КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Кафедра системного анализа и информационных технологий

А.А. АНДРИАНОВА, Р.Ф. ХАБИБУЛЛИН

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Учебно-методическое пособие

Казань – 2015

УДК 519.83
ББК 22.18

Принято на заседании кафедры системного анализа и информационных технологий
Протокол № 7 от 14 апреля 2015 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры
анализа данных и исследования операций КФУ **В.Р. Фазылов;**
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры вычислительной математики КФУ **О.В. Панкратова**

Андрианова А.А., Хабибуллин Р.Ф.
Принятие решений в условиях неопределенности / А.А. Андрианова, Р.Ф. Хабибуллин. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 25 с.

В учебном пособии излагается материал разделов курса «Теория игр и принятие решений». Рассматриваются различные особенности игр с природой и подходы к выработке согласованных решений, основанные на применении методов решения многокритериальных задач оптимизации. Этот материал, в основном, представлен только в специальной литературе и монографиях и слабо освещен в учебной литературе по теории игр.

Пособие предназначено для студентов старших курсов направлений «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и «Прикладная математика и информатика», а также для всех студентов, которые интересуются данной темой.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии излагается материал разделов дисциплины «Теория игр и принятие решений». В первой части рассматриваются различные особенности игр с природой и подходы к выработке согласованных решений.

Игры с природой отличаются тем, что неопределенная ситуация в них не имеет конфликтной окраски – никто никому не противодействует. В играх с природой неизвестные условия операции зависят не от сознательно действующего «противника» или других участников конфликта, а от объективной действительности, которую принято называть «природой». «Природа» мыслится как некая незаинтересованная инстанция, «поведение» которой неизвестно, но, во всяком случае, не злонамеренно.

В первой части пособия рассматриваются принципы оптимальности уже давно и прочно вошедшие в теорию принятия решений – критерии Лапласа, Гурвица и Сэвиджа, а также максиминный критерий Вальда (принцип гарантированного результата).

В жизни редко бывает так, чтобы принятие решения осуществлялось на основании только одного критерия. Выбирает ли покупатель себе квартиру или автомобиль, формирует ли руководитель план производства предприятия или что-то другое, они руководствуются не каким-то одним, а множеством различных критериев, стремясь принять оптимальное решение, наилучшее со всех точек зрения. Даже такой критерий как прибыль, не является единственно важным.

Задачи исследования операций, в которых цель операции не может быть отражена в едином критерии эффективности, и необходимо учитывать несколько различных и важных с точки зрения практики показателей, называются многокритериальными.

В подобных случаях, обычно, формируется некоторый список частных показателей эффективности (частных критериев оптимальности), совокупное увеличение которых и представляется целью операции. Однако эти частные показатели (критерии), как правило, оказываются несогласованными, то есть увеличение одних из них может привести к уменьшению других, что делает проблему оптимального выбора противоречивой и неоднозначной.

Во второй части пособия рассмотрены методы решения многокритериальных задач, часто используемые на практике: метод идеальной точки, методы лексикографической оптимизации, метод уступки и метод свертки критериев. Рассмотрены также методы свертки критериев при целях качественного типа.

ГЛАВА 1. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

Рассмотрим игру с природой. У игрока, – лица, принимающего решение (ЛПР), имеется m возможных стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$. Состояние природы (окружения) может принимать n различных значений – обозначим их $P_1, P_2, ..., P_n$. Выигрыш игрока при выборе им i-й стратегии A_i и при состоянии природы P_j обозначим через c_{ij}. Матрицу выигрышей игрока обозначим через $C, C = (c_{ij})$.

Особенности игр с природой рассмотрим на следующем примере.

Пусть сельскохозяйственное предприятие «Росток» располагает 1000 га посевных площадей, на которых можно выращивать любую из трех культур – возможных стратегиях игрока, A_1, A_2, A_3. При наилучших агротехнических мероприятиях урожаи культур зависят, главным образом, от погодных условий (состояний природы). Будем считать для простоты, что возможны погодные условия трех типов: P_1 – сухое лето, P_2 – нормальное лето и P_3 – влажное лето, а также предположим, что цены на продукцию на протяжении рассматриваемого периода будут оставаться неизменными. Здесь под c_{ij} будем понимать доход (выигрыш) в миллионах рублей при выращивании культуры A_i при состоянии природы P_j на всех имеющихся площадях. Данные по доходам в рублях приведены в следующей таблице:

	P_1	P_2	P_3
A_1	40	10	30
A_2	30	50	20
A_3	0	60	80

Какую культуру лучше всего выращивать, чтобы получить максимально возможный доход?

Основная сложность состоит в незнании того, какое именно состояние природы P_j будет иметь место. Очевидно, что если бы игрок знал будущее состояние природы, он выбрал бы ту стратегию A_i, при которой его выигрыш (доход) был бы максимален.

В условиях, когда недостаточно оснований выделить какие-либо состояния природы (окружения) как более вероятные, предлагается, в частности, альтернативы A_1, …, A_m упорядочивать так, как будто все состояния природы равновероятны. Этот подход представляет принятие решения по критерию Лапласа. Этот критерий иногда называется также критерием (принципом) недостаточного основания.

В нашем примере критерий Лапласа, как нетрудно убедиться, предписывает на всех полях выращивать культуру A_3. Однако, какой при этом будет доход неизвестно. Это зависит от состояния погодных условий. Если случится сухое лето, то не будет получено никакого дохода, если будет нормальное лето, то будет получено в качестве дохода 60 млн. рублей, а если будет влажное лето, то доход составит 80 млн. рублей.

Однако, приписывание действительности свойств, которых на самом деле нет, то есть, не зная истинных вероятностей, полагать их равными каким-либо значениям, представляет, очевидно, серьезную опасность.

Иногда для определения вероятностей состояния природы предлагается использовать статистику прошлых состояний. Пусть, например, из 100 наблюдений за состоянием природы 63 раза имело место состояние P_1, 24 раза было состояние P_2 и 13 раз было состояние P_3. Тогда относительные частоты состояний природы составляют (0.63, 0.24, 0.13). Использование их как вероятностей состояний природы является очень серьезной ошибкой, поскольку относительные частоты не являются вероятностями. Например, при бросании монеты, вероятность выпадения в отдельном эксперименте орла (или решки) равна 0.5 и остается неизменной, а относительные частоты могут изменяться в довольно широких пределах.

Рассмотрим еще случай, когда известны истинные вероятности состояний природы. Пусть в рассматриваемом примере игроку известно, что вероятность состояния P_1 равна 0.5, вероятность состояния P_2 равна 0.2 и вероятность состояния P_3 равна 0.3. Тогда можно вычислить математическое ожидание выигрыша игрока при применении каждой его стратегии. Итак, имеем при применении игроком стратегии A_1 ожидаемый выигрыш (доход):

$$0.5\times 40 + 0.2\times 10 + 0.3\times 30 = 31 \text{ млн. рублей;}$$

при применении стратегии A_2:

$$0.5\times 30 + 0.2\times 50 + 0.3\times 20 = 31 \text{ млн. рублей;}$$

и при применении стратегии A_3:

$$0.5\times 0 + 0.2\times 60 + 0.3\times 80 = 36 \text{ млн. рублей.}$$

Таким образом, математическое ожидание выигрыша максимально при применении стратегии A_3, то есть когда все поля засеиваются культурой A_3. Однако мы видим, что тогда с вероятностью 0.5 никакого урожая, а, следовательно, и никакого дохода мы не получим. С практической точки зрения такой результат неприемлем.

Какую же культуру лучше всего выращивать, чтобы получить максимально возможный доход?

Опишем несколько возможных подходов, или, как говорят, несколько «критериев» для выбора решения.

Принцип гарантированного результата

Поставим в соответствие каждой стратегии игрока A_i наихудший результат (минимальный выигрыш), который может быть получен при применении этой стратегий. Поскольку этот результат наихудший, следовательно, он является гарантированным. Выигрыш меньше этого игроку получить при применении этой стратегии невозможно. Функцию $\varphi(i) = \min\limits_{j=\overline{1,n}} c_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, ставящую в соответствие каждой стратегии гарантированный результат, будем называть функцией гарантированного результата. Стратегия, на которой достигается максимальное значение функции гарантированного результата, называется гарантирующей или максиминной стратегией в игре.

В нашем примере критерий максимина дает следующее решение.

Находим в каждой строке матрицы выигрышей C наихудший результат (минимальный выигрыш), а значит гарантированный результат для стратегии A_i, $i=\overline{1,m}$ (стратегия гарантированного результата, принцип максимина). Затем находим среди гарантированных результатов самый лучший, т.е. на котором достигается максимин $\mu = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \varphi(i) = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \min\limits_{j=\overline{1,n}} c_{ij}$ и гарантирующую стратегию (стратегию, которая соответствует номеру строки, на которой достигается максимум).

В рассматриваемом примере для стратегии A_1, то есть в первой строке матрицы C наихудший результат равен 10, во второй строке для стратегии A_2 наихудший результат выигрыш равен 20, и в третьей строке для стратегии A_3 наихудший результат равен нулю. Максимальный выигрыш среди этих результатов равен 20.

Итак, в рассматриваемом примере, гарантированный результат равен 20, то есть игрок может обеспечить себе 20 млн. рублей, и гарантирующей стратегией является стратегия A_2, предписывающая все поля засеять культурой A_2.

Рассмотренный принцип максимина в приложениях к играм с природой обычно называется максиминным критерием Вальда.

Согласно этому критерию игра с природой ведется как игра с разумным, причем агрессивным противником, делающим все для того, чтобы помешать игроку (ЛПР) достигнуть успеха. Оптимальной считается максиминная стратегия, при которой гарантируется выигрыш в любом случае не меньший, чем μ.

Этот критерий олицетворяет «позицию крайнего пессимизма». Очевидно такой подход перестраховочный, естественный для того, кто очень боится проиграть.

Нельзя ли улучшить этот, учитывая, что природа ведет себя пассивно. Природа не является противником, она не помогает и не мешает (целенаправленно), мы безразличны ей. Может быть мы слишком перестраховываемся.

Критерий минимаксного сожаления Сэвиджа

Сожалением r_{ij} игрока при использовании стратегии A_i в условиях состояния природы P_j называется разность между выигрышем, который игрок получил бы, если бы состояние окружения P_j было известно, и выигрышем, который он получит, не зная каким будет состояние природы и выбирая стратегию поведения A_i.

Если бы состояние природы P_j было известно, то игрок выбрал бы стратегию, дающую $\max\limits_{i=\overline{1,m}} c_{ij}$. Чтобы вычислить сожаление r_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, нужно из максимального элемента в столбце P_j вычесть фактический выигрыш c_{ij}, т.е. $r_{ij}=\max\limits_{l=\overline{1,m}} c_{lj}-c_{ij}$. В нашем примере матрица сожалений $R=(r_{ij})$ имеет вид:

	P_1	P_2	P_3	$\max\limits_{j=\overline{1,n}} r_{ij}$
A_1	0	50	50	50
A_2	10	10	60	60
A_3	40	0	0	40

Таким образом, чем больше величина сожаления, тем больше игрок теряет в выигрыше от незнания состояния окружения. Далее, применяя принцип гарантированного результата, в каждой строке находим наихудший результат, то есть максимальное сожаление при применении данной стратегии, и выбираем среди них наилучший результат (минимальное сожаление), который в данном примере достигается при применении стратегии A_3. Итак, согласно критерию

Сэвиджа оптимальной стратегией является стратегия A_3, при которой все поля засеваются третьей культурой.

Критерий Сэвиджа тоже крайне пессимистический, и в смысле «пессимизма» он сходен с критерием Вальда.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

Этот критерий состоит в следующем. Вместо исходной матрицы выигрышей $C=(c_{ij})$ рассматривается матрица $B=(b_{ij})$, где

$$b_{ij}=\theta\, c_{ij}+(1-\theta)\max_{l=\overline{1,m}} c_{lj}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Здесь θ – некоторое число, $0\le\theta\le1$, характеризующее степень оптимизма игрока. Тогда число $1-\theta$ можно понимать как степень пессимизма. При $\theta=0$ в каждой строке во всех столбцах стоит одно и то же число, равное максимальному выигрышу при выборе соответствующей строке стратегии, то есть самый оптимистичный результат. При $\theta=1$ матрица B совпадает с матрицей выигрышей C, и критерий Гурвица превращается в критерий Вальда; при $\theta=0$ – в критерий «крайнего оптимизма», при других значениях θ получается нечто среднее – ближе к оптимизму, если θ близко к 0, или ближе к пессимизму, если θ близко к 1. Критерий Гурвица заключается в применении принципа гарантированного результата (критерия Вальда) к матрице B.

Рассмотрим несколько вариантов применения критерия Гурвица при различных значениях θ.

При $\theta=0.2$ матрица B имеет следующий вид:

	P_1	P_2	P_3	$\min_{j=\overline{1,n}} b_{ij}$
A_1	40	34	38	34
A_2	46	50	44	44
A_3	64	76	80	64

Применяя принцип гарантированного результата (критерий Вальда) получаем при A_1 наихудший результат $b_{12} = 34$, при A_2 наихудший результат $b_{23} = 44$ и при A_3 наихудший результат $b_{31} = 64$. Наилучший среди них b_{31}, который будет получен при применении стратегии A_3.

Пусть $\theta = 0.5$. Тогда матрица B имеет вид:

	P_1	P_2	P_3	$\min\limits_{j=\overline{1,n}} b_{ij}$
A_1	40	25	35	35
A_2	40	50	35	35
A_3	40	70	80	40

Применяя принцип гарантированного результата, получаем, что наилучший среди наихудших результатов достигается при $b_{31} = 40$ также при применении стратегии A_3.

Наконец, при $\theta = 0.8$ матрица B имеет вид:

	P_1	P_2	P_3	$\min\limits_{j=\overline{1,n}} b_{ij}$
A_1	40	16	32	16
A_2	34	50	26	26
A_3	16	64	80	16

Применяя принцип гарантированного результата, получаем, что по критерию Гурвица при $\theta = 0.8$ наилучшим выбором является выбор второй стратегии A_2, то есть засеять все поля следует второй культурой.

Применение смешанных стратегий

Итак, мы рассмотрели различные соображения и подходы к решению игр с природой. Во всех рассмотренных примерах игрок (ЛПР) оперирует чистыми стратегиями. Рассмотрим теперь, что может дать применение смешанных стратегий. Напомним, что смешанная стратегия – это вектор вероятностей выбора чистых стратегий. Как известно, согласно теореме Джона фон Неймана о максимине в матричных (антагонистических) играх всегда существует ситуация равновесия, и гарантирующие смешанные стратегии игроков являются оптимальными согласно принципу гарантированного результата (критерия Вальда). Обозначим смешанную стратегию игрока через $p=(p_1, p_2, p_3)$. В рассматриваемом примере игры с природой с матрицей выигрышей $C=(c_{ij})$ решением игры в смешанных стратегиях, как нетрудно убедиться, является вектор $p^*=(\frac{22}{45}, \frac{18}{45}, \frac{5}{45})$, при этом ожидаемый выигрыш составит $\mu^*=31.555$, то есть при применении гарантирующей смешанной стратегии с вероятностью $p_1^*=\frac{22}{45}$ выбирается стратегия A_1, с вероятностью $p_2^*=\frac{18}{45}$ выбирается стратегия A_2 и с вероятностью $p_3^*=\frac{5}{45}$ выбирается стратегия A_3.

Однако отметим, что в данном примере возможна вполне детерминированная реализация смешанной стратегии. А именно, будем трактовать вероятность, с которой применяется некоторая чистая стратегия как соответствующая доля всех посевных площадей. Другими словами, засеем культурой A_1 долю в $\frac{22}{45}$ всех посевных площадей, культурой A_2 долю в $\frac{18}{45}$ всех посевных площадей и культурой A_3 долю в $\frac{5}{45}$ всех посевных площадей. Тогда при сухой погоде P_1 получим реальный, а не вероятный доход

$$40\times\frac{22}{45}+30\times\frac{18}{45}+0\times\frac{5}{45} = 31.555 \text{ млн. рублей.}$$

Если будет нормальная погода P_2, то получим доход

$$10\times\frac{22}{45}+50\times\frac{18}{45}+60\times\frac{5}{45}=31.555 \text{ млн. рублей.}$$

Если случится влажное лето P_3, то, в результате, опять таки, будет получен доход, независящий ни от каких погодных условий:

$$30\times\frac{22}{45}+20\times\frac{18}{45}+80\times\frac{5}{45}=31.555 \text{ млн. рублей.}$$

Если применить критерий Сэвиджа при использовании смешанных стратегий по матрице сожалений, то получим гарантирующую смешанную стратегию $p=(\frac{4}{9},0,\frac{5}{9})$. Реализуя эту стратегию аналогичным образом, то есть засеяв $\frac{4}{9}$ всех площадей культурой A_1 и $\frac{5}{9}$ всех площадей культурой A_3, получим, как нетрудно убедиться, при погодных условиях P_1 доход в 17.777 млн. рублей, при погодных условиях P_2 доход в 37.777 млн. рублей и при погодных условиях P_3 доход в 57.777 млн. рублей

Подобным образом можно получить решение задачи по критерию Гурвица. Например, при $\theta=0.8$ оптимальной является смешанная стратегия $p=(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3})$, дающая при состоянии P_1 доход в 26.666 млн. рублей, при P_2 – доход в 26.666 млн. рублей, и при P_3 – доход в 46.666 млн. рублей.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Задачу многокритериальной оптимизации рассмотрим в следующей постановке.

Пусть задано множество возможных (допустимых) решений, обозначим его через D, и множество критериев их оценки (частных критериев) $f_1(x)$, $f_2(x)$, … $f_m(x)$, определенных на всех элементах множества D. Требуется найти решение $x^* \in D$, для которого значения частных критериев максимально возможны.

Внешне эта задача напоминает игру m лиц (игроков), в которой множество D – это множество исходов в игре, а функции $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, – это функции выигрыша игроков.

Однако имеется разница, которая состоит в том, что в игре игроки стремятся по отдельности, индивидуально максимизировать свой выигрыш за счет выбора своей стратегии, а в задаче многокритериальной оптимизации выбрать наилучший исход необходимо лицу, принимающему решение (ЛПР), то есть в игровой задаче каждый игрок стремится достичь своего максимального результата, а в многокритериальной задаче решение принимает один – лицо, принимающее решение.

Рассмотрим методы решения задачи, часто используемые на практике.

Метод «идеальной» точки

Найдем максимально возможные значения частных критериев, то есть для каждого $i = \overline{1,m}$ решим задачу максимизации функции $f_i(x)$ на множестве D. Оптимальные значения в этих задачах обозначим $w_i^* = \max\limits_{x \in D} f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$.

Таким образом, w_i^* является максимально возможным значением i-го критерия $f_i(x)$ на множестве D. Точка $x_i^* \in D$, такая, что $w_i = f_i(x_i^*) = w_i^*$, является решением обычной однокритериальной задачи оптимизации.

Положим $w^* = (w_1^*, w_2^*, ..., w_m^*)$. Точка w^* называется идеальной, поскольку в ней все критерии имеют максимально возможные значения и получить большие значения ни одному критерию, не уменьшая значений других критериев, невозможно. Затем решаем задачу отыскания такого вектора w, для которого расстояние до идеальной точки $\rho(w^*, w)$ минимально. В качестве функции расстояния $\rho(x, y)$ можно брать разные метрики, в частности, среднеквадратичное отклонение $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$, в данном случае $\rho(w^*, w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (w_i^* - w_i)^2}$. Таким образом, находится наиболее близкая к идеальной точке точка на множестве $W = \{(f_1(x), f_2(x) ... f_m(x)), x \in D\}$. Она и объявляется решением задачи многокритериальной оптимизации.

Лексикографическая оптимизация

Пусть частные критерии различаются по значимости. Упорядочим их так, чтобы наиболее значимым был критерий $f_1(x)$, следующим по значимости – $f_2(x)$ и т.д.

Вначале решается задача максимизации наиболее важного критерия $f_1(x)$ на всем множестве допустимых решений D. Обозначим максимальное значение в этой задаче через $\overline{\mu}_1 = \max_{x \in D} f_1(x)$, а через D_1 – множество оптимальных решений этой задачи:

$$D_1 = \{ x \in D : f_1(x) \geq \overline{\mu}_1 \},$$

то есть множество всех $x \in D$, на которых достигается максимальное значение первого критерия.

На следующем шаге решается задача максимизации следующего по важности второго критерия $f_2(x)$ на множестве оптимальных решений по первому критерию. Обозначим оптимальное значение в этой задаче через $\bar{\mu}_2 = \max\limits_{x \in D_1} f_2(x)$, а множество оптимальных решений через D_2:

$$D_2 = \{ x \in D_1 : f_2(x) \geq \bar{\mu}_2 \}.$$

Далее решается задача максимизации следующего по важности критерия $f_3(x)$ на множестве оптимальных решений предыдущей задачи и так далее вплоть до задачи максимизации последнего критерия $f_m(x)$. Таким образом, каждая последующая задача максимизации очередного частного критерия решается на множестве оптимальных решений предыдущей задачи.

Отметим неприятную особенность рассматриваемого метода, которая заключается в том, что если на каком-либо шаге решение соответствующей задачи оказалось единственным, то все последующие шаги становятся бессмысленными, и все оставшиеся критерии фактически не участвуют и не учитываются при определении решения исходной задачи. С целью исправления этого недостатка метод лексикографической оптимизации модифицируется следующим образом.

Метод уступки

В этом методе сначала решается задача максимизации самого важного критерия $f_1(x)$ на всем множестве D. Обозначим оптимальное значение этой задачи через $\bar{\mu}_1 = \max\limits_{x \in D} f_1(x)$. На следующем шаге делается уступка по отношению к оптимальному значению первого критерия на некоторую величину $\varepsilon_1 > 0$, то есть задача максимизации критерия $f_2(x)$ решается на множестве

$$D_1 = \{x \in D : f_1(x) \geq \bar{\mu} - \varepsilon_1\},$$

в которое входят не только все оптимальные решения в задаче максимизации первого критерия, но и те решения, у которых значение первого критерия отличается от оптимального значения не более чем на величину уступки.

Далее на следующем шаге решается задача максимизации второго по важности критерия $f_2(x)$ на множестве D_1 и так далее. В качестве решения исходной многокритериальной задачи берется решение последней задачи максимизации критерия $f_m(x)$.

Метод свертки критериев

Основная идея метода свертки частных критериев состоит в том, чтобы сформировать единый интегральный критерий качества решения, учитывающий и агрегирующий в себе все частные критерии и, тем самым, свести решение задачи многокритериальной оптимизации к решению задачи максимизации этого интегрального критерия.

В общем виде метод свертки частных критериев можно представить следующим образом.

Задается функция свертки $\varphi(u_1, u_2, ..., u_m)$. Количество переменных у функции свертки равно числу частных критериев. Единый интегральный критерий в исходной задаче формируется как суперпозиция функций частных критериев и функции свертки

$$\Phi(x) = \varphi(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)).$$

Тем самым исходная многокритериальная задача сводится к решению задачи максимизации интегрального критерия $\Phi(x)$ на множестве D.

Задавая различные функции свертки, можно получать различные конкретные интегральные критерии качества.

Рассмотрим некоторые наиболее распространенные способы свертывания частных критериев.

Пусть $\varphi(u)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(u_i-\beta_i)$, $\alpha_i>0$, $\beta_i\ge 0$, $i=\overline{1,m}$. Тогда единый критерий эффективности представляется в виде линейной комбинации частных критериев следующего вида:

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(f_i(x)-\beta_i),$$

и решается задача максимизации этого критерия на множестве D.

Этот способ обычно называют экономическим способом свертывания, так как весовые коэффициенты α_i, β_i часто выступают в роли цен на i-й товар, и критерий $\Phi(x)$ представляет собой суммарную прибыль. Назначение конкретных значений коэффициентов α_i, β_i вызывает немалые затруднения.

Если функцию свертки взять в виде $\varphi(u)=\min_{i=\overline{1,m}}\alpha_i(u_i-\beta_i)$, то интегральный критерий будет иметь вид

$$\Phi(x)=\min_{i=\overline{i,m}}\alpha_i(f_i(x)-\beta_i).$$

Максимизация этого критерия может способствовать подтягиванию отстающих критериев до уровня остальных (финиш по последнему).

Интерес представляет также интегральный критерий по типу функции Нэша, который получается при использовании функции свертки $\varphi(u)=\prod_{i=1}^{m}(u_i-\beta_i)$ и имеет вид $\Phi(x)=\prod_{i=1}^{m}(f_i(x)-\beta_i)$. Этот критерий с вычислительной точки зрения удобнее брать в виде $\Phi(x)=\sum_{i=1}^{m}\log(f_i(x)-\beta_i)$, который получается, если в качестве функции свертки взять функцию $\varphi(u)=\sum_{i=1}^{m}\log(u_i-\beta_i)$.

Рассмотрим также виды свертки критериев при качественных целях.

Способ формирования цели качественного типа

Под качественными целями понимаются цели, которые могут быть либо достигнуты, либо не достигнуты (частичное достижение цели невозможно). Все действия, приводящие к достижению цели, одинаково хороши, точно так же все результаты, не приводящие к достижению цели, одинаково неудовлетворительны. Критерий эффективности принимает в этом случае два значения, например, 1 в случае успеха и 0 в противном случае. Разбиваем множества значений частных критериев на удовлетворительные и неудовлетворительные. Назначаются некоторые числа $\overline{\delta_i}$, $i=\overline{1,m}$, и удовлетворительными значениями объявляются только такие, для которых $f_i(x) \geq \overline{\delta_i}$, $i=\overline{1,m}$. При этом критерий-свертка принимает следующий вид:

$$V(x)=1 \text{ при } f_i(x) \geq \overline{\delta_i},\ i=\overline{1,m},$$

$$V(x)=0 \text{ в остальных случаях.}$$

Этот способ образования единого критерия наиболее доступен пониманию оперирующей стороны, так как ближе всего отражает смысл требований, налагаемых на значения частных критериев. Однако трудности корректного назначения пороговых значений $\overline{\delta_i}$ так, чтобы не потерять наиболее эффективные способы действий или не попасть в область недостижимых значений, делают эту процедуру не менее противоречивой и неоднозначной, чем стремление к одновременному увеличению значений всех частных критериев.

Логическое свертывание

Если частные критерии $f_i(x) \geq \overline{\delta_i}$, $i=\overline{1,m}$ являются критериями качественного типа, принимающими только значения 0 или 1, то для их свертывания можно использовать логические операции:

а) конъюнкция. Единая цель состоит в выполнении всех частных целей:

$$V(x)=\prod_{i=1}^{m} f_i(x); \qquad (1)$$

б) дизъюнкция. Единая цель состоит в выполнении хотя бы одной из частных целей:

$$V(x)=1-\prod_{i=1}^{m}(1-f_i(x)). \qquad (2)$$

Это наиболее конструктивный способ свертывания частных критериев. Однако он имеет ограниченное применение, так как годен только для качественных целей.

Обобщенное логическое свертывание

Прямым обобщением действий предыдущего способа является применение вместо (1):

$$V(x)=\min_{i=\overline{1,m}} \lambda_i f_i(x), \quad \lambda_i \geq 0; \qquad (1')$$

а вместо (2):

$$V(x)=\max_{i=\overline{1,m}} \lambda_i f_i(x), \quad \lambda_i \geq 0. \qquad (2')$$

Эти способы свертывания применимы для любых типов критериев. Выражение $(1')$ немедленно превращается в (1), если все $f_i(x)$ принимают только значения 0 или 1, а $\lambda_i=1$. Точно так же в этом случае $(2')$ эквивалентно (2). Трудности, связанные с таким типом свертывания, обусловлены неопределенностью при выборе конкретных значений весовых коэффициентов λ_i. Однако подобного типа свертки могут оказаться чрезвычайно полезными при решении сложных задач теории исследования операций.

Понятие эффективного управления

Стремление увеличивать значение каждого из частных критериев не столь уж противоречиво, если проводить эту процедуру достаточно корректно. Рассмотрим два значения управления $x^1 \in X$ и $x^2 \in X$, где X – множество возможных управлений. Будем говорить, что управление x^1 доминирует над управлением x^2 в смысле векторного критерия $f(x) = \left(f_1(x), f_2(x),\ldots,f_m(x)\right)$ если выполняется неравенство $f_i(x^1) \geq f_i(x^2)$, причем хотя бы для одного значения i имеет место строгое неравенство. Очевидно, что из двух управлений x^1 и x^2 доминирующее управление x^1 будет предпочтительнее в силу стремления оперирующей стороны к увеличению значений всех частных критериев. Таким образом, управление x^2 может быть исключено из дальнейшего анализа. Процедуру отсева неконкурентных управлений x можно продолжать до тех пор, пока она не приведет к выделению множества X_π значений управления x, не сравнимых в смысле указанного принципа доминирования. Формально это означает, что для любой пары x^1, $x^2 \in X_\pi$ условие $f_i(x^1) \geq f_i(x^2)$ влечет за собой равенство $f_i(x^1) = f_i(x^2)$ для всех i. Множество X_π называется множеством эффективных (или оптимальных по Парето) управлений, а соответствующее им множество векторов – эффективными, или паретовскими векторами.

В тех случаях, когда число частных критериев (размерность вектора u) значительно меньше размерности вектора x, можно ожидать, что процедура построения множества эффективных управлений X_π приведет к существенному сужению исходного множества X, а это, как показывает опыт, заостряет и в определенном смысле облегчает проблему окончательного выбора x. Здесь как раз вступает в силу некоторый психологический момент, который заключается в том, что оперирующая сторона, осознав невозможность дальнейшего непротиворечивого увеличения значений всех частных критериев, побуждается тем самым к уточнению цели операции. Если в конце концов удается сформулировать единый критерий эффективности, согласованный с первоначальными требованиями, то задача определения оптимального в том или ином смысле x облегчается, так как множество конкурирующих вариантов X_π уже исходного множества X .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснощеков П.С. Математические модели в исследовании операций. – М.: Знание, 1984. – 64 с.

2. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука, 1990. – 256 с.

3. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. –208 с.

4. Мазалов В.В. Математическая теория игр и ее приложения. – М.: Лань, 2010. – 448 с. URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=540.

5. Колобашкина Л.В. Основы теории игр. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 164 с. URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4406.

Учебное издание

Андрианова Анастасия Александровна
Хабибуллин Рустэм Фарукович

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Дизайн обложки
М.А. Ахметов

Подписано в печать 14.09.2013.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .
Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28