$\mathcal{A}_m = \mathcal{C}_q Z(q,m),$$
где
$$Z(q,m) = Y(q,p)X(p,m).$$

2.2. Системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ и $\{b^i\}_{i=1}^p$ называются *эквивалентными*, если существуют матрицы $X(p,m)$, $Y(m,p)$ такие, что
$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{A}_m Y(m,p), \tag{2.2}$$
т. е. каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы.

Упражнение. Используя свойство транзитивности, показать, что если вектор $x \in \mathbf{X}$ линейно выражается через систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$, то он линейно выражается и через эквивалентную систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$.

3. Линейно независимые системы векторов. Будем говорить, что система векторов $\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$ *линейно независима*, если из равенства $\mathcal{A}_m x = 0$ вытекает, что $x = 0$.

Линейно независимые системы векторов существуют. Приведем простые примеры.

1) Любой вектор $a \neq 0$ образует линейно независимую систему, состоящую из одного вектора.

2) Единичные векторы i^1, i^2, $\ldots$, $i^m \in \mathbf{C}^n$, $m \leqslant n$, линейно независимы. Это утверждение сразу же вытекает из того, что для любого вектора $x \in \mathbf{C}^m$ вектор $x_1 i^1 + x_2 i^2 + \cdots + x_m i^m \in \mathbf{C}^n$ имеет вид

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

и, следовательно, равен нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

3) Система векторов $\varphi_0(z) \equiv 1$, $\varphi_1(z) = z$, $\ldots$, $\varphi_k(z) = z^k$, где z — комплексная переменная, $k \geqslant 0$ — целое число, линейно независима в пространстве полиномов. Для доказательства этого утверждения достаточно вспомнить, что если полином равен нулю, то все его коэффициенты — нули (см. теорему 2.1, с. 76).

3.1. Теорема. *Любая подсистема линейно независимой системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима.*

Доказательство. Предположим противное. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что векторы a^1, a^2, $\ldots$, a^p, $p < m$, линейно зависимы. Тогда существуют числа x_1, $\ldots$, x_p, не все одновременно равные нулю, и такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_p a^p = 0,$$

следовательно,

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_p a^p + 0 a_{p+1} + \cdots + 0 a_m = 0,$$

т. е. получаем, что вопреки условию леммы система $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно зависима. $\square$

3.2. Теорема. *Любая система a^1, a^2, $\ldots$, a^n, $b \in \mathbf{C}^n$ из $n+1$ вектора линейно зависима.*

Доказательство. Пусть система векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$ линейно зависима. Тогда доказываемое утверждение верно. Если векторы $\{a^i\}_{i=1}^n$ линейно независимы, то система уравнений

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

где A — матрица, столбцами которой являются компоненты векторов a^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, крамеровская, и потому имеет решение x при любой правой части b, значит,

$$x_1 a^1 + \cdots + x_n a^n = b,$$

т. е. система векторов a^1, a^2, $\ldots$, a^n, b линейно зависима. $\square$

3.3. Как очевидное следствие только что доказанного утверждения получаем, что любая система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m \in \mathbf{C}^n$, $m > n$, линейно зависима.

3.4. Теорема. *Пусть система векторов $\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$ пространства $\mathbf{X}$ линейно независима и линейно выражается через систему $\mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p$. Тогда $m \leqslant p$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть $m > p$. По определению существует матрица X размера $p \times m$ такая, что $\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X$. Как следствие для любого вектора $y \in \mathbf{C}^m$ имеем $\mathcal{A}_m y = \mathcal{B}_p X y$. Столбцы матрицы X — векторы из пространства $\mathbf{C}^p$. Их количество $m > p$, следовательно, они линейно зависимы. Поэтому существует вектор $y \in \mathbf{C}^m$, не равный нулю и такой, что $Xy = 0$, но тогда и $\mathcal{A}_m y = 0$, т. е. вопреки предположению векторы $a^1, a^2, \ldots, a^m$ линейно зависимы. $\square$

3.5. Следствие. *Любые две эквивалентные линейно независимые системы векторов имеют равные количества векторов.*

3.6. Теорема. *Пусть $\{a^k\}_{k=1}^m$ — линейно независимые векторы. Пусть система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{a^k\}_{k=1}^m$, т. е. существует квадратная матрица X порядка m такая, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$. Для того, чтобы система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ была линейно независимой необходимо и достаточно, чтобы матрица X была невырожденной.*

Упражнение. Следуя рассуждениям пункта 3.4, доказать теорему 3.6.

3.7. Важно отметить, что матрица X, фигурирующая в теореме 3.6, однозначно определяется по системам векторов $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$. В самом деле, если существует матрица $\widetilde{X} \neq X$ такая, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m \widetilde{X}$, то $\mathcal{A}_m(\widetilde{X} - X) = 0$, но это вследствие линейной независимости системы векторов $\mathcal{A}_m$ невозможно, если $\widetilde{X} \neq X$.

§ 4. Ранг системы векторов

1. Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}$ некоторую систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязательно содержит линейно независимую подсистему векторов. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема $\{a^{i_k}\}_{k=1}^{r} \subset \{a^i\}_{i=1}^{m}$, состоящая из линейно независимых векторов, называется *максимальной*, если добавление к ней любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ приводит к линейно зависимой системе.

Пример. Рассмотрим систему векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbf{R}^3$. Векторы a_1, a_2, очевидно, линейно независимы и образуют максимальную линейно независимую подсистему, так как определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -6 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -15 & 9 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 10 \\ -2 & 9 & 7 \\ -0 & -15 & -15 \end{vmatrix},$$

составленные из компонент векторов a_1, a_2, a_3 и a_1, a_2, a_4 соответственно, равны нулю, и, следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 и a_1, a_2, a_4 линейно зависимы.

Вообще говоря, система $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ может содержать несколько максимальных линейно независимых подсистем, однако, справедлива

2. Теорема. *Любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ содержат одно и то же количество векторов.*

Доказательство. Заметим, что из определения максимальной линейно независимой подсистемы непосредственно вытекает, что любой вектор из $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ линейно выражается через векторы ее максимальной линейно независимой подсистемы $\{a^{i_k}\}_{k=1}^{r}$. Вследствие очевидного равенства

$$a^{i_k} = a^{i_k} + \sum_{i=1, i \neq i_k}^{m} 0a^i$$

справедливо и обратное, т. е. система $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ и любая ее максимальная линейно независимой подсистема эквивалентны. Но тогда, очевидно, эквивалентны и любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^{m}$. Отсюда в силу следствия 3.5, § 3 вытекает, что любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ имеют равные количества векторов. $\square$

3. Полученный результат позволяет ввести следующее определение. *Рангом системы векторов* пространства $\mathbf{X}$ называется количество векторов ее максимальной линейно независимой подсистемы.

Например, ранг системы векторов a_1, a_2, a_3, a_4, приведенной на с. 115, равен двум.

Количество линейно независимых векторов пространства $\mathbf{C}^n$ не превосходит n. Поэтому ранг любой системы векторов из $\mathbf{C}^n$ не превосходит n.

Ясно, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ любого линейного пространства $\mathbf{X}$ линейно независима тогда и только тогда, когда ее ранг равен m.

§ 5. Ортогональные системы векторов. Матрица Грама

1. Приведем во многих случаях удобный критерий линейной независимости векторов евклидова пространства.

Пусть дана система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ евклидова пространства $\mathbf{X}$. Построим квадратную матрицу

$$G = \begin{pmatrix} (a^1, a^1) & (a^2, a^1) & \dots & (a^m, a^1) \\ (a^1, a^2) & (a^2, a^2) & \dots & (a^m, a^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a^1, a^m) & (a^2, a^m) & \dots & (a^m, a^m) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

порядка m. Матрица G называется *матрицей Грама*[1)] системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$.

Отметим, что поскольку $(a^k, a^l) = \overline{(a^l, a^k)}$, то матрица Грама любой системы векторов — эрмитова матрица (см. с. 88).

2. Теорема. *Для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно независимой необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была невырожденной.*

Доказательство. Пусть матрица Грама G невырождена. Тогда система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима. Действительно, если

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m = 0,$$

то

$$(x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

[1)] Йорген Педерсен Грам (Jorgen Pedersen Gram; 1850–1916) — датский математик

Записывая эти равенства более подробно, получаем

$$x_1(a^1, a^k) + x_2(a^2, a^k) + \dots + x_m(a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{2.1}$$

Система (2.1) — однородная система уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, …, x_m с матрицей G. Поскольку матрица Грама невырождена, система имеет только тривиальное решение, следовательно, $x_1, x_2, \dots, x_m = 0$. Обратно, пусть система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима. Составим линейную комбинацию столбцов матрицы G с некоторым коэффициентами x_1, x_2, …, x_m. Приравнивая эту линейную комбинацию нулю, получим

$$x_1(a^1, a^k) + x_2(a^2, a^k) + \dots + x_m(a^m, a^k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{2.2}$$

Умножим почленно равенство с номером k на $\overline{x}_k$, затем сложим почленно полученные равенства. После элементарных преобразований сможем написать, что

$$\left(\sum_{k=1}^m x_k a^k, \sum_{k=1}^m x_k a^k \right) = 0,$$

следовательно,

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m = 0. \tag{2.3}$$

Поскольку система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима, то из (2.3) вытекает, что $x_1, x_2, \dots, x_m = 0$. Таким образом, мы получили, что если линейная комбинация столбцов матрицы G обращается в нуль, то все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю. Это означает, что столбцы матрицы G линейно независимы, т. е. матрица G невырождена. □

Пример. Исследуем на линейную зависимость векторы

$$x^1 = (1, 3, 3, 1, -2), \quad x^2 = (3, 3, 1, -3, 2), \quad x^3 = (1, 3, -1, 1, 3)$$

пространства $\mathbf{R}^5$. Введем на этом пространстве стандартное скалярное произведение и составим матрицу Грама третьего порядка $G = \{(x^i, x^j)\}_{i,j=1}^3$. Выполняя элементарные вычисления, получим

$$G = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 2 \\ 8 & 32 & 14 \\ 2 & 14 & 21 \end{pmatrix}, \quad \det(G) = 2^4 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} 0 & -40 & -125 \\ 0 & -6 & -35 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 2^4 \cdot 650,$$

т. е. векторы x^1, x^2, x^3 линейно независимы.

3. Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортогональной*, если все векторы a^i, $i = 1, \ldots, m$, не нули и $(a^i, a^k) = 0$ при $i \neq k$.

Матрица Грама ортогональной системы — диагональная невырожденная матрица. Очевидно, ортогональная система линейно независима.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортонормированной*, если $(a^i, a^k) = \delta_{ik}$ для $i, k = 1, \ldots, m$.

Матрица Грама ортонормированной системы — единичная матрица. Все векторы ортонормированной системы имеют длину, равную единице.

4. Теорема Грама — Шмидта[1)]. *Всякая линейно независимая система $\{a^i\}_{i=1}^m$ эквивалентна некоторой ортонормированной системе $\{b^i\}_{i=1}^m$, причем вектор b^1 можно выбрать пропорциональным вектору a^1.*

Доказательство. Положим $h^1 = a^1$, $h^2 = x_{2,1}h^1 + a^2$. Вектор h^1 не нуль, поскольку вектор a^1 как элемент линейно независимой системы не нуль. При любом значении $x_{2,1}$ вектор h^2 также не нуль, поскольку h^2 — линейная комбинация линейно независимых векторов, причем один из коэффициентов этой линейной комбинации не равен нулю (он равен единице).

Выберем теперь число $x_{2,1}$ так, чтобы вектор h^2 был ортогонален вектору h^1. Записывая это условие, получим $0 = x_{2,1}(h^1, h^1) + (a^2, h^1)$, откуда $x_{2,1} = -(a^2, h^1)/(h^1, h^1)$. Итак, построены векторы h^1, h^2 такие, что $(h^1, h^2) = 0$, h^1, $h^2 \neq 0$.

Предположим теперь, что построены векторы h^1, h^2, $\ldots$, h^k такие, что h^1, h^2, $\ldots$, $h^k \neq 0$ и $(h^i, h^j) = 0$ для $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$. Будем разыскивать вектор h^{k+1} в виде

$$h^{k+1} = x_{k+1,1}h^1 + x_{k+1,2}h^2 + \cdots + x_{k+1,k}h^k + a^{k+1}. \tag{4.1}$$

При любых значениях коэффициентов $x_{k+1,1}$, $\ldots$, $x_{k+1,k}$ вектор h^{k+1} не нуль. В самом деле, по построению векторы h^1, h^2, $\ldots$, h^k линейно выражаются через векторы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$, причем так, что в выражение для вектора h^j входят векторы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ с номерами, не превосходящими j. Отсюда вытекает, что вектор h^{k+1} есть линейная комбинация линейно независимых векторов $a^1, a^2, \ldots, a^{k+1}$, причем вектор a^{k+1} входит в эту линейную комбинацию с коэффициентом, равным единице.

Выберем числа $x_{k+1,1}$, $x_{k+1,2}$, $\ldots$, $x_{k+1,k}$ так, чтобы вектор h^{k+1} был ортогонален уже построенным векторам h^1, h^2, $\ldots$, h^k. Последо-

[1)] Эрхард Шмидт (Erhard Schmidt; 1876–1959) — немецкий математик.

вательно выполняя эти условия, найдем $x_{k+1,1} = -(a^{k+1}, h^1)/(h^1, h^1)$, $x_{k+1,2} = -(a^{k+1}, h^2)/(h^2, h^2)$, $\ldots$, $x_{k+1,k} = -(a^{k+1}, h^k)/(h^k, h^k)$.

Продолжая описанный процесс, построим ортогональную систему ненулевых векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$. Полагая затем

$$b^i = (|h^i|)^{-1} h^i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.2}$$

получим ортонормированную систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^m$.

Как было установлено выше, система векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$. Формула (4.1) показывает, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$, формула (4.2) показывает, что системы $\{b^i\}_{i=1}^m$, $\{h^i\}_{i=1}^m$ эквивалентны. Таким образом, все три рассматриваемые системы векторов попарно эквивалентны.

Заметим, наконец, что векторы a^1, b^1 пропорциональны, так как по построению $b^1 = (|a^1|)^{-1} a^1$. $\square$

Замечание. Доказательство теоремы 4 конструктивно. Оно содержит описание способа построения по любой линейно независимой системе эквивалентной ортонормированной системы. Этот метод называется *процессом ортогонализации Грама — Шмидта*. Следует, однако, иметь в виду, что в вычислительной практике процесс ортогонализации Грама — Шмидта используется очень редко, так как, обычно, он подвержен сильному влиянию погрешностей округления.

Пример. Даны полиномы $Q_0(x) \equiv 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$ вещественной переменой x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построим полиномы P_0, P_1, P_2 нулевой первой и второй степени, соответственно, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

Проводя вычисления в соответствии с методом Грама — Шмидта, получим $\tilde{P}_0 = Q_0 \equiv 1$,

$$\tilde{P}_1(x) = Q_1(x) - \tilde{P}_0(x) \int\limits_{-1}^{1} Q_1(x) \tilde{P}_0 dx \left(\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_0^2(x) dx \right)^{-1} = x,$$

$$\tilde{P}_2(x) = Q_2(x) - \tilde{P}_0(x) \int\limits_{-1}^{1} Q_2(x) \tilde{P}_0 dx \left(\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_0^2(x) dx \right)^{-1} -$$

$$- \tilde{P}_1(x) \int\limits_{-1}^{1} Q_2(x) \tilde{P}_1 dx \left(\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_1^2(x) dx \right)^{-1} = x^2 - 1/3,$$

$$P_0(x) = \tilde{P}_0(x)\left(\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}_0^2(x)\right)^{-1/2} = 1/\sqrt{2}, \quad P_1(x) = \tilde{P}_1(x)\left(\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}_1^2(x)\right)^{-1/2} = x\sqrt{3/2},$$

$$P_2(x) = \tilde{P}_2(x)\left(\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}_2^2(x)\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1).$$

Аналогично, можно строить полиномы более высоких степеней $P_3(x)$, $\dots$, $P_n(x)$, применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта к полиномам $1, x, x^2, \dots, x^n$ при произвольном целом положительном n. Полиномы $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ называют *полиномами Лежандра*[1]. Справедлива так называемая *формула Родрига*[2]

$$P_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\frac{1}{k!2^k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{4.3}$$

Упражнение. Используя формулу Родрига и формулу интегрирования по частям, показать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l, \ k, l = 0, 1, 2, \dots \tag{4.4}$$

§ 6. Конечномерные линейные пространства. Базисы

1. Базисы в пространстве $\mathbf{C}^n$. Всякая линейно независимая система $\{e^k\}_{k=1}^n$ (состоящая из n векторов) называется *базисом* пространства $\mathbf{C}^n$. Единичные векторы $\{i^k\}_{k=1}^n$ образуют так называемый *естественный базис* пространства $\mathbf{C}^n$.

Из свойства 8) определителей (см. с. 68) вытекает, что для того, чтобы система $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{C}^n$ была базисом необходимо и достаточно, чтобы матрица, столбцами которой служат векторы e^1, e^2, $\dots$, e^n, была невырожденной.

Если в пространстве $\mathbf{C}^n$ введено скалярное произведение, то можно пользоваться следующим критерием: для того, чтобы система n векторов была базисом, необходимо и достаточно, чтобы матрица Грама этой системы была невырожденной.

В пункте 3.2, § 3, с. 113, фактически, было показано что если $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства $\mathbf{C}^n$, то любой вектор $x \in \mathbf{C}^n$, может быть представлен в виде линейной комбинации

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_n e^n. \tag{1.1}$$

[1]Адриен Мари Лежандр (Adrien-Marie Legendre; 1752–1833) — французский математик.

[2]Бенжамен Оленд Родриг (Benjamin Olinde Rodrigues; 1794–1851) — французский математик.

Коэффициенты линейной комбинации (1.1) однозначно определяются по вектору x и удовлетворяют крамеровской системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{E}_n \xi = x. \tag{1.2}$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — столбец коэффициентов разложения вектора x по базису $\{e^k\}_{k=1}^n$.

2. Конечномерные пространства. Линейное пространство $\mathbf{X}$ называется *конечномерным*, если существуют векторы

$$\mathcal{E}_n = \{e^1, e^2, \ldots, e^n\}, \tag{2.1}$$

образующие линейно независимую систему в пространстве $\mathbf{X}$, и такие, что любой вектор $x \in \mathbf{X}$ представим в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbf{C}^n. \tag{2.2}$$

Говорят в этом случае, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^n$ образуют *базис* пространства $\mathbf{X}$. Число n называют *размерностью* пространства $\mathbf{X}$. Линейное пространство $\mathbf{X}$ размерности n будем обозначать через $\mathbf{X}_n$. Коэффициенты разложения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называют *координатами* вектора x в базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$.

2.1. Координаты любого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ однозначно определяются по базису $\{e^k\}_{k=1}^n$. Действительно, если наряду с разложением (2.2) существует разложение $x = \mathcal{E}_n \tilde{\xi}$, то, очевидно, $\mathcal{E}_n(\xi - \tilde{\xi}) = 0$, откуда вследствие линейной независимости системы векторов $\{e^k\}_{k=1}^n$ получаем, что $\xi = \tilde{\xi}$.

2.2. В n-мерном линейном пространстве $\mathbf{X}_n$ любая система $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$, состоящая из n линейно независимых векторов, является базисом. Для доказательства этого утверждения надо убедиться, что любой вектор $x \in \mathbf{X}_n$ представим в виде линейной комбинации

$$x = \tilde{\mathcal{E}}_n \tilde{\xi}. \tag{2.3}$$

По определению n-мерного пространства в нем существует базис $\mathcal{E}_n$. Следовательно, любой вектор из $\tilde{\mathcal{E}}_n$ представим в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathcal{E}_n$, иными словами, существует квадратная матрица T порядка n такая, что $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$. Матрица T невырождена (см. п. 3.6, с. 114). Поскольку $\mathcal{E}_n$ — базис, существует вектор $\xi \in \mathbf{C}^n$ такой, что $x = \mathcal{E}_n \xi$. Поскольку матрица T невырождена, можно найти вектор $\tilde{\xi} \in \mathbf{C}^n$ такой, что $\xi = T\tilde{\xi}$. В результате, получим соотношение $x = \mathcal{E}_n T \tilde{\xi} = \tilde{\mathcal{E}}_n \tilde{\xi}$, совпадающее с (2.3).

3. Если пространство не является конечномерным, его называют *бесконечномерным.*

4. Любое конечномерное линейное пространство $\mathbf{X}_n$ можно превратить в евклидово пространство. Действительно, пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$, $x = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k e^k$, $y = \sum\limits_{k=1}^n \eta_k e^k$ — элементы пространства $\mathbf{X}_n$. Примем в качестве скалярного произведения элементов x, y величину

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \bar{\eta}_k. \tag{4.1}$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы скалярного произведения при этом будут выполнены.

5. Приведем примеры конечномерных и бесконечномерных пространств.

1) Любые три некомпланарных вектора пространства $\mathbf{V}_3$ образуют базис (см. § 1, гл. 2). Пространство $\mathbf{V}_3$ трехмерно.

2) Пространства $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{R}^n$, очевидно, конечномерны. Их размерность равна n.

3) Пространство $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n конечномерно. Его размерность равна n. Базисом в пространстве полиномов степени не выше n является, например, система векторов $\{1, z, \dots, z^n\}$, где z — комплексная переменная.

4) Пространство всех полиномов бесконечномерно. Действительно, в нем линейно независима система векторов $\{1, z, \dots, z^k\}$ при любом, сколь угодно большом, целом k.

5) Пространство $C[a, b]$ бесконечномерно, так как содержит полиномы с вещественными коэффициентами любого порядка.

6. Замена базиса. Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, $\tilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ — базисы пространства $\mathbf{X}_n$. Как уже говорилось, $\mathcal{E}_n$, $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ — эквивалентные системы векторов, существуют квадратные матрицы T, $\widetilde{T}$ порядка n такие, что

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{T}, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T. \tag{6.1}$$

Матрицу T называют матрицей перехода от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$. Матрицы T и $\widetilde{T}$ взаимно обратны. Действительно, подставляя выражение для $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ из второго равенства (6.1) в первое, получим $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T \widetilde{T}$. Отсюда вследствие линейной независимости векторов базиса сразу получаем (см. п. 3.7, с. 114), что

$$T\widetilde{T} = I. \tag{6.2}$$

Пусть известны коэффициенты ξ разложения некоторого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ по базису $\{e^k\}_{k=1}^n$ и пусть задана матрица перехода T к базису $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Получим формулу для вычисления коэффициентов $\tilde{\xi}$ разложения того же вектора x по базису $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$. В соответствии с (2.2) имеем $x = \mathcal{E}_n\xi$, но $\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n\widetilde{T} = \widetilde{\mathcal{E}}_n T^{-1}$ (см. (6.1), (6.2)), следовательно, $x = \widetilde{\mathcal{E}}_n T^{-1}\xi$, а это означает, что

$$\tilde{\xi} = T^{-1}\xi. \tag{6.3}$$

7. Отметим, что в пространстве $\mathbf{X}_n$ существует сколько угодно базисов. Действительно, если $\mathcal{E}_n$ — базис, то система векторов $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$, где T — произвольная невырожденная матрица, также является базисом.

Пример. Пусть векторы e^1, e^2, e^3 образуют базис в трехмерном пространстве $\mathbf{X}_3$. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} \tilde{e}^1 &= 5e^1 - e^2 - 2e^3, \\ \tilde{e}^2 &= 2e^1 + 3e^2, \\ \tilde{e}^3 &= -2e^1 + e^2 + e^3. \end{aligned}$$

Записывая эти равенства в матричном виде, получим $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T$, где $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3\}$, $\mathcal{E} = \{e^1, e^2, e^3\}$,

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\det T = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

следовательно, матрица T невырождена. Поэтому векторы $\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3$ также образуют базис пространства $\mathbf{X}_3$. Рассмотрим вектор $a = e^1 + 4e^2 - e^3$. Координатами этого вектора в базисе $\mathcal{E}$ являются числа $\xi_1 = 1, \xi_2 = 4, \xi_3 = -1$, т. е. $a = \mathcal{E}\xi$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Найдем координаты того же вектора, но в базисе $\tilde{\mathcal{E}}$. Вычислим матрицу T^{-1}. Получим:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$\tilde{\xi} = T^{-1}\xi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix},$$

т. е. $a = -13\tilde{e}^1 + 6\tilde{e}^2 - 27\tilde{e}^3$. Мы нашли, таким образом, представление вектора a в базисе $\tilde{\mathcal{E}}$.

8. Пусть e — произвольный ненулевой вектор евклидова пространства $\mathbf{X}_n$, $n > 1$. Понятно что существует некоторый вектор f_2 непропорциональный e, затем можно указать вектор f_3 так, чтобы векторы e, f_2, f_3 были линейно независимы. Продолжая этот процесс, получим базис пространства $\mathbf{X}_n$, включающий в себя вектор e. Применяя затем процесс ортогонализации Грама — Шмидта, можно построить ортогональный базис пространства $\mathbf{X}_n$, содержащий вектор e.

9. В евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$ вычисление коэффициентов разложения вектора $x \in \mathbf{X}_n$ по любому базису $\{e^k\}_{k=1}^n$ можно свести к решению крамеровской системы линейных алгебраических уравнений с эрмитовой матрицей. Действительно, умножим обе части равенства

$$\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_n e^n = x$$

скалярно на вектор e^1, затем на вектор e^2 и т. д. и, наконец, на вектор e^n. Получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
(e^1, e^1)\xi_1 + (e^2, e^1)\xi_2 + \dots + (e^n, e^1)\xi_n = (x, e^1), \\
(e^1, e^2)\xi_1 + (e^2, e^2)\xi_2 + \dots + (e^n, e^2)\xi_n = (x, e^2), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(e^1, e^n)\xi_1 + (e^2, e^n)\xi_2 + \dots + (e^n, e^n)\xi_n = (x, e^n),
\end{gathered}$$

матрицей которой служит матрица Грама базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$. Наиболее просто эта система решается в случае, когда базис ортогонален, т. е. когда матрица Грама диагональна. В этом случае получаем

$$\xi_k = (x, e^k)/(e^k, e^k), \quad k = 1, \dots, n. \tag{9.1}$$

Коэффициенты (9.1) называются *коэффициентами Фурье*[1)] вектора x по ортогональной системе $\{e^k\}_{k=1}^n$. Отметим, что если базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ ортонормирован, то для любого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ справедливо разложение

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, e^k) e^k. \tag{9.2}$$

[1)] Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier; 1768–1830) — французский математик и физик.

10. Пусть x, y — векторы евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ и пусть известны векторы $\xi, \eta \in \mathbf{C}^n$ коэффициентов разложений x, y по базису $\mathcal{E}_n$, т. е. $x = \mathcal{E}_n \xi$, $y = \mathcal{E}_n \eta$. Тогда

$$(x, y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \sum_{k=1}^{n} \eta_k e^k \Big) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_l (e^k, e^l),$$

следовательно, для вычисления скалярного произведения (x, y) достаточно знать коэффициенты разложения векторов x, y по базису и матрицу Грама этого базиса.

В случае, когда базис ортонормирован, получаем

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k. \tag{10.1}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов можно подсчитать как стандартное скалярное произведение коэффициентов разложения этих векторов по любому ортонормированному базису.

11. Матрица T перехода от любого ортонормированного базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$ к другому ортонормированному базису $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ является унитарной. В самом деле, записывая второе равенство (6.1) более подробно, получим $\tilde{e}^k = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{jk} e^j$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Вследствие ортонормированности базиса $\tilde{\mathcal{E}}_n$ отсюда получаем,что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} t_{jk} e^j, \sum_{j=1}^{n} t_{jl} e^j \right) = (\tilde{e}^k, \tilde{e}^l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n.$$

Преобразуя левую часть последнего равенства с учетом ортонормированности базиса $\mathcal{E}_n$, получим, что

$$\sum_{j=1}^{n} t_{jk} \overline{t}_{jl} = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n,$$

а это и означает, что матрица T унитарна (см. с. 89).

Важно отметить, что, как следует из только что выполненных выкладок, справедливо и обратное утверждение, а именно, если базис $\mathcal{E}_n$ ортонормирован, а матрица T унитарна, то базис $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$ также ортонормирован.

12. Примеры ортогональных базисов в пространстве $\mathbf{C}^n$.

1) Естественный базис $\{i^k\}_{k=1}^n$. Он ортонормирован относительно стандартного скалярного произведения (докажите!).

2) *Базис Фурье.* Нам удобно будет нумеровать сейчас компоненты вектора и базисные векторы от 0 до $n-1$. Пусть

$$q_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

есть корни степени k из единицы, i — мнимая единица (см. § 1, гл. 1). Введем в рассмотрение систему векторов $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$, компоненты которых вычисляются по формулам

$$\varphi_j^k = q_k^j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{12.1}$$

$k = 0, \dots, n-1$.

Покажем, что векторы $\{\varphi^k\}_{k=1}^n$ образуют ортогональную систему относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbf{C}^n$. Заметим прежде всего, что $q_k = q_1^k$, $\overline{q}_k = q_1^{-k}$. Поэтому, вычисляя скалярное произведение (φ^k, φ^l), получим

$$(\varphi^k, \varphi^l) = \sum_{j=0}^{n-1} q_1^{(k-l)j} = 1 + (q_1^p) + (q_1^p)^2 + \dots + (q_1^p)^{n-1}, \tag{12.2}$$

где $p = k - l$. При $k = l$, т. е. при $p = 0$, справедливо равенство $(\varphi^k, \varphi^k) = n$. Если $p \neq 0$, то сумма в правой части (12.2) есть геометрическая прогрессия со знаменателем q_1^p. Причем, поскольку $|p| = |k-l| < n$, то $q_1^p \neq 1$. Используя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии, получим

$$\sum_{j=0}^{n-1} (q_1^p)^j = \frac{(q_1^p)^n - 1}{q_1^p - 1}, \tag{12.3}$$

но $(q_1^n)^p = q_1^{pn} = 1$, следовательно, $(\varphi^k, \varphi^l) = 0$ при $k \neq l$.

Коэффициенты Фурье ξ разложения любого вектора $x \in \mathbf{C}^n$ по базису (12.1),

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k q_k^j, \quad j = 0, \dots n-1, \tag{12.4}$$

в соответствии с (9.1) вычисляются, таким образом, по формулам

$$\xi_k = (x, \varphi_k)/(\varphi_k, \varphi_k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j q_k^{-j}, \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{12.5}$$

Базис $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$ принято называть *базисом Фурье*. Он широко используется, например, при цифровой обработке сигналов (звуковых, видео).

В реальных задачах n (это длина обрабатываемого сигнала) велико, в связи с чем используются специальные приемы экономного вычисления сумм вида (12.4), (12.5), называемые алгоритмами быстрого дискретного преобразования Фурье (FFT, Fast Fourier Transformation).

13. Примеры базисов в пространстве $\mathbf{Q}_n$ полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n.

1) *Естественным базисом* в этом пространстве называют базис, составленный из степеней независимой переменной $\{1, z, \ldots, z^n\}$.

2) Как показано на с. 76, полиномы

$$\Phi_j(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_{j-1})(z - z_{j+1})\cdots(z - z_n)}{(z_j - z_0)(z_j - z_1)\cdots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\cdots(z_j - z_n)},$$

$j = 0, 1, 2, \ldots, n$, где z_0, z_1, $\ldots$, z_n — произвольные попарно различные комплексные числа, также образуют базис в пространстве полиномов. Этот базис принято называть *базисом Лагранжа*.

3) Покажем, что полиномы

$$\varphi_0(z) \equiv 1,\ \varphi_1(z) = (z - z_0),\ \varphi_2(z) = (z - z_0)(z - z_1), \ldots, \\ \varphi_n(z) = (z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_{n-1}), \quad (13.1)$$

где $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — произвольные попарно различные числа, образуют базис. Как и в случае базиса Лагранжа, достаточно установить, что система уравнений

$$c_0\varphi_0(z_j) + c_1\varphi_1(z_j) + \cdots + c_n\varphi_0(z_j) = h_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad (13.2)$$

имеет единственное решение при любых h_1, h_2, $\ldots h_n$, но это очевидно, так как система (13.2) треугольна

$$\begin{aligned} &c_0 = h_0, \\ &c_0 + c_1(z_1 - z_0) = h_1, \\ &c_0 + c_1(z_2 - z_0) + c_2(z_2 - z_0)(z_2 - z_1) = h_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_0 + c_1(z_n - z_0) + \cdots + c_n(z_n - z_0)(z_n - z_1)\cdots(z_n - z_{n-1}) = h_n, \end{aligned} \quad (13.3)$$

причем коэффициенты, стоящие на диагонали, отличны от нуля. Базис (13.1) называют *базисом Ньютона*[1)].

[1)]Исаак Ньютон (Isaac Newton, 1643–1727) — английский физик, математик и астроном.

§ 7. Подпространства

1. Множество L векторов линейного пространства $\mathbf{X}$ называется *подпространством*, если из того, что векторы x, y принадлежат L вытекает, что вектор $\alpha x + \beta y$ при любых комплексных числах α, β также принадлежит множеству L.

Тривиальные примеры подпространств: все пространство $\mathbf{X}$ является подпространством; множество, состоящее только из одного вектора, равного нулю, является подпространством.

Поскольку по определению наряду с вектором x подпространству должен принадлежать и вектор $0x$, то всякое подпространство содержит нулевой вектор.

Упражнения.

1) Пусть a^1, a^2, $\dots$, a^m, $m \geqslant 1$, — произвольным образом фиксированные векторы пространства $\mathbf{X}$. Докажите что множество всех линейных комбинаций $x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m$ — подпространство. Говорят, что это подпространство *натянуто на векторы* a^1, a^2, $\dots$, a^m.

2) Пусть a^1, a^2 — векторы пространства $\mathbf{X}$. Множество L векторов вида $a^1 + \alpha a^2$, где α пробегает множество всех комплексных чисел, называется *прямой*, проходящей через точку a^1 в направлении вектора a^2. Показать, что множество L является подпространством тогда и только тогда, когда векторы a^1, a^2 линейно зависимы.

2. Пусть L_1, L_2 — подпространства пространства $\mathbf{X}$. Множество L всех векторов вида $a^1 + a^2$, где $a^1 \in L_1$, $a^2 \in L_2$ называется *суммой подпространств* L_1, L_2. Используют обозначение: $L = L_1 + L_2$.

Так определенное множество L — подпространство. Действительно, пусть векторы x, $y \in L$. Это означает, что существуют векторы a^1, $b^1 \in L_1$, a^2, $b^2 \in L_2$ такие, что $x = a^1 + a^2$, $y = b^1 + b^2$. Пусть α, β — произвольные комплексные числа. Тогда

$$\alpha x + \beta y = \alpha(a^1 + a^2) + \beta(b^1 + b^2) = (\alpha a^1 + \beta b^1) + (\alpha a^2 + \beta b^2).$$

Поскольку L_1 — подпространство, вектор $\alpha a^1 + \beta b^1$ принадлежит L_1. Точно так же, вектор $\alpha a^2 + \beta b^2$ принадлежит L_2, следовательно, вектор $\alpha x + \beta y$ принадлежит L.

3. *Пересечение подпространств* L_1, L_2, т. е. множество всех векторов, принадлежащих как L_1, так и L_2, также является подпространством. Действительно, пусть векторы $x, y \in L_1 \cap L_2$. Для любого комплексного числа α вектор αx принадлежит как L_1, так и L_2, т. е. $\alpha x \in L_1 \cap L_2$. Аналогично для любого β вектор $\beta y \in L_1 \cap L_2$, но тогда, очевидно, и $\alpha x + \beta y \in L_1 \cap L_2$.

4. Система векторов $\{e^k\}_{k=1}^m \subset L$ называется *базисом подпространства* L, если она линейно независима и любой вектор $x \in L$ представим в виде линейной комбинации векторов из $\{e^k\}_{k=1}^m$. Число m при этом будем назвать *размерностью подпространства.* Размерность подпространства L обозначают через $\dim(L)$.

Подпространству, состоящему только из нулевого вектора, будем приписывать размерность, равную нулю. Это подпространство будем обозначать через $\{0\}$ и называть *нулевым подпространством.*

Упражнение. Описать суммы и пересечения всевозможных подпространств пространства $\mathbf{V}_3$.

5. Для того, чтобы подпространство L конечномерного пространства $\mathbf{X}_n$ совпадало с $\mathbf{X}_n$, необходимо и достаточно выполнения равенства $\dim(L) = n$. Справедливость этого утверждения сразу следует из того, что любые n линейно независимых векторов пространства $\mathbf{X}_n$ образуют его базис (см. с. 121).

6. Очевидно, что базис $\{e^k\}_{k=1}^m$ любого подпространства L из $\mathbf{X}_n$ можно дополнить до базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$ всего пространства $\mathbf{X}_n$. Точно так же, если L_1 и L_2 — подпространства и $L_1 \subset L_2$, то $\dim(L_1) \leqslant \dim(L_2)$, и базис подпространства L_1 можно дополнить до базиса подпространства L_2.

7. Сумма подпространств L_1 и L_2 называется *прямой* если для любого вектора $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$ его составляющие $x^1 \in L_1$ и $x^2 \in L_2$ определяются однозначно. Прямая сумма подпространств L_1 и L_2 обозначается через $L_1 \dot{+} L_2$.

7.1. Теорема. *Для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2 была прямой необходимо и достаточно, чтобы из равенства*

$$x^1 + x^2 = 0,$$

для $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ вытекало, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$.

Доказательство. Пусть из равенства $x^1 + x^2 = 0$ для $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ следует, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. Покажем, что тогда для любого $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$, составляющие $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ определяются однозначно. Предположим, что существует еще одно разложение вектора x, т. е. $x = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2$, $\tilde{x}_1 \in L_1$, $\tilde{x}_2 \in L_2$. Тогда, очевидно, $(x^1 - \tilde{x}^1) + (x^2 - \tilde{x}^2) = 0$. Поскольку $x^1 - \tilde{x}^1 \in L_1$, $x^2 - \tilde{x}^2 \in L_2$, то $x^1 - \tilde{x}^1 = 0$, $x^2 - \tilde{x}^2 = 0$, следовательно, $x^1 = \tilde{x}^1$, $x^2 = \tilde{x}^2$. Обратно, пусть составляющие любого вектора $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$ определяются однозначно, и пусть $x^1+x^2 = 0$ для каких-то $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$. Поскольку, $0 + 0 = 0$, то отсюда вытекает, что $x^1 = x^2 = 0$. $\square$

7.2. Теорема. *Для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2 была прямой необходимо и достаточно, чтобы $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, $x^1 + x^2 = 0$, $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$. Поскольку $x^1 = -x^2$, то $x^1 \in L_2$, значит, $x^1 \in L_1 \cap L_2$, следовательно, $x^1 = 0$, но тогда, очевидно, и $x^2 = 0$. Обратно, пусть $x \in L_1 \cap L_2$. Тогда $x \in L_1$, $x \in L_2$, кроме того, очевидно, $x+(-x) = 0$, а так как сумма L_1 и L_2 прямая, то вследствие теоремы 7.1 получаем, что $x = 0$, следовательно, $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. $\square$

8. Будем говорить, что подпространства L_1 и L_2 евклидова пространства *ортогональны* (пишут $L_1 \perp L_2$), если $(x, y) = 0$ для всех $x \in L_1$, $y \in L_2$. Сумму ортогональных подпространств будем называть *ортогональной* и обозначать через $L_1 \oplus L_2$.

Ортогональная сумма является прямой. В самом деле, пусть $L_1 \perp L_2$, $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ и $x^1 + x^2 = 0$. В силу ортогональности x^1, x^2, очевидно, $|x^1 + x^2|^2 = |x^1|^2 + |x^2|^2$, поэтому $|x^1|^2 + |x^2|^2 = 0$, следовательно, $x^1 = x^2 = 0$.

9. Понятия прямой и ортогональной сумм естественным образом переносятся на случай любого конечного числа подпространств. Так, сумма подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_k$ называется ортогональной, если она есть множество всех элементов вида $x = x^1+x^2+\cdots+x^k$, $x^j \in L_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и $L_i \perp L_j$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Теорема 7.1 легко обобщается на случай любого конечного числа подпространств.

Упражнения.

1) Покажите, что ортогональная сумма любого числа подпространств является прямой, т. е. составляющие $x^j \in L_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, определяются по любому x однозначно.

2) Верно ли утверждение: сумма подпространств $L_1+L_2+\cdots+L_k$, $k > 2$, является прямой, если их пересечение — нулевое подпространство?

10. Проекция вектора на подпространство. Пусть L — подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$, x — вектор из $\mathbf{X}$. Вектор $y \in L$ назовем *наилучшим приближением* к вектору x, если

$$|x - y| \leqslant |x - z| \quad \text{для любого } z \in L. \tag{10.1}$$

10.1. Теорема. *Для любого $x \in \mathbf{X}$ и любого конечномерного подпространства $L \subset \mathbf{X}$ существует единственное наилучшее приближение.*

Доказательство. Если $L = \{0\}$, единственным наилучшим приближением к x будет нулевой вектор. Поэтому далее полагаем, что $L \neq \{0\}$. Пусть y, z два произвольных вектора из L. Положим $h = y - z$. Ясно, что $h \in L$, причем

$$\begin{aligned}(x-z, x-z) = (x-z-h+h, x-z-h+h) =\\ = (x-y+h, x-y+h) =\\ = (x-y, x-y) + 2\operatorname{Re}(x-y, h) + (h, h),\end{aligned} \quad (10.2)$$

что можно записать так:

$$|x-z|^2 = |x-y|^2 + 2\operatorname{Re}(x-y, h) + |h|^2. \quad (10.3)$$

Неравенство $|x-y| \leqslant |x-z|$ эквивалентно неравенству

$$2\operatorname{Re}(x-y, h) + |h|^2 \geqslant 0. \quad (10.4)$$

Таким образом, для того, чтобы вектор $y \in L$ был наилучшим приближением к вектору $x \in \mathbf{X}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $h \in L$ выполнялось неравенство (10.4). Неравенство (10.4) выполнено для всех $h \in L$, следовательно, оно сохраняется при замене h на th_1, где $h_1 = (x-y, h)h$, а t — вещественное число. При такой замене неравенство (10.4) принимает вид

$$2t|(x-y, h)|^2 + t^2|h_1|^2 \geqslant 0. \quad (10.5)$$

Неравенство (10.5) может быть выполнено для всех вещественных t лишь при условии, что дискриминант квадратного трехчлена в его левой части неположителен. Это эквивалентно тому, что $(x-y, h) = 0$. Итак, для того чтобы вектор $y \in L$ был наилучшим приближением к вектору $x \in \mathbf{X}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(x-y, h) = 0 \quad \text{для любого} \quad h \in L, \quad (10.6)$$

иными словами, вектор $x - y$ должен быть ортогонален подпространству L. Геометрически этот вывод вполне очевиден (см. рис. 1).

Вектор y, удовлетворяющий условию (10.6), однозначно определяется по вектору x. В самом деле, пусть существует еще один вектор $\tilde{y} \in L$ такой, что $(x - \tilde{y}, h) = 0$ для любого $h \in L$. Тогда $(y - \tilde{y}, h) = 0$ для любого $h \in L$. Полагая $h = y - \tilde{y}$, получим, что $y = \tilde{y}$.

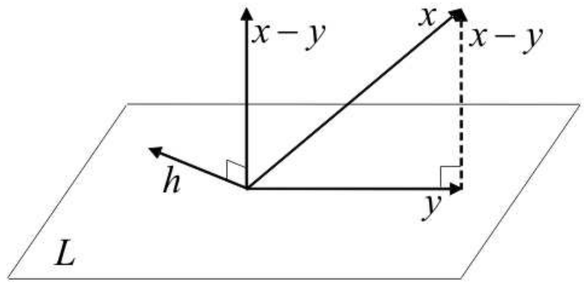


Рис. 1. К доказательству теоремы 10.1.

Докажем теперь, что существует вектор $y \in L$, удовлетворяющий условию (10.6). Пусть $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L. Условие (10.6) эквивалентно тому, что

$$(x - y, e^k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{10.7}$$

Будем искать y в виде разложения по базису: $y = \sum\limits_{i=1}^m \eta_i e^i$. Тогда из (10.7) получаем, что

$$\Bigl(\sum_{i=1}^m \eta_i e^i, e^k\Bigr) = (x, e^k), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Более подробная запись этих условий дает систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^m \eta_i (e^i, e^k) = (x, e^k), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{10.8}$$

для отыскания $\eta_1, \ldots, \eta_m$. Матрица этой системы — матрица Грама, соответствующая базису $\{e^k\}_{k=1}^m$. Эта матрица невырождена (см. теорему 2, с. 116), следовательно, система (10.8) однозначно разрешима при любом $x \in \mathbf{X}$, т. е. условие (10.6) позволяет построить вектор y. $\square$

Замечание. Вектор y вычисляется наиболее просто, когда базис $\{e^k\}_{k=1}^m$ ортонормирован, а именно, в этом случае $y = \sum\limits_{k=1}^m (x, e^k) e^k$.

10.2. Вектор y, удовлетворяющий условию (10.6), естественно назвать *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L, вектор $z = x - y$ — *перпендикуляром*, опущенным из точки x на подпространство L (см. рис. 1).

Заметим, что $(x - y, y) = 0$, поскольку $y \in L$, следовательно, справедливо тождество Пифагора (см. с. 108)

$$|x|^2 = |x - y|^2 + |y|^2. \tag{10.9}$$

Из (10.9) следует, что $|y|^2 \leqslant |x|^2$. Это — так называемое *неравенство Бесселя*, показывающее, что длина проекции вектора не превосходит длины вектора (см. рис. 1).

10.3. Если система векторов $\{e^k\}_{k=1}^m$ ортонормирована, то неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m} |(x, e^k)|^2 \leqslant |x|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}. \tag{10.10}$$

Равенство в (10.10) достигается тогда и только тогда, когда $x \in L$, т. е. когда $x = \sum\limits_{k=1}^{m} (x, e^k) e^k$.

Отметим, что неравенство Коши — Буняковского (3.1), с. 108, можно трактовать как частный случай неравенства Бесселя (10.10), когда ортонормированная система векторов состоит только из одного вектора $|y|^{-1}y$, $y \neq 0$.

Пример. Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbf{R}^4$, натянутое на векторы $a^1 = (-3, 0, 7, 6)$, $a^2 = (1, 4, 3, 2)$, $a^3 = (2, 2, -2, -2)$. Найдем ортогональную проекцию вектора $x = (14, -3, -6, -7)$ на подпространство L и перпендикуляр, опущенный из точки x на подпространство L.

Векторы a^1, a^2 линейно независимы (не пропорциональны), вектор a^3 — линейная комбинация векторов a^1, a^2, а именно, $a^3 = (-1/2)a^1 + (1/2)a^2$. Поэтому векторы a^1, a^2 можно принять за базис подпространства L. Компоненты η_1, η_2 вектора y — проекции вектора x на L в базисе a^1, a^2 — могут быть найдены как решение системы уравнений

$$\eta_1(a^1, a^1) + \eta_2(a^2, a^1) = (x, a^1), \tag{10.11}$$
$$\eta_1(a^1, a^2) + \eta_2(a^2, a^2) = (x, a^2). \tag{10.12}$$

Вычисляя скалярные произведения, получим $(a^1, a^1) = 9 + 49 + 36 = 94$, $(a^2, a^1) = 30$, $(a^2, a^2) = 30$, $(x, a^1) = -126$, $(x, a^2) = -30$. Решая систему (10.11), (10.12), найдем, что $\eta_1 = -3/2$, $\eta_2 = 1/2$, т. е. $y = (-3/2)a^1 + (1/2)a^2 = (5, 2, -9, -8)$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство L, $z = x - y = (9, -5, 3, 1)$ — перпендикуляр, опущенный из точки x на подпространство L.

11. Ортогональное разложение евклидова пространства $\mathbf{X}$.

Пусть L — подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$. Множество всех векторов из $\mathbf{X}$, ортогональных L, называется *ортогональным дополнением* подпространства L и обозначается через $L^{\perp}$. Понятно, что $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Упражнение. Докажите, что $L^{\perp}$ — подпространство пространства $\mathbf{X}$.

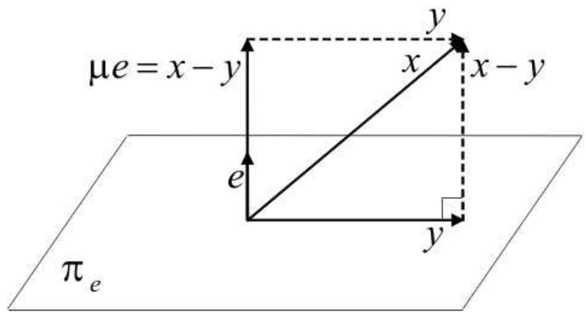


Рис. 2. К теореме 11.2.

11.1. Теорема (об ортогональном разложении). *Пусть L — подпространство конечномерного евклидова пространства $\mathbf{X}_n$, $L^\perp$ — ортогональное дополнение подпространства L.* Тогда

$$\mathbf{X}_n = L \oplus L^\perp. \tag{11.1}$$

Доказательство. По теореме 10.1 для любого $x \in \mathbf{X}_n$ существует $y \in L$ такой, что $(x - y, h) = 0$ для любого $h \in L$, следовательно, $z = x - y \in L^\perp$ и $x = y + z$, что означает (см. п. 8, с. 130) справедливость (11.1). □

Пусть $e \in \mathbf{X}$, $e \neq 0$. Обозначим через π_e множество всех векторов пространства $\mathbf{X}$, ортогональных e. Нетрудно убедиться что π_e — подпространство пространства $\mathbf{X}$. Это подпространство называют *гиперплоскостью*, ортогональной вектору e.

11.2. Теорема. *Пусть x — произвольный, e — ненулевой векторы евклидова пространства $\mathbf{X}_n$. Существуют вектор $y \in \pi_e$ и число μ такие, что*

$$x = \mu e + y, \tag{11.2}$$

причем μ и y однозначно определяются по вектору x. Кроме того,

$$|x - y| \leqslant |x - z| \quad \text{для любого} \quad z \in \pi_e, \tag{11.3}$$

т. е. y — элемент наилучшего приближения к вектору x из подпространства π_e (см. рис. 2).

Упражнение. Следуя доказательству теоремы 11.1, докажите теорему 11.2.

12. Теорема. *Пусть $L = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \cdots \dotplus L_k$ — прямая сумма конечномерных подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_k$ линейного пространства $\mathbf{X}$. Тогда*

$$\dim(L) = \dim(L_1) + \dim(L_2) + \cdots + \dim(L_k). \tag{12.1}$$

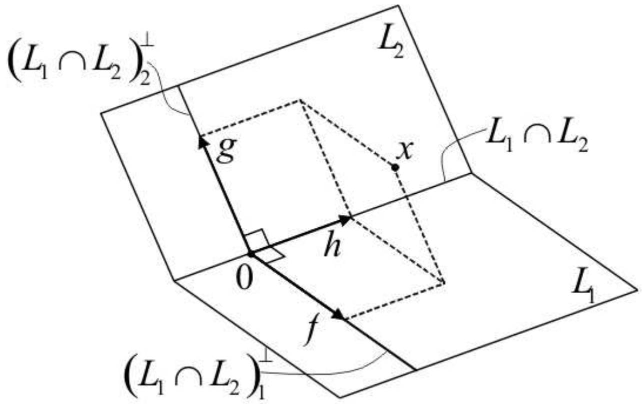


Рис. 3. К теореме 13.

Доказательство. Выполним его для случая $k = 2$. Для произвольного k рассуждения полностью аналогичны. Пусть

$$f^1, f^2, \ldots, f^p; \quad g^1, g^2, \ldots, g^q \tag{12.2}$$

есть базисы подпространств L_1, L_2, соответственно. Тогда объединение этих систем векторов есть базис подпространства $L_1 \dotplus L_2$. Действительно, для любого $x \in L_1 \dotplus L_2$ справедливо представление $x = x^1 + x^2$, где

$$x^1 = \alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2 + \cdots + \alpha_p f^p \in L_1, \quad x^2 = \beta_1 g^1 + \beta_2 g^2 + \cdots + \beta_q g^q \in L_2,$$

причем, если $x = 0$, то $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, поскольку сумма $L_1 \dotplus L_2$ прямая. Вследствие того, что $\{f^k\}_{k=1}^p$, $\{g^k\}_{k=1}^q$ — базисы, отсюда вытекает, что все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ — нули. Таким образом, система векторов (12.2) линейно независима. Теперь совершенно ясно, что $\dim(L_1 \dotplus L_2) = p + q$. $\square$

13. Теорема. *Пусть L_1, L_2 — произвольные конечномерные подпространства линейного пространства $\mathbf{X}$. Тогда*

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2). \tag{13.1}$$

Доказательство. Пространство $L_1 + L_2$, очевидно, конечномерно. Не ограничивая общности (см. п. 4, с. 122), можно считать, что $L_1 + L_2$ — евклидово пространство. Представим подпространство L_1 в виде ортогонального разложения $L_1 = (L_1 \cap L_2) \oplus (L_1 \cap L_2)_1^\perp$ (см. рис. 3). Здесь $(L_1 \cap L_2)_1^\perp$ — ортогональное дополнение $L_1 \cap L_2$ до L_1. Аналогично, $L_2 = (L_1 \cap L_2) \oplus (L_1 \cap L_2)_2^\perp$. Пусть $x \in L_1 + L_2$. Существуют векторы $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ такие, что $x = x^1 + x^2$. Представим x^1, x^2 в виде разложений $x^1 = h^1 + f$, $x^2 = h^2 + g$, где

$h^1, h^2 \in L_1 \cap L_2$, $f \in (L_1 \cap L_2)^{\perp}_1$, $g \in (L_1 \cap L_2)^{\perp}_2$. Тогда $x = h + f + g$, где $h = h^1 + h^2 \in (L_1 \cap L_2)$. Таким образом, пространство $L_1 + L_2$ представлено в виде суммы трех подпространств:

$$L_1 + L_2 = (L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_2)^{\perp}_1 + (L_1 \cap L_2)^{\perp}_2. \tag{13.2}$$

Сумма (13.2) является прямой. Действительно, если $h + f + g = 0$, где $h \in L_1 \cap L_2$, $f \in (L_1 \cap L_2)^{\perp}_1$, $g \in (L_1 \cap L_2)^{\perp}_2$, то $f = -(g + h) \in L_2$, следовательно, $f \in L_1 \cap L_2$, но $f \in (L_1 \cap L_2)^{\perp}_1$, значит, $f = 0$. Точно так же получаем, что $g = 0$, но тогда и $h = 0$. Применяя теперь теорему 12, можем написать, что

$$\dim(L_1+L_2) = \dim(L_1\cap L_2)+\dim((L_1\cap L_2)^{\perp}_1)+\dim((L_1\cap L_2)^{\perp}_2). \tag{13.3}$$

По той же теореме

$$\dim((L_1 \cap L_2)^{\perp}_1) = \dim(L_1) - \dim(L_1 \cap L_2), \tag{13.4}$$

$$\dim((L_1 \cap L_2)^{\perp}_2) = \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2). \tag{13.5}$$

Из (13.3)–(13.5), очевидно, вытекает (13.1). $\Box$

14. Следствие. *Пусть L_1, L_2 — подпространства n-мерного пространства $\mathbf{X}_n$, причем* $\dim L_1 + \dim L_2 > n$ *Тогда $L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$.*

Доказательство. Поскольку $L_1 + L_2$ — подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, то $\dim(L_1 + L_2) \leqslant n$, но тогда (см. (13.1))

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 + L_2) \geqslant 1. \ \Box$$

Глава 5

Линейные операторы и матрицы

§ 1. Линейные операторы

1. Линейные операторы. Пусть $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — линейные пространства. Будем говорить, что задано *отображение* φ пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{Y}$ (пишут $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$), если каждому вектору x из $\mathbf{X}$ поставлен однозначно в соответствие вектор $\varphi(x)$ из $\mathbf{Y}$. Говорят также в этом случае, что на пространстве $\mathbf{X}$ задана *функция* φ со значениями в $\mathbf{Y}$. Подчеркнем, что при этом, вообще говоря, не каждый вектор из $\mathbf{Y}$ должен быть результатом отображения некоторого вектора x из $\mathbf{X}$.

Отображение φ называется *линейным*, если для любых $x, y \in \mathbf{X}$ и любых α, $\beta \in \mathbf{C}$

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y). \tag{1.1}$$

В линейной алгебре, почти исключительно, рассматриваются линейные отображения. Обычно, их называют *линейными операторами* (или просто операторами) и обозначают большими латинским буквами. Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводят к недоразумениям, не пишут. Так, равенство (1.1) применительно к оператору A запишется в виде

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Из определения линейного отображения сразу вытекает, что

$$A0 = 0$$

для любого оператора A.

Если оператор действует из пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{X}$, то говорят, что он действует в пространстве $\mathbf{X}$ или является *преобразованием* пространства $\mathbf{X}$.

Приведем примеры операторов.

1) Нулевой оператор. Этот оператор переводит все векторы пространства $\mathbf{X}$ в нулевой вектор пространства $\mathbf{Y}$. *Нулевой оператор* обозначают символом 0, так что $0x = 0$ для всех $x \in \mathbf{X}$.

2) Единичный (тождественный) оператор. Оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}$, называется *единичным*, если он оставляет без изменения все векторы пространства $\mathbf{X}$. Единичный оператор будем обозначать через I.

3) Оператор проектирования. Пусть L — конечномерное линейное подпространство евклидова пространства $\mathbf{X}$. *Проектором (оператором проектирования*; часто говорят более подробно: *оператор ортогонального проектирования*) пространства $\mathbf{X}$ на L называется отображение P, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in \mathbf{X}$ его проекцию y на L (см. п. 10, с. 130).

Покажем, что P — линейный оператор. Пусть $x^1, x^2 \in \mathbf{X}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Пусть, далее, $y^1 = Px^1$, $y^2 = Px^2$. По определению проекции вектора на подпространство имеем

$$x^1 = Px^1 + z^1, \tag{1.2}$$

$$x^2 = Px^2 + z^2, \tag{1.3}$$

причем

$$(z^1, h) = 0, \ (z^2, h) = 0 \quad \text{для любого вектора} \quad h \in L. \tag{1.4}$$

Умножая почленно равенства (1.2), (1.3) на α, β соответственно, а затем складывая полученные равенства, можем написать, что

$$\alpha x^1 + \beta x^2 = (\alpha Px^1 + \beta Px^2) + \alpha z^1 + \beta z^2. \tag{1.5}$$

Из (1.4) вытекает, что $(\alpha z^1 + \beta z^2, h) = 0$ для любого вектора $h \in \mathbf{X}$, а это означает, что вектор $\alpha Px^1 + \beta Px^2$ есть проекция вектора $\alpha x^1 + \beta x^2$ на подпространство L, т. е. $P(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha Px^1 + \beta Px^2$ и, стало быть, линейность оператора P доказана.

4) Умножение матрицы на вектор. Пусть $A(m, n)$ — прямоугольная матрица. Поставим в соответствие каждому вектору $x \in \mathbf{C}^n$ вектор $y \in \mathbf{C}^m$ при помощи равенства (см. п. 5, с. 79)

$$y = Ax. \tag{1.6}$$

Операция умножения матрицы на вектор — линейная операция, поэтому соотношение (1.6) определяет линейный оператор, действующий из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$.

2. Полезно отметить, что если в пространстве $\mathbf{X}_n$ фиксирован некоторый базис $\{e^j\}_{j=1}^n$, то определяя линейный оператор A, достаточно описать его действие на векторы базиса, так как для любого вектора $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e^j$ имеем $Ax = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j A e^j$.

3. Действия над операторами. Пусть $A, B : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, A, B — линейные операторы, α, β — числа. Оператор $\alpha A + \beta B : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, называемый *линейной комбинацией* операторов A, B, определяется соотношением

$$(\alpha A + \beta B)x = \alpha(Ax) + \beta(Bx) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}. \tag{3.1}$$

Пусть $A : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $B : \mathbf{Y} \to \boldsymbol{Z}$, A, B — линейные операторы. Оператор $BA : \mathbf{X} \to \boldsymbol{Z}$, определяемый соотношением

$$BAx = B(Ax) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, \tag{3.2}$$

называется *произведением операторов* A, B.

Упражнение. Показать, что отображения $\alpha A + \beta B$, BA — линейные операторы.

4. Обратный оператор. Говорят, что линейный оператор $A : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ имеет *обратный*, если существует такой оператор $B : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, что

$$BAx = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, \tag{4.1}$$

$$ABy = y \quad \forall\, y \in \mathbf{Y}. \tag{4.2}$$

Обратный оператор, если он существует, также является линейным оператором. В самом деле, пусть y^1, $y^2 \in \mathbf{Y}$, α, $\beta \in \mathbf{C}$. Положим $x^1 = By^1$, $x^2 = By^2$. Тогда $Ax^1 = ABy^1 = y^1$, $Ax^2 = ABy^2 = y^2$. Отсюда

$$B(\alpha y^1 + \beta y^2) = B(\alpha Ax^1 + \beta Ax^2) = \\ = BA(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha x^1 + \beta x^2 = \alpha By^1 + \beta By^2.$$

Если оператор A имеет обратный, то он осуществляет взаимно-однозначное отображение пространства $\mathbf{X}$ на пространство $\mathbf{Y}$. Действительно, пусть $x^1, x^2 \in \mathbf{X}$, $x^1 \neq x^2$. Тогда и $Ax^1 \neq Ax^2$. В самом деле, если предположить, что $Ax^1 = Ax^2$, то $BAx^1 = BAx^2$ и, значит, $x^1 = x^2$. Далее, если $y \in \mathbf{Y}$, то, полагая $x = By$, получим, что $Ax = ABy = y$, т. е. всякий вектор из $\mathbf{Y}$ является результатом действия оператора A на некоторый вектор из $\mathbf{X}$.

Упражнение. Покажите, что линейный оператор не может иметь двух различных обратных операторов.

Обратный к оператору A будем обозначать через A^{-1}. Непосредственно из определения вытекает, что если оператор A^{-1} существует, то $(A^{-1})^{-1} = A$. Оператор, имеющий обратный, будем называть *обратимым.*

Примеры.

1) Единичный оператор имеет обратный, причем $I^{-1}=I$.

2) Нулевой оператор, очевидно, не имеет обратного.

3) Оператор проектирования P при условии, что подпространство L не совпадает со всем пространством $\mathbf{X}$, не имеет обратного (докажите!).

4) Всякая квадратная матрица A порядка n определяет линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{C}^n$. Если матрица A невырождена, то этот оператор имеет обратный и он порождается матрицей A^{-1} (см. п. 10, с. 85).

5. Оператор разложения по базису. Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$. Определим оператор, действующий из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{X}_n$, при помощи соотношения

$$x = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbf{C}^n. \tag{5.1}$$

Очевидно, что так определенный оператор линеен. Будем обозначать этот оператор через $\mathcal{E}$.

Поскольку $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис, то каждому $x \in \mathbf{X}_n$ однозначно соответствует $\xi \in \mathbf{C}^n$ такой, что $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e^k$. Указанное соответствие порождает *оператор разложения по базису*, действующий из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbf{C}^n$. Обозначим этот оператор через $\mathcal{E}^{-1}$.

Непосредственно из определения операторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{-1}$ вытекает, что

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}\xi = \xi \quad \forall\, \xi \in \mathbf{C}^n, \quad \mathcal{E}\mathcal{E}^{-1}x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е. операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{-1}$ взаимно обратны.

§ 2. Изоморфизм конечномерных пространств

1. Линейные пространства $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ называются *изоморфными*, если существует обратимый линейный оператор $A : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Иными словами, линейные пространства изоморфны, если между ними можно установить линейное взаимнооднозначное соответствие.

Понятно, что отношение изоморфизма обладает свойством транзитивности, и, значит, если пространства $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ изоморфны пространству $\boldsymbol{Z}$, то они изоморфны друг другу.

2. Теорема. *Все конечномерные линейные комплексные пространства одной и той же размерности изоморфны.*

Доказательство. Отношение изоморфизма транзитивно. Поэтому достаточно установить, что любое комплексное линейное пространство $\mathbf{X}_n$ изоморфно пространству $\mathbf{C}^n$. Как следует из п. 5, с. 140, линейное взаимнооднозначное соответствие пространств $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{C}^n$ осуществляет оператор разложения по любому фиксированному базису $\mathcal{E}_n$ пространства $\mathbf{X}_n$. □

Точно так же доказывается, что все вещественные линейные пространства $\mathbf{X}_n$ изоморфны пространству $\mathbf{R}^n$.

3. Теорема. *Если конечномерные пространства* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *изоморфны, то их размерности совпадают.*

Доказательство. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}$, а линейный оператор A осуществляет взаимнооднозначное отображение пространства $\mathbf{X}$ на пространство $\mathbf{Y}$. Из равенства $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k A e^k = 0$ вытекает, что $A \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k e^k = 0$. Действуя на обе части последнего равенства оператором A^{-1}, будем иметь $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k e^k = 0$, откуда получаем, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0$, т. е. векторы $\{Ae^k\}_{k=1}^n$ линейно независимы, и размерность пространства $\mathbf{Y}$ не меньше чем n. Меняя в этом рассуждении местами пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, приходим к тому, что их размерности совпадают. □

Таким образом, справедлива

4. Теорема. *Для того, чтобы два конечномерных комплексных (или вещественных) пространства были изоморфны необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали.*

Если установлен изоморфизм пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, то с точки зрения выполнения линейных операций над их элементами они оказываются эквивалентными. Так, линейные операции над элементами любого конечномерного пространства путем введения подходящего базиса всегда можно свести к линейным операциям на пространством числовых строк ($\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$). Такой подход, фактически, нами уже применялся в § 1 гл. 2, где было установлено взаимнооднозначное соответствие между векторами (направленными отрезками) и их координатами и показано, что линейные операции над векторами эквиваленты операциям над их координатами.

§ 3. Линейные функционалы

1. Линейное отображение пространства $\mathbf{X}$ в одномерное пространство $\mathbf{Y} = \mathbf{C}$ называется *линейным функционалом* (линейной формой). Подчеркнем, что линейный функционал ставит в соответствие каждому вектору $x \in \mathbf{X}$ число.

2. Теорема Рисса[1]**.** *Пусть l — линейный функционал, заданный на конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Тогда существует и при том только один вектор $u \in \mathbf{X}_n$ такой, что*

$$l(x) = (x, u) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n. \tag{2.1}$$

Доказательство. Убедимся сначала, что вектор u определяется по функционалу l однозначно. Действительно, если предположить, что существует еще один вектор $u^1 \in \mathbf{X}_n$ такой, что

$$l(x) = (x, u^1) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n, \tag{2.2}$$

то, вычитая равенства (2.1), (2.2) почленно, получим, что

$$(x, u^1 - u) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

В частности, в последнем равенстве можно положить $x = u^1 - u$ и тогда $(u^1 - u, u^1 - u) = 0$, т. е. $u^1 = u$.

Для доказательства существования вектора u, определяемого тождеством (2.1), фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ некоторый ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ и пусть $x = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k e^k$. Тогда вследствие линейности функционал l получаем

$$l(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k l(e^k). \tag{2.3}$$

Положим $u = \sum\limits_{k=1}^n \overline{l(e^k)} e^k$. Применяя формулу (10.1), с. 125, будем иметь, что $l(x) = (x, u)$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$. $\square$

§ 4. Сопряженный оператор

1. Пусть $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ — евклидовы пространства, $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейный оператор. Оператор $A^* : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{X}_n$ называется *сопряженным* к оператору A, если

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \text{для любых } x \in \mathbf{X}_n \text{ и } y \in \mathbf{Y}_m. \tag{1.1}$$

[1]Рисс Фридьеш (Riesz Frigyes; 1880–1956) — венгерский математик.

Конечно, в левой части здесь имеется в виду скалярное произведение в пространстве $\mathbf{Y}_m$, а в правой части — в пространстве $\mathbf{X}_n$.

2. Для любого оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ сопряженный оператор существует. В самом деле, фиксируем вектор $y \in \mathbf{Y}_m$ и будем рассматривать скалярное произведение (Ax, y) как функционал на пространстве $\mathbf{X}_n$. Из линейности оператора A и линейности скалярного произведения по первому аргументу вытекает, что этот функционал линеен. Значит, по теореме Рисса существует и при том только один вектор $g \in \mathbf{X}_n$ такой, что

$$(Ax, y) = (x, g) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Таким образом, определено отображение, ставящее в соответствие каждому вектору $y \in \mathbf{Y}_m$ вектор $g \in \mathbf{X}_n$. Обозначим это отображение через A^*. Тогда можно написать, что

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,\ y \in \mathbf{Y}_m. \tag{2.1}$$

Осталось доказать, что отображение A^* линейно. Пусть $y^1, y^2 \in \mathbf{Y}_m$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Тогда

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y^1 + \beta y^2) = \bar{\alpha}(Ax, y^1) + \bar{\beta}(Ax, y^2) = \\ = \bar{\alpha}(x, A^* y^1) + \bar{\beta}(x, A^* y^2) = (x, \alpha A^* y^1 + \beta A^* y^2).\end{aligned} \tag{2.2}$$

С другой стороны, по определению отображения A^* имеем

$$(Ax, \alpha y^1 + \beta y^2) = (x, A^*(\alpha y^1 + \beta y^2)). \tag{2.3}$$

Сравнивая (2.2), (2.3) и используя произвольность вектора $x \in \mathbf{X}_n$, получаем

$$A^*(\alpha y^1 + \beta y^2) = \alpha A^* y^1 + \beta A^* y^2.$$

Из определения сопряженного оператора, очевидно, вытекает, что $(A^*)^* = A$.

Упражнения.

1) Докажите, что каждому оператору соответствует только один сопряженный оператор.

2) Покажите, что $(AB)^* = B^* A^*$ для любых операторов A, B.

§ 5. Образ оператора. Ядро оператора

1. Пусть A — линейный оператор, действующий из линейного пространства $\mathbf{X}$ в линейное пространство $\mathbf{Y}$.

Множество всех векторов y из пространства $\mathbf{Y}$ таких, что $y = Ax$ для некоторого $x \in \mathbf{X}$, называется *областью значений или образом* оператора и обозначается через $\mathrm{Im}(A)$.

Множество всех векторов $x \in \mathbf{X}$ таких, что $Ax = 0$, называется *ядром* оператора A и обозначается через $\mathrm{Ker}(A)$.

2. Теорема. *Множество* $\mathrm{Im}(A)$ *— линейное подпространство пространства* $\mathbf{Y}$.

Доказательство. Пусть $y^1, y^2 \in \mathrm{Im}(A)$. Тогда существуют $x^1, x^2 \in \mathbf{X}$ такие, что $y^1 = Ax^1$, $y^2 = Ax^2$. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ отсюда получаем, что $\alpha y^1 + \beta y^2 = \alpha Ax^1 + \beta Ax^2$. Оператор A линеен, следовательно, $\alpha y^1 + \beta y^2 = A(\alpha x^1 + \beta x^2)$, потому $\alpha y^1 + \beta y^2 \in \mathrm{Im}(A)$. $\square$

Упражнение. Покажите, что $\mathrm{Ker}(A)$ — линейное подпространство пространства $\mathbf{X}$.

3. Теорема. *Для любого линейного оператора* $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ *евклидово пространство* $\mathbf{Y}_m$ *допускает следующее ортогональное разложение:*

$$\mathbf{Y}_m = \mathrm{Ker}(A^*) \oplus \mathrm{Im}(A). \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathrm{Im}(A)$, $y^1 \in \mathrm{Ker}(A^*)$. Тогда существует $x \in \mathbf{X}_n$ такой, что $y = Ax$, следовательно,

$$(y, y^1) = (Ax, y^1) = (x, A^* y^1) = 0,$$

т. е. y ортогонален $\mathrm{Ker}(A^*)$. Если же вектор $y \in \mathbf{Y}_m$ ортогонален $\mathrm{Im}(A)$, то $(y, Ax) = 0$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$ и тогда $(A^* y, x) = 0$ для любого $x \in \mathbf{X}_n$, поэтому $A^* y = 0$, т. е. $y \in \mathrm{Ker}(A^*)$. Эти рассуждения показывают, что $\mathrm{Im}(A)$ — ортогональное дополнение $\mathrm{Ker}(A^*)$, следовательно, по теореме 11.1, с. 134, равенство (3.1) выполнено. $\square$

Очевидно, что имеет место и следующее представление:

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A^*). \tag{3.2}$$

4. Размерность подпространства $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbf{Y}_m$ называется *рангом* оператора A и обозначается через $\mathrm{rank}(A)$.

Размерность ядра оператора A называется *дефектом* оператора A и обозначается через $\mathrm{def}(A)$.

5. Теорема. *Пусть оператор A действует из конечномерного евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ в конечномерное евклидово пространство $\mathbf{Y}_m$. Тогда*

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^*). \tag{5.1}$$

Доказательство. Линейный оператор A осуществляет изоморфизм пространств $\operatorname{Im}(A^*)$ и $\operatorname{Im}(A)$. Действительно, вследствие (3.2) для любого $x \in \mathbf{X}_n$ имеем $Ax = Ax^1$, где $x^1 \in \operatorname{Im}(A^*)$, т. е. любой элемент $\operatorname{Im}(A)$ — образ некоторого элемента из $\operatorname{Im}(A^*)$. Предполагая, что $Ax' = Ax''$ для несовпадающих x', x'' из $\operatorname{Im}(A^*)$, получим, что $A(x' - x'') = 0$, следовательно, $(x' - x'') \in \operatorname{Ker}(A)$. Поскольку $\operatorname{Im}(A^*)$ — линейное подпространство, то $(x' - x'') \in \operatorname{Im}(A^*)$. Вновь используя (3.2), получаем, что $x' - x'' = 0$. Таким образом, конечномерные пространства $\operatorname{Im}(A)$ и $\operatorname{Im}(A^*)$ изоморфны, поэтому (см. теорему 3, с. 141), их размерности совпадают. □

Из равенств (5.1), (3.2) (см. также п. 8, с. 130, п. 12, с. 134) немедленно вытекает

6. Следствие. *Для любого оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$*

$$\operatorname{def}(A) = n - \operatorname{rank}(A). \tag{6.1}$$

§ 6. Матрица оператора. Некоторые классы операторов

1. Матрица оператора. Пусть $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ — линейный оператор. Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ базис $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, а в пространстве $\mathbf{Y}_m$ — базис $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$.

Представим каждый вектор Ae^i в виде разложения по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$Ae^i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} q^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \ldots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \ldots & a_{2n}^{(eq)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \ldots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

(коэффициенты разложения вектора Ae^i по базису $\mathcal{Q}_m$ образуют i-й столбец матрицы A_{eq}). Матрицу A_{eq} называют *матрицей оператора A*. Она однозначно определяется оператором A и базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$.

Соотношения (1.1) можно записать более кратко

$$A\mathcal{E}_n = \mathcal{Q}_m A_{eq}. \tag{1.3}$$

2. Пусть $x = \mathcal{E}_n \xi \in \mathbf{X}_n$, $\xi \in \mathbf{C}^n$. Представим Ax в виде разложения по базису: $Ax = \mathcal{Q}_m \eta$, $\eta \in \mathbf{C}^m$. Тогда, используя (1.3), получим

$$\mathcal{Q}_m \eta = Ax = A\mathcal{E}_n \xi = \mathcal{Q}_m A_{eq} \xi,$$

следовательно,

$$\eta = A_{eq} \xi. \tag{2.1}$$

Формула (2.1) показывает, как связаны коэффициенты разложения векторов x и Ax по базисам пространств $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ соотвественно.

Из (2.1) вытекает, что если матрица A_{eq} оператора A известна, то по заданному вектору $x \in \mathbf{X}_n$ вектор $Ax \in \mathbf{Y}_m$ можно построить следующим образом.

1) Найти вектор $\xi \in \mathbf{C}^n$ коэффициентов разложения x по базису $\mathcal{E}_n$. Это можно представить в операторном виде: $\xi = \mathcal{E}^{-1} x$.

2) Умножив матрицу A_{eq} на вектор ξ, получить вектор $\eta \in \mathbf{C}^m$ коэффициентов разложения элемента $y = Ax \in \mathbf{Y}_m$ по базису $\mathcal{Q}_m$.

3) Вычислить элемент y по найденному вектору η, что опять можно записать в операторной форме: $y = \mathcal{Q}\eta$.

3. Сказанное выше означает, что, используя операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{Q}$, порожденные базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$, соотношение (1.3) можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$A_{eq} = \mathcal{Q}^{-1} A \mathcal{E}, \quad \text{или} \quad A = \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1}. \tag{3.1}$$

Поясним, что

$$A_{eq}\xi = \mathcal{Q}^{-1} A \mathcal{E} \xi \quad \forall \xi \in \mathbf{C}^n, \qquad Ax = \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1} x \quad \forall x \in \mathbf{X}_n. \tag{3.2}$$

Равенства (3.1), (3.2) иллюстрируют следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}_n \arrow[r, "A"] & \mathbf{Y}_m \arrow[d, "\mathcal{Q}^{-1}"] \\ \mathbf{C}^n \arrow[u, "\mathcal{E}"] \arrow[r, "A_{eq}"'] & \mathbf{C}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{X}_n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\mathcal{E}^{-1}"'] & \mathbf{Y}_m \\ \mathbf{C}^n \arrow[r, "A_{eq}"'] & \mathbf{C}^m \arrow[u, "\mathcal{Q}"'] \end{tikzcd}$$

Таким образом, если в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ фиксированы некоторые базисы $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$, то всякому линейному оператору A, действующему из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbf{Y}_m$ однозначно соответствует линейный оператор, действующий из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$ (оператор умножения на матрицу A_{eq} оператора A в этих базисах), и, наоборот, всякой матрице $\mathcal{A}$ размера $m \times n$ однозначно соответствует оператор A, действующий из $\mathbf{X}_n$ в $\mathbf{Y}_m$ и определяемый по формуле $A = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{E}^{-1}$.

4. Если $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, то

$$A\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n A_e, \tag{4.1}$$

или $A_e = \mathcal{E}^{-1} A \mathcal{E}$, где A_e — матрица оператора A в базисе $\mathcal{E}_n$.

5. Отметим два очевидных случая, когда матрица оператора не зависит от выбора базиса. Это — нулевой оператор, его матрица при любом выборе базисов в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ нулевая, и тождественный оператор, его матрица — единичная матрица в любом базисе пространства $\mathbf{X}_n$.

6. Если пространство $\mathbf{Y}_m$ евклидово, можно указать полезную формулу для вычисления матрицы оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$. Именно, пусть $G = \{(q^j, q^i)\}_{i,j=1}^m$ — матрица Грама, соответствующая базису $\mathcal{Q}_m$, матрица G_A определяется равенством

$$G_A = \begin{pmatrix} (Ae^1, q^1) & (Ae^2, q^1) & \dots & (Ae^n, q^1) \\ (Ae^1, q^2) & (Ae^2, q^2) & \dots & (Ae^n, q^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Ae^1, q^m) & (Ae^2, q^m) & \dots & (Ae^n, q^m) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$G_A = G A_{eq}. \tag{6.1}$$

Действительно, умножая скалярно обе части уравнения (1.1) на q^l, получим

$$(Ae^i, q^l) = \sum_{j=1}^m a_{ji}^{(eq)} (q^j, q^l), \quad i = 1, 2, \dots, n,\ l = 1, \dots, m. \tag{6.2}$$

Формула (6.1) — это матричная запись равенств (6.2). Матрица Грама G невырождена, так как $\mathcal{Q}_m$ — базис, следовательно,

$$A_{eq} = G^{-1} G_A. \tag{6.3}$$

В случае, когда базис $\mathcal{Q}_m$ ортонормирован, т. е. матрица G единичная,

$$A_{eq} = G_A. \tag{6.4}$$

7. Из определения матрицы оператора сразу же вытекает, что

$$(\alpha A + \beta B)_{eq} = \alpha A_{eq} + \beta B_{eq}, \tag{7.1}$$

т. е. линейным операциям на операторами соответствуют линейные операции над их матрицами.

8. Аналогичное при определенных условиях справедливо и для произведения операторов. Пусть $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$, $B : \mathbf{Y}_m \to \boldsymbol{Z}_p$, A, B — линейные операторы. Будем считать, что в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$, $\boldsymbol{Z}_p$ заданы базисы $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^m$, $\{r^k\}_{k=1}^p$, соответсвенно; A_{eq} — матрица оператора A, B_{qr} — матрица оператора B, $(BA)_{er}$ — матрица оператора $BA : \mathbf{X}_n \to \boldsymbol{Z}_p$. Покажем, что

$$(BA)_{er} = B_{qr}A_{eq}, \tag{8.1}$$

т. е. матрица произведения операторов, равна произведению матриц операторов. Действительно, применяя формулы (3.1), получим

$$(BA)_{er} = \mathcal{R}^{-1}BA\mathcal{E} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}B_{qr}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}A_{eq}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E} = B_{qr}A_{eq}.$$

Важно подчеркнуть, что здесь при определении матриц операторов A и B использовался один и тот же базис $\{q^k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$. Указанное согласование базисов, обычно, предполагается выполненным.

Примеры.

1) Определим оператор $A : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ при помощи соотношения

$$Ax = (x_2, x_1, x_3 + x_4, x_4)$$

для любого $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{C}^4$. Построим матрицу оператора A в естественном базисе (см. с. 120, 103) пространства $\mathbf{C}^4$. Имеем $Ai^1 = (0,1,0,0) = i^2$, $Ai^2 = (1,0,0,0) = i^1$, $Ai^3 = (0,0,1,0) = i^3$, $Ai^4 = (0,0,1,1) = i^3 + i^4$, следовательно, матрица оператора A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) В трехмерном линейном пространстве $\mathbf{Q}_2$ всех полиномов степени не выше двух с комплексными коэффициентами определим оператор T при помощи соотношения $Tq_2(z) = q_2(z+h)$ для любого элемента $q_2 \in \mathbf{Q}_2$. Здесь h — фиксированное комплексное число (сдвиг). Построим матрицу оператора T, принимая за базис пространства $\mathbf{Q}_2$ полиномы $\varphi_0(z) \equiv 1$, $\varphi_1(z) = z$, $\varphi_2(z) = z^2$. Имеем $T\varphi_0 = \varphi_0$, $T\varphi_1 = h\varphi_0 + \varphi_1$, $T\varphi_2 = h^2\varphi_0 + 2h\varphi_1 + \varphi_2$, следовательно, матрица оператора T равна

$$\begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если $q_2(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, то $Tq_2(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2$, где

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ha_1 + h^2a_2 \\ a_1 + 2ha_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Упражнения.

1) Определим в пространстве $\mathbf{C}^n$ так называемый оператор T циклического сдвига, полагая $Tx = (x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_0)$ для каждого $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$. Построить матрицу этого оператора в базисе Фурье (см. с. 126).

2) Пусть $\mathbf{T}_n$ — линейное пространство функций вида

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число, a_0, a_k, b_k, $k = 1, \ldots, n$ — произвольные вещественные числа, x может принимать любые вещественные значения. Операции сложения функций и умножения функции на число определены обычным образом. Показать, что функции

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx$$

образуют базис этого пространства. Построить матрицу оператора дифференцирования $Df_n(x) = f_n'(x)$ в этом базисе.

3) Пусть $\mathbf{P}_n$ — линейное пространство полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Определим на этом пространстве линейный оператор A, полагая $Ap_n(x) = ap_n'(x) + bp_n$ для любого $p_n \in \mathbf{P}_n$. Здесь a, b — произвольным образом фиксированные вещественные числа. Построить матрицу оператора A в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

4) Построить матрицу оператора A, описанного в предыдущем примере, полагая при этом $b = 0$, трактуя возникающий оператор как оператор из $\mathbf{P}_n$ в $\mathbf{P}_{n-1}$ и принимая за базис пространства $\mathbf{P}_k$ базис Тейлора[1)] $\{1, (x-c), \ldots, (x-c)^k\}$, c — произвольное вещественное число.

5) Определим оператор K, действующий из $\mathbf{P}_n$ в $\mathbf{P}_{n+1}$ по формуле

$$Kp_n(x) = \int\limits_0^x p_n(t)dt.$$

Построить матрицу оператора K, принимая $\{1, x, \ldots, x^k\}$ за базис в пространстве $\mathbf{P}_k$.

6) Определим так называемый разностный оператор Δ_h, действующий из $\mathbf{Q}_n$ в $\mathbf{Q}_{n-1}$ по формуле

$$\Delta_h q_n(z) = q_n(z+h) - q_n(z),$$

[1)] Брук Тэйлор (Brook Taylor; 1685-1731) — английский математик

$\mathbf{Q}_k$ — пространство полиномов степени не выше k с комплексными коэффициентами, h — произвольным образом фиксированное комплексное число. Построить матрицу оператора Δ_h, принимая $\{1, z, \ldots, z^k\}$ за базис в пространстве $\mathbf{Q}_k$.

9. Матрица оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ определяется заданием базисов пространств $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$. Выясним, как она изменяется при изменении базисов. Пусть наряду с базисами $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^m$ заданы базисы $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$, $\{\tilde{q}^k\}_{k=1}^m$ и $A_{\tilde{e}\tilde{q}}$ — матрица оператора A в этих базисах. Будем считать известными матрицы T, R перехода к новым базисам, так что (см. с. 122)

$$\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T, \quad \tilde{\mathcal{Q}}_m = \mathcal{Q}_m R. \tag{9.1}$$

Согласно (3.1), с. 146, имеем $A = \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1}$, $A_{\tilde{e}\tilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} A \widetilde{\mathcal{E}}$, следовательно, $A_{\tilde{e}\tilde{q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{Q} A_{eq} \mathcal{E}^{-1} \widetilde{\mathcal{E}}$. На основании (9.1) для любого $\xi \in \mathbf{C}^n$ имеем $\tilde{\mathcal{E}}_n \xi = \mathcal{E}_n T \xi$, поэтому $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} T$, откуда получаем, что $\mathcal{E}^{-1} \widetilde{\mathcal{E}} = T$. Аналогично, $\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{Q} = R^{-1}$. Таким образом,

$$A_{\tilde{e}\tilde{q}} = R^{-1} A_{eq} T. \tag{9.2}$$

10. В важном частном случае, когда оператор A отображает пространство $\mathbf{X}_n$ в себя, получаем

$$A_{\tilde{e}} = T^{-1} A_e T. \tag{10.1}$$

Квадратные матрицы B, C, связанные соотношением

$$B = D^{-1} C D, \tag{10.2}$$

где D — невырожденная матрица, называют *подобными*. Говорят еще, что матрица B получена из матрицы C при помощи *преобразования подобия*.

Соотношение (10.1) показывает, что матрицы одного и того же оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ в разных базисах подобны.

11. Поскольку $\det(D^{-1}) = 1/\det(D)$ для любой невырожденной матрицы D, то определители подобных матриц совпадают. В связи с этим можно назвать *определителем оператора* $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ определитель матрицы этого оператора. Такая характеристика оператора не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$, т. е. является *инвариантом* оператора. Определитель оператора A будем обозначать через $\det(A)$.

12. Будем называть оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ *невырожденным*, если $\det(A) \neq 0$. Для любого невырожденного оператора A существует обратный. Действительно, фиксируем некоторый базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ и определим оператор B соотношением $B = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1}$. Поскольку $A = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1}$, то $BA = AB = \mathcal{E} I \mathcal{E}^{-1} = I$, значит оператор B — обратный к оператору A.

13. Как следует из предыдущих рассуждений, в любом базисе пространства $\mathbf{X}_n$ матрица обратного оператора обратна к матрице исходного оператора.

14. Теорема. *Если оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ имеет обратный, то он невырожден.*

15. Теорема. *Для того, чтобы оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $Ax = 0$ имело только тривиальное решение $x = 0$.*

Упражнение. Докажите теоремы 14, 15.

16. Если базисы $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^m$ ортонормированы, то матрицы операторов A, A^* взаимно сопряжены. Действительно, применяя формулу (6.4), получим

$$a_{li}^{(eq)} = (Ae^i, q^l), \quad l = 1, \dots, m, \ i = 1, \dots, n, \tag{16.1}$$

$$a_{il}^{*(qe)} = (A^* q^l, e^i), \quad l = 1, \dots, m, \ i = 1, \dots, n, \tag{16.2}$$

где через $a_{il}^{*(qe)}$ обозначены элементы матрицы оператора A^*, Используя теперь определение сопряженного оператора, а затем аксиому 2) скалярного произведения, можем написать

$$a_{il}^{*(qe)} = (q^l, Ae^i) = \overline{(Ae^i, q^l)} = \overline{a_{li}^{(eq)}},$$

а это и означает, что матрицы операторов A, A^* взаимно сопряжены.

17. Оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *самосопряженным* (*эрмитовым*), если $A^* = A$, иными словами, если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}_n. \tag{17.1}$$

Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе эрмитова.

18. Примером самосопряженного оператора является оператор проектирования. Действительно, пусть P — оператор проектирования на подпространство $L \subset \mathbf{X}_n$, x_1, x_2 — произвольные векторы из $\mathbf{X}_n$, По определению оператора проектирование можем написать, что $x_2 = Px_2 + y_2$, где y_2 — вектор ортогональный L, поэтому $(Px_1, x_2) = (Px_1, Px_2)$. Точно так же получаем,что $(x_1, Px_2) = (Px_1, Px_2)$, следовательно, $(Px_1, x_2) = (x_1, Px_2)$.

19. Самосопряженный оператор A называется *неотрицательным*, если

$$(Ax, x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n. \tag{19.1}$$

Самосопряженный оператор A называется *положительно определенным*, если

$$(Ax, x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \text{ из } \mathbf{X}_n. \tag{19.2}$$

Эрмитова матрица A порядка n называется *неотрицательной*, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \bar{x}_j \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{C}^n. \tag{19.3}$$

Эрмитова матрица A называется *положительно определенной*, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \bar{x}_j > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \text{ из } \mathbf{C}^n. \tag{19.4}$$

В двух последних определениях скобками обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{C}^n$.

Упражнения.

1) Покажите, что для любого оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ оператор A^*A самосопряжен и неотрицателен. Если оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_n$ обратим, то оператор A^*A положительно определен.

2) Покажите, что матрица положительно определенного оператора в любом ортонормированном базисе положительно определена.

3) Покажите, что все элементы главной диагонали положительно определенной матрицы положительны.

4) Покажите, что матрица Грама любой системы векторов в евклидовом пространстве неотрицательна.

5) Покажите, что линейная независимость системы векторов эквивалентна положительной определенности матрицы Грама этой системы векторов.

20. Унитарный оператор. Оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *унитарным*, если

$$AA^* = A^*A = I. \qquad (20.1)$$

Упражнения.

1) Покажите, что матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе унитарна.

2) Покажите, что определитель унитарного оператора по модулю равен единице.

3) Покажите, что произведение унитарных операторов — унитарный оператор.

Если оператор A унитарен, то для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$ имеем $(Ax, Ay) = (x, A^*Ay) = (x, y)$, т. е. унитарный оператор не меняет скалярного произведения векторов, и, следовательно, унитарный оператор не меняет длин векторов.

Обратно, если линейный оператор не меняет скалярного произведения любых двух векторов из $\mathbf{X}_n$, то он унитарен. В самом деле из равенства $(Ax, Ay) = (x, y)$ вытекает, что $(x, A^*Ay) = (x, y)$. Нетрудно убедиться, что поскольку последнее равенство выполнено для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$, то

$$A^*A = I. \qquad (20.2)$$

Докажем что равенство $AA^* = I$ также выполняется. Из равенства (20.2) вытекает, что $\det(A) \neq 0$, следовательно, оператор A имеет обратный. Умножая равенство (20.2) слева на A, а затем справа на A^{-1}, получим, что $AA^* = I$.

§ 7. Ранг матрицы

1. Пусть $A(m, n)$ — произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства $\mathbf{C}^m$. Ранг этой системы векторов назовем *рангом матрицы* $A(m, n)$.

2. Теорема. *Пусть* $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$, A_{eq} *— матрица оператора* A *относительно произвольным образом фиксированных базисов* $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$, $\{q_k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$. *Тогда* $\operatorname{rank}(A_{eq}) = \operatorname{rank}(A)$.

Доказательство. Пусть $x = \mathcal{E}_n\xi \in \mathbf{X}_n$. Тогда $Ax = \mathcal{Q}_m\eta$, где $\eta = A_{eq}\xi$ (см. п. 2, с. 146). Понятно, что вектор η принадлежит подпространству пространства $\mathbf{C}^m$, натянутому на столбцы матрицы A_{eq} и, следовательно, имеющему размерность, равную $\operatorname{rank}(A_{eq})$. Поскольку линейный оператор $\mathcal{Q}$ обратим, то, очевидно, указанное подпространство изоморфно $\operatorname{Im} A$, следовательно, в силу теоремы 4, с. 141, размерность $\operatorname{Im}(A)$ равна $\operatorname{rank}(A_{eq})$. $\square$

3. Таким образом, ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранга его матрицы.

4. Из теоремы 5, с. 145, и доказательства теоремы 2 немедленно вытекает, что для произвольной прямоугольной матрицы $A(m, n)$ максимальное количество линейно независимых строк равно максимальному количеству линейно независимых столбцов этой матрицы. Таким образом, получаем эквивалентное данному выше определение ранга матрицы. Ранг матрицы — это ранг системы векторов пространства $\mathbf{C}^n$, образованных строками матрицы $A(m, n)$.

5. Квадратная матрица порядка n невырождена тогда и только тогда, когда ее ранг равен n.

6. Любая перестановка строк или столбцов матрицы, очевидно, не меняет ее ранга. Более того, имеет место

7. Теорема. *Пусть $A(m, n)$ — произвольная матрица, а $B(m, m)$ и $C(n, n)$ — квадратные невырожденные матрицы. Тогда*

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BA), \tag{7.1}$$

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AC). \tag{7.2}$$

Доказательство. Для проверки справедливости равенства (7.1) достаточно заметить, что если матрица B невырождена, то для линейной независимости системы столбцов $Ba^1, \ldots, Ba^p$ необходимо и достаточно линейной независимости столбцов $a^1, \ldots, a^p$ (проверьте!). Справедливость (7.2) устанавливается затем переходом к транспонированным матрицам. $\square$

Упражнение. Показать, что для любых допускающих умножение прямоугольных матриц A, B справедливо неравенство

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

8. Базисный минор матрицы. Элементарный метод вычисления ранга матрицы. В основе построений этого пункта лежит следующая

8.1. Лемма. *Пусть матрица A имеет ранг равный r. Тогда можно так переставить столбцы и строки этой матрицы, что* *главный минор* Δ_r[1)] *порядка* r *полученной матрицы будет отличен от нуля.*

Доказательство. По условию теоремы найдутся r линейно независимых столбцов матрицы A. Выполним перестановку столбцов так, чтобы сделать их первыми r столбцами матрицы. Подматрица матрицы A, составленная из этих столбцов, очевидно, имеет ранг равный r, следовательно, r строк ее линейно независимы. Переставляя теперь строки матрицы A, так, чтобы указанные строки были ее первыми r строками, мы, очевидно, получим главный минор порядка r не равный нулю. □

Минор Δ_r, сконструированный в ходе доказательства леммы 8.1, принято называть *базисным минором* матрицы A.

Сформулируем и докажем, в некотором смысле обратное, утверждение. Пусть A — произвольная прямоугольная матрица, Δ_r — ее главный минор порядка r. Назовем главный минор Δ_{r+1} окаймляющим минором для минора Δ_r. Переставляя строки и столбцы матрицы A с номерами большим r, можно построить различные окаймляющие миноры для минора Δ_r.

8.2. Лемма. *Пусть главный минор* Δ_r *матрицы* A *не равен нулю, а все окаймляющие его миноры — нули. Тогда ранг матрицы* A *равен* r.

Доказательство. Поскольку $\Delta_r \neq 0$, первые r столбцов матрицы A линейно независимы. Покажем, что любой столбец матрицы A с номером большим r линейно выражается через ее первые r столбцов. Это и будет означать, что $\operatorname{rank}(A) = r$. Предположим противное. Тогда присоединияя к первым r столбцам матрицы A некоторый столбец с большим номером, мы получим, что образованная таким образом матрица имеет ранг $r+1$. Поэтому она имеет $r+1$ линейно независимую строку. Причем первые ее r строк линейно независимы, так как $\Delta_r \neq 0$. Значит, найдется строка с номером большим r, которая не выражается линейно через первые r строк. Делая указанную строку $r+1$-й строкой матрицы A, получим, что $\Delta_{r+1} \neq 0$, чего по условию леммы быть не может. □

8.3. Доказательство леммы 8.2 приводит к следующему способу вычисления ранга матрицы.

1) Просматриваем элементы матрицы. Если все они — нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

[1)]Напомним, что главным минором порядка r называется минор, образованный элементами матрицы, стоящими на пересечении ее первых r строк и первых r столбцов см. с. 96.

2) Если найден элемент матрицы, отличный от нуля, то, переставляя соответствующие строки и столбцы матрицы, помещаем его на место первого элемента первого столбца.

3) Окаймляем элемент a_{11}, т. е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов (например, элементы второй строки и второго столбца). Если все эти определители второго порядка — нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец (и одна линейно независимая строка). Значит ранг матрицы равен единице.

4) Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путем перестановки строк и столбцов матрицы превращаем этот определитель в определитель вида Δ_2 (образованный элементами, стоящими на перерсечении первых двух строк и первых двух столбцов) и окаймлением строим определители третьего порядка, пока не получим среди них определитель, отличный от нуля, и т. д.

Если на каком-то шаге описанного алгоритма получен определитель Δ_r, не равный нулю, а все определители порядка $r+1$, построенные его окаймлением, — нули, то это означает, что ранг матрицы равен r.

Понятно, что описанный процесс зачастую может быть ускорен. Именно, пусть удалось установить, что определитель, образованный элементами, стоящими на пересечении каких-то r строк и каких-то r столбцов матрицы, не равен нулю. Строим окаймлением этого определителя определители порядка $r+1$. Если среди них есть ненулевой, процесс продолжается. Если все такие определители — нули, то ранг матрицы равен r.

Пример. Найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в матрице A содержится минор $d = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, не равный нулю. Минор третьего порядка

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор d, не равен нулю, однако, оба минора четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

окаймляющие минор d', очевидно, равны нулю, поэтому ранг матрицы A равен трем.

§ 8. Линейные уравнения

1. В этом параграфе изучаются *линейные* уравнения, т. е. уравнений вида

$$Ax = y. \tag{1.1}$$

Здесь A — линейный оператор, действующий из евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ в евклидово пространство $\mathbf{Y}_m$, y — заданный элемент пространства $\mathbf{Y}_m$, x — искомый элемент пространства $\mathbf{X}_n$. Цель исследований — указать условия существования решений уравнения (1.1) и описать структуру множества решений этого уравнения при заданной правой части y.

2. Наряду с уравнением (1.1) мы будем рассматривать соответствующее ему *однородное* уравнение

$$Ax = 0, \tag{2.1}$$

а также так называемое однородное *сопряженное* уравнение

$$A^*x = 0. \tag{2.2}$$

Из теоремы 3, с. 144, непосредственно вытекает

2.1. Теорема Фредгольма[1]. *Для того, чтобы уравнение* (1.1) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна любому решению однородного уравнения* (2.2).

[1]Эрик Ивар Фредгольм (Erik Ivar Fredholm; 1866–1927) — шведский математик.

3. В этом пункте будем считать, что уравнение (1.1) имеет решение, и опишем структуру всех его возможных решений, иными словами, получим представление *общего* решения уравнения (1.1).

Пусть x^1, x^2 — решения уравнения (1.1) при одной и той же правой части y. Тогда, очевидно, $A(x^1 - x^2) = 0$, т. е. $x^1 - x^2 \in \mathrm{Ker}(A)$. Отсюда вытекает, что если фиксировать некоторое решение уравнения (1.1) (обозначим его через x^0 и будем называть *частным* решением неоднородного уравнения), то любое другое решение (1.1) имеет вид $x = x^0 + \tilde{x}$, где $\tilde{x} \in \mathrm{Ker}(A)$. Пусть $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^p$ — некий базис в $\mathrm{Ker}(A)$. Тогда

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k. \tag{3.1}$$

Таким образом, представление общего решения уравнения (1.1) получено. Меняя в (3.1) коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_p$, можно получить любое решение этого уравнения.

Векторы $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^p$ принято называть *фундаментальной системой решений* однородного уравнения (2.1); $\tilde{x} = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \varphi^k$ — *общим решением* однородного уравнения.

Итак, общее решение уравнения (1.1) есть сумма его какого-либо частного решения уравнения (1.1) и общего решения однородного уравнения (2.1).

4. При фактическом построении решений уравнения (1.1) нужно ввести некоторые базисы $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$ в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ и перейти к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ξ разложения вектора x по базису $\mathcal{E}_n$, считая известными коэффициенты η разложения вектора y по базису $\mathcal{Q}_m$. В результате (см. с. 146), получим

$$A_{eq}\xi = \eta, \tag{4.1}$$

где A_{eq} — матрица оператора A. Более подробная запись уравнения (4.1) дает

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(eq)} \xi_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.2}$$

Подчеркнем, что коэффициенты $a_{ij}^{(eq)}$ этой системы уравнений, элементы матрицы оператора A, и столбец правой части $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ предполагаются известными, а числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ требуется найти.

В отличие от рассматривавшихся нами ранее систем линейных алгебраических уравнений (см. § 3, гл. 3) у системы уравнений (4.2) количество уравнений и число неизвестных, вообще говоря, различны.

Задачи (1.1), (4.1) эквивалентны в том смысле, что если ξ — решение уравнения (4.1), то $x = \mathcal{E}_n \xi$ — решение уравнения (1.1) при $y = \mathcal{Q}_m \eta$, и наоборот, если x — решение уравнения (1.1), то коэффициенты разложения векторов x, y по соответствующим базисам связаны соотношением (4.1).

5. Редукция задачи (1.1) к системе линейных алгебраических уравнений (4.1) позволяет получить и некоторые дополнительные теоретические результаты. Для упрощения их формулировок будем считать, что базисы $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$ ортонормированы.

При этом предположении уравнение (2.2) эквивалентно системе уравнений

$$A_{eq}^* \xi = 0, \tag{5.1}$$

где A_{eq}^*, матрица, сопряженная матрице A_{eq}, есть матрица оператора A^* (см. с. 151). Напомним также (см. с. 125), что скалярные произведения векторов в пространствах $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ можно вычислять как стандартные скалярные произведения векторов коэффициентов их разложений по соответствующим базисам $\{e^k\}_{k=1}^n$ или $\{q^k\}_{k=1}^m$.

Интерпретируем теперь теорему Фредгольма в терминах систем (4.1), (5.1). Заметим, прежде всего, что принадлежность вектора $x = \sum\limits_{k=1}^m \xi_k q^k$ множеству $\operatorname{Ker}(A^*)$ эквивалентна тому, что вектор ξ — решение системы (5.1). Последнее означает, что вектор ξ ортогонален столбцам матрицы A_{eq} в смысле стандартного скалярного произведения. Принадлежность вектора $y = \sum\limits_{k=1}^m \eta_k q^k$ множеству $\operatorname{Im}(A)$ эквивалентна тому, что вектор η ортогонален в смысле стандартного скалярного произведения каждому решению системы (5.1), а это означает, что вектор η принадлежит подпространству, натянутому на столбцы матрицы A_{eq}.

Таким образом, теорема Фредгольма эквивалентна следующему очевидному утверждению. Для того, чтобы система уравнений (4.1) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы столбец правой части η принадлежал подпространству пространства $\mathbf{C}^m$, натянутому на столбцы матрицы A_{eq}.

Этот признак разрешимости системы (4.1) часто формулируют, используя понятие ранга матрицы. Пусть (A_{eq}, η) — так называемая *расширенная* матрица системы (4.1), т. е. матрица, получающаяся из A_{eq} добавлением столбца η. Добавление столбца не уменьшает ранга матрицы, и, очевидно, что ранг сохраняется тогда и только тогда, когда η есть линейная комбинация столбцов матрицы A_{eq}. Таким образом, справедлива

5.1. Теорема Кронекера — Капелли[1]. *Для того, чтобы система уравнений* (4.1) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц* A_{eq} *и* (A_{eq}, η) *совпадали.*

6. Упражнение. Покажите, что теорему 15, с. 151, можно вывести из теоремы Фредгольма 2.1.

7. Опишем теперь элементарные способы, которые можно применять для построения частного решения системы линейных уравнений (4.1) и фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы линейных уравнений.

7.1. Начнем с построения частного решения системы линейных уравнений. Для упрощения записей будем далее обозначать матрицу A_{eq} через A. Предположим, что условие разрешимости системы (4.1) выполнено и положим $r = \operatorname{rank}(A, \eta)$.

Используя описанные на с. 155 приемы вычисления ранга матрицы, приведем матрицу (A, η) к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы будет отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы (A, η), начиная с $(r + 1)$-й есть линейные комбинации первых r строк. Подчеркнем, что выполняемые указанным способом преобразования приводят к системе линейных уравнений, эквивалентной системе (4.1), причем последние $(r+1)$ уравнений преобразованной системы — следствия первых r уравнений.

Отбросим эти последние уравнения, а в оставшихся r уравнениях перенесем слагаемые, содержащие переменные с $(r + 1)$-й и до n-й (эти переменные принято называть *свободными*), в правую часть.

Придадим свободным переменным любые значения (чаще всего, нет никаких причин не брать их равными нулю). В результате получим систему из r уравнений с r неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля. Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем ξ_1, ξ_2, $\dots$, ξ_r. Таким образом, будет построен вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$, являющийся решением системы (4.1).

Пример. Найдем частное решение системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \tag{7.1}$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \tag{7.2}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20. \tag{7.3}$$

[1] Альфредо Капелли (Alfredo Capelli; 1858–1916) — итальянский математик.

Определитель
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$
находящийся в левом верхнем углу матрицы системы уравнений, не равен нулю. Определители
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 20 \end{vmatrix},$$
окаймляющие определитель Δ_2 — нули. Поэтому ранг основной матрицы системы уравнений равен двум, и ранг расширенной матрицы системы уравнений равен двум. Система совместна, причем последнее уравнение — следствие первых двух уравнений системы. Таким образом, чтобы найти частное решение системы (7.1)–(7.3), достаточно решить систему двух уравнений (7.1)–(7.2), придавая x_3, x_4 произвольные значения. Полагая $x_3 = x_4 = 0$, находим $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, следовательно, вектор $x = (6, 2, 0, 0)$ — решение системы (7.1)–(7.3).

7.2. Обратимся теперь к задаче построения фундаментальной системы решений однородной системы уравнений
$$Ax = 0 \tag{7.4}$$
с матрицей размера $m \times n$. Пусть $\operatorname{rank}(A) = r$. Вследствие (6.1), с. 145, достаточно построить любые $n - r$ линейно независимых решений однородной системы уравнений (7.4). Будем, естественно, предполагать, что $n > r$.

Выполнив те же действия, что в п. 5.1, приведем систему уравнений (7.4) к эквивалентной системе вида
$$A(r, r)x(r, 1) + B(r, n - r)y(n - r, 1) = 0. \tag{7.5}$$
Здесь $A(r, r)$ — невырожденная матрица, столбец $y((n - r), 1)$ соответствует свободным переменным. Выберем векторы
$$y^1((n - r), 1),\ y^2((n - r), 1),\ \ldots, y^{n-r}((n - r), 1) \tag{7.6}$$
так, чтобы они были линейно независимы (проще всего их взять как векторы стандартного базиса пространства $\mathbf{C}^{n-r}$). По этим векторам из уравнений
$$A(r, r)x^k(r, 1) + B(r, (n - r))y^k((n - r), 1) = 0,$$
$k = 1, \ldots, n - r$, однозначно определятся векторы
$$x^1(r, 1),\ x^2(r, 1),\ \ldots, x^{n-r}(r, 1).$$

Образуем теперь векторы $z^k(n,1)$, приписывая к компонентам векторов $x^k(r,1)$ компоненты векторов $y^k((n-r),1)$:

$$z^k(n,1) = (x^k(r,1), y^k((n-r),1)), \quad k = 1, \ldots, n-r.$$

По построению $Az^k = 0$ для $k = 1, \ldots, n-r$, кроме того, очевидно, векторы z^k, $k = 1, \ldots, n-r$, линейно независимы, так как векторы системы (7.6) линейно независимы. Таким образом, векторы z^k, $k = 1, \ldots, n-r$, образуют фундаментальную систему решений однородной системы уравнений (7.4).

Пример. Найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \tag{7.7}$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \tag{7.8}$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0. \tag{7.9}$$

Ранг матрицы этой системы, как было показано при решении предыдущего примера, равен двум. Поэтому нужно построить два линейно независимых (непропорциональных) решения системы (7.7)–(7.9). Как уже было установлено, последнее уравнение системы — следствие первых двух. Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ в уравнениях (7.7), (7.8), получим

$$x_1 - x_2 + 1 = 0, \tag{7.10}$$
$$x_1 + x_2 + 2 = 0, \tag{7.11}$$

откуда $x_1 = -3/2$, $x_2 = -1/2$. Полагая же $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ в уравнениях (7.7), (7.8), будем иметь $x_1 = -1$, $x_2 = -2$. Поэтому векторы $x^1 = (-3/2, -1/2, 1, 0)$, $x^2 = (-1, -2, 0, 1)$ образуют фундаментальную систему решений системы уравнений (7.7)–(7.9). Любой вектор

$$x = c_1(-3/2, -1/2, 1, 0) + c_2(-1, -2, 0, 1), \tag{7.12}$$

где c_1, c_2 — произвольные числа, — решение системы (7.7)–(7.9), и наоборот, любое решение системы уравнений (7.7)–(7.9) представимо в виде (7.12) при некоторых c_1, c_2.

Глава 6
Строение линейного оператора

В этой главе подробно исследуются операторы, действующие в комплексном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Основное внимание уделено тем классам операторов, которые уже были введены в предыдущей главе. Рассмотрены также и операторы, действующие в конечномерном вещественном евклидовом пространстве.

§ 1. Инвариантные подпространства. Собственные векторы

1. Инвариантные подпространства. Пусть $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — линейный оператор. Подпространство $L \subset \mathbf{X}_n$ называется *инвариантным подпространством* оператора A, если оператор A отображает всякий вектор x из L в вектор, также принадлежащий подпространству L.

Тривиальные подпространства, т. е. $L = \{0\}$ и $L = \mathbf{X}_n$ являются инвариантными подпространствами любого оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$.

Пусть P — оператор проектирования на подпространство L. Тогда $Px = x$ для любого $x \in L$ и $Px = 0$ для любого $x \in L^\perp$, т. е. L и $L^\perp$ — инвариантные подпространства оператора P.

Приведем простой, но в то же время, как мы увидим в дальнейшем, исключительный пример оператора, не имеющего нетривиальных инвариантных подпространств.

Пусть $\mathbf{X}_2$ — двумерное вещественное евклидово пространство. Нетрудно убедиться, что если L — нетривиальное подпространство $\mathbf{X}_2$, то L — множество векторов вида αe, где e — фиксированный ненулевой вектор, а α пробегает все множество вещественных чисел (можно сказать, что L — прямая на плоскости, проходящая через начало координат). Введем в $\mathbf{X}_2$ ортонормированный базис e^1, e^2. Пусть $Q : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_2$ — оператор, отображающий каждый вектор $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2$ в вектор $y = -\xi_2 e^1 + \xi_1 e^2$. Векторы x, y ортогональны и поэтому ясно, что если L — нетривиальное подпространство $\mathbf{X}_2$, то для $x \in L$ вектор $Qx \in L^\perp$ и, следовательно, $Qx \notin L$, если $x \neq 0$, т. е. оператор Q не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

2. Если известен базис инвариантного подпространства, то вид матрицы оператора может быть упрощен. Именно, пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$, L — подпространство $\mathbf{X}_n$, инвариантное относительно оператора A и имеющее размерность m. Пусть векторы $\{e^k\}_{k=1}^m$ принадлежат L. Тогда $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L (докажите!) и

$$Ae^k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^{(e)} e^j,\ k = 1, \dots, m,\ Ae^k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{(e)} e^j,\ k = m+1, \dots, n.$$

Эти равенства показывают, что элементы матрицы A_e, стоящие на пересечении первых m столбцов и последних $(n-m)$ строк, — нули, следовательно, матрица A_e может быть записана как блочная 2×2 треугольная матрица:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где A_{11} — квадратная матрица размера m, A_{22} — квадратная матрица размера $n-m$, 0 — нулевая матрица размера $(n-m) \times m$, A_{12} — матрица размера $m \times (n-m)$.

Еще большее упрощение матрицы A_e достигается, когда пространство $\mathbf{X}_n$ представимо в виде прямой суммы инвариантных подпространств L и M оператора A, т. е. $\mathbf{X}_n = L \dotplus M$ и базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbf{X}_n$ выбран так, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L. Тогда, как нетрудно видеть, в представлении (2.1) матрица A_{12} будет нулевой, т. е. матрица A_e принимает блочно диагональный вид

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Очевидно, верно и обратное, а именно, если матрица оператора в некотором базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$ имеет блочную структуру вида (2.2), то пространство $\mathbf{X}_n$ представимо как прямая сумма двух подпространств, базисами этих подпространств будут векторы базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$ с номерами, совпадающими с номерами строк соответствующих блоков.

Вообще говоря, и подпространства L и M могут распадаться на прямые суммы инвариантных подпространств меньшей размерности. Тогда количество блоков, стоящих на диагонали матрицы A_e, будет увеличиваться, а их размеры будут уменьшаться.

Наиболее простым является случай, когда пространство $\mathbf{X}_n$ может быть представлено в виде прямой суммы n одномерных инвариантных подпространств оператора A. Тогда матрица A_e становится диагональной. Однако, такое представление возможно лишь для некоторых специальных классов операторов.

3. Лемма. *Пусть* $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ *— невырожденный оператор. Пусть* $L \subset \mathbf{X}_n$ *— инвариантное подпространство оператора* A. *Тогда для любого* $x \in L$ *найдется, и при том только один, вектор* $y \in L$ *такой, что* $Ay = x$[1]*.*

Доказательство. Подпространство L инвариантно относительно оператора A, поэтому можно ввести в рассмотрение оператор $A_L : L \to L$, полагая $A_L x = Ax$ для $x \in L$. Оператор A_L не вырожден, так как если $A_L x = Ax = 0$, то $x = 0$, поскольку A не вырожден (см. теорему 15, с. 151). Отсюда вытекает, что уравнение $A_L y = x$ при любом $x \in L$ имеет единственное решение $y \in L$. □

Оператор A_L, определенный в ходе доказательства теоремы 3, называют *сужением оператора* A на его инвариантное подпространство L.

4. Собственные числа и собственные векторы. В пункте 2 была показана особая роль одномерных инвариантных подпространств оператора. С понятием одномерного инвариантного подпространства тесно связано понятие собственного вектора оператора.

4.1. Будем говорить, что вектор $x \in \mathbf{X}_n$ — *собственный вектор оператора* $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, если $x \neq 0$ и существует число $\lambda \in \mathbf{C}$ такое, что

$$Ax = \lambda x. \tag{4.1}$$

Число λ при этом называется *собственным числом оператора* A. Говорят, что собственный вектор x соответствует (отвечает) собственному числу λ. Собственный вектор и соответствующее ему собственное число называют также *собственной парой оператора* A.

4.2. Если x — собственный вектор, то вектор μx при $\mu \neq 0$ тоже — собственный вектор оператора A, отвечающий собственному числу λ. Далее, если x, y — собственные векторы оператора A, отвечающие собственному числу λ, то вектор $x + y$ также — собственный вектор оператора A, отвечающий собственному числу λ. Это означает, что, присоединяя к множеству **всех** собственных векторов, отвечающих собственному числу λ, нулевой вектор, мы получим подпространство L_λ, называемое *собственным подпространством оператора* A,

[1]Можно сказать, таким образом, что невырожденный оператор осуществляет взаимнооднозначное отображение любого своего инвариантного подпространства на это же подпространство.

отвечающим собственному числу λ. Подпространство L_λ — инвариантное подпространство оператора A.

Приведем простые примеры операторов, имеющих собственные векторы.

1) Для нулевого оператора всякий вектор пространства $\mathbf{X}_n$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному нулю.

2) Для оператора αI, где $\alpha \in \mathbf{C}$, всякий вектор пространства есть собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному α.

3) Пусть P — оператор проектирования пространства $\mathbf{X}_n$ на подпространство L. Тогда $Px = x$ для любого вектора x из L, и $Px = 0$ для любого $x \in L^\perp$, т. е. все векторы из L — собственные векторы оператора P и все они отвечают собственному числу, равному единице, тогда как все векторы из $L^\perp$ — собственные векторы оператора P, отвечающие собственному числу, равному нулю.

В вещественном пространстве $\mathbf{X}_n$ не всякий оператор имеет собственные векторы. Так, например, оператор Q, построенный в пункте 1, не имеет собственных векторов в вещественном пространстве $\mathbf{X}_2$. Это сразу следует из того, что оператор Q не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

4.3. Теорема. *Всякий оператор A, действующий в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет собственные векторы.*

Доказательство. Убедимся, что существуют $\lambda \in \mathbf{C}$ такие, что линейное уравнение

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{4.2}$$

имеет нетривиальное решение. Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ некоторый базис $\mathcal{E}_n$. Пусть A_e — матрица оператора A в этом базисе. Рассмотрим уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0. \tag{4.3}$$

Нетрудно убедиться, что $\det(A_e - \lambda I)$ — полином порядка n относительно λ. Поэтому уравнение (4.3) имеет n корней $\lambda_1, \ \dots, \lambda_n$. Всякий корень уравнения (4.3) — собственное число оператора A. В самом деле,

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0 \tag{4.4}$$

есть однородная система уравнений с вырожденной матрицей, следовательно, она имеет нетривиальное решение. Обозначим это решение через ξ^k. Тогда вектор $x^k = \mathcal{E}_n \xi^k$, очевидно, будет не равен нулю и будет решением уравнения $(A - \lambda_k I)x^k = 0$. $\square$

4.4. Полином $\det(B - \lambda I)$ называется *характеристическим полиномом матрицы* B. Корни характеристического полинома называются *характеристическими (собственными) числами матрицы* B. Множество всех характеристических чисел матрицы B называется ее *спектром* и обозначается через $\mathrm{sp}(B)$. Как установлено в ходе доказательства теоремы 4.3, для любого числа $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$ существует вектор $x \in \mathbf{C}^n$, не равный нулю, и такой, что

$$Bx = \lambda x.$$

Вектор x называется *собственным вектором матрицы* B, соответствующим характеристическому числу λ этой матрицы.

4.5. Теорема. *Характеристические полиномы, а следовательно, и спектры подобных матриц совпадают.*

Доказательство. Пусть T — невырожденная матрица, матрица $C = T^{-1}BT$ — подобна матрице B. Тогда

$$C - \lambda I = T^{-1}BT - \lambda I = T^{-1}(B - \lambda I)T.$$

Поскольку $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$, то $\det(C - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$. $\square$

4.6. Матрицы оператора в различных базисах подобны, поэтому характеристический полином матрицы оператора и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$. Характеристический полином матрицы оператора естественно называть поэтому *характеристическим полиномом оператора.*

Характеристические числа матрицы A_e оператора A называются *характеристическими числами оператора.* Они, таким образом, являются инвариантами оператора.

Множество всех характеристических чисел оператора A (часто называемое его *спектром*) будем обозначать через $\mathrm{sp}(A)$.

Из доказательства теоремы 4.3 вытекает, что для оператора, действующего в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, понятия характеристического и собственного числа, фактически, не различаются, и применительно к таким операторам соответствующие термины используются как синонимы.

4.7. Понятно, что любой оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет не более чем n различных собственных чисел.

4.8. Теорема. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *— собственные числа оператора* $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$. *Пусть все они попарно различны. Пусть,* *далее, $x^1, x^2, \ldots, x^p$ — собственные векторы оператора A, причем $Ax^k = \lambda_k x^k$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Тогда векторы $x^1, x^2, \ldots, x^p$ линейно независимы.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда в множестве векторов $x^1, x^2, \ldots, x^p$ можно указать максимальную линейно независимую подсистему. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что — это векторы $x^1, x^2, \ldots, x^r$, $r < p$. Пусть L_r — подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на векторы $x^1, x^2, \ldots, x^r$. Оно имеет размерность r и инвариантно, относительно оператора A. Пусть A_{L_r} — сужение оператора A на L_r. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — собственные числа оператора A_{L_r}. Все они различны. Ненулевой вектор x^{r+1} принадлежит L_r и $A_{L_r}x^{r+1} = Ax^{r+1} = \lambda_{r+1}x^{r+1}$, т. е. λ_{r+1} — собственное число оператора A_{L_r}, но оператор A_{L_r} действует в пространстве размерности r и потому не может иметь больше чем r различных собственных чисел. $\square$

4.9. Из сказанного выше вытекает, что если у оператора A все собственные числа оказываются различными, то соответствующие им собственные векторы x^k, $k = 1, \ldots, n$, образуют базис пространства $\mathbf{X}_n$. По построению

$$Ax^k = \lambda_k x^k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

поэтому матрица оператора A в базисе $\{x^k\}_{k=1}^n$ — диагональная матрица, по диагонали которой расположены числа λ_k, $k = 1, \ldots, n$.

Пример. Найдем все собственные числа и собственные векторы оператора A, действующего в комплексном пространстве $\mathbf{X}_3$ и заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0. \tag{4.5}$$

Очевидно, $\lambda = 1$ — корень этого уравнения. Нетрудно проверить, что

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13).$$

Корни уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ есть $2 \pm 3i$. Таким образом,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 + 3i, \quad \lambda_3 = 2 - 3i$$

есть собственные числа оператора A.

Координаты собственного вектора, отвечающего λ_1, есть решение однородной системы уравнений

$$3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \tag{4.6}$$

$$x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0, \tag{4.7}$$

$$-4x_1 + 4x_3 = 0. \tag{4.8}$$

Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. Поэтому ранг матрицы системы уравнений (4.6)– (4.8) равен двум и, следовательно, эта система уравнений может иметь лишь одно линейно независимое решение. Положим $x_3 = 1$ и найдем x_1, x_2, решая систему уравнений (4.6)–(4.7). Получим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Таким образом, вектор $(1, 2, 1)$ — решение системы уравнений (4.6)–(4.8). Отсюда вытекает, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_1 = 1$, есть множество векторов вида $c(1, 2, 1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Координаты собственного вектора, отвечающего λ_2, есть решение однородной системы уравнений

$$(2 - 3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0, \tag{4.9}$$

$$x_1 - (6 + 3i)x_2 + 9x_3 = 0, \tag{4.10}$$

$$-4x_1 + (3 - 3i)x_3 = 0. \tag{4.11}$$

Определитель $\begin{vmatrix} 2 - 3i & -5 \\ 1 & -(6 + 3i) \end{vmatrix} \neq 0$. Поэтому координаты собственного вектора найдем, решая систему уравнений (4.9)–(4.10) при $x_3 = 1$. Получим $x_1 = (3 - 3i)/4$, $x_2 = (5 - 3i)/4$. Таким образом, множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_2, есть множество векторов вида $c(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Аналогичные вычисления показывают, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_3, есть множество векторов вида $c(3 + 5i, 5 + 3i, 4)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

В рассматриваемом примере все собственные числа различны. Соответствующие им собственные векторы образуют базис пространства $\mathbf{C}^3$. Это видно и из того, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 - 3i & 5 - 3i & 4 \\ 3 + 5i & 5 + 3i & 4 \end{vmatrix},$$

составленный из их координат, не равен нулю.

В случае, когда характеристический полином оператора A имеет кратные корни, соответствующих им линейно независимых векторов может оказаться меньше, чем n, и они не будут базисом пространства $\mathbf{X}_n$.

Пример. Найдем все собственные числа и собственные векторы оператора A, действующего в комплексном пространстве $\mathbf{X}_3$ и заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение есть $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$. Корни этого уравнения есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Система уравнений для отыскания координат собственного вектора имеет, следовательно, вид

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \tag{4.12}$$

$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \tag{4.13}$$

$$-x_1 - x_3 = 0. \tag{4.14}$$

Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ не равен нулю. Поэтому ранг матрицы этой системы равен двум, и линейное пространство решений системы (4.12)–(4.14) одномерно. Нетрудно видеть, что вектор $x = (1, 1, -1)$ — решение системы (4.12)–(4.14). Следовательно, множество всех собственных векторов матрицы — это множество векторов вида $c(1, 1, -1)$, где c — произвольное не равное нулю число. Понятно, что собственные векторы матрицы в рассматриваемом случае не образуют базиса в пространстве $\mathbf{C}^3$.

4.10. Говорят, что оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ есть оператор *простой структуры*, если можно указать базис пространства $\mathbf{X}_n$, все векторы которого — собственные векторы оператора A.

В дальнейшем (см. § 3, § 4 этой главы) будут указаны некоторые классы операторов простой структуры.

Упражнение. Пусть A — оператор, действующий в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, L — инвариантное подпространство оператора A. Показать, что у оператора A есть собственный вектор, принадлежащий L.

5. Пусть теперь оператор A действует в вещественном пространстве $\mathbf{X}_n$. Матрица A_e оператора A в любом базисе $\mathcal{E}_n$ вещественна. Уравнение (4.3), т. е. характеристическое уравнение матрицы A_e, — алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами. Оно, вообще говоря, имеет как вещественные, так и комплексные корни.

Если λ — вещественный корень уравнения (4.3), то система уравнений

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0 \tag{5.1}$$

имеет нетривиальное вещественное решение ξ и для вектора $x = \mathcal{E}_n\xi$ выполнено равенство $Ax = \lambda x$, т. е. x — собственный вектор оператора A. Таким образом, все вещественные характеристические числа матрицы A_e — собственные числа оператора A.

Если число λ не совпадает ни с одним из вещественных корней уравнения (4.3), то система уравнений (5.1) не может иметь нетривиальных вещественных решений, поэтому, если все корни уравнения (4.3) — комплексные числа, то оператор A не имеет собственных векторов.

Таким образом, линейный оператор, действующий в вещественном пространстве, может не иметь одномерных инвариантных подпространств.

5.1. Каждому комплексному характеристическому числу матрицы A_e соответствует двумерное инвариантное подпространство оператора A.

Действительно, если $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексное характеристическое число матрицы A_e, то $\det(A_e - \lambda I) = 0$ и система уравнений

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0 \tag{5.2}$$

имеет нетривиальное комплексное решение $\xi = \zeta + i\eta$. Поясним, что ζ и η — векторы из $\mathbf{R}^n$. Более подробная запись системы (5.2), с учетом того, что A_e — вещественная матрица, дает

$$A_e\zeta + iA_e\eta = (\alpha + i\beta)(\zeta + i\eta) = \alpha\zeta - \beta\eta + i(\beta\zeta + \alpha\eta),$$

откуда, приравнивая вещественные и мнимые части, получаем

$$A_e\zeta = \alpha\zeta - \beta\eta,$$

$$A_e\eta = \beta\zeta + \alpha\eta.$$

Полагая $x = \mathcal{E}_n\zeta$, $y = \mathcal{E}_n\eta$, будем иметь

$$Ax = \alpha x - \beta y, \tag{5.3}$$

$$Ay = \beta x + \alpha y. \tag{5.4}$$

Образуем подпространство L, натянутое на векторы x, y. Пусть вектор $z \in L$. Это означает, что $z = \gamma x + \delta y$ для некоторых $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$. Тогда $Az \in L$. В самом деле,

$$Az = \gamma Ax + \delta Ay = \gamma(\alpha x - \beta y) + \delta(\beta x + \alpha y) = \\ = (\alpha\gamma + \beta\delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma)y \in L.$$

Таким образом, L — инвариантное подпространство оператора A.

Упражнения.

1) Показать, что векторы x, y, удовлетворяющие соотношениям (5.3), (5.4), линейно независимы, т. е подпространство L двумерно.

2) Пусть $\mathbf{X}_n$ — вещественное пространство. Показать, что в любом подпространстве $L_m \subset \mathbf{X}_n$, размерности $m \geqslant 2$, инвариантном относительно оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, оператор A имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство.

6. Характеристический полином матрицы A_e оператора A с точностью до знака совпадает с $\det(\lambda I - A_e)$. Записывая этот определитель в виде разложения по степеням λ, получим

$$\det(\lambda I - A_e) = P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0. \tag{6.1}$$

Как уже отмечалось, коэффициенты полинома P_n являются инвариантами оператора A. Все они определенным образом выражаются через элементы матрицы оператора, но при этом важно помнить, что никакое преобразование базиса их значений не меняет. Укажем явные выражения лишь для двух коэффициентов:

$$a_{n-1} = -(a_{11}^e + a_{22}^e + \cdots + a_{nn}^e), \quad a_0 = (-1)^n \det A_e. \tag{6.2}$$

Упражнение. Проверить справедливость равенств (6.2).

Используя теорему Вьета (см. с. 17), нетрудно получить, что

$$a_{11}^e + a_{22}^e + \cdots + a_{nn}^e = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \quad \det A_e = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \tag{6.3}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа оператора A.

Величину $a_{11}^e + a_{22}^e + \cdots + a_{nn}^e$ называют *следом* оператор A и обозначают через $\mathrm{tr}(A)$. Отметим следующие полезные формулы:

$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \beta\,\mathrm{tr}(B), \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA). \tag{6.4}$$

Здесь A, B — произвольные линейные операторы, действующие в конечномерном линейном пространстве, α, β — произвольные числа. Первое равенство (6.4) непосредственно следует из определения следа оператора. Второе может быть проверено переходом к матрицам операторов и прямыми вычислениями величин, записанных в его правой и левой частях.

§ 2. Треугольная форма

1. Теорема. *Для любого оператора A, действующего в комплексном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, можно указать такой ортонормированный базис, что матрица оператора A в этом базисе треугольна, причем по ее диагонали расположены все собственные числа оператора A.*

В основе доказательства этого утверждения лежит

2. Теорема Шура[1]**.** *Пусть A — квадратная матрица порядка n, λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n — характеристические числа матрицы A, занумерованные в некотором порядке. Существует унитарная матрица U такая, что*

$$U^* A U = T, \tag{2.1}$$

где T — верхняя треугольная матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть u^1 — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу λ_1. Собственные векторы матрицы определяются с точностью до скалярного множителя, поэтому можно считать, что $|u^1| = 1$[2].

Построим в пространстве $\mathbf{C}^n$ ортонормированный базис $\{u^k\}_{k=1}^n$ (см. с. 123) и обозначим через U_1 матрицу, столбцами которой служат элементы векторов $\{u^k\}_{k=1}^n$.

Вычислим матрицу $U_1^* A U_1$. Учтем при этом, что $Au^1 = \lambda_1 u^1$, а $(u^k, u^1) = 0$ для $k = 2, \dots, n$. В результате, получим, что

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Справа в этом равенстве — блочная 2×2 матрица. Первый диагональный блок состоит из одного элемента, равного λ_1. Второй диагональный блок — квадратная матрица размера $n - 1$. Блок в позиции (2,1) — нулевой столбец длины $n - 1$. Блок в позиции (1,2) — строка длины $n - 1$ с ненулевыми, вообще говоря, элементами. Обозначения, аналогичные использованным здесь, будут применяться и в дальнейшем.

Матрица $U_1^* A U_1$ подобна матрице A, поэтому (см. теорему 4.5, с. 167)

$$\mathrm{sp}(U_1^* A U_1) = \mathrm{sp}(A).$$

С другой стороны, из (2.3) вытекает, что $\mathrm{sp}(U_1^* A U_1) = \lambda_1 \cup \mathrm{sp}(A_1)$. Для того, чтобы убедиться в этом, нужно разложить по по первому столбцу определитель $\det(\lambda I - U_1^* A U_1)$. Таким образом,

$$\mathrm{sp}(A_1) = \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

---

[1] Исай Шур (Issai Schur; 1875–1941) — немецкий математик.

[2] Здесь и далее на протяжение этого параграфа под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{C}^n$.

Рассуждая точно так же, как при построении матрицы U_1, можно построить унитарную матрицу U_2 порядка $n-1$ такую, что

$$U_2^* A_1 U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Положим

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица V_2, как нетрудно убедиться, есть унитарная матрица порядка n. Проводя элементарные вычисления, получим

$$V_2^* U_1^* A U_1 V_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что, продолжая этот процесс, можно построить унитарные матрицы $V_3, \ \dots, V_{n-1}$ такие, что матрица

$$V_{n-1}^* \cdots V_2^* U_1^* A U_1 V_2 \cdots V_{n-1}$$

есть верхняя треугольная матрица, на главной диагонали которой последовательно стоят числа $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots, \lambda_n$. Положим $U = U_1 V_2 \cdots V_{n-1}$. Матрица U унитарна как произведение унитарных матриц (см. с. 89), причем $U^* = V_{n-1}^* \cdots V_2^* U_1^*$, поэтому для матрицы $T = U^* A U$ справедливо равенство (2.2). □

3. Совершенно аналогично доказывается, что существует унитарная матрица V такая, что

$$V^* A V = L,$$

где L — нижняя треугольная матрица, по диагонали которой расположены характеристические числа матрицы A.

4. Из доказательства теоремы Шура видно, что если матрица A вещественна и и все ее характеристические числа (а, следвательно, и собственные векторы) вещественны, то матрица U в (2.1) может быть выбрана вещественной и унитарной, иными словами, ортогональной.

5. Доказательство теоремы 1. Пусть A — произвольный линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$, $\mathcal{F}_n = \{f^k\}_{k=1}^n$ — произвольно фиксированный ортонормированный базис в $\mathbf{X}_n$, Тогда $A\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n A_f$, где A_f — матрица оператора A в этом базисе (см. (1.3), с. 146). По теореме Шура существует унитарная матрица U такая, что $A_f = UTU^*$, где T — матрица вида (2.2), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A_f, или, что все равно, — собственные числа оператора A, следовательно, $A\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n UTU^*$, или $A\mathcal{F}_n U = \mathcal{F}_n UT$. Положим $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_n U$. Тогда $A\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T$, причем $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис, так как $\mathcal{F}_n$ — ортонормированный базис, а матрица U унитарна (см. п. 11, с. 125). Таким образом, T — матрица оператора A в ортонормированном базисе $\mathcal{E}_n$. $\square$

§ 3. Самосопряженный оператор

1. Напомним, что оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *самосопряженным*, если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}_n. \tag{1.1}$$

Из (1.1) вытекает, что число (Ax, x) вещественно для любого $x \in \mathbf{X}_n$. В самом деле, вследствие аксиомы 2) скалярного произведения $(Ax, x) = \overline{(x, Ax)}$, с другой стороны, вследствие тождества (1.1) имеем $(Ax, x) = (x, Ax)$, т. е. $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)}$.

2. Все собственные числа самосопряженного оператора вещественны. В самом деле, если $Ax = \lambda x$, где $x \neq 0$, то $(Ax, x) = \lambda(x, x)$. По доказанному (Ax, x) — вещественное число, $(x, x) > 0$ для любого $x \neq 0$, значит λ — вещественное число.

Упражнение. Покажите, что определитель самосопряженного оператора — вещественное число (см. также п. 11.2, с. 88).

3. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны. Действительно, пусть $\lambda \neq \mu$ — собственные числа самосопряженного оператора A, и пусть x, y — соответствующие им собственные векторы. Тогда $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, следовательно, $(Ax, y) = \lambda(x, y)$, $(x, Ay) = \bar{\mu}(x, y)$, но у самосопряженного оператора все собственные числа вещественны, поэтому, вычитая почленно последние равенства, получим $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$, и поскольку $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$.

4. Теорема. *Пусть оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ самосопряжен. Тогда существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbf{X}_n$ такой, что*

$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Замечания.

1) В теореме 4, фактически, утверждается, что для каждого самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица принимает диагональный вид, причем на диагонали матрицы расположены все собственные числа оператора.

2) Часто оказывается полезной следующая эквивалентная формулировка теоремы 4: пусть $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_s$, $s \leqslant n$, — все различные собственные числа самосопряженного оператора $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, L_{μ_i}, $i = 1, 2, \ldots, s$, — соответствующие собственные подпространства оператора A. Тогда

$$\mathbf{X}_n = L_{\mu_1} \oplus L_{\mu_2} \cdots \oplus L_{\mu_s}. \tag{4.2}$$

Доказательство теоремы 4. Выберем некоторый ортонормированный базис $\mathcal{F}_n = \{f^k\}_{k=1}^n$ в пространстве $\mathbf{X}_n$. Обозначим через A_f матрицу оператора A в этом базисе. Оператор A самосопряжен, следовательно (см. с. 151), матрица A_f самосопряжена, т. е.

$$A_f = A_f^*. \tag{4.3}$$

По теореме Шура существует унитарная матрица U такая, что

$$U^* A_f U = T, \tag{4.4}$$

где T — треугольная матрица, диагональ которой состоит из всех характеристических чисел матрицы A_f, или, что все равно, всех собственных чисел оператора A. Как очевидное следствие равенства (4.4) получаем

$$U^* A_f^* U = T^*. \tag{4.5}$$

Из (4.3)–(4.5) вытекает, что $T = T^*$, но верхняя треугольная матрица может совпадать с нижней треугольной матрицей лишь при условии, что обе они — диагональные матрицы, причем их соответствующие диагональные элементы совпадают. Таким образом, матрица T — диагональная матрица. Отсюда сразу следует, что равенство (4.4) можно записать в виде

$$A_f U = U\Lambda, \tag{4.6}$$

где Λ — диагональная матрица, диагональ ее образована числами λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристическими числами оператора A. Используя формулу (4.1), с. 146, получим из (4.6), что

$$A\mathcal{F}_n U = \mathcal{F}_n U \Lambda. \tag{4.7}$$

Положим $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_n U$. Базис $\mathcal{E}_n$ ортонормирован, так как $\mathcal{F}_n$ — ортонормированный базис, а U — унитарная матрица. Равенство (4.7) можно представить так:

$$A\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n \Lambda. \tag{4.8}$$

Нетрудно убедиться, что (4.8) есть матричная запись системы равенств (4.1). □

5. Вариационное описание собственных чисел самосопряженного оператора. В этом пункте $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — самосопряженный оператор, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — его собственные числа, $\{e^k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис собственных векторов. Будем считать, что собственные числа упорядочены по возрастанию, т. е.

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_n. \tag{5.1}$$

Подчеркнем, что мы рассматриваем как собственные числа оператора все характеристические числа его матрицы, т. е. кратные характеристические числа повторяются столько раз, какова их кратность, поэтому, вообще говоря, неравенства в (5.1) являются нестрогими.

Пусть p, q — целые числа такие, что $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. Обозначим через L_{pq} подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на векторы $\{e^k\}_{k=p}^q$. Очевидно, $L_{1n} = \mathbf{X}_n$.

5.1. Лемма. *Для любого $x \in L_{pq}$ справедливы неравенства*

$$\lambda_p(x,x) \leqslant (Ax,x) \leqslant \lambda_q(x,x), \tag{5.2}$$

более того

$$\lambda_p = \min_{x\in L_{pq},\ x\neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \quad \lambda_q = \max_{x\in L_{pq},\ x\neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Для любого $x \in L_{pq}$

$$(Ax,x) = \Big(A\sum_{k=p}^{q} \xi_k e^k, \sum_{k=p}^{q} \xi_k e^k\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{k=p}^{q} \lambda_k \xi_k e^k, \sum_{k=p}^{q} \xi_k e^k\Big) = \sum_{k=p}^{q} \lambda_k |\xi_k|^2. \tag{5.4}$$

Очевидно, что

$$\lambda_p \sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{k=p}^{q} \lambda_k |\xi_k|^2 \leqslant \lambda_q \sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2, \quad \sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2 = (x,x),$$

следовательно, (5.2) доказано и для любого $x \neq 0$ из L_{pq} справедливы неравенства

$$\lambda_p \leqslant \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leqslant \lambda_q.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{(Ae^p, e^p)}{(e^p, e^p)} = \lambda_p, \quad \frac{(Ae^q, e^q)}{(e^q, e^q)} = \lambda_q,$$

поэтому равенства (5.3) также доказаны. □

Очевидным следствием леммы 5.1 является

5.2. Теорема. *Для любого* $k = 1, \ldots, n$

$$\lambda_k = \min_{x \in L_{k,n},\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_k = \max_{x \in L_{1,k},\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \tag{5.5}$$

Использование формул (5.5) затруднено тем, что при отыскании собственного числа с номером k нужно знать все собственные векторы оператора A, отвечающие всем собственным числам с меньшими номерами, или — все собственные векторы оператора A, отвечающие всем собственным числам с большими номерами.

Следующие две теоремы дают независимое описание каждого собственного числа самосопряженного оператора A.

5.3. Теорема. *Для любого* $k = 1, \ldots, n$

$$\lambda_k = \max_{R_{n-k+1}} \min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \tag{5.6}$$

Здесь $R_{n-k+1} \subset \mathbf{X}_n$ *— подпространство размерности* $n-k+1$*. Максимум берется по всем подпространствам пространства* $\mathbf{X}_n$ *размерности* $n-k+1$*.*

Доказательство. Ясно, что $\dim(R_{n-k+1}) + \dim(L_{1k}) = n + 1$, поэтому (см. п. 14, с. 136) существует вектор $x \neq 0$, принадлежащий $R_{n-k+1} \cap L_{1k}$. Таким образом (см. (5.5)), в каждом подпространстве R_{n-k+1} найдется вектор x, для которого $(Ax, x)/(x, x) \leqslant \lambda_k$. Следовательно, для любого подпространства R_{n-k+1}

$$\min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leqslant \lambda_k.$$

Если мы укажем подпространство R_{n-k+1}, для которого

$$\min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

то это будет означать выполнение равенства (5.6). По теореме 5.2 искомым подпространством является L_{kn}. $\square$

5.4. Теорема. *Для любого* $k = 1, \ldots, n$

$$\lambda_k = \min_{R_k} \max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \tag{5.7}$$

Здесь $R_k \subset \mathbf{X}_n$ *— подпространство размерности* k*. Минимум берется по всем подпространствам пространства* $\mathbf{X}_n$ *размерности* k*.*

Доказательство. Очевидно, что $\dim(R_k) + \dim(L_{kn}) = n + 1$ для любого подпространства R_k, значит $R_k \cap L_{kn} \neq \{0\}$. По теореме 5.2

$$\min_{x \in L_{kn},\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

поэтому для любого подпространства R_k

$$\max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \geqslant \lambda_k.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось указать такое подпространство R_k размерности k, для которого

$$\max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_k.$$

По теореме 5.2 таким подпространством является L_{1k}. $\square$

6. Из (5.2) сразу же следует, что для того, чтобы самосопряженный оператор A был неотрицателен (см. (19.1), с. 152), необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были неотрицательными, а для того, чтобы самосопряженный оператор A был положительно определен (см. (19.2), с. 152), необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были положительны.

Упражнения.

1) Доказать, что если оператор положительно определен, то его определитель положителен.

2) Доказать неравенство Коши — Буняковского (см. с. 108), используя матрицу Грама (см. с. 116) системы, состоящей из двух векторов x, y евклидова пространства.

7. Теорема. *Пусть* $A_{n+1} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$ *— произвольная эрмитова матрица порядка* $n+1$, $A_n = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *— матрица, соответствующая ее главному минору порядка* n. *Пусть* $\hat\lambda_1 \leqslant \hat\lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \hat\lambda_{n+1}$ *— собственные числа матрицы* A_{n+1}, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ *— собственные числа матрицы* A_n. *Тогда*

$$\hat\lambda_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \hat\lambda_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \hat\lambda_{n+1}, \tag{7.1}$$

т. е., как говорят, собственные числа матриц A_n *и* A_{n+1} *перемежаются.*

Доказательство. В ходе последующих рассуждений под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{C}^n$.

Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. В соответствии с теоремой 5.4

$$\hat\lambda_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x\in R_{k+1},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}. \tag{7.2}$$

Здесь минимум берется по всевозможным подпространствам R_{k+1} пространства $\mathbf{C}^{n+1}$ размерности $k+1$.

Обозначим через $R_k \subset \mathbf{C}^n$ множество векторов из R_{k+1}, $(n+1)$-я компонента которых в естественном базисе равна нулю. Тогда

$$\max_{x\in R_{k+1},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \geqslant \max_{x\in R_k,\ x\neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)}.$$

Для обоснования этого неравенства достаточно заметить, что слева максимум берется по более широкому множеству векторов, чем справа. Таким образом, из (7.2) получаем

$$\hat\lambda_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x\in R_{k+1},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \geqslant \min_{R_k} \max_{x\in R_k,\ x\neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)},$$

но правая часть этого неравенства по теореме 5.4 равна λ_k. Итак, $\hat\lambda_{k+1} \geqslant \lambda_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$.

Обратимся теперь к теореме 5.3, в соответствии с которой

$$\hat\lambda_k = \max_{R_{n+2-k}} \min_{x\in R_{n+2-k},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}. \tag{7.3}$$

Здесь максимум берется по всевозможным подпространствам R_{n+2-k} пространства $\mathbf{C}^{n+1}$, размерности $n+2-k$. При сужении множества векторов, по которому вычисляется минимум, последний не может уменьшиться, поэтому по аналогии с предыдущим случаем можем написать, что

$$\hat{\lambda}_k = \max_{R_{n+2-k}} \min_{x\in R_{n+2-k},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x,x)}{(x,x)} \leqslant \\ \leqslant \max_{R_{n+1-k}} \min_{x\in R_{n+1-k},\ x\neq 0} \frac{(A_n x,x)}{(x,x)} = \lambda_k. \quad (7.4)$$

Таким образом, неравенства (7.1) доказаны. □

§ 4. Унитарный оператор

Напомним, что оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется *унитарным*, если $AA^* = A^*A = I$.

Все собственные числа унитарного оператора по модулю равны единице. В самом деле, если $Ax = \lambda x$, где $x \neq 0$, то поскольку унитарный оператор не меняет длины вектора (см. с. 153), то $|\lambda||x| = |Ax| = |x|$, т. е. $|\lambda| = 1$.

1. Теорема. *Пусть оператор $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ унитарный. Тогда существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbf{X}_n$ такой, что*

$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1, \ldots, n. \quad (1.1)$$

Доказательство. Выберем некоторый ортонормированный базис $\{f^k\}_{k=1}^n$ в пространстве $\mathbf{X}_n$. Обозначим через A_f матрицу оператора A в этом базисе. Оператор A унитарный, следовательно, (см. с. 153) матрица A_f унитарная, т. е.

$$A_f^{-1} = A_f^*. \quad (1.2)$$

По теореме Шура существует унитарная матрица U такая, что

$$U^* A_f U = T, \quad (1.3)$$

где T — верхняя треугольная матрица, диагональные элементы которой — характеристические числа матрицы A_f, или, что все равно, собственные числа оператора A. Как очевидное следствие равенства (1.3) получаем

$$U^* A_f^* U = T^*. \quad (1.4)$$

Из (1.2)–(1.4) вытекает, что

$$TT^* = U^* A_f U U^* A_f^* U = I, \quad (1.5)$$

поэтому
$$T^* = T^{-1}. \tag{1.6}$$
Матрица, обратная к верхней треугольной — верхняя треугольная, матрица T^* — нижняя треугольная. Из (1.6), стало быть, вытекает, что $T = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица, диагональ ее образована числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Дальнейшие рассуждения полностью повторяют соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 4, с 175. □

§ 5. Операторы в вещественном евклидовом пространстве

В этом параграфе все операторы — операторы, действующие в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Многие утверждения доказываются вполне аналогично соответствующим утверждениям для случая комплексного пространства. Мы приводим поэтому только доказательства, специфические для вещественного случая.

1. Оператор A^T называется *сопряженным* по отношению к оператору A, если
$$(Ax, y) = (x, A^T y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}_n.$$
В любом ортонормированном базисе матрицы операторов A и A^T взаимно транспонированы.

2. Оператор A называется *ортогональным*, если $A^T A = AA^T = I$.

Для того, чтобы оператор был ортогональным необходимо и достаточно, чтобы его матрица была ортогональной (определение см. на с. 90) в любом ортонормированном базисе.

Для того, чтобы оператор A был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы
$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}_n.$$

Таким образом, ортогональный оператор не меняет длин векторов и углов между векторами. Определитель ортогонального оператора равен плюс или минус единице. Ортогональные операторы с определителем, равным единице, называют *собственными*, в противном случае — *несобственными*.

Собственным числом ортогонального оператора может быть только плюс или минус единица.

3. Исследуем строение ортогональных операторов в одномерном и двумерном пространствах. Как будет показано впоследствии, эти результаты имеют существенное значение при рассмотрения ортогональных операторов в пространствах произвольной размерности.

3.1. Одномерное пространство. Понятно, что образом любого вектора x при действии любого линейного оператора A в этом случае может быть только вектор λx, где λ — вещественное число. Как только что было сказано, для ортогонального оператора $\lambda = \pm 1$. Таким образом, в одномерном случае есть только два ортогональных преобразования: *собственное* $Ax = x$ (тождественное преобразование) и *несобственное* $Ax = -x$ (отражение относительно начала координат).

3.2. Обратимся теперь к двумерному случаю. Пусть

$$A_e = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

есть матрица ортогонального преобразования A относительного некоторого ортонормированного базиса. Матрица A_e, как мы знаем, ортогональна, т. е.

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \tag{3.2}$$

$$\gamma^2 + \delta^2 = 1, \tag{3.3}$$

$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0. \tag{3.4}$$

Из (3.2), (3.3) вытекает, что существуют углы φ, ψ такие, что

$$\alpha = \cos\varphi,\ \beta = \sin\varphi,\ \gamma = \cos\psi,\ \delta = \sin\psi,$$

причем вследствие (3.4) получаем, что $\cos(\varphi - \psi) = 0$, значит, либо $\psi = \varphi + \pi/2$, либо $\psi = \varphi - \pi/2$. В первом случае матрица A_e записывается в виде

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

а во втором —

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

В первом случае $\det(A_e) = 1$, во втором случае $\det(A_e) = -1$.

Таким образом, матрица собственного ортогонального преобразования двумерного евклидова пространства в любом ортонормированном базисе имеет вид (3.5), а несобственного — (3.6).

За счет специального выбора ортонормированного базиса матрицу несобственного ортогонального преобразования можно упростить. Действительно, характеристическое уравнение матрицы (3.6), как нетрудно проверить, имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, следовательно, существуют векторы единичной длины e^1, e^2 такие, что $Ae^1 = e^1$, $Ae^2 = -e^2$. Векторы e^1, e^2 ортогональны. В самом деле, поскольку оператор A ортогонален, можем написать, что

$$(e^1, e^2) = (Ae^1, Ae^2) = (e^1, -e^2) = -(e^1, e^2),$$

т. е. $(e^1, e^2) = 0$. Доказано, таким образом, что существует ортонормированный базис, в котором матрица несобственного ортогонального оператора A имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

и, следовательно, двумерное пространство распадается в ортогональную сумму двух одномерных собственных подпространств оператора A.

Полученным результатам полезно дать геометрическую интерпретацию. Пусть A — собственное ортогональное преобразование e^1, e^2 — произвольный ортонормированный базис, x — вектор с координатами (ξ_1, ξ_2) в базисе e^1, e^2. В соответствии с (3.5) вектор Ax имеет координаты $(\xi_1 \cos\varphi - \xi_2 \sin\varphi,\ \xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi)$. Нетрудно подсчитать, что $(x, Ax) = |x||Ax|\cos\varphi$, следовательно, преобразованием A любой вектор x поворачивается на один и тот же угол φ. Легко проверить, что поворот выполняется в направлении кратчайшего поворота от вектора e^1 к вектору e^2.

Если A — несобственное ортогональное преобразование, а e^1, e^2 — ортонормированный базис, в котором матрица оператора A имеет вид (3.7), то для любого вектора $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2$ имеем $Ax = \xi_1 e^1 - \xi_2 e^2$, т. е. оператор A осуществляет зеркальное отражение относительно координатной оси ξ_1.

Матрицу вида (3.5) принято называть *матрицей вращения*, а матрицу (3.7) — *матрицей отражения*.

4. Переходим к рассмотрению ортогонального преобразования в пространстве $\mathbf{X}_n$ произвольной размерности. В основе этого исследования лежит

4.1. Лемма. *Пусть $A : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — ортогональный оператор, L — инвариантное подпространство оператора A, $L^\perp$ — ортогональное дополнение подпространства L. Тогда $L^\perp$ также — инвариантное подпространство оператора A.*

Доказательство. Пусть $y \in L^{\perp}$, т. е. $(x, y) = 0$ для любого $x \in L$. Покажем, что тогда $(x, Ay) = 0$ для любого $x \in L$. Подпространство L инвариантно относительно A, ортогональный оператор невырожден, поэтому по лемме 3, с. 165, найдется $z \in L$ такой, что $x = Az$, следовательно, $(x, Ay) = (Az, Ay) = (z, y) = 0$. □

4.2. Теорема. *Пусть A — ортогональное преобразование пространства $\mathbf{X}_n$. Существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица оператора A имеет блочно диагональный вид*

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Блоки этой матрицы могут иметь размер либо 1×1, либо 2×2; блоки размера 1×1 — это числа, равные плюс или минус единице, блоки размера 2×2 есть матрицы вращения

$$A_p = \begin{pmatrix} \cos\varphi_p & -\sin\varphi_p \\ \sin\varphi_p & \cos\varphi_p \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Как установлено в п. 5, с. 170, преобразование A имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство $L \subset \mathbf{X}_n$. Пусть L одномерно и $e^{1,1}$ — вектор единичной длины из L, тогда $Ae^{1,1} = \pm e^{1,1}$, поскольку A — ортогональный оператор. Если L двумерно, то, как показано в п. 3.2, существует ортонормированный базис $e^{1,1}, e^{2,1} \in L$ такой, что

$$Ae^{1,1} = \cos(\varphi_1)e^{1,1} + \sin(\varphi_1)e^{2,1}, \ \ Ae^{2,1} = -\sin(\varphi_1)e^{1,1} + \cos(\varphi_1)e^{2,1}.$$

Рассмотрим теперь ортогональное дополнение $L^{\perp}$ подпространства L. По лемме 4.1 оно инвариантно относительно оператора A, поэтому применительно к $L^{\perp}$ можно повторить предыдущие рассуждения и указать либо один нормированный вектор $e^{1,2} \in L^{\perp}$, такой, что $Ae^{1,2} = \pm e^{1,2}$, либо два ортонормированных вектора $e^{1,2}$, $e^{2,2} \in L^{\perp}$ таких, что

$$Ae^{1,2} = \cos(\varphi_2)e^{1,2} + \sin(\varphi_2)e^{2,2}, \ \ Ae^{2,2} = -\sin(\varphi_2)e^{1,2} + \cos(\varphi_2)e^{2,2}.$$

Продолжая этот процесс, т. е. последовательно понижая размерность подпространства, в котором рассматривается оператор A, мы построим ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, в котором матрица оператора A примет вид, описанный в формулировке теоремы. □

Геометрическая интерпретация полученного результата очевидна: пространство $\mathbf{X}_n$ распадается в ортогональную сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств оператора A. В двумерных подпространствах оператор A выполняет поворот, в каждом на свой угол, а в одномерных, самое большее, может быть выполнено преобразование отражения.

Упражнение. Дайте полное описание ортогональных преобразований в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{V}_3$.

5. Оператор, действующий в вещественном евклидовом пространстве, называется *самосопряженным*, если $A = A^T$.

Все результаты, полученные выше для самосопряженных операторов, действующих в комплексном евклидовом пространстве, без каких либо изменений переносятся на самосопряженные операторы, действующие в вещественном евклидовом пространстве.

Доказательства соответствующих теорем также, фактически, не изменяются.

Небольшой модификации требует лишь доказательство теоремы 4, с. 175, основанное на применении теоремы Шура (см. с. 173).

Именно, сначала нужно использовать, тот факт, что у симметричной матрицы все характеристические числа вещественны. Для того, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно заметить, что симметричная вещественная матрица порождает самосопряженный оператор в пространстве $\mathbf{C}^n$ со стандартным скалярным произведением, а все собственные числа самосопряженного оператора вещественны. Далее нужно воспользоваться замечанием к теореме Шура (см. с. 174).

Упражнение. Показать, что всякая вещественная симметричная матрица A ортогонально подобна диагональной, т. е. $Q^T AQ = \Lambda$. Столбцы ортогональной матрицы Q — собственные векторы матрицы A, по диагонали Λ расположены все собственные числа матрицы A.

Глава 7

Квадратичные формы

§ 1. Канонический вид квадратичной формы

1. *Квадратичной формой* будем называть вещественную функцию F от n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{1.1}$$

Заданные вещественные числа a_{ij} называют *коэффициентами* квадратичной формы. Их можно считать удовлетворяющими условиям симметрии $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, поскольку, слагаемые в квадратичной форме, содержащие коэффициенты a_{ij}, a_{ji}, можно представить так:

$$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_j x_i.$$

Запишем квадратичную форму в более компактном виде. Пусть A — симметричная матрица с элементами a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем считать элементом пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда $F(x) = (Ax, x)$. Здесь и всюду на протяжении данной главы скобки обозначают стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^n$.

2. Пусть в квадратичной форме выполнена замена переменных, т. е. введены новые переменные $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, связанные со старыми переменными $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соотношением

$$x = Qy, \tag{2.1}$$

где Q — невырожденная матрица, называемая *матрицей преобразования переменных.* Выполнив замену переменных (2.1), получим

$$(Ax, x) = (AQy, Qy) = (Q^T AQy, y) = (By, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j,$$

где через B обозначена матрица $Q^T AQ$. Чаще всего, матрицу Q стремятся подобрать так, чтобы квадратичная форма в новых переменных приобрела наиболее простой вид.

Говорят, что преобразование переменных (2.1) приводит квадратичную форму (1.1) к *каноническому виду*, если матрица $B = Q^T AQ$ диагональна, т. е.

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2. \tag{2.2}$$

Можно сказать также, что квадратичная форма (1.1) преобразованием переменных (2.1) *приведена к сумме квадратов.*

3. Всякую квадратичную форму невырожденным преобразованием переменных можно привести к каноническому виду. Действительно, поскольку A — симметричная матрица, существует ортогональная матрица Q такая, что (см. упражнение на с. 186)

$$Q^T AQ = \Lambda,$$

где Λ — диагональная матрица, по диагонали которой расположены все собственные числа матрицы A. При таком выборе матрицы Q преобразование переменных (2.1) приводит квадратичную форму (1.1) к виду

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \tag{3.1}$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ — собственные числа матрицы A.

4. Существуют и другие способы приведения квадратичной формы к каноническому виду. Опишем, например, *метод Лагранжа*, или *метод выделения полных квадратов*, приведения квадратичной формы к каноническому виду. В ходе описания этого метода, фактически, будет дано еще одно, независимое, доказательство возможности приведения любой квадратичной формы к каноническому виду.

Будем различать два случая: 1) в квадратичной форме (1.1) коэффициент при квадрате какой-либо переменной отличен от нуля, 2) коэффициенты при квадратах всех переменных — нули.

Рассмотрим сначала первый случай и пусть $a_{11} \neq 0$. Если это не так, придется ввести другую нумерацию неизвестных.

Запишем квадратичную форму (1.1) в виде

$$F = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + G, \tag{4.1}$$

где $G = F - a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2$. Нетрудно убедиться, что G не содержит x_1, а является квадратичной формой только от переменных $x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n$. Положим

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \quad y_2 = x_2, \ \dots, \quad y_n = x_n. \tag{4.2}$$

Тогда

$$F = a_{11}^{-1}y_1^2 + G(y_2, \dots, y_n), \tag{4.3}$$

где $G(y_2, \dots, y_n)$ — квадратичная форма от переменных $y_2, \dots, y_n$.

Матрица замены переменных (4.2) невырождена, так как ее определитель равен a_{11}, а по предположению $a_{11} \neq 0$.

Пусть теперь все коэффициенты при квадратах переменных в (1.1) равны нулю. Тогда будем считать, что хотя бы один коэффициент при произведениях переменных отличен от нуля, иначе квадратичная форма тождественно равна нулю и она имеет тривиальный канонический вид: все коэффициенты при квадратах неизвестных — нули. Итак, примем для определенности, что $a_{12} \neq 0$, и выполним преобразование переменных по формулам

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_3 = z_3, \ \dots, \quad x_n = z_n. \tag{4.4}$$

Заметим, во-первых, что определитель матрицы преобразования (4.4) равен двум, а во-вторых, что $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2$, следовательно, в квадратичной форме появились слагаемые, содержащие квадраты переменных, поэтому, повторяя рассуждения предыдущего случая, при помощи невырожденной замены переменных приведем квадратичную форму к виду

$$F = \alpha y_1^2 + G(y_2, \dots, y_n), \tag{4.5}$$

Таким образом, выполняя одно, или два последовательных невырожденных преобразования переменных, квадратичную форму (1.1) можно привести к виду (4.5).

Аналогичными преобразованиями переменных выделим полный квадрат в квадратичной форме $G(y_2, \dots, y_n)$. Продолжая преобразования, в конце концов приведем квадратичную форму (1.1) к сумме квадратов.

Пример. Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1. \tag{4.6}$$

Поскольку в этой форме отсутствуют квадраты переменных, выполним сначала преобразование переменных

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Получим

$$F = 2y_1^2 - 4y_1y_3 - 2y_2^2 - 8y_2y_3.$$

Положим теперь

$$z_1 = y_1 - y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3.$$

Тогда

$$F = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = 2z_1^2 - 2(z_2^2 + 4z_2z_3) - 2z_3^2.$$

Отсюда после замены переменных

$$t_1 = z_1, \quad t_2 = z_2 + 2z_3, \quad t_3 = z_3$$

получаем

$$F = 2t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2, \tag{4.7}$$

т. е. в переменных t_1, t_2, t_3 квадратичная форма принимает канонический вид. Очевидно, каждое из выполненных нами преобразований переменных имеет невырожденную матрицу. Результирующее преобразование переменных, как нетрудно проверить, имеет вид

$$t_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \quad t_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3, \quad t_3 = x_3,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что матрица преобразования переменных (4.8) невырождена и эта замена переменных приводит квадратичную форму (4.6) к каноническому виду (4.7).

5. Закон инерции квадратичных форм. Среди коэффициентов b_{ii} канонического вида (2.2) квадратичной формы (1.1) могу быть положительные, отрицательные числа, а также — нули. Нумеруя соответствующим образом переменные, запишем (2.2) так:

$$(Ax, x) = (By, y) = \sum_{i=1}^{n_+} b_{ii}y_i^2 + \sum_{i=n_+ +1}^{n_-} b_{ii}y_i^2. \tag{5.1}$$

Считаем при этом, что числа b_{ii} положительны при $i = 1, 2, \ldots, n_+$ и отрицательны при $i = n_+ + 1, \ldots, n_-$.

Как мы уже убедились, приведение квадратичной формы к каноническому виду может быть выполнено различными способами. Поэтому естественно поставить вопрос: зависят ли числа n_+, n_- от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду?

При исследовании этого вопроса будут использованы следующие определения.

Симметричные матрицы A и B называют *конгруэнтными*, если существует невырожденная матрица C такая, что $B = C^T AC$.

С каждой симметричной матрицей A свяжем три целых числа: $n_0(A)$ — количество нулевых характеристических чисел матрицы A, $n_+(A)$ — количество положительных характеристических чисел, $n_-(A)$ — количество отрицательных характеристических чисел (характеристические числа подсчитываются с учетом их кратности). Тройка чисел $n_0(A), n_+(A), n_-(A)$ называется *инерцией матрицы* A, или *инерцией* соответствующей ей *квадратичной формы.*

5.1. Теорема. *Для того, чтобы матрицы A и B были конгруэнтными необходимо и достаточно, чтобы их инерции совпадали.*

Доказательство. Достаточность. Как было показано выше, для всякой симметричной матрицы A можно указать ортогональную матрицу Q такую, что

$$(Ax, x) = (Q^T AQy, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \tag{5.2}$$

где λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n — собственные числа матрицы A. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\lambda_i)|\lambda_i| y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\lambda_i)(\sqrt{|\lambda_i|} y_i)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\lambda_i) t_i^2 = \sum_{i=1}^{n_+(A)} t_i^2 - \sum_{i=n_+ +1}^{n_-(A)} t_i^2. \tag{5.3}$$

Эти преобразования можно трактовать как невырожденную замену переменных: $t_i = \sqrt{|\lambda_i|} y_i$, если $\lambda_i \neq 0$ и $t_i = y_i$, если $\lambda_i = 0$.

Таким образом, установлено, что всякая симметричная матрица A конгруэнтна диагональной матрице, у которой на диагонали $n_+(A)$ единиц, $n_-(A)$ минус единиц, остальные элементы главной диагонали — нули. Если симметричная матрица B имеет инерцию, равную инерции матрицы A, то она конгруэнтна точно такой же диагональной матрице. Отношение конгруэнтности, как нетрудно убедиться, транзитивно, следовательно, матрицы A и B конгруэнтны.

Необходимость. Заметим, прежде всего, что у когруэнтных матриц ранги, очевидно, совпадают. Кроме того, для любой симметричной матрицы A справедливо равенство $\operatorname{rank}(A) = n_+(A) + n_-(A)$. Действительно, всякая симметричная матрица A подобна диагональной матрице, у которой по диагонали расположены все собственные числа матрицы A. Из этих рассуждений вытекает, что если матрицы A и B конгруэнтны, то $n_+(A) + n_-(A) = n_+(B) + n_-(B)$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что если матрицы A, B конгруэнтны, то

$$n_+(A) = n_+(B). \tag{5.4}$$

Пусть $\lambda_n \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant \dots \geqslant \lambda_{n-n_++1}$ — положительные собственные числа матрицы A, $e^{n-n_++1}, \dots, e^n$ — соответствующие им ортонормированные собственные векторы матрицы A. По предположению теоремы $B = C^TAC$, где C — невырожденная матрица, или $A = D^TBD$, где $D = C^{-1}$. Поскольку матрица D невырождена, векторы $De^{n-n_++1}, \dots, De^n$ линейно независимы и подпространство S_{n_+}, натянутое на эти векторы, имеет размерность n_+. Пусть $x \in S_{n_+}$. Тогда $x = \alpha_{n-n_++1}De^{n-n_++1} + \dots + \alpha_nDe^n = Dy$, где $y = \alpha_{n-n_++1}e^{n-n_++1} + \dots + \alpha_ne^n$, и, используя лемму 5.1, с. 177, получим

$$(Bx, x) = (D^TBDy, y) = (Ay, y) \geqslant \lambda_{n-n_++1}(y, y). \tag{5.5}$$

Заметим теперь, что $(y, y) = (Cx, Cx) = (C^TCx, x)$. Матрица C невырождена, поэтому матрица C^TC положительно определена (см. упражнение 1) на с. 152), следовательно,

$$(y, y) \geqslant \lambda_1(C^TC)(x, x), \tag{5.6}$$

причем $\lambda_1(C^TC) > 0$ (здесь, вновь, использована лемма 5.1, с. 177). Из (5.5), (5.6) вытекает, что

$$\min_{x \in S_{n_+},\ x \neq 0} \frac{(Bx, x)}{(x, x)} \geqslant \lambda_{n-n_++1}\lambda_1(C^TC) > 0,$$

поэтому, применяя теорему 5.3, с. 178, получим, что $\lambda_{n-n_++1}(B) > 0$. Это означает, что у матрицы B не меньше чем n_+ положительных характеристических чисел, иначе говоря, $n_+(B) \geqslant n_+(A)$. В выполненных рассуждениях матрицы A и B можно поменять местами, следовательно, $n_+(A) = n_+(B)$. □

5.2. Следствие (закон инерции квадратичных форм). *Количества положительных и отрицательных слагаемых в* (5.1) *не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы* (1.1) *к каноническому виду.*

Доказательство. Коэффициенты b_{ii} в (5.1) — это характеристические числа диагональной матрицы $B = Q^TAQ$, конгруэнтной матрице A, поэтому количества положительных и отрицательных слагаемых в (5.1) определяются инерцией матрицы A и не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы (1.1) к каноническому виду. □

§ 2. Положительно определенные квадратичные формы

1. Квадратичная форма (1.1) называется *положительно определенной*, если соответствующая ей матрица A положительно определена, т. е.

$$(Ax, x) > 0 \quad \text{для всех не равных нулю} \ \ x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.1}$$

Как известно (см. с. 179), для того, чтобы матрица A была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные числа были положительны.

Полезный признак положительной определенности квадратичной формы дает

2. Теорема (критерий Сильвестра[1]). *Для того, чтобы квадратичная форма* (1.1) *была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были положительны.*

Доказательство. Необходимость. Фиксируем некоторое целое k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Выберем в качестве вектора x в (1.1) вектор вида $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = (y, 0, \ldots, 0)$, где y можно считать произвольным вектором пространства $\mathbf{R}^k$. Тогда $(Ax, x) = (A_k y, y)$, где A_k — матрица, соответствующая главному минору порядка k матрицы A. Из условия (1.1), очевидно, вытекает, что $(A_k y, y) > 0$ для любого ненулевого вектора y из $\mathbf{R}^k$, т. е. матрица A_k положительно определена, следовательно, ее определитель (главный минор порядка k матрицы A) положителен (см. упражнение 1) на с. 179).

Достаточность. Покажем, что если все главные миноры матрицы A положительны, то положительны все ее собственные числа. Тогда положительная определенность матрицы A будет установлена. На самом деле, мы докажем большее, мы покажем, что собственные числа всех главных миноров матрицы A положительны. Для минора первого порядка, т. е. для a_{11}, это выполняется тривиальным образом. Предположим, что у матрицы A_k, соответствующей главному минору порядка k, все собственные числа $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$ положительны и покажем, что тогда и у матрицы A_{k+1} все собственные числа $\hat\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \hat\lambda_{k+1}$ положительны. В соответствии с теоремой 7, с. 180, выполнены неравенства

$$\hat\lambda_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \hat\lambda_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \hat\lambda_{k+1},$$

[1] Джеймс Джозеф Сильвестр (James Joseph Sylvester, 1814–1897) — английский математик.

откуда вытекает, что $\hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_{k+1} > 0$. Поскольку по условию $\det(A_{k+1}) > 0$, а $\det(A_{k+1}) = \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \cdots \hat{\lambda}_{k+1}$ (см. (6.3), с. 172), то и $\hat{\lambda}_1 > 0$. $\square$

Глава 8

Кривые и поверхности второго порядка

§ 1. Кривые второго порядка

1. Как и в § 2, гл. 2 будем рассматривать плоскость, отнесенную к декартовой системе координат x_1, x_2. Уравнение

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \tag{1.1}$$

описывает прямую на плоскости. Уравнение (1.1) называют уравнением первого порядка или линейным уравнением (оно содержит неизвестные в первой степени).

В настоящем параграфе будут изучаться так называемые кривые второго порядка, описываемые уравнениям вида

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0. \tag{1.2}$$

Здесь a_{ij}, $i, j = 1, 2$, a_i, $i = 0, 1, 2$ — вещественные числа, называемые *коэффициентами уравнения.* Множитель два при некоторых коэффициентах поставлен для удобства записи формул, получаемых в дальнейшем.

Функцию двух переменных, образованную левой частью уравнения (1.2), называют *квадратичной функцией.* Числа a_{ij}, $i, j = 1, 2$, называют *старшими коэффициентами* квадратичной функции.

Множество всех точек $x = (x_1, x_2)$ плоскости, удовлетворяющих уравнению (1.2), называют *кривой второго порядка.*

2. Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что окружностью называется множество всех точек x плоскости, удаленных на расстояние $R > 0$ от точки x^0. Точка x^0 — центр окружности, R — радиус окружности.

Напишем уравнение окружности. По определению для точек окружности имеем $|x - x^0| = R$, или

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 - R^2 = 0. \tag{2.1}$$

Раскроем скобки в левой части и приведем подобные члены. Получим

$$a_{11}x_1^2 + a_{11}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0, \tag{2.2}$$

где $a_{11} = 1$, $a_1 = -x_1^0$, $a_1 = -x_2^0$, $a_0 = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - R^2$. Таким образом, уравнение окружности записано в виде (1.2) при некоторых специальных значениях коэффициентов.

Уравнение окружности существенно упростится, если перенести начало координат в точку x^0. Иными словами, если определять положение точки на плоскости новыми декартовыми координатами y_1, y_2, связанными со старыми координатами x_1, x_2 соотношениями

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_2,$$

или, более кратко,

$$x = x^0 + y. \tag{2.3}$$

Говорят, что преобразование (2.3) есть *параллельный перенос координат*, определяемый вектором x^0.

Нетрудно убедиться, что в декартовой системе координат y_1, y_2 уравнение окружности приобретает вид

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2. \tag{2.4}$$

3. Естественно решить, в некотором смысле, обратную задачу: исследовать, при каких значениях коэффициентов a_{11}, a_1, a_2, a_0 уравнение (2.2) описывает окружность, т. е. его можно при помощи преобразования координат (2.3) при некотором специальном выборе начала координат x^0 привести к виду (2.4).

Будем считать, что $a_{11} \neq 0$ (в противном случае уравнение (2.2) — уравнение первого порядка и определяет некоторую прямую).

Разделим обе части уравнения (2.2) на a_{11} и перейдем к новым координатам y_1, y_2 при помощи преобразования координат (2.3). Выполним затем очевидные тождественные преобразования. Получим

$$y_1^2 + y_2^2 + \left(2x_1^0 + 2\frac{a_1}{a_{11}}\right) y_1 + \left(2x_2^0 + 2\frac{a_2}{a_{11}}\right) y_2 + \frac{a_0}{a_{11}} + \\ + 2\frac{a_1}{a_{11}} x_1^0 + 2\frac{a_2}{a_{11}} x_2^0 + (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 = 0. \tag{3.1}$$

Положим

$$x_1^0 = -\frac{a_1}{a_{11}}, \quad x_2^0 = -\frac{a_2}{a_{11}}.$$

Тогда после элементарных преобразований уравнение (3.1) примет вид

$$y_1^2 + y_2^2 + \frac{d}{a_{11}^2} = 0, \tag{3.2}$$

где $d = a_{11}a_0 - a_1^2 - a_2^2$.

Возможны три случая.

1) $d < 0$. В этом случае, полагая $R^2 = -d/a_{11}^2$, запишем уравнение (3.2) в виде (2.4).

2) $d = 0$. В этом случае уравнение (3.2) принимает вид

$$y_1^2 + y_2^2 = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет единственная точка $y = 0$.

3) $d > 0$. В этом случае уравнение (3.2) принимает вид

$$y_1^2 + y_2^2 = -\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_{11}a_0}{a_{11}^2} < 0. \tag{3.3}$$

Такому уравнению не может удовлетворять ни одна точка плоскости. Тем не менее, существуют комплексные числа y_1, y_2, удовлетворяющие уравнению (3.3). Поэтому говорят, что уравнение (3.3) является *уравнением мнимой окружности*.

4. Аналогично исследуется и общее уравнение (1.2) кривой второго порядка. Для сокращения записей введем в рассмотрение симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

составленную из старших коэффициентов квадратичной функции, и вектор $a = (a_1, a_2)$, составленный из младших коэффициентов. Тогда уравнение (1.2) запишется в виде[1)]

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0. \tag{4.1}$$

Упрощение этого уравнения мы будем выполнять при помощи замены переменных

$$x = x^0 + Ty, \tag{4.2}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Геометрически эта замена переменных может быть интерпретирована так: начало координат переносится в точку x^0, затем выполняется поворот осей против часовой стрелки на угол φ, если считать при этом, что и исходная декартова система координат правая, т. е. поворот от оси x_1 к оси x_2 — поворот против часовой стрелки (см. с. 184).

[1)]Всюду в этом параграфе используется стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^2$.

Выполним замену переменных (4.2) в (4.1). После элементарных преобразований с учетом симметрии матрицы A получим

$$(T^T ATy, y) + 2(T^T(Ax^0 + a), y) + (Ax^0, x^0) + 2(a, x^0) + a_0 = 0. \quad (4.3)$$

Будем различать в дальнейшем два случая: определитель матрицы A равен нулю, и определитель матрицы A отличен от нуля.

4.1. Пусть $\det(A) \neq 0$. Говорят, что в этом случае уравнение (4.1) *определяет центральную кривую* второго порядка. *Центром кривой второго порядка* называется точка x^0, определяемая как решение уравнения

$$Ax^0 = -a. \quad (4.4)$$

Легко указать явные выражения для x_1^0, x_2^0. При таком выборе x^0 уравнение (4.3) принимает вид

$$(T^T ATy, y) + (a, x^0) + a_0 = 0. \quad (4.5)$$

Построим теперь ортогональное преобразование T так, чтобы привести матрицу $T^T AT$ к диагональному виду (см. упражнение на с. 186). С этой целью решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Корни его легко выписываются в явном виде:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}. \quad (4.6)$$

Если $a_{12} = 0$, то $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$. Положим в этом случае $T = I$. Уравнение (4.5) принимает вид

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d = 0, \quad d = (a, x^0) + a_0, \quad (4.7)$$

Если $a_{12} \neq 0$, то, очевидно, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Найдя λ_1, λ_2, определим соответствующие им единичные собственные векторы e^1, e^2:

$$e^k = (\cos\varphi_k, \sin\varphi_k), \quad k = 1, 2,$$

как решения уравнений

$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1, 2,$$

или, более подробно,

$$(a_{11} - \lambda_k)\cos\varphi_k + a_{12}\sin\varphi_k = 0,$$

$$a_{12}\cos\varphi_k + (a_{22} - \lambda_k)\sin\varphi_k = 0,$$

откуда получаем уравнения для определения углов φ_1, φ_2:

$$\operatorname{tg}\varphi_k = -\frac{a_{11} - \lambda_k}{a_{12}}, \quad k = 1, 2. \tag{4.8}$$

Будем считать, что $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Причем, поскольку собственные векторы симметричной матрицы, отвечающие различным собственным числам ортогональны (см. с. 175), то обязательно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi/2.$$

Элементарные вычисления дают

$$\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)/a_{12} = \frac{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{a_{12}}. \tag{4.9}$$

В соответствии со знаком a_{12} занумеруем собственные числа (и соответствующие им углы) так, чтобы $\operatorname{tg}\varphi_1 \leqslant \operatorname{tg}\varphi_2$, т. е.

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2.$$

Используя общие построения (см. с. 175), матрицу T составим из собственных векторов e^1, e^2:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

При указанном выборе матрицы T получаем

$$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

и уравнение (4.3) вновь принимает вид (4.7), причем $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, поскольку $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$, а по условию $\det(A) \neq 0$.

4.2. Пусть теперь $\det(A) = 0$. Естественно считать, что $A \neq 0$, иначе уравнение (1.2) — линейное уравнение (уравнение прямой). Понятно, что в этом случае либо $\lambda_1 = 0$, либо $\lambda_2 = 0$. Одновременно λ_1 и λ_2 не могут равняться нулю (почему?). Система уравнений (4.4) в этом случае либо не имеет решений, либо этих решений бесчисленное множество (они заполняют прямую на плоскости).

Рассмотрим сначала второй случай. Матрица A вырождена, поэтому существует такое μ, что $a_{21} = \mu a_{11}$, $a_{22} = \mu a_{12}$ (мы считаем для определенности, что $a_{11} \neq 0$, в противном случае полностью аналогичные рассуждения проводятся с заменой индекса 1 на индекс 2). Вследствие симметрии матрицы A отсюда получаем $a_{12} = \mu a_{11}$, и потому $a_{22} = \mu^2 a_{11}$, т. е.

$$A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & \mu^2 \end{pmatrix},$$

причем $a_{11} \neq 0$. Для разрешимости системы уравнений (4.4) необходимо, чтобы $a_2 = \mu a_1$. При выполнении этого условия решением системы (4.4) является любая точка прямой

$$x_1^0 = -a_1/a_{11} - \mu x_2^0. \tag{4.11}$$

Эта прямая называется *линией центров*. Нетрудно подсчитать, что $(a, x^0) = -a_1^2/a_{11}$ для любой точки прямой (4.11), поэтому, выполняя преобразование (4.2) при любой точке x^0, удовлетворяющей (4.11), получаем

$$(T^T A T y, y) + a_0 - a_1/a_{11} = 0. \tag{4.12}$$

Решая теперь задачу на собственные значения для матрицы A, построим, как и выше, ортогональную матрицу T такую, что

$$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Уравнение (4.12) принимает вид

$$y_1^2 + d = 0, \quad d = (a_0 - a_1/a_{11})/\lambda_1. \tag{4.13}$$

Обратимся теперь к случаю, когда система уравнений (4.4) не имеет решений. Как и раньше, построим матрицу T, приводящую, матрицу A к диагональному виду. Будем для определенности считать, что $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$. Выполним в уравнении (4.1) замену

$$x = T\tilde{y},$$

полагая $b = \lambda_1^{-1} T^T a$, $b_0 = a_0/\lambda_1$. Получим

$$\tilde{y}_1^2 + 2b_1\tilde{y}_1 + 2b_2\tilde{y}_2 + b_0 = 0.$$

Будем различать два случая. Если $b_2 = 0$, запишем последнее уравнение в виде

$$(\tilde{y}_1 + b_1)^2 + d = 0, \quad d = b_0 - b_1^2,$$

если $b_2 \neq 0$, можно написать, что

$$(\tilde{y}_1 + b_1)^2 + 2b_2(\tilde{y}_2 + \delta) = 0,$$

где $\delta = (b_0 - b_1^2)/2b_2$.

Полагая

$$y = \tilde{y} + \tilde{x}^0,$$

где $\tilde{x}_1^0 = b_1$, $\tilde{x}_2^0 = 0$ в первом случае, $\tilde{x}_1^0 = b_1$, $\tilde{x}_2^0 = \delta$ во втором случае, получим, что преобразование $x = x^0 + Ty$, где $x^0 = -T\tilde{x}^0$, приводит уравнение (4.1) либо к виду

$$y_1^2 + d = 0,$$

либо к виду

$$y_1^2 + 2b_2 y_2 = 0.$$

4.3. Подводя итог, можно сказать, что, выбирая соответствующим образом начало x^0 новой декартовой системы координат и угол поворота φ ее осей по отношению к осям старой системы координат, общее уравнение (1.2) кривой второго порядка можно преобразовать к одной из следующих трех форм:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{4.14}$$

$$y^2 = 2px, \tag{4.15}$$

$$y^2 + d = 0. \tag{4.16}$$

Для удобства мы изменили очевидным образом обозначения декартовых координат.

5. Опираясь на уравнения (4.14)–(4.16), исследуем геометрические свойства кривых второго порядка.

5.1. Начнем с уравнения (4.16). Возможны три случая: $d = 0$, кривая совпадает с осью y; $d < 0$, кривая распадается на две параллельные прямые $y = \sqrt{-d}$, $y = -\sqrt{-d}$; $d > 0$, множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению (4.16), пусто, говорят, что кривая распадается на *две мнимые параллельные прямые.*

5.2. Исследуем уравнение (4.14), возникшее при упрощении уравнения центральных кривых. Здесь нужно различать такие случаи:

1) знаки собственных чисел λ_1, λ_2 матрицы A совпадают, при этом, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;

2) знаки собственных чисел λ_1, λ_2 различны.

Кривые, соответствующие первому случаю, называют *эллипсами.* Здесь опять нужно различать три случая: $d = 0$, кривая вырождается в точку, совпадающую с началом координат; $d > 0$, уравнение определят так называемый *мнимый эллипс*; $d < 0$, в этом случае уравнение (4.14) запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.1}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую уравнением (5.1), называют *эллипсом.*

Кривые, соответствующие случаю, когда λ_1, λ_2 имеют различные знаки, называют *гиперболами.* Будем для определенности считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ и рассмотрим три случая. Если $d = 0$, то уравнение (4.14) можно записать в виде

$$\sqrt{\lambda_1}x = \pm\sqrt{-\lambda_2}y,$$

т. е. в данном случае кривая распадается на две прямые, пересекающиеся в начале координат. Случаи $d < 0$, $d > 0$, фактически, можно не различать, так как они сводятся один к другому за счет переименования осей координат.

Будем для определенности считать, что $d < 0$. Тогда уравнение (4.14) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.2}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{-\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую уравнением (5.2), называют *гиперболой.*

5.3. Опишем геометрические свойства эллипса (см. рис. 1). Непосредственно из уравнения (5.1) вытекает, что для всех точек эллипса справедливы неравенства: $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, т. е. эллипс — ограниченная кривая, расположенная в соответствующем прямоугольнике.

Точками пересечения этой кривой с осями координат являются точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. Они называются *вершинами* эллипса. Оси координат — *оси симметрии* эллипса, так как если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то точки $(-x, y)$, $(x, -y)$ также лежат на эллипсе.

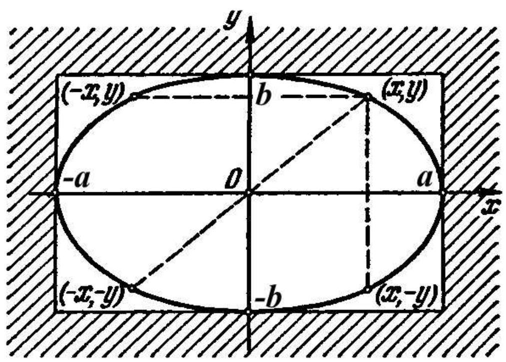


Рис. 1. К описанию геометрических свойств эллипса.

Начало координат — *центр симметрии* эллипса, так как, если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то и точка $(-x, -y)$ лежит на эллипсе.

Числа a, b называют длинами *полуосей* эллипса. Будем для определенности считать, что $a \geqslant b$. Понятно, что при $a = b$ эллипс превращается в окружность (радиуса a). Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Величина $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} \in [0, 1)$ характеризует степень вытянутости эллипса вдоль большой полуоси и называется *эксцентриситетом* эллипса.

Точки $(-c, 0)$, $(c, 0)$ называются *фокусами* эллипса. Пусть (x, y) — произвольная точка эллипса. Тогда, как ниже будет показано,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{5.3}$$

Равенство (5.3) означает, что сумма расстояний от точки эллипса до фокусов одна и та же для всех точек эллипса (см. рис. 2). Это свойство эллипса можно принять за его определение, так как, исходя из (5.3), очевидно, можно получить уравнение эллипса.

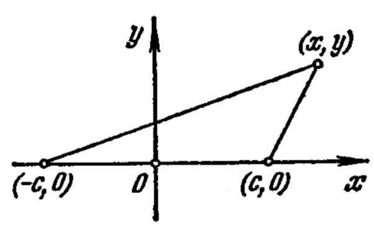


Рис. 2. К определению эллипса и гиперболы.

Докажем справедливость равенства (5.3) для точек, принадлежащих эллипсу. Используя равенства $c^2 = a^2 - b^2$, $y^2 = b^2 - b^2x^2/a^2$, можем написать

$$
\begin{aligned}
(x+c)^2+y^2 = x^2+2cx+a^2-b^2+b^2-b^2x^2/a^2 = \\
= x^2(1-b^2/a^2)+2cx+a^2 = x^2c^2/a^2+2cx+a^2 = \\
= (xc/a+a)^2. \quad (5.4)
\end{aligned}
$$

Точно так же

$$(x-c)^2+y^2 = (-xc/a+a)^2.$$

Заметим, что $c < a$. Учтем также, что $|x| \leqslant a$ для любой точки эллипса. Поэтому справедливы неравенства

$$xc/a+a>0, \quad -xc/a+a>0,$$

следовательно,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = xc/a+a, \quad \sqrt{(x-c)^2+y^2} = -xc/a+a,$$

откуда непосредственно вытекает (5.3).

5.4. Опишем геометрические свойства гиперболы (см. рис. 3). Из уравнения (5.2) непосредственно вытекает, что если точка (x,y) лежит на гиперболе, то $x^2 \geqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2x^2/x^2$ т. е. кривая, описываемая уравнением (5.2), лежит вне полосы $|x| < a$ и внутри соответствующих (вертикальных) углов, образованных прямыми $y = \pm(b/a)x$.

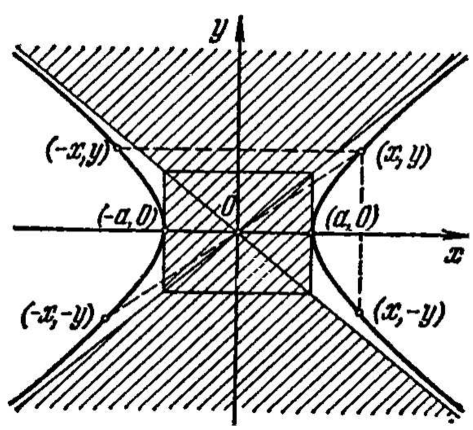


Рис. 3. К описанию геометрических свойств гиперболы.

Как и в случае эллипса, проверяется, что кривая симметрична относительно осей координат. Начало координат — *центр симметрии* кривой. Точки $(-a,0)$, $(a,0)$ пересечения с осью x называются *вершинами* гиперболы.

Прямые $y = \pm(b/a)x$ — *асимптоты* соответствующих ветвей гиперболы (рис. 3). Покажем это применительно к ветви, определяемой уравнением

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geqslant a, \tag{5.5}$$

и прямой $y = (b/a)x$. Для остальных ветвей выкладки полностью аналогичны. В соответствии с определением асимптоты (см. курс математического анализа) достаточно проверить справедливость следующих равенств:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) = 0.$$

Проверка первого из этих равенств элементарна. При проверке второго полезно заметить, что

$$\sqrt{x^2 - a^2} - x = -\frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \to 0$$

при $x \to \infty$.

Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Точки $(-c, 0)$, $(c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы.

Для любой точки (x, y), лежащей на гиперболе,

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a, \tag{5.6}$$

т. е. модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов постоянен (см. рис. 2). Это свойство гиперболы можно было бы принять за ее определение.

Проверим справедливость равенства (5.6), считая, что выполнены соотношения (5.5). Для остальных ветвей гиперболы все рассуждения полностью аналогичны. Следуя выкладкам, выполненным в предыдущем пункте (см. (5.4)), получаем

$$(x + c)^2 + y^2 = (cx/a + a)^2, \quad (x - c)^2 + y^2 = (cx/a - a)^2.$$

Для рассматриваемой ветви гиперболы, как нетрудно убедиться, справедливы неравенства

$$cx/a + a > 0, \quad cx/a - a > 0.$$

Поэтому

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = cx/a + a - (cx/a - a) = 2a,$$

т. е. (5.6) доказано.

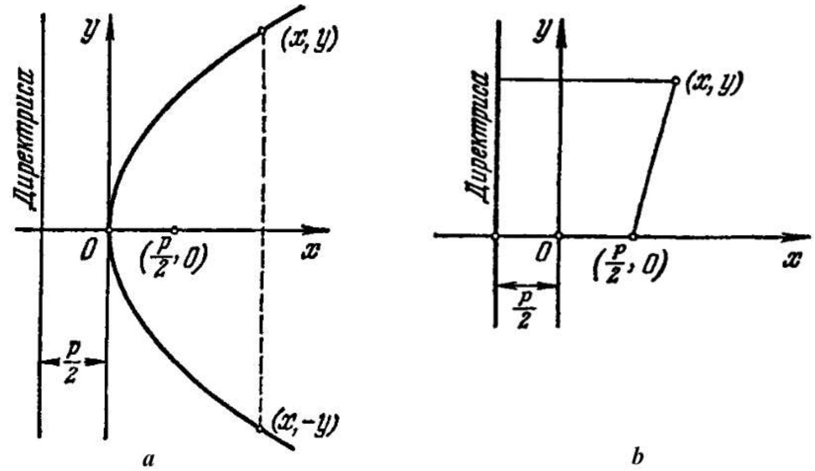


Рис. 4. К описанию геометрических свойств параболы (a). К определению параболы (b).

5.5. Опишем геометрические свойства параболы (см. рис. 4, a). Большинство из них хорошо известны читателю из школьного курса математики. Будем считать, что $p > 0$. Рассмотрение случая $p < 0$ требует очевидных изменений.

Непосредственно из уравнения (4.15) вытекает, что парабола расположена в правой полуплоскости, симметрична относительно оси x. Единственной точкой пересечения с осями координат является начало координат. Эта точка называется *вершиной* параболы. Парабола не имеет асимптот (докажите!).

Точка $(p/2, 0)$ называется *фокусом* параболы. Прямая $x = -p/2$ называется *директрисой* параболы (см. рис. 4, a). Для любой точки (x, y), принадлежащей параболе

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2, \tag{5.7}$$

т. е. расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию этой точки до директрисы (см. рис. 4, b). Это свойство параболы можно было бы принять за ее определение.

Докажем равенство (5.7). Имеем

$$(x - p/2)^2 + y^2 = x^2 - px + p^2/4 + 2px = (x + p/2)^2,$$

причем, очевидно, $x + p/2 > 0$ для любой точки параболы, следовательно, (5.7) выполнено.

§ 2. Поверхности второго порядка

1. Отнесем трехмерное евклидово пространство $\mathbf{V}_3$ к декартовой системе координат (см. с. 34). *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, удовлетворяющих уравнению[1)]

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0, \tag{1.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

есть заданная симметричная матрица $a = (a_1, a_2, a_3)$ — заданный вектор, a_0 — заданное число.

Простейший пример поверхности второго порядка — сфера (см. с. 47).

Исследование и упрощение уравнения (1.1) опирается на общую теорию квадратичных форм и проводится по той же схеме, что и для кривых второго порядка. Однако, оно не может быть выполнено в общем случае с той же степенью подробности, так как задача приведения симметричной матрицы третьего порядка ортогональным преобразованием подобия к диагональному виду не допускает решения по простым явным формулам.

2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda I| = 0,$$

e^1, e^2, e^2 — ортонормированный базис собственных векторов матрицы A: $Ae^k = \lambda_k e^k$, $k = 1, 2, 3$, $(e^k, e^l) = \delta_{kl}$, $k, l = 1, 2, 3$. Положим

$$T = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 \\ e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ e_3^1 & e_3^2 & e_3^3 \end{pmatrix}.$$

По построению матрица T ортогональна и

$$T^T A T = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

2.1. Предположим сначала, что поверхность является *центральной*, т. е. $|A| \neq 0$, или, что все равно, собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы A отличны от нуля. Выполним в уравнении (1.1) замену переменных

$$x = x^0 + Ty. \tag{2.1}$$

[1)]В этом параграфе под скалярным произведением всюду понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^3$.

Получим

$$(\Lambda y, y) + 2(T^T(Ax^0 + a), y) + (Ax^0, x^0) + 2(a, x^0) + a_0 = 0.$$

Определим x^0 как решение системы уравнений $Ax^0 + a = 0$. Тогда

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + d = 0, \tag{2.2}$$

где $d = (a, x^0) + a_0 = a_0 - (A^{-1}a, a)$.

2.2. Пусть теперь одно из собственных чисел матрицы A равно нулю, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\lambda_1,\ \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Выполним в уравнении (1.1) замену переменных

$$x = T\tilde{y}.$$

Получим

$$\lambda_1 \tilde{y}_1^2 + \lambda_2 \tilde{y}_2^2 + 2b_1\tilde{y}_1 + 2b_2\tilde{y}_2 + 2b_3\tilde{y}_3 + a_0 = 0, \tag{2.3}$$

где $b = T^T a$. Заметим теперь, что

$$\lambda_k \tilde{y}_k^2 + 2b_k\tilde{y}_k = \lambda_k(\tilde{y}_k^2 + 2(b_k/\lambda_k)\tilde{y}_k + (b_k/\lambda_k)^2) - \lambda_k(b_k/\lambda_k)^2 =$$
$$= \lambda_k(\tilde{y}_k + b_k/\lambda_k)^2 - b_k^2/\lambda_k, \quad k = 1, 2,$$

следовательно,

$$\lambda_1(\tilde{y}_1 + b_1/\lambda_1)^2 + \lambda_2(\tilde{y}_2 + b_2/\lambda_2)^2 + 2b_3\tilde{y}_3 + \tilde{d} = 0, \tag{2.4}$$

где $d = a_0 - b_1^2/\lambda_1 - b_2^2/\lambda_2$.

Далее нужно различать два случая: если $b_3 = 0$, положим

$$\tilde{x}_k^0 = b_k/\lambda_k, \quad k = 1, 2,\ \tilde{x}_3^0 = 0;$$

если $b_3 \neq 0$, то $2b_3\tilde{y}_3 + \tilde{d} = 2b_3(\tilde{y}_3 + \tilde{d}/2b_3)$, и мы положим

$$\tilde{x}_k^0 = b_k/\lambda_k, \quad k = 1, 2,\ \tilde{x}_3^0 = \tilde{d}/2b_3.$$

Таким образом, преобразование $x = x^0 + Ty$, где $x^0 = -T\tilde{x}^0$, приводит в первом случае уравнение (1.1) к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d = 0, \tag{2.5}$$

а во втором случае — к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2b_3 y_3 = 0. \tag{2.6}$$

2.3. Пусть, наконец, лишь одно собственное λ_1 матрицы A отлично от нуля. Выполняя в уравнении (1.1) замену переменных

$$x = T\tilde{y},$$

получим

$$\lambda_1 \tilde{y}_1^2 + 2b_1\tilde{y}_1 + 2b_2\tilde{y}_2 + 2b_3\tilde{y}_3 + a_0 = 0, \tag{2.7}$$

где $b = T^T a$. Рассуждая далее аналогично предыдущему пункту, нетрудно показать, что при соответствующем выборе x^0 преобразование

$$x = x^0 + Ty$$

приводит уравнение либо к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + 2b_2 y_2 = 0, \tag{2.8}$$

либо к виду

$$\lambda_1 y_1^2 + d = 0. \tag{2.9}$$

2.4. Подводя итог, можно сказать, что, выбирая соответствующим образом начало x^0 новой декартовой системы координат и ортогональную матрицу T, общее уравнение (1.1) поверхности второго порядка можно преобразовать к одному из следующих пяти видов:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^3 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, \tag{2.10}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{2.11}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{2.12}$$

$$y^2 = 2px, \tag{2.13}$$

$$y^2 + d = 0. \tag{2.14}$$

Для удобства здесь очевидным образом изменены обозначения декартовых координат и некоторых коэффициентов.

3. Опираясь на уравнения (2.10)–(2.14), исследуем геометрические свойства поверхностей второго порядка.

3.1. Начнем с уравнения (2.14). Здесь возможны три случая: $d < 0$, поверхность распадается на две параллельные плоскости $y = \sqrt{-d}$, $y = -\sqrt{-d}$; $d = 0$ поверхность представляет собой плоскость $y = 0$; $d > 0$ нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей уравнению, говорят, что уравнение описывает пару параллельных *мнимых плоскостей*.

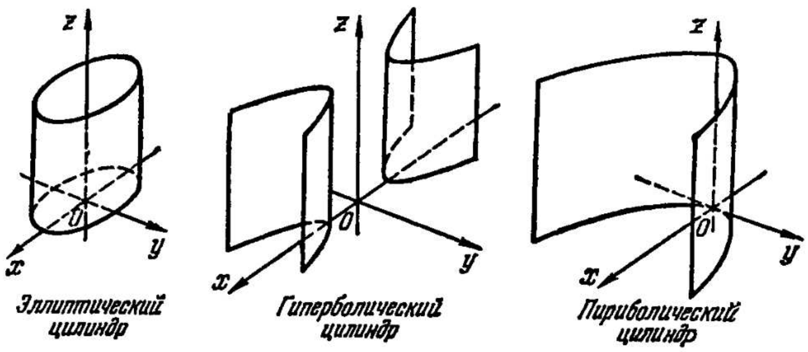


Рис. 5. Цилиндры.

3.2. Как показано в предыдущем параграфе, уравнение (2.13) описывает параболу на плоскости переменных (x, y), поэтому соответствующая поверхность есть так называемый *параболический цилиндр* с образующей, параллельной оси z. Любое сечение этой поверхности плоскостью $z = \text{const}$ — парабола (см. рис. 5).

3.3. Уравнение (2.12) в зависимости от знаков λ_1, λ_2, d может описывать эллипс или гиперболу в декартовой плоскости x, y. Соответствующие поверхности — *эллиптический* или *гиперболический цилиндр* (см. рис. 5). Понятно, что здесь возможны случаи вырождения, аналогичные, изученным в пункте 5.2 предыдущего параграфа.

3.4. Обратимся к уравнению (2.11). Здесь нужно различать два случая: 1) числа λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки, 2) знаки чисел λ_1, λ_2 различны.

Пусть числа λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки. Для определенности будем считать, что они положительны. Будем считать, что $b_3 < 0$. Если принять, что $b_3 > 0$, то получим, очевидно такую же, поверхность, но симметричную относительно плоскости x, y. Если $b_3 = 0$, то мы приходим к одной из поверхностей, рассмотренных в предыдущих пунктах. При сделанных предположениях уравнение (2.11) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{3.1}$$

Здесь $a^2 = 2|b_3|/\lambda_1$, $b^2 = 2|b_3|/\lambda_2$. При $z < 0$ уравнение (2.11) противоречиво, т. е. вся поверхность расположена в полупространстве $z \geqslant 0$. Единственная точка плоскости $z = 0$, принадлежащая поверхности, — начало координат. Координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ являются *плоскостями симметрии*, ось z является *осью симметрии*, так как если точка (x, y, z) принадлежит поверхности, то точки $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(-x, -y, z)$ также принадлежат поверхности. Записывая уравнение (2.11) при $z > 0$ в виде

$$\frac{x^2}{za^2} + \frac{y^2}{zb^2} = 1, \tag{3.2}$$

получаем, что сечения этой поверхности плоскостями $z = \text{const} > 0$ — эллипсы, полуоси которых увеличиваются с ростом z (см. рис. 6). Сечения этой поверхности плоскостям $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$, как нетрудно убедиться, — параболы (см. рис. 6). Описанную поверхность называют *эллиптическим параболоидом*.

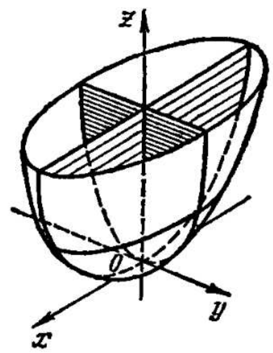


Рис. 6. Эллиптический параболоид.

Пусть числа λ_1, λ_2 имеют разные знаки. Будем считать что

$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ b_3 < 0.$$

Любое другое допустимое сочетание знаков рассматривается полностью аналогично. Уравнение (2.11) можно записать а виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{3.3}$$

Здесь $a^2 = 2|b_3|/\lambda_1$, $b^2 = 2|b_3|/|\lambda_2|$. Вновь координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ являются *плоскостями симметрии*, ось z является *осью симметрии*.

Проанализируем сечения этой поверхности плоскостями, параллельными координатной плоскости x, y (см. рис. 7, b). При $z = 0$ из (2.11) получаем

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0,$$

т. е. сечение поверхности плоскостью $z = 0$ — пара прямых (см. рис. 7, b)

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

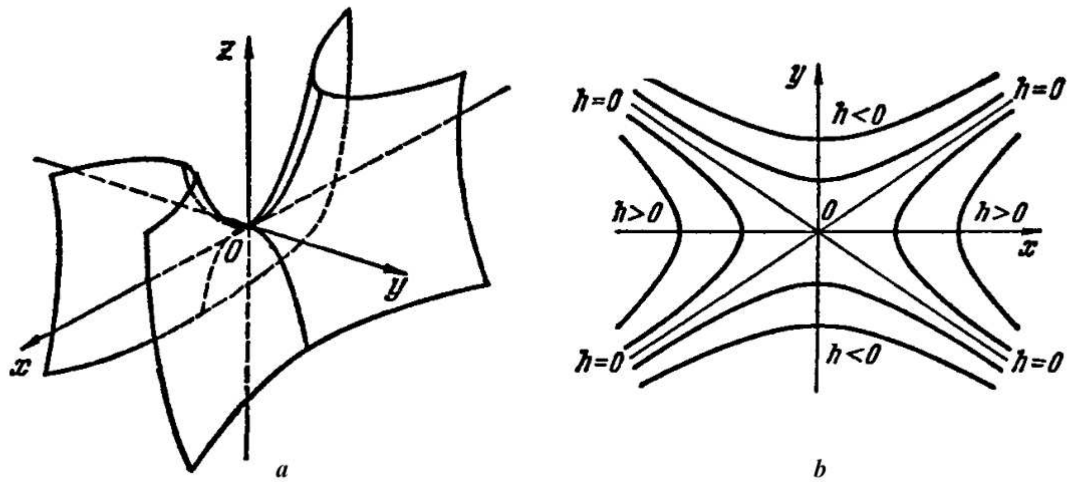


Рис. 7. Гиперболический параболоид (a). Сечения гиперболического параболоида плоскостями $z = h$ при различных значениях h (b).

При $z = h \neq 0$ запишем уравнение (2.11) в виде

$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1. \tag{3.4}$$

При $h > 0$ уравнение (3.4) — уравнение гиперболы, ветви которой вытянуты вдоль оси x. При $h < 0$ получаем гиперболу, ветви которой вытянуты вдоль оси y (см. рис. 7, b).

Пересекая поверхность плоскостью $x = h$, получаем параболу

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \tag{3.5}$$

ветви которой направлены противоположно оси z. Пересекая поверхность плоскостью $y = h$, очевидно, получим параболу, ветви которой направлены вдоль оси z. Описанную седлообразную поверхность называют *гиперболическим параболоидом* (см. рис. 7, a).

3.5. Обратимся, наконец, к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^3 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, \tag{3.6}$$

описывающему *центральные поверхности* второго порядка. Не ограничивая общности, здесь можно различать два случая:

1) λ_1, λ_2, $\lambda_3 > 0$, это условие эквивалентно условию положительной определенности матрицы A (см. п. 6, с. 179);

2) λ_1, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$.

В случае 1) возможны три ситуации: $d = 0$, единственная точка, удовлетворяющая (3.6), — начало координат; $d > 0$, нет ни одной

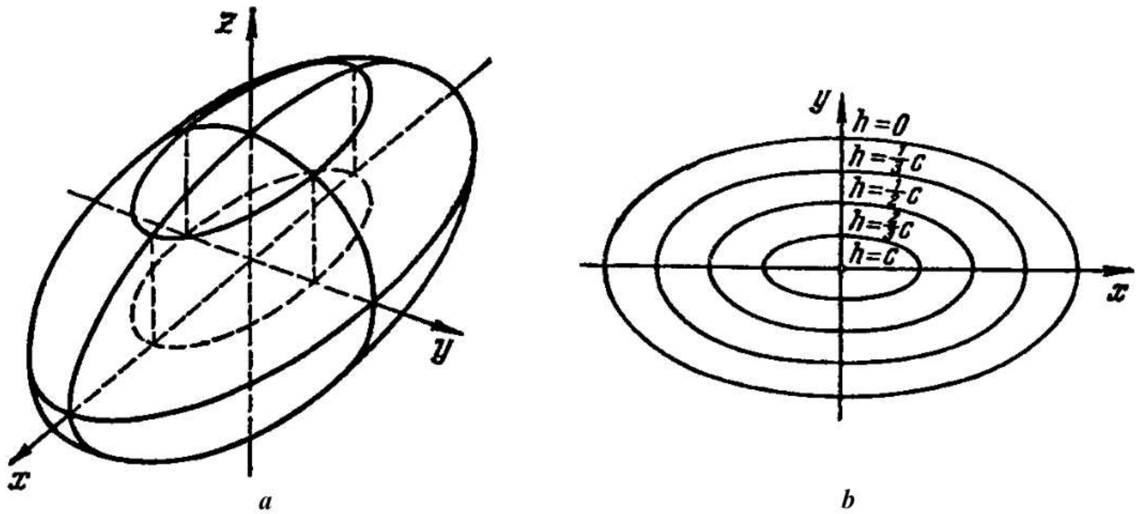


Рис. 8. Эллипсоид (a). Сечения эллипсоида плоскостями $z = h$ при различных значениях h (b).

точки пространства, удовлетворяющей этому уравнению; $d < 0$. При выполнении последнего условия уравнение (3.6) запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.7}$$

Здесь $a^2 = -d/\lambda_1$, $b^2 = -d/\lambda_2$, $c^2 = -d/\lambda_3$. Поверхность, описываемая уравнением (3.7), называется *эллипсоидом* (см. рис. 8, a).

Эллипсоид, очевидно, симметричен относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Вся поверхность заключена в параллелепипеде

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c$$

и, следовательно, ограничена.

Изучим сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным. Вследствие симметрии поверхности достаточно ограничиться, например, плоскостями параллельными плоскости x, y. Нетрудно убедиться, что кривая, получающуюся при пересечении эллипсоида с плоскостью $z = h$, где $|h| \leq c$, является эллипсом с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

При возрастании h от 0 до c, полуоси a_1, b_1 убывают. При $h = \pm c$ эллипс вырождается в точку (см. рис. 8, b).

Полезно отметить, что сечение эллипсоида любой плоскостью дает эллипс. В самом деле, это сечение — кривая второго порядка. Она

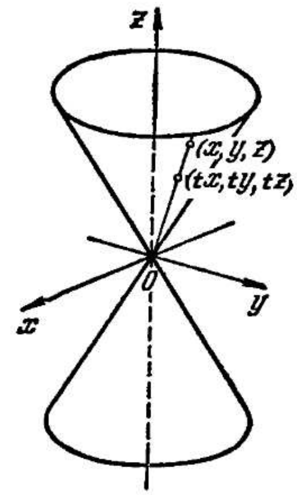


Рис. 9. Эллиптический конус.

ограничена, так как эллипсоид ограничен, но единственной ограниченной кривой второго порядка (см. § 1 настоящей главы) является эллипс.

Обратимся к случаю 2). Пусть при этом $d = 0$. Запишем уравнение (3.6) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{3.8}$$

Здесь $a^2 = 1/\lambda_1$, $b^2 = 1/\lambda_2$, $c^2 = -1/\lambda_3$. Поверхность, описываемая уравнением (3.8), называется *эллиптическим конусом*. Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Ее сечение плоскостью $z = h$ — эллипс с полуосями $a_1 = a|h|/c$, $b_1 = b|h|/c$ (см. рис. 9).

При $a = b$ получаем прямой круговой конус с вершиной в начале координат.

Заметим, что если точка (x, y, z) лежит на конусе, то и точка (tx, ty, tz) при любом $t \in (-\infty, \infty)$ лежит на конусе, т. е. вместе с любой точкой (x, y, z), лежащей на конусе, конусу принадлежит и вся прямая, проходящая через эту точку и начало координат (см. рис. 9).

Можно сказать, таким образом, что эллиптический конус получается при движении прямой (*образующей*), закрепленной в одной точке, по эллиптической *направляющей*.

Пусть теперь $d < 0$. Запишем уравнение (3.6) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.9}$$

Здесь $a^2 = -d/\lambda_1$, $b^2 = -d/\lambda_2$, $c^2 = -d/|\lambda_3|$. Поверхность, описываемая уравнением (3.9) называется *однополостным гиперболоидом* (см.

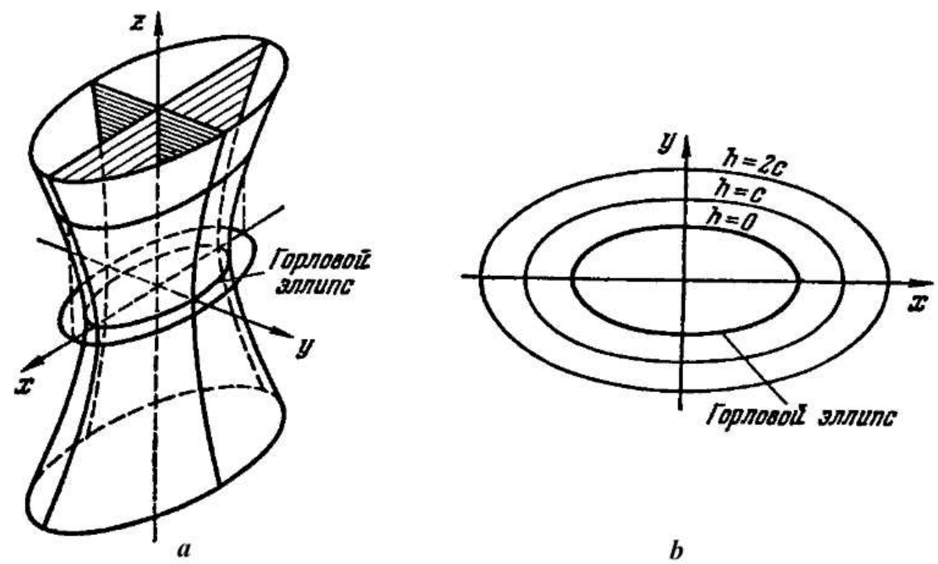


Рис. 10. Однополостный гиперболоид (a). Сечения однополостного гиперболоида плоскостями $z = h$ при различных значениях h (b).

рис. 10, a). Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Сечение поверхности плоскостями $x = h$, $y = h$ дает гиперболы.

Сечение поверхности плоскостью $z = h$ является эллипс с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

При $h = 0$ получаем, так называемый, *горловой эллипс* (см. рис. 10, b).

Рассмотрим, наконец, случай $d > 0$. Уравнение (3.6) представим в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{3.10}$$

где $a^2 = d/\lambda_1$, $b^2 = d/\lambda_2$, $c^2 = d/|\lambda_3|$. Уравнение (3.10) описывает *двуполостный гиперболоид* (см. рис. 11, a).

Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и относительно начала координат. Заметим, что при $|z| < c$ не существует вещественных x, y, удовлетворяющих уравнению (3.10). При $|z| = c$ уравнению (3.10) удовлетворяют лишь $x = 0$, $y = 0$, т. е. вся поверхность лежит вне плоского слоя $|z| < c$. Сечениями поверхности плоскостями $z = \pm h$ при $h > c$ являются эллипсы (см. рис. 11, b) с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

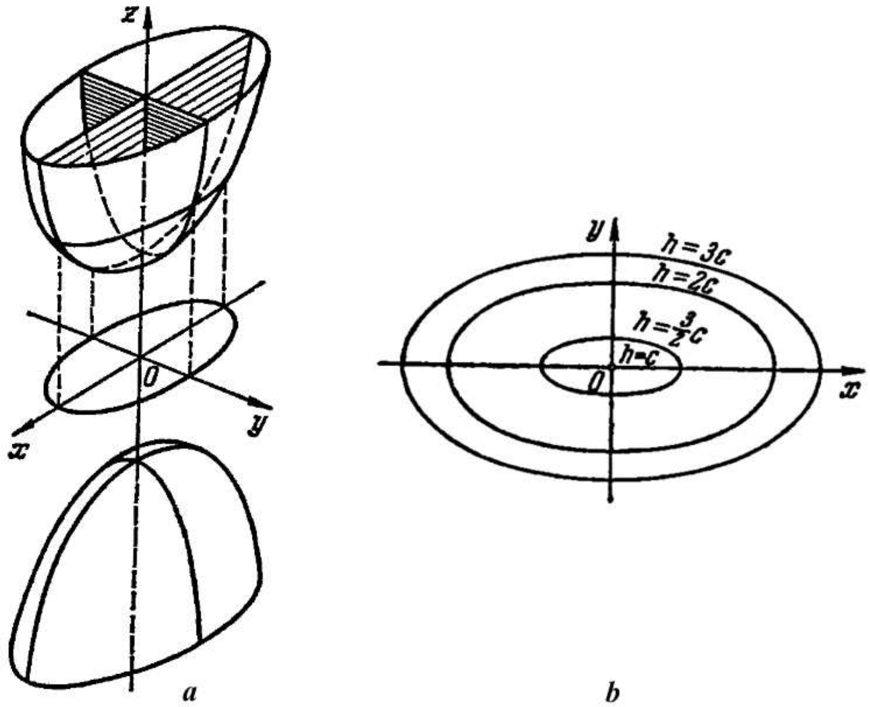


Рис. 11. Двуполостный гиперболоид (a). Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $z = h$ при различных значениях h (b).

Сечение поверхности плоскостями $x = h$, $y = h$ дает гиперболы.

4. Приведем в заключение сводку уравнений и названий поверхностей второго порядка:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — эллиптический конус;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид;

5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$ — эллиптический параболоид;

6) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$ — гиперболический параболоид;

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр;

8) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр;

9) $y^2 = 2px$ — параболический цилиндр.

Приложение

Теорема (основная теорема алгебры). *Всякий полином*

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad n \geqslant 1,$$

имеет хотя бы один корень.

Доказательство. Будем обозначать декартовы координаты точек на плоскости через x_1, x_2. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — точка на плоскости, $z = x_1 + ix_2$ — соответствующее ей комплексное число.

Равенство $f(x) = |P_n(z)|$ определяет функцию f двух вещественных переменных. Эта функция неотрицательна при всех x.

Если удастся доказать, что существует точка $x = (x_1, x_2)$ такая, что $f(x) = 0$, то число $z = x_1 + ix_2$ будет корнем полинома P_n.

Докажем, прежде всего, что функция f непрерывна на всей плоскости. Для любых двух точек x, $\tilde{x}$ вследствие (4.4), с. 8, имеем

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| = ||P_n(\tilde{z})| - |P_n(z)|| \leqslant |P_n(\tilde{z}) - P_n(z)|.$$

Здесь $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2$. Положим $h = \tilde{z} - z$. Тогда

$$P_n(\tilde{z}) = P_n(z+h) = \\ = (z+h)^n + a_{n-1}(z+h)^{n-1} + \cdots + a_1(z+h) + a_0. \quad (4.1)$$

По формуле бинома Ньютона для любого целого $k \geqslant 1$

$$(z+h)^k = z^k + C_k^1 z^{k-1}h + \cdots + C_k^{k-1} z h^{k-1} + h^k,$$

Приводя подобные в правой части (4.1), найдем, что

$$P_n(z+h) = P_n(z) + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_{n-1}h^{n-1} + h^n, \quad (4.2)$$

причем коэффициенты $c_1, \ldots, c_{n-1}$ зависят только от z и коэффициентов полинома P_n. Применяя (4.2), (4.3), с. 8, нетрудно получить, что

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| = |P_n(z+h) - P_n(z)| \leqslant L(|h| + |h|^2 + \cdots + |h|^n), \quad (4.3)$$

где L зависит только от $|z|$, и модулей коэффициентов полинома P_n. Выбирая точку $\tilde{x}$ достаточно близкой к x, правую часть неравенства (4.3) можно сделать меньшей любого наперед заданного положительного числа. Это и означает непрерывность функции f.

Можно считать, что $f(0) = |a_0| > 0$. В противном случае нуль — корень полинома. Построим круг B_R радиуса R с центром в начале координат. Обозначим через S_R окружность, границу круга B_R. Пусть $x \in S_R$. Запишем $f(x)$ в виде $f(x) = |z^n - (-a_{n-1}z^{n-1} - \cdots - a_0)|$. Вследствие (4.4), с. 8, отсюда вытекает, что

$$f(x) \geqslant |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_0| = R^n - |a_{n-1}|R^{n-1} - \cdots - |a_0| = \\ = R^n(1 - |a_{n-1}|R^{-1} - \cdots - |a_0|R^{-n}).$$

Правая часть полученного неравенства стремится к бесконечности при $R \to \infty$. Поэтому, выбирая R достаточно большим, можно добиться того, что

$$f(x) \geqslant 2f(0) \quad \forall\, x \in S_R. \tag{4.4}$$

По доказанному выше функция f непрерывна на всей плоскости, значит, по теореме Вейерштрасса[1)] она достигает минимального значения в некоторой точке x^1 на замыкании круга B_R. Очевидно, $f(x^1) \leqslant f(0)$, но тогда вследствие оценки (4.4) точка x^1 не может лежать на S_R, следовательно, она — внутренняя точка области B_R. Будем считать, что $f(x^1) > 0$. В противном случае точка x^1 соответствует корню полинома P_n.

Пусть $h = h_1 + ih_2$. Если $|h|$ достаточно мал, то точка

$$x^2 = (x_1^1 + h_1, x_2^1 + h_2)$$

лежит внутри B_R. По определению $f(x^2) = |P_n(z^1 + h)|$. Используя (4.2), получим, что $P_n(z^1 + h) = P_n(z^1) + c_1h + c_2h^2 + \cdots + h^n$, причем коэффициенты $c_1, \ldots, c_{n-1}$ зависят только от z^1 и коэффициентов полинома P_n. По предположению $P_n(z^1)$ не нуль, поэтому

$$\frac{P_n(z^1 + h)}{P_n(z^1)} = 1 + d_1h + \cdots + d_nh^n.$$

Среди чисел $d_1, \ldots, d_n$ хотя бы одно не нуль, по крайне мере, последнее таково. Пусть $d_k \neq 0$, а все числа d_j с меньшими номерами — нули. Тогда для любого $c \neq 0$

$$\frac{P_n(z^1 + h)}{P_n(z^1)} = 1 + \frac{d_k}{c^k}(ch)^k + \frac{d_{k+1}}{c^{k+1}}(ch)^{k+1} + \cdots + \frac{d_n}{c^n}(ch)^n. \tag{4.5}$$

Выберем c так, чтобы $c^k = -d_k$. Положим $v = ch$. Тогда

$$\frac{f(x^2)}{f(x^1)} = \frac{|P_n(z^1 + h)|}{|P_n(z^1)|} = |1 - v^k + v^kb(v)|,$$

[1)] См. курс математического анализа. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass; 1815–1897) — немецкий математик.

где $b(v) = \dfrac{d_{k+1}}{c^{k+1}} v + \cdots + \dfrac{d_n}{c^n} v^{n-k}$. Выберем теперь h так, что v — вещественное положительное число, меньшее единицы, а $|b(v)| \leqslant 1/2$. При таком v, очевидно,

$$\frac{f(x^2)}{f(x^1)} \leqslant 1 - \frac{v^k}{2} < 1,$$

а этого быть не может, так как x^1 — точка минимума функции f на замыкании B_R. Получили противоречие. Остается принять, что $f(x^1) = 0$, т. е. $z^1 = x_1^1 + ix_2^1$ — корень полинома P_n. $\square$

Литература

Основная литература

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. — Изд-во «Лань», 2009.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — Изд-во «Лань», 2008.

5. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. — Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

6. Рунг Е.В., Эскин Л.Д. Классификация кривых и поверхностей второго порядка: учебное пособие. — Казань: Казанский государственный университет, 2009.

Дополнительная литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. — Изд-во «МЦНМО», 2011.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. — Изд-ва «Добросвет», «КДУ», 2009.

5. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969.

6. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — Изд-во «Лань», 2009.

7. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. — Изд-во «Лань», 2002.

8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

9. Стрэнг Г. Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 1980.

10. Тихомиров В.М., Успенский В.В. Десять доказательств основной теоремы алгебры. Математическое просвещение, 1997, 1, с. 50–70.

11. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. — Изд-во «Лань», 2004.

12. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.