КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра астрономии и космической геодезии

Р.А.КАЩЕЕВ

Введение в теорию гравитационного потенциала небесных тел

Конспект лекций

Казань – 2015

УДК 528.2
ББК 26.21

Принято на заседании кафедры астрономии и космической геодезии
Протокол № 12 от 15 мая 2015 года

Рецензент:
кандидат физико-математических наук,
доцент КГАСУ **В.С.Боровских**

Кащеев Р.А.
Введение в теорию гравитационного потенциала небесных тел.
Конспект лекций / Р.А.Кащеев. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 90 с.

Предлагаемый конспект лекций посвящен изложению важнейших вопросов теории гравитационного потенциала: определение потенциала и его основные свойства, решение простейших прямых задач теории потенциала, постановка краевых задач теории потенциала, пути и методы их решения. Пособие адресовано студентам, обучающимся по образовательной программе бакалавриата направления «Геодезия и дистанционное зондирование», реализуемой в Институте физики Казанского федерального университета, а также широкому кругу читателей, интересующихся указанными проблемами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теорию потенциала, история которой восходит к работам Ньютона, Клеро, Лапласа и Лежандра, следует рассматривать как один из наиболее разработанных и мощных разделов математической физики, тесно связанный с соответствующими разделами математического анализа, теории поля, функционального анализа и теории специальных функций [1].

Теория потенциала представляет собой теоретическую дисциплину, принципиально важную для подготовки высококвалифицированных профессионалов в области геодезии, гравиметрии, небесной механики и геофизики. На основе теории потенциала формируется и разрабатывается математический аппарат, необходимый для последующего изучения гравитационного поля, фигуры и внутреннего строения Земли, а также движения других планет и их естественных и искусственных спутников, геодинамических процессов различной природы, происходящих в недрах небесных тел [4]. В этой связи важно подчеркнуть, что теория гравитационного потенциала представляет для специалистов геодезических отраслей не только теоретический, но и практический интерес, аргументируемый множеством ее разнообразных приложений в теоретической геодезии, гравиметрии, высшей геодезии, космической геодезии и небесной механике [2].

В силу принципа аддитивности (суперпозиции) гравитационных сил в нерелятивистской механике понятие потенциала распространяется на произвольные дискретные и непрерывные распределения тяготеющих масс. Элементарное для малого числа точечных масс определение потенциала трансформируется в серьезную математическую задачу для сложно организованных протяженных тел, характерным примером которых могут служить планеты земной группы [7].

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие в основном соответствует содержанию курса «Теория потенциала» и потому посвящено определению основных понятий и исследованию основных свойств различных видов потенциалов силы притяжения, а также постановке и решению краевых (граничных) задач теории потенциала. Эти вопросы играют чрезвычайно важную роль в теоретических разделах геодезии, поскольку исследование пространственной структуры внешнего гравитационного поля осуществляется по данным измерений, выполненных на поверхности Земли и околоземном пространстве, редуцируемых, в случае необходимости, на иные более простые и гладкие поверхности. Значительное место в работе отводится также поиску решений краевых задач теории потенциала с помощью шаровых и сферических функций и их применению для моделирования потенциала ньютоновской силы притяжения во внешнем пространстве [3]. Уместно также обратить внимание на универсальность излагаемого в пособии математического аппарата с точки зрения применимости его к описанию гравитационных полей различных небесных тел [5].

Настоящее пособие, как и сама дисциплина «Теория потенциала» учебного плана геодезистов, носит преимущественно прикладной характер, и потому не претендует на фундаментальность изложения в случаях, связанных с исследованием существования и единственности решения задач и строгостью доказательства ряда теорем. Заметим, кстати, что в ряде случаев автор считает достаточным ограничиться формулировкой теоремы, не приводя ее доказательства.

Часть 1. Основы теории гравитационного потенциала

§ 1. Поле силы притяжения

Полем некоторой величины называется область пространства, каждой точке которой сопоставлено определенное значение этой величины, причем, как правило, значение это изменяется от точки к точке непрерывным образом. Поле может быть скалярным (поле температур, поле плотностей и т.д.) или векторным (поле скоростей, поле сил). В последнем случае каждой точке пространства сопоставляется вектор.

Для изучения пространственной структуры поля важное значение приобретают прямые задачи вычисления (восстановления) поля по распределению его источников и обратные задачи восстановления структуры источников по структуре самого поля, а также задачи продолжения поля в область, свободную от источников. Эти задачи обычно рассматриваются с использованием единого аналитического подхода, основанного на описании (моделировании) пространственной структуры поля тем или другим удобным математическим способом [6].

В рамках предлагаемого курса нас будет главным образом интересовать поле ньютоновской силы притяжения, существующей между двумя гравитирующими массами. Согласно закону всемирного притяжения (И.Ньютон, 1687) взаимодействие двух материальных точек (точечных масс) с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга описывается формулой:

$$\bar{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}, \tag{1}$$

в которой знак минус выбирается, следуя договоренности о противоположном направлении векторов силы $\overline{F}$ и радиуса-вектора $\overline{r}$, т.е. сила направлена к притягивающей массе, а радиус-вектор $\overline{r}$ – в сторону единичной (пробной) массы. Символом G обозначена кавендишева гравитационная постоянная (Г.Кавендиш, 1798), равная $G=6.67{\cdot}10^{-11}m^3/kg{\cdot}sec^2$. Следуя традициям математической теории потенциала в процессе выкладок принимают $G=1$, восстанавливая конкретное значение постоянной лишь в окончательных формулах, используемых для вычислений. Под точечными массами понимают физические объекты, имеющие конечные размеры, во много раз меньшие, однако, чем расстояния между объектами.

Векторное поле силы притяжения (гравитационное поле) конкретной массы в каждой точке пространства описывается вектором силы притяжения, действующей на единичную пробную точечную массу, помещенную в эту точку. Иными словами, силовое поле тяготения будет однозначно описано, если в каждой точке трехмерного пространства нам будут известны три компоненты вектора силы притяжения $\overline{F}$. Используя прямоугольную систему координат, получим далее необходимые для этого математические соотношения.

А) Притяжение материальной точки.

Пусть материальная точка массой m , расположена в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$, а единичная пробная масса,– в точке $P(x,y,z)$. Тогда расстояние r будет вычисляться как $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$, а составляющие вектора силы притяжения:

$$F_x = F \cdot \cos(\overline{F}, x) = -\frac{m(x-\xi)}{r^3},$$

$$F_y = F \cdot \cos(\overline{F}, y) = -\frac{m(y-\eta)}{r^3}, \qquad (2)$$

$$F_z = F \cdot \cos(\overline{F}, z) = -\frac{m(z-\zeta)}{r^3}.$$

Таким образом, всякий точечный объект массой m, находящийся в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$, создает в окружающем его пространстве центральное силовое гравитационное поле, в каждой точке $P(x,y,z)$ описываемое вектором $\overline{F}(P)$ силы притяжения. По принципу независимости сил, пользуясь формулами (2), возможно получить соотношения для составляющих вектора силы притяжения любых дискретных либо протяженных образований.

Б) Притяжение совокупности материальных точек.

Пусть система K материальных точек с массами $m_k, (k=1,2,\ldots K)$ располагается в точках $M_k(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$. Тогда, в согласии с принципом суперпозиции, компоненты вектора силы притяжения единичной пробной массы, помещенной в точку $P(x,y,z)$, могут быть вычислены по формулам:

$$F_x = -\sum_{k=1}^{K} \frac{m_k(x-\xi_k)}{r_k^3},$$

$$F_y = -\sum_{k=1}^{K} \frac{m_k(y-\eta_k)}{r_k^3}, \qquad (3)$$

$$F_z = -\sum_{k=1}^{K} \frac{m_k(z-\zeta_k)}{r_k^3}.$$

Согласно принципу суперпозиции, сила притяжения совокупности масс равна сумме их сил притяжения.

В) Притяжение материального тела (объемных масс).

Предельный переход позволяет из равенств (3) получить выражения для вычисления компонент силы притяжения материального тела конечных размеров и конечной массы M :

$$F_x = -\iiint_M \cos(r,x)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2},$$

$$F_y = -\iiint_M \cos(r,y)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2}, \qquad (4)$$

$$F_z = -\iiint_M \cos(r,z)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2}.$$

Г) Притяжение материального бесконечно тонкого слоя конечной массы M (простого слоя):

$$F_x = -\iint_M \cos(r,x)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2},$$

$$F_y = -\iint_M \cos(r,y)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2}, \qquad (5)$$

$$F_z = -\iint_M \cos(r,z)\,\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2},$$

Заметим, что свойства силы притяжения простого слоя будут нами рассмотрены ниже с необходимой детальностью, пока же ограничимся вытекающей из (4) формальной записью (5) для составляющих этого вектора.

§ 2. Потенциалы силы притяжения

Потенциалом (потенциальной функцией) силового поля называется скалярная функция, частные производные которой по осям прямоугольной системы координат равны проекциям вектора силы на эти оси (А.Лагранж, 1773). Это означает, что

$$\operatorname{grad} V(P) = \overline{F}(P) \tag{6}$$

где $V(P)$ – потенциал поля силы $\overline{F}(P)$ в точке $P(x,y,z)$. Иными словами, $F_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$. Вводимая таким образом потенциальная функция $V(P)$ позволяет заменить изучение векторного поля $\overline{F}(P)$ изучением скалярного поля $V(P)$.

Вопрос о знаке градиента равенства (6) решается в результате следующего соглашения:

- для гравитационных сил (одноименные заряды-массы притягиваются) градиент положительный, а потенциал совпадает с силовой функцией и равен потенциальной энергии системы, взятой с обратным знаком;

- для электромагнитных сил (одноименные заряды отталкиваются) градиент отрицательный, потенциал совпадает с потенциальной энергией и равен силовой функции, взятой с обратным знаком.

Физический смысл потенциала состоит в том, что в любой точке P пространства функция $V(P)$ равна работе, которую требуется совершить против сил поля притяжения, чтобы единичную массу переместить из точки P в бесконечность. Заметим также, что, поскольку замена в (6) функции $V(P)$ на $V(P)+\mathrm{const}$ несущественна, физический смысл имеет не потенциал в отдельной точке, а разность значений потенциалов в двух произвольных точках. Стандартным способом фиксации произвольной аддитивной постоянной является требование $V=0$ на бесконечности.

Классическими видами потенциалов притяжения являются точечный потенциал, потенциал объемных (протяженных в пространстве) масс и потенциалы простого и двойного материальных слоев. Ниже рассмотрим потенциалы этих классических типов гравитирующих масс.

А) Потенциал притяжения материальной точки.

Материальная точка массой m, расположенная в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$, наводит в точке $P(x,y,z)$, в которой находится единичная пробная масса, потенциал

$$V(x,y,z)=\frac{m}{r}, \tag{7}$$

где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$.

Справедливость формулы (7) подтверждается прямым ее дифференцированием по какому- либо аргументу

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{m}{r^2}\cdot\frac{x-\xi}{r}=-\frac{m(x-\xi)}{r^3}$$

и сопоставлением результата с первым выражением соотношений (2).

Б) Потенциал притяжения совокупности материальных точек.

Исходя из принципа суперпозиции, для совокупности K материальных точек имеем:

$$V(x,y,z)=\sum_{k=1}^{K} V_k=\sum_{k=1}^{K}\frac{m_k}{r_k}, \tag{8}$$

В) Потенциал притяжения объемных масс.

Разбивая массу тела на элементарные массы dm, согласно (7), имеем для элементарного потенциала $dV={dm}/{r}$. Введем функцию объемной плотности $\delta={dm}/{d\tau}$, где $d\tau$ – есть элемент объема, занятого массой dm. Тогда $dm=\delta d\tau$ и $dV={\delta d\tau}/{r}$. Интегрирование по полному объему τ исследуемого тела позволяет получить искомую формулу для потенциала объемных масс:

$$V(P)=\iiint_{\tau}\frac{\delta(M)}{r}d\tau(M),\ \ M\in\tau. \tag{9}$$

Заметим, что масса любого тела существует как одно из свойств материи, вследствие чего распределение dm , если оно адекватно описывает свойства тела, обязано быть интегрируемым; то же относится и к функции $\delta(M),\ \ M\in\tau$ распределения объемной плотности. Интегрирование в (9) выполняется по координатам текущей точки M , а под r понимается расстояние от точки M до точки P .

Г) Потенциал притяжения простого слоя.

Простым слоем называется масса m , распределенная на поверхности σ в виде бесконечно тонкого слоя. Пусть h – расстояние между двумя весьма близкими друг к другу поверхностями σ и $\tilde{\sigma}$. Тогда элемент объема, заключенного между этими поверхностями и заполненного массами будет равен $d\tau=h\cdot d\sigma$. Согласно (9), потенциал слоя

$$V(P)=\iint\limits_{\sigma}\frac{\delta\cdot h}{r}d\sigma.$$

Введем поверхностную плотность $\mu(M)=\dfrac{dm}{d\sigma},\ \ M\in\sigma$, так, чтобы $\lim\limits_{h\to 0}\delta h=\mu(M)\neq 0$. В результате предельного перехода элемент массы dm оказывается сконденсированным на элементарную площадку $d\sigma(M)$. Тогда потенциал простого слоя определяется формулой:

$$V(P)=\iint\limits_{\sigma}\frac{\mu(M)}{r}d\sigma(M),\ \ M\in\sigma. \tag{10}$$

Будем далее предполагать, что в каждой точке поверхности σ возможно провести единственную касательную плоскость, а, следовательно, и нормаль к ней, направление которой меняется от точки к точке непрерывным образом. Договоримся также считать положительным направление нормали изнутри наружу (так называемая внешняя нормаль) поверхности σ.

Д) Потенциал притяжения двойного слоя.

Двойным слоем называются два простых слоя с плотностями μ и $\tilde{\mu}$, расположенные на поверхностях σ и $\tilde{\sigma}$ на весьма близком расстоянии h друг от друга. При этом плотности слоев на отрезке h общей нормали равны между собой по абсолютному значению, но противоположны по знаку, т.е. $\mu(M)=-\tilde{\mu}(\tilde{M}),\quad M\in\sigma,\quad \tilde{M}\in\tilde{\sigma}$. Тогда, исходя из (10), и полагая $d\sigma(M)=d\tilde{\sigma}(\tilde{M})$, имеем:

$$V(P)=\iint_{\sigma}\mu(M)\left(\frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{r}\right)d\sigma(M).$$

Так как по малости h, $\dfrac{1}{\tilde{r}}=\dfrac{1}{r}+h\cdot\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{r}\right),$ получаем

$$V(P)=\iint_{\sigma}\mu(M)\cdot h\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma(M). \tag{11}$$

В формуле (11) символом $\partial/\partial n$ обозначен оператор дифференцирования по нормали к поверхности слоя σ. Устремляя $h \to 0$, приходим к

$$V(P) = \lim_{h\to 0} \iint_{\sigma} \mu(M) \cdot h \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma(M).$$

Накладываем условие:

$$\underbrace{\lim}_{h\to 0} \mu(M) \cdot h = \nu(M) \neq 0,$$

где ν - конечная величина, называемая плотностью двойного слоя. В итоге приходим к выражению для потенциала двойного слоя:

$$V(P) = \iint_{\sigma} \nu(M) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma(M), \quad M \in \sigma. \tag{12}$$

§ 3. Уровенные поверхности, производные и градиент гравитационного потенциала

Введение потенциала силы притяжения означает переход от заданного в некоторой области пространства τ векторного поля $\overline{F}(P),\ P \in \tau$ к соответствующему той же области пространства τ скалярному полю $V(P),\ P \in \tau$, для большей наглядности представления которого используются рассматриваемые ниже характеристики.

Уровенной поверхностью (поверхностью уровня) скалярного поля $V(P),\ P \in \tau$ называется геометрическое место точек, в которых функция

$V(P)$ принимает постоянное значение $V(P)=c_1=\text{const}$. Поверхности уровня, соответствующие различным значениям постоянной c_1, заполняют всю область τ, при этом никакие две эквипотенциальные поверхности $V(P)=c_1$, $V(P)=c_2$, $c_1 \neq c_2$ не имеют общих точек.

Производная скалярного поля $V(P)$ по фиксированному направлению s, задаваемому положением точек P и P_1, определяется результатом предельного перехода

$$\frac{dV(P)}{ds} = \lim_{P_1 \to P} \frac{V(P_1) - V(P)}{PP_1}$$

и характеризует скорость изменения поля по заданному направлению. В прямоугольной декартовой системе координат производная функции $V(P)$ по направлению s выражается формулой:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(s,x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(s,y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(s,z).$$

Градиент скалярного поля $V(P)$ представляет собой вектор, проекция которого на направление s равна производной $V(P)$ по направлению s, т.е.:

$$\frac{dV(P)}{ds} = \left(\operatorname{grad} V(P) \cdot \bar{s}\right).$$

Вектор градиента направлен по нормали к уровенной поверхности в сторону возрастания $V(P)$ и характеризует направление и скорость максимального роста функции $V(P)$. Сказанное выше означает, что производная по направлению $\partial V(P)/\partial s$ принимает максимальное значение, равное $|\mathrm{grad}V(P)|$, по направлению вектора градиента. Если всюду в τ $\mathrm{grad}V(P)=0,\quad P\in\tau,$ то $V(P)=\mathrm{const}$.

В прямоугольной декартовой системе координат градиент скалярного поля (функции) $V(x,y,z)$ определяется формулой:

$$\mathrm{grad}V(x,y,z)=\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\bar{k},$$

а в сферической системе координат - формулой:

$$\mathrm{grad}V(\rho,\varphi,\lambda)=\frac{\partial V}{\partial\rho}\bar{i}+\frac{\partial V}{\rho\partial\varphi}\bar{j}+\frac{\partial V}{\rho\cos\varphi\partial\lambda}\bar{k}.$$

§ 4. Простейшие случаи решения прямой задачи теории потенциала.

Прямая задача теории потенциала (применительно к потенциалу силы притяжения ее часто называют прямой гравиметрической задачей) формулируется следующим образом: заданы тело τ и ограничивающая его поверхность σ, а также функция распределения плотности $\delta(M),\ M\in\sigma$ его масс. Требуется определить гравитационный потенциал $V(P)$ в некоторой (внутренней или внешней) точке P пространства. Решение задачи на практике сводится к вычислению объемного интеграла (9) по области τ.

Отметим, что даже в случае тел постоянной плотности $\delta(M)=\mathrm{const}$ искомый интеграл выражается в элементарных функциях только для некоторых простейших гравитирующих конфигураций, некоторые примеры которых рассматриваются в данном параграфе.

А) Притяжение однородного сферического простого слоя на внешнюю и внутреннюю точки.

Пусть на сфере σ радиуса R распределен простой слой плотности $\mu(M)=const,\quad M\in\sigma$. Тогда во внешней точке P в соответствии с (10) имеем:

$$V(P)=\iint\limits_{\sigma}\frac{\mu d\sigma}{r},$$

где r – расстояние от текущей точки M до точки P (рис. 1а).

В сферической системе координат с центром, совпадающим с центром сферы σ , площадь элемента поверхности $d\sigma=R^2\sin\psi d\psi d\lambda$ и

$$V(P)=2\pi\mu\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\psi}{r}d\psi.$$

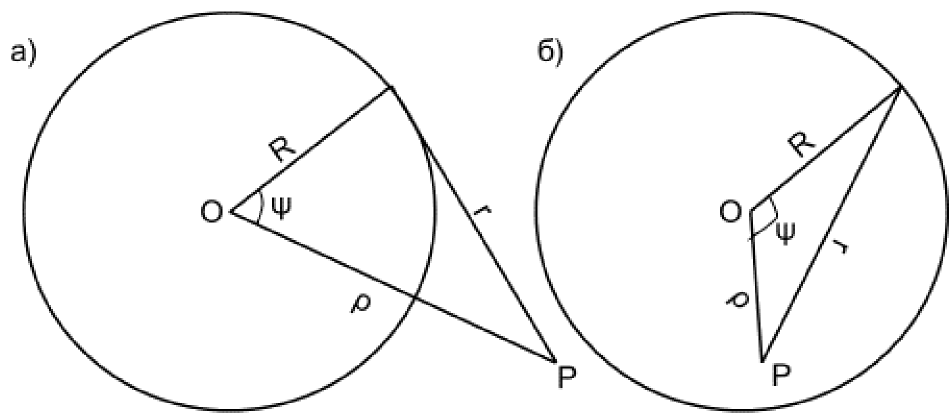

Рис. 1. Притяжение внешней а) и внутренней б) точки P сферическим слоем

Пользуясь формулой косинусов $r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi$, перейдем от интегрирования по переменной ψ к интегрированию по переменной r :

$$rdr = R\rho \sin\psi d\psi, \quad \frac{R}{\rho}dr = \frac{R^2}{r}\sin\psi d\psi,$$

$$V(P) = 2\pi\mu\frac{R}{\rho}\int_{\rho-R}^{\rho+R} dr = \frac{4\pi\mu R^2}{\rho}.$$

Вводя массу однородного сферического слоя $m = 4\pi R^2\mu$, получаем:

$$V(P) = \frac{m}{\rho}. \tag{13}$$

Случай притяжения на внутреннюю точку P (рис. 1б) отличается лишь расстановкой пределов при интегрировании по радиусу-вектору:

$$V(P) = 2\pi\mu\frac{R}{\rho}\int_{R-\rho}^{R+\rho} dr = 4\pi R\mu = \frac{m}{R}. \tag{14}$$

Это означает, что потенциал притяжения однородного сферического слоя на внутреннюю точку есть постоянная величина.

Б) Притяжение однородного шара на внешнюю и внутреннюю точки. Пользуясь формулой (13), вычислим притяжение однородного сферического слоя конечной толщины dR на внешнюю точку P (рис.2а):

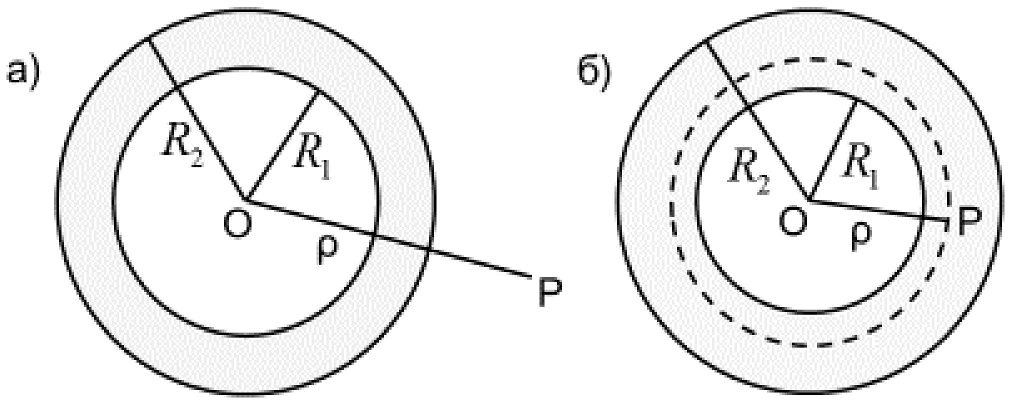

Рис.2. Притяжение внешней а) и внутренней б) точек P слоем конечной толщины $dR = R_2 - R_1$.

$$V(P) = \frac{4\pi}{\rho} \int_{R_1}^{R_2} \delta R^2 dR = \frac{4}{3}\pi \frac{\delta}{\rho}\left(R_2^3 - R_1^3\right),$$

так как

$$\mu = \frac{dm}{d\sigma} = \frac{\delta d\sigma dR}{d\sigma} = \delta dR.$$

Для шара радиуса $R = R_2$ при $R_1 = 0$ получаем:

$$V(P) = \frac{4}{3}\pi\frac{\delta}{\rho}R^3 = \frac{m}{\rho}. \tag{15}$$

Для вычисления притяжения слоя конечной толщины на внутреннюю точку P , проведем через нее концентрическую сферу, разделяющую слой на внешнюю (1) и внутреннюю (2) по отношению к точке P области (рис.2б). Тогда потенциал $V(P) = V_1 + V_2$. Воспользовавшись формулами (15) и (14), имеем:

$$V_1(P) = \frac{4}{3}\pi\frac{\delta}{\rho}\left(\rho^3 - R_1^3\right), \text{ и } \quad V_2(P) = 4\pi\delta\int_{\rho}^{R_2} RdR = 2\pi\delta\left(R_2^2 - \rho^2\right).$$

Тогда $$V(P) = \frac{4}{3}\pi\delta\rho^2 - \frac{4}{3}\pi\delta\frac{R_1^3}{\rho} + 2\pi\delta R_2^2 - 2\pi\delta\rho^2 =$$

$$= \frac{2}{3\rho}\pi\delta\left(2\rho^3 - 2R_1^3 + 3\rho R_2^2 - 3\rho^3\right) = \frac{2}{3\rho}\left(3\rho R_2^2 - 2R_1^3 - \rho^3\right).$$

Для шара радиуса $R=R_2$ при $R_1=0$ получаем:

$$V(P) = \frac{2}{3}\pi\delta\left(3R^2 - \rho^2\right). \tag{16}$$

В) Притяжение плоского однородного простого слоя.

В данном примере рассмотрим притяжение однородного плоского слоя, распределенного на круге σ радиуса a. Центр круга выберем в качестве центра цилиндрической системы координат, ось z которой устремим по нормали к плоскости круга. Силу притяжения масс плотностью μ

$$F = -\iint_{\sigma} \frac{\mu\cos(r,z)}{r^2}d\sigma$$

вычислим в точках P, $\hat{P}$ и O, расположенных на оси z (рис. 3).

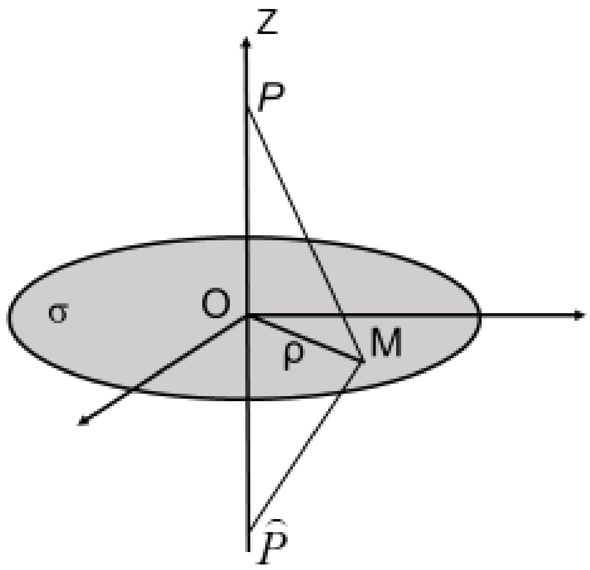

Рис.3. Притяжение плоского однородного круга

Положение текущей точки интегрирования M, $M\in\sigma$ договоримся описывать полярными координатами $M(\rho,\alpha)$. Тогда $r^2=z^2+\rho^2$ и $rdr=\rho d\rho$, а $d\sigma=\rho d\rho d\alpha$ и $d\sigma=rdrd\alpha$. Поскольку в точке P $\cos(r,z)=\frac{|z|}{r}$, в точке $\hat{P}$ $\cos(r,z)=-\frac{|z|}{r}$, а в точке O $\cos(r,z)=0$, для каждой из трех точек имеем:

$$F(P)=-\mu|z|\int_{|z|}^{\sqrt{z^2+a^2}}\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\alpha}{r^2}=-2\pi\mu\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{z^2+a^2}}\right),$$

$$F(\hat{P})=\mu|z|\int_{|z|}^{\sqrt{z^2+a^2}}\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\alpha}{r^2}=2\pi\mu\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{z^2+a^2}}\right), \qquad (17)$$

$$F(O)=0.$$

Исследуем поведение функции (17) на границе простого слоя с помощью предельных переходов:

$$F_e(O) = \lim_{P \to O} F(P) = \lim_{z \to +0} F(P) = -2\pi\mu, \qquad (18)$$

$$F_i(O) = \lim_{\widehat{P} \to O} F(\widehat{P}) = \lim_{z \to -0} F(\widehat{P}) = +2\pi\mu.$$

Формулы (18) показывают, что первая производная (сила) потенциала притяжения простого слоя при пересечении точкой P поверхности простого слоя претерпевает разрыв непрерывности (скачок).

В заключение параграфа заметим, что общим решением внешней $(P \notin \tau)$ прямой задачи теории потенциала можно считать разложение его в ряд объемных сферических (шаровых) функций, коэффициенты которого вычисляются по известным форме поверхности σ и плотности δ гравитирующего тела.

§ 5. Решение прямой задачи теории потенциала для однородного трехосного эллипсоида

А) *Притяжение эллипсоида во внутренней точке.*

Рассмотрим притяжение заполненного массами объемной плотности $\delta = \text{const}$ трехосного эллипсоида объема τ

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \qquad (19)$$

на точку $P(x, y, z)$, расположенную внутри эллипсоида, вследствие чего

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1.$$

Пользуясь формулами (4), вычислим компоненты вектора силы притяжения эллипсоида на точку P :

$$F_x(P)=\delta\iiint_\tau \frac{\xi - x}{r^3}d\tau,$$

$$F_y(P)=\delta\iiint_\tau \frac{\eta - y}{r^3}d\tau, \tag{20}$$

$$F_z(P)=\delta\iiint_\tau \frac{\zeta - z}{r^3}d\tau.$$

Поскольку выражения (20) однотипны, достаточно подробно проследить процедуру вычисления одной из компонент, например, аппликаты F_z .

Примем точку P, $P\in\tau$ за начало сферической системы координат, так что

$$\xi = x + r\sin\theta\cos\lambda,\quad \eta = y + r\sin\theta\sin\lambda,\quad \zeta = z + r\cos\theta,$$ а

элемент объема $d\tau = r^2\sin\theta d\theta d\lambda dr$. Тогда

$$F_z = \delta\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\lambda\int_0^{\tilde{r}} dr = \delta\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\tilde{r}\sin\theta\cos\theta d\theta d\lambda, \tag{21}$$

где символом $\tilde{r}$ обозначена длина радиуса-вектора той точки поверхности эллипсоида, которая лежит в направлении θ,λ от точки P . Для определения величины $\tilde{r}$ воспользуемся уравнением эллипсоида (19), записав его в следующем виде:

$$\frac{x+\tilde{r}\sin\theta\cos\lambda}{a^2}+\frac{y+\tilde{r}\sin\theta\sin\lambda}{b^2}+\frac{z+\tilde{r}\cos\theta}{c^2}=1$$

или

$$A\tilde{r}^2+2B\tilde{r}+C=0, \tag{22}$$

где

$$A=a^{-2}\sin^2\theta\cos^2\lambda+b^{-2}\sin^2\theta\sin^2\lambda+c^{-2}\cos^2\theta,$$

$$B=xa^{-2}\sin\theta\cos\lambda+yb^{-2}\sin\theta\sin\lambda+zc^{-2}\cos\theta, \tag{23}$$

$$C=x^2a^{-2}+y^2b^{-2}+z^2c^{-2}-1.$$

Заметим, что независимо от положения точки P $A>0$, $C\leq 0$, в силу чего квадратное уравнение (22) имеет только один положительный корень:

$$\tilde{r}=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A},$$

подставляя который в (21), имеем:

$$F_z=-\delta\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{B}{A}\sin\theta\cos\theta d\theta d\lambda+$$

$$+\delta\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}\sin\theta\cos\theta d\theta d\lambda. \tag{24}$$

Покажем, что второй интеграл в выражении (24) равен нулю, для чего разделим области интегрирования по θ и по λ пополам, делая в области изменения полярного расстояния $\pi/2 \le \theta \le \pi$ замену переменной $\theta = \pi - \theta$, а в области изменения долготы $\pi \le \lambda \le 2\pi$ – замену переменной $\lambda = \pi + \lambda$. Получившиеся интегралы с учетом положительности и четности функции $\sqrt{B^2 - AC}/A$ будут попарно равны друг другу, но противоположны по знаку. Подставим далее в первый интеграл формулы (24) значение B из (23):

$$F_z = -\delta x a^{-2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} A^{-1} \sin^2\theta \cos\theta \cos\lambda \, d\theta d\lambda -$$

$$- \delta y b^{-2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} A^{-1} \sin^2\theta \cos\theta \sin\lambda \, d\theta d\lambda - \tag{25}$$

$$- \delta z c^{-2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} A^{-1} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta d\lambda.$$

В выражении (25) первые два интеграла из трех равны нулю. Убедимся в этом, деля в каждом из них область интегрирования по λ пополам, и, делая в области изменения долготы $\pi \le \lambda \le 2\pi$ замену переменных $\lambda = \pi + \lambda$. Получившиеся пары интегралов оказываются равны друг другу по величине, но противоположными по знаку. Кроме того, деля в третьем интеграле область интегрирования по θ пополам и делая в области изменения полярного расстояния $\pi/2 \le \theta \le \pi$ замену переменной $\theta = \pi - \theta$, убедимся, что получившиеся интегралы также равны друг другу и совпадают по знаку. Таким образом, окончательно формула (25) преобразуется к виду

$$F_z = -2\delta z c^{-2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} A^{-1} \sin\theta \cos^2\theta d\theta d\lambda. \tag{26}$$

Остается подставить в (26) значение A из (23), представив его в виде

$$A = M\cos^2\lambda + N\sin^2\lambda,$$

где

$$M = a^{-2}\sin^2\theta + c^{-2}\cos^2\theta, \quad N = b^{-2}\sin^2\theta + c^{-2}\cos^2\theta.$$

Воспользуемся далее табличным интегралом

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{M\cos^2\lambda + N\sin^2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{MN}}.$$

После приведения к общему знаменателю под знаком радикала получаем:

$$F_x = -2Px, \quad F_y = -2Qy, \quad F_z = -2Rz, \tag{27}$$

где

$$P = 2\pi\delta bc \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)\left(a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta\right)}},$$

$$Q = 2\pi\delta ac \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\left(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)\left(b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta\right)}},$$

$$R = 2\pi\delta ab \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\left(c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)\left(c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)}}. \tag{28}$$

Анализируя выражения (28), приходим к выводу, что величины P, Q, R зависят только от отношений полуосей эллипсоида (т.е. от формы эллипсоида), но не от его размеров. Установленное обстоятельство доказывает теорему Ньютона, которую сформулируем следующим образом:

Теорема Ньютона: Притяжение, производимое однородным эллипсоидальным слоем на точку, находящуюся в его внутренней полости, равно нулю.

В самом деле, поскольку притяжение однородного эллипсоидального слоя на точку, расположенную в его внутренней полости, можно рассматривать как разность притяжений двух однородных подобных (т.е. имеющих равные отношения полуосей) эллипсоидов, формулы (28) служат доказательством данной теоремы.

Соотношения (27) показывают, что потенциал силы притяжения однородного эллипсоида на внутреннюю точку описывается выражением:

$$V(P) = V_0 - Px^2 - Qy^2 - Rz^2, \tag{29}$$

где V_0 есть постоянная интегрирования, равная значению потенциала в начале координат (при $x = y = z = 0$):

$$V_0 = \delta \iiint\limits_{\tau} \frac{d\tau}{r} = \delta \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{r}} r \sin\theta d\theta d\lambda dr,$$

где $\hat{r}$ есть решение уравнения (22) при $x=y=z=0$: $\hat{r}^2 = \frac{1}{A}$. Тогда

$$V_0 = \frac{1}{2}\delta \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{r}^2 \sin\theta d\theta d\lambda = \frac{1}{2}\delta \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} A^{-1} \sin\theta d\theta d\lambda.$$

Заметим, что, разделив область интегрирования по θ пополам, получим два равных друг другу интеграла с одним и тем же знаком, вследствие чего, воспользовавшись тем же табличным интегралом, приходим к

$$V_0 = 2\pi\delta abc^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\left(c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)\left(c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)}}.$$

Для более компактной записи сделаем замену переменной интегрирования:

$$\cos\theta = c(c^2+s)^{-\frac{1}{2}},$$

тогда
$$V_0 = \pi\delta abc\int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\left(a^2+s\right)\left(b^2+s\right)\left(c^2+s\right)}}.$$

Обозначив $\Gamma = \sqrt{\left(a^2+s\right)\left(b^2+s\right)\left(c^2+s\right)}$, окончательно запишем:

$$V_0 = \pi\delta abc\int_0^{\infty} \frac{ds}{\Gamma},$$

$$V(x,y,z) = \pi\delta abc\int_0^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Gamma}, \qquad (30)$$

а также перепишем (28):

$$P = \pi\delta abc\int_0^{\infty} \frac{ds}{\left(a^2+s\right)\Gamma},$$

$$Q = \pi\delta abc\int_0^{\infty} \frac{ds}{\left(b^2+s\right)\Gamma}, \qquad (31)$$

$$R = \pi\delta abc\int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\Gamma}.$$

Б) *Притяжение эллипсоида во внешней точке.*

Для вывода искомых соотношений воспользуемся теоремой Лапласа, которую здесь приведем без доказательства.

Теорема Лапласа: Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, одинаково направленными и по величине пропорциональными массам эллипсоидов.

Пусть однородный трехосный эллипсоид, описываемый уравнением (19), притягивает внешнюю точку $P(x,y,z)$ с силой $\overline{F}$, компоненты вектора которой обозначим символами F_x, F_y, F_z. Проведем далее через точку $P(x,y,z)$ эллипсоид, софокусный заданному уравнением (19). Уравнение этого софокусного эллипсоида запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1. \tag{32}$$

Представим, что весь этот эллипсоид также заполнен массами плотности δ, в силу чего он притягивает точку $P(x,y,z)$ с силой $\overline{\tilde{F}}$, компоненты вектора которой в свою очередь обозначим символами $\tilde{F}_x$, $\tilde{F}_y$, $\tilde{F}_z$. Согласно теореме Лапласа

$$\frac{F_x}{\tilde{F}_x} = \frac{F_y}{\tilde{F}_y} = \frac{F_z}{\tilde{F}_z} = \frac{M}{\tilde{M}},$$

где M и $\tilde{M}$ - суть массы эллипсоидов (19) и (32) соответственно.

Поскольку точка $P(x,y,z)$ находится на поверхности эллипсоида (32), для вычисления компонент $\tilde{F}_x$, $\tilde{F}_y$, $\tilde{F}_z$ следует использовать формулы (27), заменив в них значения полуосей a,b,c на $\sqrt{a^2+u},\quad \sqrt{b^2+u},\quad \sqrt{c^2+u}$ соответственно.

Сделаем это для компоненты $\tilde{F}_x$.

$$\tilde{F}_x = -2Px = -2\pi\delta x\sqrt{\left(a^2+u\right)\left(b^2+u\right)\left(c^2+u\right)}\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+u+s)\tilde{\Gamma}},$$

$$\tilde{\Gamma} = \sqrt{\left(a^2+u+s\right)\left(b^2+u+s\right)\left(c^2+u+s\right)}.$$

Под знаком интеграла сделаем очевидную замену переменных $s=u+s$. Тогда

$$\tilde{F}_x = -2Px = -2\pi\delta x\sqrt{\left(a^2+u\right)\left(b^2+u\right)\left(c^2+u\right)}\int_u^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Gamma}.$$

Следуя теореме Лапласа и заменяя отношение масс отношением объемов, имеем:

$$F_x = \tilde{F}_x \frac{M}{\tilde{M}} = \tilde{F}_x \frac{abc}{\sqrt{\left(a^2+u\right)\left(b^2+u\right)\left(c^2+u\right)}}.$$

Окончательно получаем:

$$F_x = -2Px, \quad F_y = -2Qy, \quad F_z = -2Rz, \tag{33}$$

где

$$P = \pi\delta abc\int_u^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Gamma},$$

$$Q = \pi\delta abc\int_u^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\Gamma}, \tag{34}$$

$$R = \pi\delta abc\int_u^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\Gamma}.$$

Нетрудно заметить, что при $u=0$ (в этом случае точка $P(x,y,z)$ лежит на поверхности исходного эллипсоида (19)) формулы (34) совпадут с (31). Потенциал силы притяжения однородного эллипсоида на внешнюю точку $P(x,y,z)$:

$$V(x,y,z)=\pi\delta abc\int_u^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Gamma}\ . \tag{35}$$

Напомним в заключение, что для определения значения параметра u служит уравнение (32).

§ 6. Свойства потенциала объемных масс

В данном параграфе будут рассмотрены свойства гравитационного потенциала, соответствующего притяжению материальных тел с произвольным распределением плотности гравитирующих масс.

А) <u>Потенциал объемных масс есть функция конечная и непрерывная во всем пространстве.</u>

Очевидно, что во внешнем пространстве, не занятом массами, описываемая выражением (9) потенциальная функция объемных масс обладает свойствами конечности и непрерывности. Покажем, что эти свойства функция (9) сохраняет и в том случае, когда единичная пробная масса, помещаемая в точку $P(x,y,z)$, находится внутри объема τ, занимаемого массами тела.

Примем точку $P(x,y,z)$ за центр сферической системы координат, в которой элемент объема $d\tau = r^2 \sin\theta d\theta d\lambda dr$. Тогда равенство (9) перепишется в виде

$$V(P) = \iiint_{\tau} \delta r \sin\theta d\theta d\lambda dr.$$

Устремляя $r \to 0$, видим, что потенциал $V(P)$ сохраняет при этом конечное значение. Для доказательства его непрерывности исследуем поведение потенциала в окрестности точки $P(x,y,z)$ при $r \to 0$. Опишем вокруг точки $P(x,y,z)$ сферу безопасности настолько малого радиуса R, что плотность внутри нее можно считать постоянной: $\delta^* = \text{const}$ (рис.4).

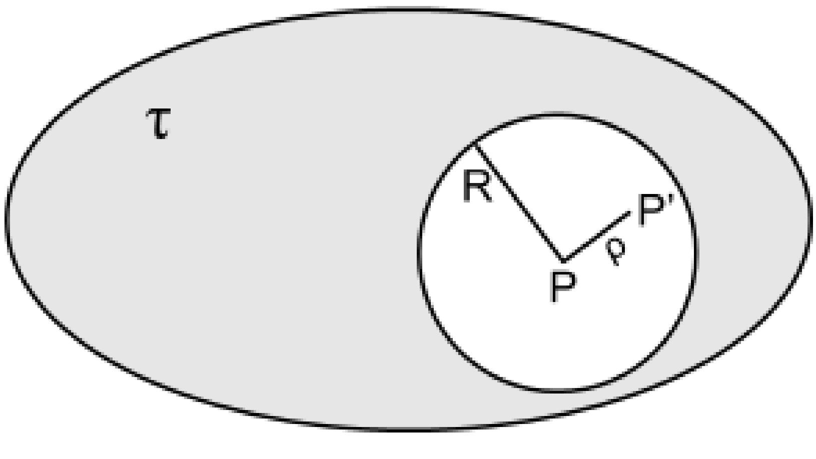

Рис. 4. Непрерывность потенциала объемных масс во внутренней точке P.

Потенциал этой сферы обозначим $V^*(P)$, а потенциал притяжения находящихся вне сферы безопасности масс тела обозначим $V'(P)$, т.е. $V(P)=V^*(P)+V'(P)$. Потенциал $V'(P)$ в точке P будет, очевидно, непрерывной функцией, для потенциала же $V^*(P)$ справедлива формула (16), согласно которой $V^*(P)=2\pi\delta^* R^2$. Поместим далее точку P' на расстоянии ρ от точки P так, чтобы $\rho<R$. Тогда потенциал $V^*(P')=\frac{2}{3}\pi\delta^*\left(3R^2-\rho^2\right)$. Образуем разность $V^*(P)-V^*(P')=\frac{2}{3}\pi\delta^*\rho^2$.

Устремляя $R\to 0$, тем самым устремляем и $\rho\to 0$, а тогда и $[V^*(P)-V^*(P')]\to 0$, что доказывает непрерывность потенциала $V(P),\ P\in\tau$ внутри гравитирующих объемных масс.

Б) <u>Первые производные потенциала объемных масс суть функции конечные и непрерывные во всем пространстве.</u>

Первая производная потенциала (9) объемных масс по произвольному направлению s равна

$$\frac{\partial V(P)}{\partial s}=\iiint\limits_{\tau}\delta\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau$$

. Так как $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}=-\frac{\cos(r,s)}{r^2}$,

то $\frac{\partial V(P)}{\partial s}=-\iiint\limits_{\tau}\delta\frac{\cos(r,s)}{r^2}d\tau.$ Процедура дальнейшего доказательства конечности и непрерывности производной потенциала объемных масс во всем пространстве повторяет процедуру, использованную выше для доказательства аналогичных свойств самого потенциала.

В) Потенциал объемных масс есть функция гармоническая во внешнем пространстве ($P \notin \tau$).

$$\frac{\partial^2 V(P)}{\partial x^2} = \iiint\limits_{\tau} \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x-\xi}{r},$$

$$\Delta \mathrm{V(P)} = \frac{\partial^2 \mathrm{V(P)}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V(P)}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V(P)}}{\partial \mathrm{z}^2} = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right) = -\frac{1}{\mathrm{r}^3} + \frac{3(\mathrm{x}-\xi)^2}{\mathrm{r}^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right) = -\frac{1}{\mathrm{r}^3} + \frac{3(\mathrm{y}-\eta)^2}{\mathrm{r}^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right) = -\frac{1}{\mathrm{r}^3} + \frac{3(\mathrm{z}-\zeta)^2}{\mathrm{r}^5}.$$

Суммируя, получаем искомое выражение для уравнения Лапласа:

$$\Delta V(P) = 0 \quad P \notin \tau . \tag{37}$$

Г) Внутри притягивающих масс ($P \in \tau$) потенциал объемных масс есть функция, удовлетворяющая уравнению Пуассона.

Для того, чтобы раскрыть неопределенность, возникающую внутри притягивающих масс при вычислении вторых производных потенциала (9), воспользуемся уже использовавшимся выше приемом. Опишем вокруг точки

$P(x,y,z)$ сферу безопасности настолько малого радиуса R, что плотность внутри нее можно считать постоянной: $\delta^* = \text{const}$. Тогда $V(P)=V^*(P)+V'(P)$. Наложим на это равенство оператор Лапласа: $\Delta V(P)=\Delta V^*(P)+\Delta V'(P)=\Delta V^*(P)$. Согласно равенству (16) имеем $V^*(P)=\frac{2}{3}\pi\delta^*\left(3R^2-r^2\right)$, где $r<R$ - расстояние от точки $P(x,y,z)$ до текущей внутри сферы безопасности точки $M(\xi,\eta,\zeta)$. Вычислим производные потенциала V^*:

$$\frac{\partial V^*}{\partial x}=\frac{\partial V^*}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{4}{3}\pi\delta^* r\,\frac{x-\xi}{r}=-\frac{4}{3}\pi\delta^*\left(x-\xi\right),$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2}=-\frac{4}{3}\pi\delta^*(P),\quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^2}=-\frac{4}{3}\pi\delta^*(P),\quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial z^2}=-\frac{4}{3}\pi\delta^*(P).$$

Суммируя вторые производные по всем трем координатным осям, имеем:

$$\Delta V(P)=-4\pi\delta\left(P\right)\qquad P\in\tau\,. \tag{38}$$

Это соотношение носит название уравнения Пуассона. Легко видеть, что уравнение Лапласа (37) представляет собой частный случай уравнения (38) при $\delta(P)=0$. Ясно, что в тех точках, где плотность меняется скачком, например, на границе притягивающей массы, по крайней мере одна из вторых производных потенциала объемных масс также претерпевает скачок.

Д) <u>Потенциал объемных масс есть функция регулярная на бесконечности.</u>

Покажем, что при удалении притягивающей точки в бесконечность $P\to\infty$ потенциал $V(P)\to 0$ и притом так, что имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{r\to\infty} rV(P)=GM. \tag{39}$$

Очевидно, что $G\iiint\limits_{\tau}\frac{\delta d\tau}{r_{max}} < V(P) < G\iiint\limits_{\tau}\frac{\delta d\tau}{r_{min}},$ где r_{max} и r_{min} – постоянные при фиксированном положении точки P расстояния до нее от наиболее и наименее удаленных от точки P точек тела τ. В силу их постоянства при интегрировании, имеем:

$$G\frac{1}{r_{max}}\iiint\limits_{\tau}\delta d\tau < V(P) < G\frac{1}{r_{min}}\iiint\limits_{\tau}\delta d\tau \quad \text{или} \quad \frac{GM}{r_{max}} < V(P) < \frac{GM}{r_{min}}.$$

Домножая последнее неравенство на r и переходя к пределам, получаем:

$$GM\frac{r}{r_{max}} < rV(P) < GM\frac{r}{r_{min}},$$

$$GM\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{max}} < \lim_{r\to\infty} rV(P) < GM\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{min}}.$$

Так как

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{max}} = \lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{min}} = 1, \quad GM < \lim_{r\to\infty} rV(P) < GM,$$

что и доказывает равенство (39), представляющее собой условие регулярности потенциальной функции $V(P)$ на бесконечности. Регулярность на бесконечности означает, что потенциал объемных масс при удалении притягиваемой точки в бесконечность стремится к нулю не менее быстро, нежели функция обратного расстояния $1/r$.

§ 7. Свойства потенциалов простого и двойного слоев

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе для потенциала объемных масс, можно доказать, что потенциал простого слоя (10):

- Непрерывен и конечен во всем пространстве;
- Вне притягивающих масс имеет непрерывные производные всех порядков;
- Вне притягивающих масс удовлетворяет уравнению Лапласа (37), т.е. является гармонической функцией;
- Обладает свойством регулярности на бесконечности.

Это означает, что вне притягивающих масс потенциал простого слоя обладает теми же свойствами, что и потенциал объемных масс. Отличие в их свойствах касается поведения первой производной потенциала простого слоя при пересечении пробной массой, помещенной в точку P, границы простого слоя, т.е. поверхности σ. В параграфе 4 мы установили это для частного случая однородного плоского диска. В настоящем параграфе рассмотрим общий случай распределенного на замкнутой поверхности σ простого слоя переменной плотности μ (рис. 5). Заметим также, что для потенциалов слоев и их производных различают прямые значения, т.е. те, которые они принимают непосредственно на слое, и предельные значения, которые они принимают при приближении к слою с одной или другой стороны.

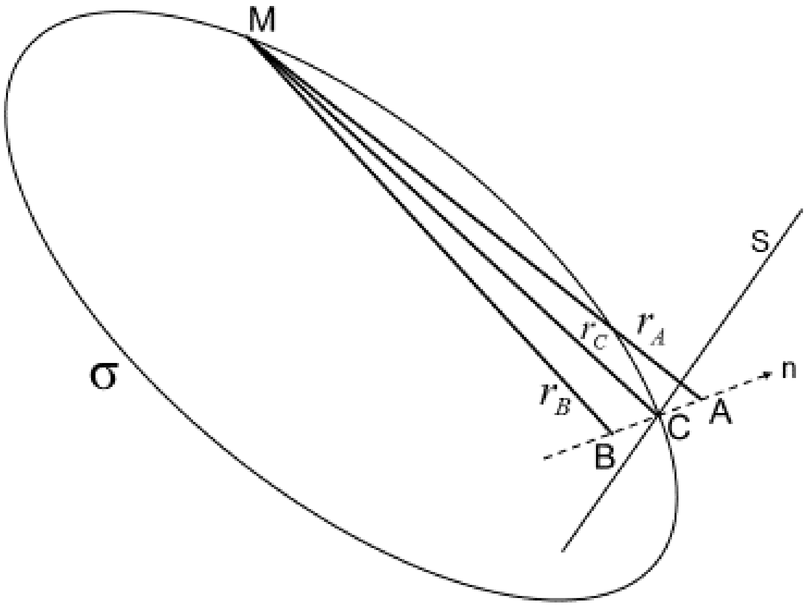

Рис. 5. К исследованию непрерывности производной потенциала простого слоя

Выберем внешнее к слою σ направление нормали, и обозначим символами A и B положения на этой нормали внешней и внутренней по отношению к слою точек пространства. Точку C поместим на поверхности слоя σ. По определению производная потенциала простого слоя является проекцией на некоторое направление s силы притяжения простым слоем единичной пробной массы, расположенной во внешней точке A:

$$\frac{\partial V(A)}{\partial s} = \int_\sigma \mu \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r_A}\right) d\sigma = -\int_\sigma \mu \frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2} d\sigma$$

или во внутренней точке B:

$$\frac{\partial V(B)}{\partial s} = \int_\sigma \mu \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r_B}\right) d\sigma = -\int_\sigma \mu \frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2} d\sigma.$$

Пусть точки A и B неограниченно приближаются к точке C, покажем, что при этом первые производные потенциала простого слоя по произвольному направлению s будут иметь различные предельные значения. Будем называть внешней производной потенциала простого слоя в точке C производную

$$\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} = \lim_{A\to C} \frac{\partial V(A)}{\partial s} = -\lim_{A\to C} \int_\sigma \mu \frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2} d\sigma,$$

а внутренней – производную

$$\frac{\partial V_i(C)}{\partial s} = \lim_{B\to C} \frac{\partial V(B)}{\partial s} = -\lim_{B\to C} \int_\sigma \mu \frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2} d\sigma.$$

Прямое значение производной на слое определяется без предельных переходов непосредственно в точке $C \in \sigma$:

$$\frac{\partial V_0(C)}{\partial s} = -\int_\sigma \mu \frac{\cos(r_C, s)}{r_C^2} d\sigma.$$

Выделим вокруг точки C плоский круг σ^* бесконечно малого радиуса и плотностью масс $\mu^* = \mathrm{const}$, тогда

$$\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} = -\lim_{A\to C} \int_{\sigma-\sigma^*} \mu \frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2} d\sigma - \lim_{A\to C} \int_{\sigma^*} \mu^* \frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2} d\sigma,$$

$$\frac{\partial V_i(C)}{\partial s} = -\lim_{B\to C} \int_{\sigma-\sigma^*} \mu \frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2} d\sigma - \lim_{B\to C} \int_{\sigma^*} \mu^* \frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2} d\sigma.$$

Первые интегралы в этих выражениях всегда ограничены и имеют одинаковый предел:

$$-\lim_{A\to C} \int_{\sigma-\sigma^*} \mu \frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2} d\sigma = -\lim_{B\to C} \int_{\sigma-\sigma^*} \mu \frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2} d\sigma = \frac{\partial V_0(C)}{\partial s}.$$

Для вычисления вторых интегралов воспользуемся формулой (17) потенциала однородного плоского круга, в которой роль оси z играет внешняя нормаль. Устремляя $A \to C, \quad B \to C, \quad \sigma^* \to 0$, приходим к

$$\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} = \frac{\partial V_0(C)}{\partial s} - 2\pi\mu^* \cos(s,n),$$

$$\frac{\partial V_i(C)}{\partial s} = \frac{\partial V_0(C)}{\partial s} + 2\pi\mu^* \cos(s,n).$$

Результат суммирования двух этих формул доказывает теорему Племели (1904): прямое значение первой производной потенциала простого слоя равно полусумме ее внешнего и внутреннего предельных значений, т.е.

$$\frac{\partial V_0(C)}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} + \frac{\partial V_i(C)}{\partial s}\right). \tag{40}$$

Разность тех же двух формул ведет к формуле Пуассона:

$$\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} - \frac{\partial V_i(C)}{\partial s} = -4\pi\mu^* \cos(s,n). \tag{41}$$

Из формулы Пуассона следует, что первые производные потенциала простого слоя непрерывной плотности μ претерпевают скачок при пересечении поверхности слоя. При этом производная испытывает приращение, равное $4\pi\mu^* \cos(s,n)$, где μ^* – плотность слоя в месте его пересечения. Заметим, что касательная производная, для которой $\cos(s,n)=0$, изменяется непрерывно и не претерпевает разрыва при переходе через простой слой.

Обратимся далее к свойствам потенциала двойного слоя. Согласно (12) этот потенциал выражается в виде:

$$V(x,y,z)=\iint\limits_{\sigma}\nu\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma(\xi,\eta,\zeta).$$

Производная под знаком интеграла берется по направлению внешней нормали к поверхности σ в точке слоя с текущими координатами ξ,η,ζ , причем внешней считается область пространства с той стороны, где расположены положительные заряды двойного слоя. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(x,n)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(y,n)\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(z,n).$$

Так как $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, то

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поэтому

$$V=-\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_{\sigma}\frac{\nu\cos(x,n)}{r}d\sigma-\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_{\sigma}\frac{\nu\cos(y,n)}{r}d\sigma-\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{\sigma}\frac{\nu\cos(z,n)}{r}d\sigma.$$

Интегралы правой части возможно рассматривать как потенциалы простых слоев с плотностями $-\nu\cos(x,n),\ -\nu\cos(y,n),\ -\nu\cos(z,n).$ Это означает, что потенциал двойного слоя представляет собой сумму первых производных трех потенциалов простых слоев. Следовательно, потенциал двойного слоя обладает теми же свойствами, что и первые производные потенциала простого слоя:

- Во внешнем пространстве конечен и непрерывен со всеми своими производными;
- Во внешнем пространстве гармоничен;
- Регулярен на бесконечности;
- При пересечении слоя потенциал двойного слоя претерпевает скачок непрерывности, т.е. прямое значение потенциала двойного слоя на двойном слое не совпадает с его предельными значениями.

Последнее свойство запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_e &= V_0 + 2\pi\nu \\ V_i &= V_0 - 2\pi\nu \end{aligned} \tag{42}$$

Прямое значение потенциала двойного слоя равно полусумме его предельных (внутреннего и внешнего) значений:

$$V_0 = \frac{1}{2}\left(V_e + V_i\right).$$

§ 8. Фундаментальная формула Грина для потенциала объемных масс

Пусть в некоторой области τ, ограниченной замкнутой поверхностью S, заданы дважды дифференцируемые функции U и V, для которых справедлива вторая формула Грина (43):

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[H\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial H}{\partial n}\right]dS = 0, \tag{43}$$

Пусть далее $U = {}^{1}/_{r}$, где r – расстояние от некоторой фиксированной точки P до текущей точки интегрирования M. Рассмотрим различные варианты расположения точки P относительно объема τ.

1) Точка P лежит вне τ, т.е. $P \notin \tau$.

Поскольку в этом случае $r \neq 0$, $\Delta U = \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ и формула (43) принимает вид:

$$-\iiint_{\tau} \frac{1}{r} \Delta V d\tau = \iint_{S} \left(V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} \right) dS, \tag{44}$$

2) Точка P принадлежит объему τ, т.е. $P \in \tau$.

Это означает появление особенности в точке P, где $r = 0$, при интегрировании по объему. Ограничим точку P **сферой** безопасности Σ радиуса R, и применим формулу (44) к области $(\tau - \tau_{\Sigma})$, ограниченной поверхностями S и Σ (рис.6).

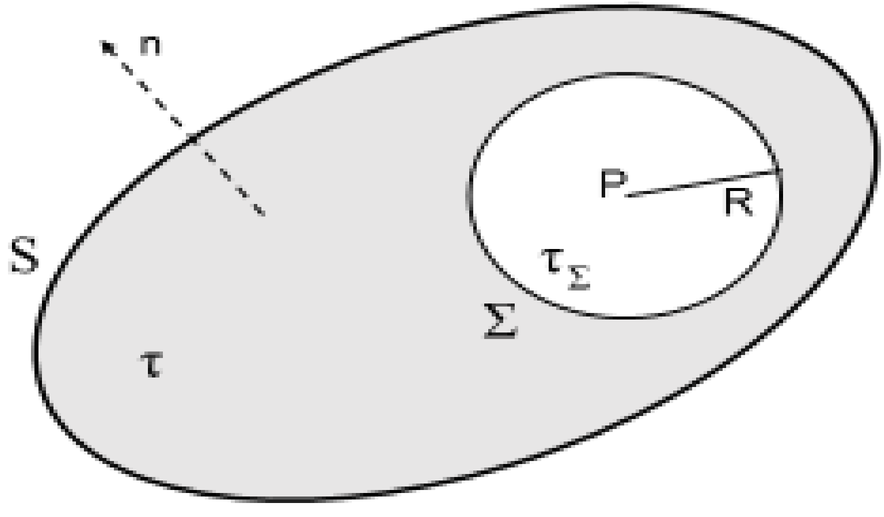

Рис.6. К выводу фундаментальной формулы Грина при внутреннем расположении точки P

Так как в $(\tau - \tau_{\Sigma})$ $\Delta U = 0$,

$$-\iiint_{(\tau-\tau_{\Sigma})} \frac{1}{r} \Delta V d\tau = \iint_S \left(V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} \right) dS + \iint_{\Sigma} \left(V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} \right) d\Sigma .$$

Для сферы Σ, очевидно, $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$, в связи с чем

$$-\iiint_{(\tau-\tau_{\Sigma})} \frac{1}{r} \Delta V d\tau = \iint_S \left(V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} \right) dS + \iint_{\Sigma} \left(\frac{V}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} \right) d\Sigma .$$

Учитывая, что на сфере Σ выполняется $r = R$, рассмотрим поведение при $R \to 0$ интегралов по Σ.

$$\lim_{R\to 0} \int_{\Sigma} \frac{V}{r^2} d\Sigma = \lim_{R\to 0} \frac{1}{R^2} (V)_{\text{ср}} \int_{\Sigma} d\Sigma = \lim_{R\to 0} \frac{1}{R^2} (V)_{\text{ср}}\, 4\pi R^2$$
$$= 4\pi V(P),$$

$$\lim_{R\to 0} \int_{\Sigma} \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} d\Sigma$$
$$= \lim_{R\to 0} \frac{1}{R} \int_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} d\Sigma = \lim_{R\to 0} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\text{ср}} \int_{\Sigma} d\Sigma = \lim_{R\to 0} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\text{ср}} 4\pi R^2$$
$$= 0.$$

Тогда

$$-\iiint\limits_{\tau}\frac{1}{r}\Delta V d\tau=\iint\limits_{S}\left(V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS+4\pi V(P),$$

(45)

3) Точка P располагается на поверхности S, т.е. $P\in S$.

В этом случае используется **полусфер**а безопасности, что дает

$$-\iiint\limits_{\tau}\frac{1}{r}\Delta V d\tau=\iint\limits_{S}\left(V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS+2\pi V(P),$$

(46)

Объединяя формулы (44), (45), (46), приходим к промежуточной сводке:

$$-\iiint\limits_{\tau}\frac{1}{r}\Delta V d\tau=\iint\limits_{S}\left(V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS+\begin{cases}4\pi V(P), P\in\tau\\ 2\pi V(P), P\in S\\ 0, P\notin\tau\end{cases}$$

(47)

Заполним далее объем τ массами переменной плотности $\delta(M)$. Потенциал силы притяжения введенных масс на точку P обозначим $V(P)$. Преобразуем предыдущую сводку формул, учитывая, что внутри масс гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V(P)=-4\pi\delta(P),\qquad P\in\tau,$$

$$-\iiint\limits_{\tau}\frac{1}{r}\Delta V d\tau=4\pi\iiint\limits_{\tau}\frac{\delta(M)}{r}d\tau(M)=4\pi V(P),$$

$$\iint\limits_S \left(V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} 0, & P \in \tau \\ 2\pi V(P), P \in S \\ 4\pi V(P), P \notin \tau \end{cases} \tag{48}$$

Формула (48) носит название фундаментальной формулы Грина для потенциала объемных масс. Эта формула позволяет определить **внешний** потенциал исследуемого тела по значениям самого потенциала и его первой производной на ограничивающей тело поверхности (третья строка формулы). Очень важно, что в этом случае не требуется информация о распределении масс внутри тела. **Внутренний** потенциал тела (первая строка формулы), напротив, не может быть определен без данных о распределении масс.

Часть 2. Краевые задачи теории потенциала

§ 9. Постановка краевых задач теории потенциала

Краевые (граничные) задачи теории потенциала состоят в определении интегралов уравнения Лапласа (37) в области гармоничности искомой функции $V(P)$ по тем или иным краевым (граничным) условиям, которые должны быть выполнены на границе области гармоничности. Границей области гармоничности τ обычно служит замкнутая поверхность S, вследствие чего рассматриваемая область представляет собой или часть пространства, заключенного внутри S (такие краевые задачи называются внутренними), или пространство вне S (тогда говорят о внешних краевых задачах). Заметим, что для обеспечения единственности решения в последнем случае накладывается дополнительное требование регулярности искомой гармонической функции на бесконечности.

В зависимости от формы краевой (граничной) поверхности и вида краевого (граничного) условия краевые задачи могут быть весьма разнообразны. Среди них наиболее важными являются задачи, в которых на краевой поверхности заданы значения либо самой искомой гармонической функции, либо ее нормальной производной, либо их линейной комбинации.

Первая краевая задача (задача Дирихле). Рассмотрим замкнутую поверхность S , ограничивающую область τ. Пусть на поверхности S задана непрерывная функция $F(M)$ координат текущей точки поверхности. Требуется найти гармоническую в области τ функцию $V(P)$, принимающую на S заданные значения $F(M)$. Иными словами, по произвольной непрерывной функции $F(M),\ M\in S$, заранее заданной на замкнутой поверхности, необходимо отыскать функцию $V(P),\ P\in\tau$, гармоническую в области τ (внешней или внутренней по отношению к S) и совпадающую с заданной на поверхности S функцией $F(M)$, т.е. $V(M)=F(M),\ M\in S$.

Вторая краевая задача (задача Неймана). Рассмотрим замкнутую поверхность S , ограничивающую область τ. Пусть на поверхности S задана непрерывная функция $F(M)$ координат текущей точки поверхности. Требуется найти гармоническую в области τ функцию $V(P)$, первая производная которой по нормали к S (нормальная производная) принимала бы на S заданные значения $F(M)$. Иначе говоря, краевая задача Неймана состоит в отыскании решающей в τ уравнение Лапласа функции $V(P),\ P\in\tau$, чья нормальная производная на S удовлетворяла бы условию:

$$\frac{\partial V(M)}{\partial n} = F(M), M \in S.$$

<u>Третья (смешанная) краевая задача.</u> Снова рассмотрим замкнутую поверхность S, ограничивающую область τ, предполагая, что на поверхности S задана непрерывная функция $F(M)$ координат текущей точки поверхности. Требуется найти гармоническую в области τ функцию $V(P)$, которая на поверхности S удовлетворяла бы краевому условию

$$\alpha V(M) + \frac{\partial V(M)}{\partial n} = F(M), M \in S,$$

где α - постоянная величина. В ряде случаев краевое условие смешанной краевой задачи может быть задано в форме

$$\alpha V(M) + \frac{\partial V(M)}{\partial l} = F(M), M \in S,$$

где l – направление, не совпадающее с направлением нормали к поверхности S. Такую задачу обычно называют задачей с «косой» производной [2].

В процессе изучения теоретических вопросов геодезии, гравиметрии, теории фигуры Земли нам придется иметь дело главным образом со внешними краевыми задачами, поскольку гравитационный потенциал есть функция гармоническая лишь во внешнем не занятом массами пространстве. Еще раз напомним, что в этом случае необходимо выполнение условия регулярности искомой потенциальной функции на бесконечности.

§ 10. Решение краевых задач с помощью функции Грина

<u>Решение внешней задачи Дирихле.</u>

Согласно фундаментальной формуле Грина для потенциала объемных масс (48) во внешней точке P имеем выражение для потенциала притяжения тела:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS,$$

где под r понимается расстояние от внешней точки P до элемента dS. Применение этой формулы для решения задачи Дирихле затруднено тем, что в ней, помимо известной на поверхности S функции V, присутствует ее нормальная производная. Попытаемся исключить ее, для чего введем функцию $H(P,Q)$ координат двух точек P и Q, по определению гармоническую во всем внешнем пространстве, в том числе и в точке P, и регулярную на бесконечности. Применим к гармоническим во всем внешнем пространстве функциям V и H вторую формулу Грина (43):

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[H\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial H}{\partial n}\right] dS = 0,$$

а затем сложим ее с предыдущей формулой:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\left(\frac{1}{r} + H\right)\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} + H\right)\right] dS.$$

Обозначая $\left(\frac{1}{r} + H\right) = G$, приходим к равенству

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(G\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS. \tag{49}$$

Для исключения нормальной производной наложим условие: пусть на поверхности S функция $H(P,M) = -\frac{1}{r}$, т.е. при $Q \in S$, $G|_S = 0$. Заметим, что функция H не может быть равной $-\frac{1}{r}$ и во всем внешнем пространстве, ибо в этом случае она потеряет гармоничность в точке P (при совпадении Q с P), что противоречит условию. Тогда первое слагаемое подынтегральной функции в (49) обращается в нуль, и мы получаем искомое решение задачи Дирихле в виде:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S V\frac{\partial G}{\partial n}dS = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S F(M)\frac{\partial G}{\partial n}dS. \tag{50}$$

Функция G называется функцией Грина. Перечислим свойства функции Грина, решающей внешнюю задачу Дирихле:

- На краевой поверхности S функция Грина равна нулю, т.е. $G|_S = 0$;
- Вне поверхности S функция Грина гармонична всюду за исключением точки P, причем, нарушение гармоничности в P обусловлено поведением слагаемого $\frac{1}{r}$, (а не H);
- Функция Грина на бесконечности регулярна.

Решение внешней задачи Неймана.

Воспользуемся выведенной выше формулой (49), в которой теперь необходимо исключить второе слагаемое подынтегральной функции, содержащее неизвестные значения искомой функции $V(P)$ на краевой поверхности S, оставив только заданные на S по условию задачи Неймана значения нормальной производной $\frac{\partial V}{\partial n}$. Для этого необходимо наложить очевидное условие на функцию Грина G, решающую задачу Неймана и потому часто называемую функцией Неймана, $\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_S = 0$. Второе и третье условия остаются теми же, что и для функции Грина, решающей внешнюю задачу Дирихле. При этом решением задачи Неймана будет функция

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S G\frac{\partial V}{\partial n}dS = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S F(M)G\,dS. \tag{51}$$

Заметим, что внутренняя задача Неймана может быть решена с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Единственность решения внешней задачи обеспечивается условием стремления искомой функции $V(P)$ к нулю при удалении точки P в бесконечность.

<u>Решение внешней смешанной краевой задачи.</u>

Решение задачи будем искать, добавляя и одновременно вычитая из подынтегрального выражения формулы (49) величину αGV:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(G\frac{\partial V}{\partial n} + \alpha GV - \alpha GV - V\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[G\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \alpha V\right) - V\left(\frac{\partial G}{\partial n} + \alpha G\right)\right]dS.$$

Остается перечислить свойства функции Грина G, решающей внешнюю смешанную краевую задачу:

- На краевой поверхности S функция Грина G удовлетворяет условию $\left(\frac{\partial G}{\partial n} + \alpha G\right)_S = 0;$
- Вне поверхности S функция Грина G гармонична всюду за исключением точки P, причем, нарушение гармоничности в P обусловлено поведением слагаемого $\frac{1}{r}$, (а не H);

- Функция Грина G на бесконечности регулярна.

Само же решение третьей краевой задачи будет при этом иметь вид:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S G\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \alpha V\right) dS = -\frac{1}{4\pi}\iint_S F(M) G dS. \tag{52}$$

§ 11. Решение задачи Дирихле для сферы. Интеграл Пуассона

При решении конкретных краевых задач определение функции Грина представляет собой сложную задачу, которая может быть легко решена лишь в малом числе случаев, соответствующих простой геометрии краевой поверхности. Так, например, дело обстоит в случае сферичности последней.

Внешнюю к сфере S точку P (см. рисунок 7) подвергнем инверсии (преобразованию Кельвина) во внутреннюю точку P', отстоящую от центра сферы на расстояние ρ', при этом выполняется равенство $\rho\rho' = R^2$.

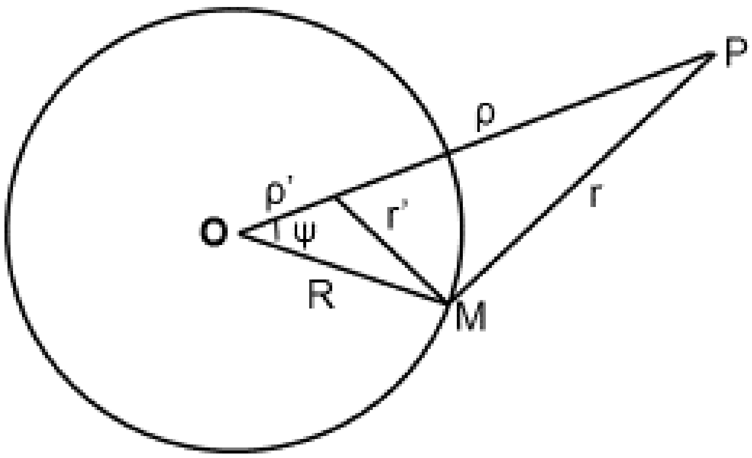

Рис.7. К выводу интеграла Пуассона

Пользуясь обозначениями рисунка 7, запишем формулы косинусов:

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi,$$

$$r'^2 = R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos\psi.$$

Так как инверсия осуществляется по правилу отношения $\rho' = \frac{R^2}{\rho}$, то

$$r'^2 = R^2 + \frac{R^4}{\rho^2} - 2\frac{R^3}{\rho}\cos\psi = \frac{R^2}{\rho^2}\left(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi\right) = \frac{R^2}{\rho^2}r^2.$$

Тогда $r' = \frac{R}{\rho}r$, откуда следует $\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r'} = 0.$ Заметим, что это равенство выполняется, только если точка M располагается на сфере. В противном случае, когда радиус-вектор d точки M не равен R, имеем

$$r'^2 = d^2 + \frac{R^4}{\rho^2} - 2d\frac{R^2}{\rho}\cos\psi = \frac{R^2}{\rho^2}\left(R^2 + \frac{d^2\rho^2}{R^2} - 2d\rho\cos\psi\right) \neq \frac{R^2}{\rho^2}r^2.$$

При $M \in S$ выберем функцию Грина в виде:

$$G = H + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}.$$

Определенная таким образом функция Грина гармонична во внешнем пространстве (за исключением точки P), регулярна на бесконечности и, как было показано выше, обращается в нуль на поверхности сферы радиуса R. Тогда в соответствии с (50) решение задачи Дирихле для сферы следует искать в виде:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S V\frac{\partial G}{\partial n}dS = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}\right)dS.$$

Для вычисления производных по нормали в точке $M \in S$ будем дифференцировать функцию Грина по радиусу R:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{R}{\rho}\frac{1}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial n}.$$

Дифференцируя формулы косинусов, получим:

$$r\frac{\partial r}{\partial n} = R - \rho\cos\psi, \qquad r'\frac{\partial r'}{\partial n} = R - \frac{R^2}{\rho}\cos\psi.$$

Подстановка полученных производных в выражение для нормальной производной функции Грина на сфере дает:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_S = -\frac{R - \rho\cos\psi}{r^3} + \frac{R}{\rho}\cdot\frac{R - \frac{R^2}{\rho}\cos\psi}{\frac{R^3 r^3}{\rho^3}}$$
$$= \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^3}.$$

Тогда решением внешней задачи Дирихле оказывается интеграл Пуассона:

$$V_e(P) = \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R}\iint\limits_S \frac{V(\mathrm{M})}{r^3}dS, \quad \rho > R, \tag{53}$$

который позволяет найти значение функции $V_e(P)$ в точке P внешнего пространства по заданным значениям $V(\mathrm{M})$, $M \in S$ этой функции на поверхности сферы S. Интеграл Пуассона, решающий внутреннюю задачу Дирихле для сферы отличается от (15) только знаком и имеет вид:

$$V_i(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \iint\limits_S \frac{V(\mathrm{M})}{r^3} dS\,, \qquad \rho < R\,. \tag{54}$$

§ 12. Решение внешней задачи Неймана для сферы

<u>**Лемма:**</u> Если $\mathrm{U(x,y,z)}$ есть функция, гармоническая в τ, то и функция $\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}$, где $\rho^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2$, также гармонична в той же области τ.

Для доказательства леммы вычислим производную функции $\mathrm{U(x,y,z)}$ по направлению ρ :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} \cos(\rho, x) + \frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}} \cos(\rho, y) + \frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}} \cos(\rho, z)$$
$$== \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} \cdot \frac{x}{\rho} + \frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}} \cdot \frac{y}{\rho} + \frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}} \cdot \frac{z}{\rho}.$$

Тогда $\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = x \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} + y \frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}} + z \frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}}$. Непосредственное дифференцирование полученной производной дает:

$$\Delta\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

$$\Delta\left(y\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

$$\Delta\left(z\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

откуда имеем

$$\Delta\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = x\frac{\partial \Delta U}{\partial x} + y\frac{\partial \Delta U}{\partial y} + z\frac{\partial \Delta U}{\partial x} + 2\Delta U.$$

Если $\Delta U = 0$ в τ, то и $\Delta\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = 0$ в τ, что и доказывает сформулированную выше лемму.

Как уже указывалось выше, в задаче Нейманна требуется найти гармоническую вне сферы S и регулярную на бесконечности функцию $V(P)$, нормальная производная которой принимала бы на S заданную совокупность значений:

$$\frac{\partial V(M)}{\partial n} = F(M), M \in S.$$

Для решения внешней задачи применим интеграл Пуассона (53) к функции $\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}$, где ρ – радиус-вектор точки P внешнего по отношению к S пространства, а $V(P)$ - искомая функция. Согласно доказанной выше лемме, функция $\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}$ гармонична в той же области, что и $V(P)$.

$$\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_P = \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R}\iint\limits_S \left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_S \frac{1}{r^3}dS \tag{55}$$

Поскольку на S имеет место $\rho = R$ и $\dfrac{\partial V}{\partial \rho} = \dfrac{\partial V}{\partial n}$, перепишем (55):

$$\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_P = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S F(M)\frac{\rho^2 - R^2}{r^3}dS(M)$$

Умножим слева и справа на $\dfrac{d\rho}{\rho}$ и проинтегрируем от ρ до ∞:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S F(M)\left(\int\limits_\rho^\infty \frac{\rho^2 - R^2}{\rho r^3}d\rho\right)dS(M). \tag{56}$$

Сравнение формулы (56) с формулой (51) показывает, что функция Грина (Нейманна), решающая внешнюю задачу Нейманна для сферы, имеет вид:

$$G = \int\limits_\rho^\infty \frac{R^2 - \rho^2}{\rho r^3}d\rho.$$

Так как в согласии с формулой косинусов (см. рис. 7)

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi,$$

то

$$R^2 - \rho^2 = r^2 - 2\rho^2 + 2R\rho\cos\psi,$$

$$\frac{R^2-\rho^2}{\rho r^3}=\frac{r^2-2\rho^2+2R\rho\cos\psi,}{\rho r^3}=$$

$$=\frac{1}{\rho r}+\frac{2}{r^3}(R\cos\psi-\rho)=\frac{1}{\rho r}+2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Это означает, что

$$G=\int_{\rho}^{\infty}\frac{R^2-\rho^2}{\rho r^3}d\rho=\frac{2}{r}+\int_{\rho}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho r}. \tag{57}$$

Рассмотрим далее неопределенный интеграл

$$\int\frac{d\rho}{\rho r}=\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi}},$$

в котором, пользуясь соотношением инверсии $\rho\rho'=R^2$, выполним замену переменной $\rho=\frac{R^2}{\rho'},\ d\rho=-\frac{R^2}{\rho'^2}d\rho'$. Тогда

$$\int\frac{d\rho}{\rho r}=-\int\frac{\frac{R^2}{\rho'^2}d\rho'}{\frac{R^2}{\rho'}\sqrt{R^2+\frac{R^4}{\rho'^2}-2R\frac{R^2}{\rho'}\cos\psi}}=$$

$$=-\int\frac{d\rho'}{\sqrt{R^4+R^2\rho'^2-2R^3\rho'\cos\psi}}=$$

$$= -\frac{1}{R}\int \frac{d\rho'}{\sqrt{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos\psi}} = -\frac{1}{R}\int \frac{d\rho'}{r'}.$$

Воспользуемся далее табличным интегралом:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right).$$

В нашем случае $a = 1, x = \rho', b = -2R\cos\psi, c = R^2$:

$$-\frac{1}{R}\int \frac{d\rho'}{r'} = -\frac{1}{R}\ln\left(\sqrt{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos\psi} + \rho' - 2R\cos\psi\right),$$

откуда, возвращаясь к переменной ρ, имеем:

$$-\frac{1}{R}\int \frac{d\rho'}{r'} = \int \frac{d\rho}{\rho r} = -\frac{1}{R}\ln\frac{R^2 - R\rho\cos\psi + Rr}{\rho}.$$

Подстановка в (57) дает:

$$G = \int_{\rho}^{\infty} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho r^3}\,d\rho = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{R}\ln\frac{R^2 - R\rho\cos\psi + Rr}{\rho}\right)_{\rho}^{\infty}.$$

Вследствие того, что

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{2}{r}=0, \text{ а } \qquad \lim_{\rho\to\infty}\frac{R^2-R\rho\cos\psi+Rr}{\rho}= R(1-\cos\psi),$$

имеем:

$$G=-\frac{2}{r}+\frac{1}{R}\ln\frac{R^2-R\rho\cos\psi+Rr}{\rho R(1-\cos\psi)}.$$

Тогда

$$V(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S F(M)\left(-\frac{2}{r}+\frac{1}{R}\ln\frac{R-\rho\cos\psi+r}{\rho(1-\cos\psi)}\right)dS(M). \quad (58)$$

Формула (58), в ряде источников называемая формулой Бьеркнесса, позволяет вычислить значение функции $V(P)$ и на самой поверхности сферы. Для этого достаточно положить

$$\rho = R, \qquad r = 2R\sin\frac{\psi}{2},$$

что дает:

$$V(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S F(M)\left[-\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}+\ln\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}\right)\right]dS(M).$$

§ 13. Применение интегральных уравнений для решения краевых задач теории потенциала

Универсальным подходом к решению краевых задач теории потенциала является сведение их к соответствующим интегральным уравнениям, решение которых выполняется итеративными или численными методами. Иначе говоря, при заданных краевых (граничных) условиях применение интегральных уравнений оказывается наиболее действенным инструментом интегрирования уравнения Лапласа [8].

Предположим, что на краевой поверхности S задана некоторая непрерывная функция $F(M^0)$, $(M^0 \in S)$ координат. Напомним, что по условию краевой задачи Дирихле требуется найти такую гармоническую функцию $V(P)$, которая при подходе к S $(P \to M^0)$ принимала бы значения $F(M^0)$ (см. рис. 8).

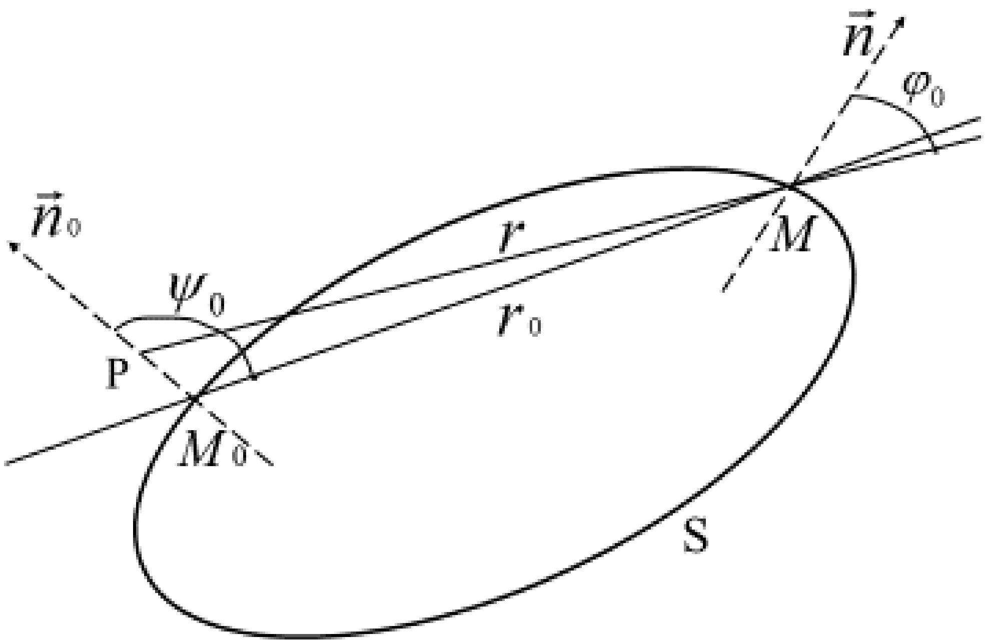

Рис.8. К выводу интегральных уравнений, соответствующих краевым залачам Дирихле и Нейманна

Будем искать функцию $V(P)$ в виде потенциала притяжения распределенного по поверхности S двойного материального слоя неизвестной плотности $\nu(M)$:

$$V(P) = \iint\limits_S \nu(\mathrm{M}) \frac{\cos\varphi}{r^2} dS(\mathrm{M}), \tag{59}$$

где угол φ – угол между направлением r и направлением нормали $\vec{n}$ к S в точке M (ниже также используется указанный на рисунке 8 угол φ_0 – угол между направлением r_0 и направлением нормали $\vec{n}_0$ к S в точке M).

Потенциал двойного слоя (59) на S претерпевает скачок, который должен быть учтен для удовлетворения краевого условия задачи Дирихле. Известно, что при движении точки P к точке M^0 из внешней области (внешняя краевая задача) имеем:

$$V_e(M^0) = V_0(M^0) - 2\pi\nu(M^0),$$

а при движении из внутренней области (внутренняя краевая задача)

$$V_i(M^0) = V_0(M^0) + 2\pi\nu(M^0),$$

где

$$V_0(M^0) = \iint\limits_S \nu(\mathrm{M}) \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} dS(\mathrm{M}).$$

По условию задачи Дирихле $\lim\limits_{P\to M^0} V_e = \lim\limits_{P\to M^0} V_i = \mathrm{F}(M^0),$

вследствие чего имеем для случая внешней задачи

$$\nu(\mathrm{M}^0) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \nu(\mathrm{M}) \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} dS(\mathrm{M}) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{F}(\mathrm{M}^0), \tag{60}$$

а для внутренней задачи

$$\nu(\mathrm{M}^0) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \nu(\mathrm{M}) \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} dS(\mathrm{M}) + \frac{1}{2\pi} \mathrm{F}(\mathrm{M}^0). \tag{61}$$

Уравнения (60), (61) могут быть записаны в общем виде

$$\nu(\mathrm{M}^0) = \lambda \iint_S \nu(\mathrm{M})\mathrm{K}(\mathrm{M}^0, \mathrm{M})\, dS(\mathrm{M}) + \mathrm{f}(\mathrm{M}^0), \tag{62}$$

где λ – числовой коэффициент. Значение искомой плотностной функции $\nu(\mathrm{M})$ входит в подынтегральную функцию, вследствие чего уравнения вида (60), (61), (62) называются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. В нашем случае зависящее только от геометрии ядро этих уравнений имеет вид

$$\mathrm{K}(\mathrm{M}^0, \mathrm{M}) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}.$$

Тогда случаю внешней задачи Дирихле соответствует $\lambda = -1,$ и уравнение (60), а внутренней задаче Дирихле соответствует $\lambda = 1$ и уравнение (61).

Для получения интегральных уравнений, соответствующих задаче Неймана, построим интегральное уравнение, сопряженное (союзное) с уравнением задачи Дирихле. Ядро сопряженного уравнения $\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{M}^0)$ строится по отношению к точке M^0 так, как ядро основного уравнения $\mathrm{K}\left(\mathrm{M}^0, \mathrm{M}\right)$ строилось по отношению к точке M.

$$\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{M}^0) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos\psi_0}{r_0^2},$$

где ψ_0– угол между нормалью к S в точке M^0 и отрезком r_0 прямой MM^0 (см.рис.8). Будем искать функцию $V(P)$ в виде потенциала притяжения распределенного по поверхности S простого материального слоя неизвестной плотности $\mu(M)$, тогда сопряженное к (62) интегральное уравнение будет иметь вид:

$$\mu(M^0) = \lambda \iint_S \mu(M)K(M, M^0)\, dS(M) + f(M^0). \tag{63}$$

Для получения явного вида интегральных уравнений, соответствующих внутренней и внешней задачам Нейманна воспользуемся полученными ранее формулами для нормальных производных потенциала простого слоя, распределенного на поверхности S:

$$V(P) = \iint_S \frac{\mu(M)}{r} dS(M),$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{\partial V_0}{\partial n} - 2\pi\mu(M^0),$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V_0}{\partial n} + 2\pi\mu(M^0),$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = -\iint_S \mu(M)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2} dS(M) = 2\pi \iint_S \mu(M)K(M, M^0)\, dS(M).$$

Тогда, складывая внешнюю нормальную производную со внутренней, получаем

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n} = 4\pi \iint_S \mu(M)K(M, M^0)\, dS(M).$$

Вычитание же этих производных дает

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = -4\pi\mu(M^0)$$

$$= -4\pi\lambda \iint_S \mu(M)K(M, M^0)\, dS(M) - 4\pi f(M^0).$$

Интеграл в правой части заменим суммой производных:

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial V_e}{\partial n} - \lambda \frac{\partial V_i}{\partial n} - 4\pi f(M^0),$$

откуда следует

$$\frac{\partial V_e}{\partial n}(\lambda + 1) - \frac{\partial V_i}{\partial n}(\lambda - 1) = -4\pi f(M^0). \tag{64}$$

Полученное равенство позволяет записать в явном виде интегральные уравнения для решения задачи Нейманна. В самом деле, краевое условие внутренней задачи Нейманна формулируется выражением

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_S = F(M^0),$$

сравнивая которое с (64), замечаем, что в этом случае $\lambda = -1$, а интегральное уравнение имеет вид:

$$\mu(M^0) = -\iint_S \mu(M)K(M, M^0)\, dS(M) + \frac{1}{2\pi} F(M^0). \tag{65}$$

Для внешней краевой задачи Нейманна имеем $\lambda = 1$ и уравнение

$$\mu(M^0) = \iint_S \mu(M)K(M, M^0)\, dS(M) - \frac{1}{2\pi} F(M^0). \tag{66}$$

Исследование вопроса существования и единственности решений интегральных уравнений для произвольных краевых поверхностей осуществляется на основе применения известных теорем Фредгольма. Для практического решения интегральных уравнений чаще всего используются итеративные и численные методы.

Итеративный подход рассмотрим на примере решения уравнения (63). Представим искомую функцию плотности $\mu(\mathrm{M})$ в виде ряда по степеням λ:

$$\mu(\mathrm{M}) = \mu_0(\mathrm{M}) + \lambda\mu_1(\mathrm{M}) + \lambda^2\mu_2(\mathrm{M}) + \lambda^3\mu_3(\mathrm{M}) + \cdots. \quad (67)$$

Подстановка этого ряда в исходное уравнение (63) позволяет приравнять слагаемые левой и правой его частей при одинаковых степенях λ:

$$\mu_0(\mathrm{M}^0) = \mathrm{F}(\mathrm{M}^0)$$

$$\mu_1(\mathrm{M}^0) = \iint_S \mu_0(\mathrm{M})\mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{M}^0)\, dS(\mathrm{M})$$

$$\mu_2(\mathrm{M}^0) = \iint_S \mu_1(\mathrm{M})\mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{M}^0)\, dS(\mathrm{M})$$

Таким образом, первым приближением функции $\mu_0(\mathrm{M}^0)$ является функция $\mathrm{F}(\mathrm{M}^0)$, n-ым приближением является сумма n первых членов ряда (67). Не вдаваясь в подробности анализа сходимости этого ряда, заметим, что она определяется не только формой поверхности S, но и видом ядра $\mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{M}^0)$ интегрального уравнения.

Применение численных методов решения основывается на разбиении области S на достаточно большое число N элементарных площадок ΔS_j. Расстояние площадки ΔS_j от площадки ΔS_i обозначим $\mathrm{r}_{\mathrm{i,j}}^2$, направление нормали к площадке ΔS_j обозначим $\mathrm{n_j}$. Тогда приближенное значение решения интегрального уравнения (62) краевой задачи Дирихле для площадки ΔS_i будет иметь вид:

$$\nu_i = -\frac{\lambda}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\frac{\cos(r_{i,j},n_j)}{r_{i,j}^2}\,\Delta S_j + f_i, \quad (i = 1,2,\dots N). \tag{68}$$

Составив подобные равенства для всех N площадок, получим систему N линейных уравнений для определения значений плотности двойного слоя ν_i в каждой из N площадок. Полученная полигональная функция ν_i $(i = 1,2,\dots N)$ используется далее для подстановки в формулу (59), с учетом применяемого численного метода разбиений области интегрирования S принимающую вид:

$$V(P) = \sum_{i=1}^{N}\nu_i\frac{\cos(r_{i,P},n_i)}{r_{i,P}^2}\,\Delta S_i$$

§ 14. Шаровые и сферические функции

Определение: Решающие уравнение Лапласа и одновременно однородные многочлены, выраженные в сферических координатах, называются **шаровыми** или **объемными сферическими** функциями.

Многочлен степени n называется однородным, если для произвольного a имеет место равенство:

$$V_n(ax, ay, az) = a^n V_n(x, y, z).$$

В сферических координатах однородный многочлен запишется так:

$$V_n(\rho, \theta, \lambda) = \rho^n Y_n(\theta, \lambda).$$

Для того, чтобы однородный полином являлся объемной сферической функцией, он должен удовлетворять уравнению Лапласа.

Запишем уравнение Лапласа (37) в сферических координатах:

$$\Delta V = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right] = 0$$

Вывод этого уравнения можно найти, например, в монографии [2, стр.165]. Уравнение Лапласа представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Решение его будем искать, разделив переменные, в виде:

$$V(\rho, \theta, \lambda) = R(\rho) Y(\theta, \lambda). \tag{69}$$

Подстановка (69) в уравнение Лапласа приводит последнее к виду

$$\frac{1}{R^2}\left(\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial R}{\partial \rho}\right) = -\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2}\right).$$

Полученное уравнение, очевидно, можно разбить на два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\begin{gathered} \rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} - kR(\rho) = 0, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + kY(\theta, \lambda) = 0, \end{gathered} \tag{70}$$

где k является константой. Решение первого уравнения будем искать в форме $R(\rho) = \rho^{\mu}$, подстановка которого в (70) приводит к характеристическому уравнению $\mu^2 + \mu - k = 0$. Тогда решения однородного дифференциального уравнения второго порядка (70) имеют вид:

$$R(\rho) = A\rho^{-\frac{1}{2}+\sqrt{k+\frac{1}{4}}}, \quad \text{и} \quad R(\rho) = B\rho^{-\frac{1}{2}-\sqrt{k+\frac{1}{4}}},$$

где A и B - произвольные постоянные. Положим $k = n\,(n+1)$, где n - целое положительное число. Тогда решениями первого из уравнений (70) служат функции

$$R(\rho) = A\rho^{n} \quad \text{и} \quad R(\rho) = B\rho^{-(n+1)}, \tag{71}$$

что легко проверяется прямой подстановкой.

Для отыскания решений второго уравнения искомую функцию $Y(\theta,\lambda)$ представим в виде произведения двух функций:

$$Y(\theta,\lambda) = \Theta(\theta)\Lambda(\lambda).$$

Можно показать, что входящие в $Y(\theta,\lambda)$ функции имеют явный вид [1]:

$$\Theta(\theta) = P_{nm}(x) = \frac{1}{2^{n} n!}(1-x^{2})^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{n+m}(x^{2}-1)^{n}}{dx^{n+m}}, \tag{72}$$

$$\Lambda(\lambda) = C\cos m\lambda \quad \text{или} \quad \Lambda(\lambda) = D\sin m\lambda. \tag{73}$$

В формулах (71) - (73) приняты следующие обозначения:

- A,B,C,D – произвольные постоянные числовые коэффициенты,
- n, m – целочисленные индексы,
- $P_{nm}(x)$ – присоединенные функции Лежандра степени n порядка m,

представляющие собой полиномы степени n по степеням аргумента $x = \cos\theta$.

Если m=0, присоединенные функции Лежандра (нулевого порядка) называют полиномами Лежандра и обозначают $P_n(x)$. Присоединенные функции Лежандра могут быть выражены через полиномы Лежандра следующей формулой:

$$P_{nm}(x) = (1-x^{2})^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m}P_{n}(x)}{dx^{m}}. \tag{74}$$

Так как $P_{n0}(x) \equiv P_n(x)$, и $P_{nm}(x) = 0$ при $m > n$, каждому полиному Лежандра степени n соответствуют n присоединенных функций порядков $m = 1, 2, 3, \dots n$. Приведем в явном виде формулы для вычисления полиномов и присоединенных функций Лежандра начальных значений индекса степени n:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad \text{и т.д.}$$

$$P_{11}(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P_{21}(x) = 3x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P_{22}(x) = 3(1 - x^2) \quad ,$$

$$P_{31}(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2 - 1) \quad \text{и т.д.}$$

Далее запишем полезную и удобную формулу, применяемую для вычисления как полиномов Лежандра, так и присоединенных функций Лежандра:

$$P_{nm}(x) = 2^{-n}(1 - x^2)^{m/2} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \cdot \frac{(2n - 2k)!}{k!\,(n - k)!\,(n - m - 2k)!} \cdot x^{n-m-2k}, \tag{75}$$

где K принимает значения $\frac{n-m}{2}$ или $\frac{n-m-1}{2}$ в зависимости от того, какое из этих двух чисел целое.

Таким образом, решениями уравнения Лапласа, записанного в сферических координатах, являются однородные полиномы

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \rho^n Y_n(\theta, \lambda) \quad \text{и} \quad V(\rho, \theta, \lambda) = \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+1}} \;, \qquad (76)$$

которые принято называть **объемными сферическими (или шаровыми)** функциями. Зависящие только от угловых координат функции $Y_n(\theta, \lambda) = Y(\theta, \lambda)$ называют **поверхностными сферическими** функциями (игреками Лапласа). Нетрудно видеть, что в простейших случаях элементарные поверхностные сферические функции $Y_n(\theta, \lambda)$ степени n имеют вид

$$Y_n(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda,$$

$$Y_n(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda$$

Заметим также, что, когда мы имеем дело с линейным дифференциальным уравнением и знаем некоторые его решения, то линейная комбинация этих решений также является решением данного уравнения. Поэтому можно утверждать, что функции

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Y_n(\theta, \lambda) \qquad (77)$$

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+1}}, \qquad (78)$$

где

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n} [\mathrm{A}_{nm}\cos m\lambda + \mathrm{B}_{nm}\sin m\lambda] P_{nm}(\cos\theta)$$

также являются решениями уравнения Лапласа, т.е. представляют собой гармонические функции. Добавим, что функции вида (77) используются при решении внутренних задач теории потенциала, а вида (78) – внешних задач.

§ 15. Понятие ортогональности сферических функций

Рассмотрим бесконечномерное множество функций $\{\psi_i(x)\}$, определенных на отрезке $[a, b]$, и на этом функциональном множестве введем скалярное произведение его элементов:

$$\left(\psi_i(x)\psi_j(x)\right) = \int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx \qquad (79)$$

При условии конечности интегралов (41) множество функций $\{\psi_i(x)\}$ представляет собой бесконечномерное пространство L_2 интегрируемых с квадратом функций. Две различные функции $\psi_i, \psi_j \in L_2, (i \neq j)$ по определению называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. для ортогональных функций имеем

$$\left(\psi_i(x)\psi_j(x)\right) = \int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx = 0, \quad i \neq j.$$

В частности, несложно показать прямым интегрированием по частям, что полиномы Лежандра различных степеней, так же как и присоединенные функции Лежандра различных степеней, но одного порядка ортогональны на отрезке [-1,+1], т.е.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & n = m \end{cases},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{nm}(x)P_{km}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n = k. \end{cases}$$

Установим далее основное свойство введенных выше сферических функций. Пусть $U(\rho,\theta,\lambda) = \rho^n Y_n(\theta,\lambda)$, $V(\rho,\theta,\lambda) = \rho^m Y_m(\theta,\lambda)$ суть объемные сферические функции степеней n и m соответственно. Поскольку эти функции по определению гармонические, для них справедлива вторая формула Грина (43), применительно к нашему случаю записываемая в виде:

$$\iint\limits_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS = 0,$$

Где S – граница области гармоничности. Выберем в качестве S сферу единичного радиуса. Тогда, учитывая, что $\partial/\partial n = \partial/\partial \rho$, имеем:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [\rho^n Y_n(\theta,\lambda) m\rho^{m-1} Y_m(\theta,\lambda) \\ - \rho^m Y_m(\theta,\lambda) n\rho^{n-1} Y_n(\theta,\lambda)] \sin\theta d\theta d\lambda = 0,$$

$$\rho^{n+m-1}(m-n)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [Y_n(\theta,\lambda) Y_m(\theta,\lambda)] \sin\theta d\theta d\lambda = 0,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta,\lambda) Y_m(\theta,\lambda) \sin\theta d\theta d\lambda = 0, \quad m \neq n.$$

Последнее равенство означает, что сферические функции различных степеней ортогональны на единичной сфере. Можно также доказать полноту системы сферических функций. Ортогональность и полнота системы позволяют выбрать бесконечномерную систему сферических функций в качестве бесконечномерного функционального базиса для представления некоторой заданной на сфере функции $f(\theta,\lambda)$ в виде линейной комбинации функций базисной системы. Заметим, что такого рода представление аналогично тому, как в трехмерном пространстве векторов мы для описания некоторого вектора используем линейную комбинацию трех векторов заранее установленного векторного базиса или в одномерном пространстве применяем ортогональную и полную систему тригонометрических функций для представления сложных экспериментальных кривых рядом Фурье.

§ 16. Разложение по системе сферических функций

Ортогональность и полнота системы сферических функций позволяют утверждать, что любую дважды дифференцируемую заданную на сфере функцию $f(\theta, \lambda)$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям вида

$$f(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} [\mathrm{A}_{nm} \cos m\lambda + \mathrm{B}_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos\theta) \tag{80}$$

Коэффициенты ряда (80) определяются по заданным на сфере значениям функции $f(\theta, \lambda)$. В частности,

$$A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\lambda,$$

$$B_{n0} = 0,$$

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda) \cos m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\lambda,$$

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\lambda)\sin m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta)\sin\theta d\theta d\lambda,$$

(81)

Для получения первой из формул (81) ряд (80) необходимо умножить слева и справа на $d\lambda$, для получения второй – на $\cos k\lambda d\lambda$, для получения третьей – на $\sin k\lambda\, d\lambda$, а после умножения проинтегрировать слева и справа по λ в пределах $[0,2\pi]$. Следующим шагом должно стать умножение получившихся в каждом случае соотношений слева и справа на $P_{nm}(\cos\theta)d\cos\theta$ и последующее их интегрирование по переменной $\cos\theta$ в пределах $[-1,+1]$. Благодаря ортогональности присоединенных функций Лежандра различных степеней, приходим к формулам (81), позволяющим вычислять коэффициенты ряда (80) по заданным на сфере значениям функции $f(\theta,\lambda)$. В случае дискретного задания функции $f(\theta,\lambda)$ в отдельных точках сферы, интегралы в (81) должны быть заменены конечными суммами.

§ 17. Классификация сферических функций

Детальнее распишем ряд (80) разложения функции $f(\theta,\lambda)$:

$$f(\theta,\lambda) =$$
$$= A_{00}P_{00}(\cos\theta) +$$
$$+ A_{10}P_{10}(\cos\theta) + (A_{11}\cos\lambda + B_{11}\sin\lambda)P_{11}(\cos\theta) +$$
$$+A_{20}P_{20}(\cos\theta) +$$
$$+(A_{21}\cos\lambda + B_{21}\sin\lambda)P_{21}(\cos\theta)$$
$$+ (A_{22}\cos 2\lambda + B_{22}\sin 2\lambda)P_{22}(\cos\theta) +$$

$$+A_{30}P_{30}(\cos\theta) + \ \dots\dots\dots \qquad (82)$$

В этом разложении присутствуют слагаемые трех видов.

А) Слагаемые со вторым индексом равным нулю ($m=0$). Эти члены не зависят от долготы, их поведение определяется только значением полярного расстояния θ. Так как полином Лежандра $P_{nm}(\cos\theta)$ степени n на отрезке $0 \le \theta \le \pi$ имеет n корней, симметричных относительно нулевого значения аргумента $\cos\theta = 0$, т.е. относительно экватора (если $\cos\theta'$ - корень полинома, то $\cos(-\theta')$ также корень), то геометрическим местом точек перемены знака полинома $P_{n0}(\cos\theta)$ являются n параллелей, расположенных симметрично по отношению к экватору. При нечетных n экватор будет линией перемены знака полинома, при четных n – не будет. Параллелями – нулями полинома Лежандра единичная сфера делится на $n+1$ широтных пояса, называемых зонами. По этой причине не зависящие от долготы члены ряда (82) называются **зональными** членами (гармониками).

Б) Слагаемые с равными значениями первого и второго индексов ($m = n$). Запишем в общем виде формулу для незональных членов ряда (82):

$$(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)\sin^m\theta\,\frac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}. \qquad (83)$$

При $m = n$ имеем $\frac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}=\text{const}$. Тогда нулями члена (83) будут нули множителя $\sin^m\theta$ – полюса единичной сферы и нули функции $\cos m\lambda$ (или $\sin m\lambda$) – меридианы, отстоящие друг от друга на π/n, на которых слагаемые (83) будут менять знак. В двуугольных секторах, ограниченных этими меридианами, указанные слагаемые имеют постоянный знак, меняющийся на противоположный при переходе в соседний сектор. Гармоники этого типа при $m = n$ называются **секториальными** членами (гармониками) ряда (83).

В) Слагаемые с индексами $n \neq m \neq 0$.

К нулям предыдущего случая для них добавляются нули многочлена $\frac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$, имеющего $(n–m)$ вещественных корней, которым на единичной сфере соответствуют $(n–m)$ параллелей, симметрично расположенных относительно экватора. Нулевыми параллелями и меридианами вся единичная сфера разбивается на трапеции, в которых рассматриваемые члены ряда (82) сохраняют знак. Такие члены разложения называются **тессеральными** членами (гармониками).

Приведенная нами классификация показывает, что в системе $(2n+1)$ сферических функций степени n существует одна зональная гармоника, две секториальные и $(2n–2)$ тессеральные гармоники. Все они являются функциями, осциллирующими на единичной сфере, причем амплитуда осцилляции (колебания) зависит от численного значения соответствующего гармонического коэффициента A_{nm} или B_{nm}, а частота осцилляции – от значений индексов n и m. Повышая степень n разложения (82), мы облекаем сферу правильной системой постепенно (с ростом n) уменьшающихся участков, в которых сохраняются знаки сферических функций, т.е. увеличиваем частоту осцилляции последних. В силу этого, задача представления заданной на сфере функции $f(\theta, \lambda)$ рядом по сферическим функциям приобретает смысл достижения наилучшего приближения (аппроксимации) к заданной совокупности ее значений путем суммирования ряда осциллирующих на сфере функций.

§ 18. Применение сферических функций для решения краевых задач теории потенциала

Введенный нами аппарат сферических функций оказывается чрезвычайно удобным для решения краевых задач теории потенциала в тех случаях, когда заданная по условию краевая поверхность сферическая (или близка к сферической). Рассмотрим далее применение сферических функций для решения трех сформулированных выше внешних краевых задач, принимая в качестве краевой поверхности поверхность сферы. Пусть на поверхности сферы S радиуса R задана функция $F_j(M), M \in S$.

Требуется найти функцию $V(P)$, гармоническую во внешнем относительно сферы S пространстве, на сфере S удовлетворяющую условиям

- Задачи Дирихле: $V(M)=F_1(M), M \in S$,
- Задачи Неймана: $\frac{\partial V(M)}{\partial n} = F_2(M), M \in S$,
- Третьей краевой задачи: $\alpha V(M) + \frac{\partial V(M)}{\partial n} = F_3(M), M \in S$.

Решение каждой из сформулированных выше краевых задач (j=1,2,3) будем искать в виде суммы разложения функции $V(P)$ в ряд объемных сферических (шаровых) функций:

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+1}}, \tag{84}$$

где

$$Z_n(\theta,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta).$$

Шаровые функции $\frac{Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+1}}$ по определению гармоничны и регулярны на бесконечности, что означает выполнение условия $\Delta V(\rho,\theta,\lambda) = 0$ во внешнем пространстве.

С другой стороны, функцию $F_j(M), M \in S$ (j=1,2,3), заданную на поверхности сферы, разложим в ряд поверхностных сферических функций:

$$F_j(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(j)}(\theta,\lambda).$$

Тогда процедура решения краевых задач сводится к получению соотношений, связывающих искомые функции $Z_n(\theta,\lambda)$ с заданными на сфере функциями $Y_n^{(j)}(\theta,\lambda)$.

- Решение задачи Дирихле (j=1).

Исходя из краевого условия, образуем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(1)}(\theta,\lambda).$$

Приравненные нами ряды не содержат подобных членов, поэтому они равны друг другу почленно. Тогда, учитывая, что на сфере $\rho = R$, получаем

$$Z_n(\theta,\lambda) = R^{n+1} Y_n^{(1)}(\theta,\lambda).$$

Остается подставить полученное выражение для $Z_n(\theta,\lambda)$ в общее решение (84):

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} Y_n^{(1)}(\theta,\lambda), \tag{85}$$

которое и дает искомое решение внешней краевой задачи Дирихле. Напомним, что замкнутым решением краевой задачи Дирихле служит интеграл Пуассона (53).

- Решение задачи Неймана (j=2).

Отметим, что для сферы направление внешней нормали совпадает с направлением радиуса-вектора, вследствие чего $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \rho}$. Дифференцируя (84), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+2}}.$$

Подставляем полученный для радиальной производной искомой функции ряд в краевое условие задачи Неймана

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(2)}(\theta,\lambda).$$

Приравненные нами ряды не содержат подобных членов, поэтому они равны друг другу почленно, ввиду чего имеем:

$$Z_n(\theta,\lambda) = -\frac{R^{n+2}}{n+1}Y_n^{(2)}(\theta,\lambda).$$

Тогда решением краевой задачи Неймана для сферы оказывается функция

$$V(P) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}}\cdot\frac{Y_n^{(2)}(\theta,\lambda)}{n+1}. \qquad (86)$$

- Решение смешанной краевой задачи (j=3).

Краевое условие смешанной краевой задачи для сферы запишем так:

$$\left[\frac{\alpha V}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \rho}\right]_S = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(3)}(\theta,\lambda).$$

В каждое слагаемое левой части этого равенства подставим ряд (и):

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+2}}\right]_S$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\alpha)\frac{Z_n(\theta,\lambda)}{R^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n^{(3)}(\theta,\lambda),$$

откуда следует, что

$$Z_n(\theta,\lambda)=-\frac{R^{n+2}}{n+1-\alpha}Y_n^{(3)}(\theta,\lambda).$$

Тогда решением смешанной краевой задачи для сферы оказывается функция

$$V(P)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}}\cdot\frac{Y_n^{(3)}(\theta,\lambda)}{n+1-\alpha}. \tag{87}$$

§19. Разложение гравитационного потенциала в ряд объемных сферических функций.

Рассмотрим задачу описания внешнего гравитационного поля материального тела объема τ, заполненного массами плотности $\delta(M)$, $M\in\tau$, где $\delta(M)$ – функция объемной плотности. Потенциал силы притяжения $V(P)$ во внешней точке P тела выражается объемным интегралом

$$V(P)=\int_\tau\frac{\delta(M)}{r}d\tau(M),\quad M\in\tau,$$

Функцию $\frac{1}{r}$ (функцию обратного расстояния) разложим в ряд полиномов Лежандра, использовав следующий прием. Обозначим символом ρ модуль радиуса-вектора точки P, а символом R модуль радиуса-вектора точки M. Очевидно, что в этом случае вспомогательная функция

$$f(r) = \rho \cdot \frac{1}{r} = \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa\cos\psi}},$$

где $\kappa = \frac{R}{\rho}$, будучи разложена в ряд Маклорена, примет вид

$$f(\kappa) = f(0) + \frac{\kappa}{1!} f'(0) + \frac{\kappa^2}{2!} f''(0) + \ \dots \ .$$

Дифференцируя $f(\kappa)$ по κ, а затем, приравнивая в производных $\kappa = 0$,

находим $$f(0) = 1,$$

$$f'(0) = -\left[\frac{\kappa - \cos\psi}{(1 + \kappa^2 - 2\kappa\cos\psi)^{3/2}}\right] = \cos\psi,$$

$$f''(0) = \left[\frac{3(\kappa - \cos\psi)^2}{r^5} - \frac{1}{r}\right] = (3\cos^2\psi - 1), \quad \text{и т.д.}$$

Тогда $$f(r) = \rho \cdot \frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n P_n(\cos\psi) \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left(\rho \cdot \frac{1}{r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi). \qquad (88)$$

В формуле (88) было бы желательно выразить $P_n(\cos\psi)$ через сферические координаты точек P и M, с которыми угол ψ связан соотношением

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda - \lambda').$$

Этого можно добиться, воспользовавшись известной формулой сложения сферических функций:

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}[P_{nm}(\cos\theta)P_{nm}(\cos\theta')\cos m(\lambda-\lambda')].$$

Тогда, после подстановки выражения для $P_n(\cos\psi)$ в (88) получаем разложение функции обратного расстояния:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{P_n(\cos\theta)}{\rho^{n+1}}R^n P_n(\cos\theta') \right.$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left[\frac{\cos m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta)}{\rho^{n+1}}R^n \cos m\lambda'\, P_{nm}(\cos\theta')\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\sin m\lambda\, P_{nm}(\cos\theta)}{\rho^{n+1}}R^n \sin m\lambda'\, P_{nm}(\cos\theta')\right]\right\}.$$

Подставим полученный ряд в $V(P)$, предварительно обозначив

$$\begin{Bmatrix}\hat{C}_{nm}\\ \hat{S}_{nm}\end{Bmatrix} = (2-\vartheta_{m0})\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{\tau} R^n\delta(M)\begin{Bmatrix}\cos m\lambda'\\ \sin m\lambda'\end{Bmatrix}P_{nm}(\cos\theta')d\tau(\rho',\theta',\lambda'),$$

где $$\vartheta_{m0} = \begin{cases}1, & если \quad m=0\\ 0, & если \quad m\neq 0\end{cases} \qquad (89)$$

С учетом принятых обозначений гравитационный потенциал в точке P представляется в виде ряда по сферическим функциям:

$$V(P)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\rho^{n+1}}\left(\hat{C}_{nm}\cos m\lambda+\hat{S}_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\cos\theta),$$

(90)

коэффициенты которого $\{\widehat{C}_{nm},\widehat{S}_{nm}\}$ иногда называют стоксовыми постоянными. Покажем далее, что совокупность стоксовых постоянных содержит информацию о распределении масс в теле планеты и тем самым о форме уровенных поверхностей гравитационного потенциала и структуре ее внешнего гравитационного поля.

§ 20. Интерпретация первых стоксовых постоянных

Ряд (90) представим в виде

$$V(P)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+1}},\ \text{где}$$

$$Z_n(\theta,\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\left(\widehat{C}_{nm}\cos m\lambda+\widehat{S}_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\cos\theta)$$

и подробнее рассмотрим сферические функции $Z_n(\theta,\lambda)$, входящие в первые слагаемые ряда.

а) Сферическая функция нулевой степени содержит лишь одну постоянную:

$$\hat{C}_{00}=\int_{\tau}\delta(M)\,d\tau=\mathcal{M},$$

где $\mathcal{M}$ - полная масса исследуемого гравитирующего тела.

б) Сферическая функция первой степени содержит три постоянные:

$$\hat{C}_{10} = \int_\tau \rho'\delta(M)\cos\theta'\,d\tau = \int_\tau \delta(M)\zeta\,d\tau = \mathcal{M}\zeta_0,$$

$$\hat{C}_{11} = \int_\tau \rho'\delta(M)\cos\lambda'\sin\theta'\,d\tau = \int_\tau \delta(M)\xi\,d\tau = \mathcal{M}\xi_0,$$

$$\hat{S}_{11} = \int_\tau \rho'\delta(M)\sin\lambda'\sin\theta'\,d\tau = \int_\tau \delta(M)\eta\,d\tau = \mathcal{M}\eta_0,$$

где символами ξ_0, η_0, ζ_0 обозначены координаты центра масс исследуемого тела в используемой нами прямоугольной системе координат. Полученные формулы показывают, что стоксовые постоянные первой степени представляют собой произведения полной массы тела на координаты центра его масс. Если центр системы координат (прямоугольной или сферической) заранее выбирается совпадающим с центром масс, стоксовые постоянные первой степени $\hat{C}_{10}, \hat{C}_{11}, \hat{S}_{11}$ тем самым автоматически приравниваются нулю. С другой стороны, не равные нулю значения экспериментально найденных постоянных первой степени свидетельствуют о несовпадении центра системы координат с центром масс.

в) Сферическая функция второй степени содержит пять постоянных. Вначале рассмотрим три из них, так же для большей наглядности переходя в прямоугольную систему координат:

$$\hat{C}_{21} = \int_\tau \rho'^2\delta(M)\cos\theta'\sin\theta'\cos\lambda'\,d\tau = \int_\tau \delta(M)\xi\zeta\,d\tau = E,$$

$$\hat{S}_{21} = \int_\tau \rho'^2\delta(M)\cos\theta'\sin\theta'\sin\lambda'\,d\tau = \int_\tau \delta(M)\,\eta\zeta d\tau = \mathcal{D}, \tag{91}$$

$$\hat{S}_{22} = \frac{1}{4}\int\limits_{\tau} \rho'^2 \delta(M) \sin^2\theta' \sin 2\lambda' \, d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} \delta(M)\xi\eta \, d\tau = \frac{1}{2}\mathcal{F}.$$

Символами $E, \mathcal{D}, \mathcal{F}$ в (91) обозначены смешанные (центробежные) моменты инерции второго порядка. Если предположить, что одна из осей координат, скажем, ось ζ, совпадает с одной из главных осей инерции тела, то моменты E и $\mathcal{D}$, а с ними и коэффициенты $\hat{C}_{21}$ и $\hat{S}_{21}$ будут равны нулю. Если же направления всех трех координатных осей совпадают с направлениями главных осей инерции, то нулю будут равны все три постоянные $\hat{C}_{21}$, $\hat{S}_{21}$ и $\hat{S}_{22}$.

Обратимся далее к стоксовой постоянной $\hat{C}_{20}$.

$$\hat{C}_{20} = \int_{\tau} \delta(M)\rho'^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) d\tau = \frac{1}{2}\int_{\tau} \delta(M)\rho'^2 (3\cos^2\theta' - 1)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_{\tau} \delta(M)(2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_{\tau} \delta(M)(\eta^2 + \zeta^2) d\tau + \frac{1}{2}\int_{\tau} \delta(M)(\xi^2 + \zeta^2) d\tau - \frac{1}{2}\int_{\tau} \delta(M)(\xi^2 + \eta^2) d\tau = \frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{2} - \mathcal{C}.$$

Коротко, $$\hat{C}_{20} = \frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{2} - \mathcal{C}, \qquad (92)$$

где

$$\mathcal{A} = \int\limits_{\tau} \delta(M)(\eta^2 + \zeta^2)\, d\tau,$$

$$\mathcal{B} = \int\limits_{\tau} \delta(M)(\xi^2 + \zeta^2)\, d\tau,$$

$$\mathcal{C} = \int\limits_{\tau} \delta(M)(\xi^2 + \eta^2)\, d\tau$$

суть главные моменты инерции второго порядка, вычисленные относительно осей прямоугольной системы координат ξ, η, ζ.

Формула (92) свидетельствует о том, что величина зонального коэффициента второй степени $\hat{C}_{20}$ характеризует степень сжатия (при $\hat{C}_{20} > 0$ – степень вытянутости) меридианального сечения вдоль полярной оси (оси вращения) тела.

Аналогично, коэффициент при секториальной гармонике второй степени $\hat{C}_{22}$ может быть выражен через главные моменты инерции второго порядка следующим образом:

$$\hat{C}_{22} = \frac{1}{4}\int\limits_{\tau} \delta(M)\rho'^2 \sin^2\theta' \cos 2\lambda'\, d\tau = \frac{1}{4}\int\limits_{\tau} \delta(M)(\xi^2 - \eta^2)\, d\tau$$
$$= \frac{1}{4}(\mathcal{B} - \mathcal{A}),$$

т.е. оказывается пропорциональным разности моментов, относящихся к осям, лежащим в плоскости экваториального сечения тела. Для тела вращения $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ и $\hat{C}_{22} = 0$. В противном случае постоянная $\hat{C}_{22}$ характеризует степень сжатия экваториального сечения.

Если начало координат совместить с центром масс исследуемого тела, а направления координатных осей – с направлениями главных осей инерции тела, потенциал силы притяжения – гравитационный потенциал запишется в виде:

$$V(\rho,\theta,\lambda) = \frac{GM}{\rho} + \frac{G}{\rho^3}\left[\left(\frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{2} - \mathcal{C}\right)P_{20}(\cos\theta) + \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{4}P_{20}(\cos\theta)\cos 2\lambda\right]$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{Z_n(\theta,\lambda)}{\rho^{n+1}}.$$

Первый член этого разложения, представляющий собой потенциал однородного сферически симметричного тела, обычно выносят за общие скобки, что превращает размерные стоксовые постоянные $\{\widehat{C}_{nm}, \widehat{S}_{nm}\}$ в безразмерные гармонические коэффициенты $\{C_{nm}, S_{nm}\}$. При этом разложение для потенциала приобретает чаще всего используемый вид:

$$V(\rho,\theta,\lambda) = \frac{GM}{\rho}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\cos\theta)\right], \tag{93}$$

где a - масштабный коэффициент, который обычно выбирается равным среднему (или среднему экваториальному) радиусу исследуемого небесного тела.

Пусть R^{max} есть планетоцентрический радиус-вектор точки исследуемого гравитирующего тела, наиболее удаленной от начала координат. Тогда для всех точек внешнего по отношению к сфере радиуса R^{max} ряд (93) сходится и притом равномерно. Отсюда следует, что начало координат надлежит выбирать возможно ближе к геометрическому центру рассматриваемого тела, а область сходимости ряда (93) тем больше, чем ближе это тело по форме приближается к шару. Что же касается сходимости ряда (93) внутри сферы радиуса R^{max} и на поверхности тела S, то по этому поводу нельзя сказать что либо определенного. Дело в том, что в указанной области пространства сходимость ряда (93) есть свойство неустойчивое, т.е. меняющееся от бесконечно малого внешнего воздействия. Это означает, что малые изменения плотностной структуры тела, изменяющие внешний потенциал на произвольно малую величину, могут повлечь за собой изменение сходимости ряда (93) на расходимость и наоборот. Практическим следствием отмеченного факта является то, что внешний гравитационный потенциал небесного тела, представленный в виде ряда (93), можно рассматривать как сходящийся на поверхности тела S и всюду вне ее.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М., Наука, 1988, 272 с.

2. *Гофманн-Велленгоф Б., Мориц Г.* Физическая геодезия. – М., Изд-во МИИГАиК, 2007, 426 с.

3. *Кащеев Р.А.* Моделирование гравитационного потенциала разложением в ряд по сферическим функциям. Учебное пособие. Казань, 1998, 36 с.

4. *Мориц Г.* Современная физическая геодезия. – М., Недра, 1983, 392 с.

5. *Огородова Л.В.* Основы теории потенциала. Гравитационное поле Земли, Луны и планет. Учебное пособие. – М., Изд-во МИИГАиК, 2013, 108 с.

6. *Серкеров С.А.* Теория гравитационного и магнитного потенциалов: Учебник для вузов. – М., Недра, 1990, 304 с.

7. *Холшевников К.В., Питьев Н.П., Титов В.Б.* Притяжение небесных тел: учебное пособие. – СПб, 2005. – 108 с.

8. *Шимбирев Б.П.* Теория фигуры Земли. – М., Недра, 1975, 432 с.