КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

*Кафедра вычислительной физики
и моделирования физических процессов*

А.В. МОКШИН, Р.М. ХУСНУТДИНОВ

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА
Раздел №1.
Корпускулярные свойства света. Волновые свойства частиц. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Учебно-методическое пособие

Казань – 2015

УДК 530.1
ББК 22.31

Принято на заседании кафедры вычислительной физики и моделирования физических процессов
Протокол № 4 от 10 июня 2015 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры образовательных технологий в физике КФУ
Л.А. Нефедьев;
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информационных систем КФУ
Ф.М. Гафаров

Мокшин А.В., Хуснутдинов Р.М.,
Квантовая механика. Раздел №1. Корпускулярные свойства света. Волновые свойства частиц. Соотношение неопределенностей Гейзенберга / А.В. Мокшин, Р.М. Хуснутдинов. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 29 с.

В данном учебно-методическом пособии представлены задачи по курсу "Квантовая механика", основные положения и формулы, необходимые для решения задач, а также примеры с решениями типичных задач.

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика – это раздел теоретической физики, в котором рассматриваются свойства и строение атомов и молекул, свойства ансамблей (систем) элементарных частиц. Квантовая механика является основой современной физики твердого тела (зонной теории), на ее положениях построена квантовая химия, квантовая электродинамика и другие разделы теоретической и экспериментальной физики. Необходимо различать понятия “квантовая физика” и “квантовая механика”. Первое понятие – более общее и наряду с квантовой механикой включает в себя как упомянутые выше разделы, так и такие науки, как квантовая электроника, теория квантованных полей и т.д.

В основе квантовой физики лежит фундаментальное положение о дискретности энергетических состояний элементарных частиц в атомах и ансамблях элементарных частиц. В основу же квантовой механики положена идея о корпускулярно-волновом дуализме в проявлении свойств частиц микромира, а дискретность изменения физических характеристик следует как следствие основного положения. Квантовая механика сформировалась в период 1925-1927 г.г. в работах великих физиков XX в. Э. Шредингера, В. Гейзенберга, Н. Бора, М. Борна, П. Дирака и др. Как и любая физическая теория, квантовая механика опирается на экспериментальные факты. Она не только объясняет те физические явления, которые вызвали непреодолимые затруднения в классической физике, но и предсказала ряд новых явлений, впоследствии обнаруженных экспериментально. Будучи более общей физической теорией, квантовая механика подчиняется принципу соответствия, включая в себя, как предельный случай, классическую механику.

Прочной опорой квантовой механики является элегантный и мощный математический аппарат, основанный на теории операторов. Развитый изначально в квантовой механике для описания внутриядерных и атомарных процессов, и ставший затем надежным “инструментом” в квантовой химии, он достиг в настоящее время такого уровня, что находит успешное применение в изучении биофизических процессов в отдельных клетках живых систем.

§1. КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

1. Энергия и импульс фотона (кванта света):
$E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, где $\vec{k}$ – волновой вектор, $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны, ω – частота света.

2. Законы сохранения энергии и импульса при взаимодействии микросистемы (электрон, атом, молекула и т. д.) со светом:

$$\hbar\omega + E = \hbar\omega' + E',$$

$$\hbar\vec{k} + \vec{p} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}',$$

где E, E' и $\vec{p}$, $\vec{p'}$ – энергия и импульс микросистемы до и после (со штрихом) взаимодействия со светом, соответственно.

3. Формула Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\hbar\omega = T + A,$$

где $\hbar\omega$ – энергия кванта света,
T – кинетическая энергия фотоэлектрона,
A – работа выхода электрона.

4. Формула Комптона для рассеяния фотона на первоначально покоившейся свободной частице с массой:

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc}\sin^2\theta/2, \quad \Lambda = \frac{\hbar}{mc},$$

где $\Delta\lambda = \lambda$’-λ – изменение длины волны фотона, рассеянного под углом θ к первоначальному направлению движения; Λ – комптоновская длина волны.

Пример 1. Чему равна (в *эВ*) энергия фотона с длиной волны
a) $\lambda_1 = 5000\text{A}$?
b) $\lambda_2 = 0.5\text{A}$?

Решение: Энергия кванта света пропорциональна частоте колебаний света ω и выражается равенством $E = \hbar\omega$. Воспользовавшись известным соотношением $\omega = 2\pi c/\lambda$, выразим энергию фотона через длину световой волны

$$E = 2\pi\hbar c/\lambda. \tag{0.1}$$

Выпишем числовые значения входящих в (0.1) величин:
$\hbar = 1.057 \cdot 10^{-34}$Дж·с, $\quad \lambda_1 = 5000\text{A} = 5 \cdot 10^{-5}$м,
$2\pi\hbar = h = 6.62 \cdot 10^{-34}$Дж·с, $\quad \lambda_2 = 0.5\text{A} = 5 \cdot 10^{-9}$м,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с.
Подставив их в (0.1) получим:

$$E_1 = \frac{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-5}}\text{Дж} = 3.972 \cdot 10^{-21}\text{Дж},$$

или

$$E_1 = \frac{3.972 \cdot 10^{-21}}{1.6 \cdot 10^{-19}}\text{эВ} = 2.48 \text{ эВ}.$$

Энергия фотона с меньшей длиной волны согласно (0.1) будет больше:

$$E_2 = \frac{E_1}{10^{-4}} = 24800 \text{ эВ} = 2.48 \text{ кэВ}.$$

Пример 2. Определить красную границу фотоэффекта для цинка (работа выхода $A = 3.74$ эВ) и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с его поверхности электромагнитным излучением с длиной волны 250 нм.

Решение: Красной границей фотоэффекта называется длина волны облучающего света, при которой еще возможен фотоэффект с поверхности металла. При облучении светом этой длины волны скорость, а следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равна нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта принимает следующий вид:

$$\hbar\omega - A = T = \frac{m\vartheta^2}{2}$$

где $\hbar\omega$ – энергия фотонов, падающих на поверхность металла, A – работа выхода, T – максимальная кинетическая энергия, в случае красной границы примет вид:

$$\hbar\omega_0 = A, \qquad \text{или} \qquad 2\pi\hbar/\lambda_0 = A.$$

Отсюда находим

$$\lambda_0 = 2\pi\hbar/A. \tag{0.2}$$

Максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых из металла светом длиной волны $\lambda = 250$ нм, определим с помощью уравнения (0.1):

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\hbar\omega - A\right)} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - A\right)}. \tag{0.3}$$

Выпишем все числовые значения величин, входящих в выражение (0.2) и (0.3), выразив их в системе СИ:

$2\pi\hbar = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $\quad \lambda = 250$ нм $= 2.5 \cdot 10^{-7}$ м,

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $\quad m = 0.91 \cdot 10^{-30}$ кг,

$A = 3.74$ эВ $= 3.74 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 5.98 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Подставим эти числовые значения в (0.2) и (0.3)

$$\lambda_0 = \frac{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5.98 \cdot 10^{-19}} = 3.32 \cdot 10^{-7}\text{м} = 332 \text{ нм},$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \sqrt{\frac{2}{0.91 \cdot 10^{-30}}\left(\frac{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2.5 \cdot 10^{-7}} - 5.98 \cdot 10^{-19}\right)}\text{м/с} = \\ &= 6.6 \cdot 10^5\text{м/с}. \end{aligned}$$

Пример 3. Фотон с энергией 0.75 МэВ рассеян на свободном электроне под углом $\theta = 60°$. Найти а) энергию рассеянного кванта; б) кинетическую энергию электрона отдачи; в) направление его движения.

Решение:

а) энергию рассеянного фотона найдем, используя формулу Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc}\sin^2\theta/2, \tag{0.4}$$

где λ' – длина волны рассеянного фотона, λ – длина волны падающего кванта света, θ – угол рассеяния, m – масса покоя электрона, c – скорость света.

Выразив (0.4) длины волн через энергию фотонов с учетом известного соотношения $\omega = 2\pi c/\lambda$, получим

$$\frac{1}{\hbar\omega'} - \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{2}{mc^2}\sin^2\theta/2.$$

Отсюда находим энергию рассеянного фотона:

$$\hbar\omega' = \frac{\hbar\omega}{1 + \dfrac{2\hbar\omega}{mc^2}\sin^2\theta/2}. \tag{0.5}$$

Подставив в (0.5) следующие числовые значения:

$\hbar\omega = 0.75$ МэВ,

$mc^2 = 0.91 \cdot 10^{-30} \cdot 10^{16}$ Дж $= 8.19 \cdot 10^{-15}$ Дж $= \dfrac{8.19 \cdot 10^{-15}}{1.6 \cdot 10^{-19}}$эВ $=$
$= 5.1 \cdot 10^4$ эВ $= 510$ кэВ $= 0.51$ МэВ, получим:

$$h\omega' = \frac{0.75}{1 + 2\dfrac{0.75}{0.51}\sin^2 30^0} = 0.43 \text{ МэВ}.$$

б) Согласно сохранения энергии при взаимодействии микросистемы (в данном случае электрона) со светом кинетическая энергия электрона отдачи определяется из соотношения

$$T = E' - E = \hbar\omega' - \hbar\omega.$$

В результате имеем $T = 0.75 - 0.43 = 0.32$ МэВ.

Отсюда можно найти и аналитическое выражение для кинетической энергии электрона отдачи.

в) Направление движения электрона отдачи найдем, применив закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_f = \vec{p}^{\,\prime}_f + \vec{p}^{\,\prime}_e,$$

где $\vec{p}_f$ – импульс падающего фотона, $\vec{p}^{\,\prime}_f$ – импульс рассеянного фотона, $\vec{p}^{\,\prime}_e$ – импульс электрона отдачи.

$$\begin{aligned}\tan\varphi = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{CA}\sin\theta}{\mathrm{OA} - \mathrm{CA}\cos\theta} &= \\ = \frac{p'_f\sin\theta}{p_f - p'_f\cos\theta} &= \\ = \frac{\sin\theta}{p_f/p'_f - \cos\theta}&.\end{aligned}$$

Так как $p_f = \hbar|\vec{k}| = \hbar\dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\hbar\omega}{c}$, $p'_f = \dfrac{\hbar\omega'}{c}$, получим:

$$\tan\phi = \frac{\sin\theta}{\hbar\omega/\hbar\omega' - \cos\theta}. \qquad (0.6)$$

Используя результат задачи а), выражение (0.6) можно привести к виду:

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{1 + 2\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2} - \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)\left(1 + \dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\right)},$$

откуда

$$\tan\varphi = \frac{\sin 60^\circ}{(1-\cos 60^\circ)\,(1 + 0.75/0.51)} = 0.701 \quad \text{и} \quad \phi \approx 35^\circ.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1.1 Какова скорость движения электрона, если его импульс равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 1$А?

1.2 Красная граница фотоэффекта калия и вольфрама равны 6000 А и 2700 А, соответственно. Какова работа выхода электронов в этих случаях?

1.3 Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра $A = 4.28$ эВ ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 0.155$ мкм?

1.4 При некотором максимальном значении задерживающей разности потенциалов фототок с поверхности лития ($A = 2.39$ эВ), освещаемого светом с длиной волны λ_0, прекращается. Изменив длину волны в $\eta = 1.5$ раза установили, что для прекращения тока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов в $n = 2$ раза. Вычислить λ_0.

1.5 Работа выхода электрона из серебра $A = 4.28$ эВ. Найти потенциал серебряного шарика при его длительном облучении монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0.1$ мкм.

1.6 Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающееся вещество. При этом длины волн излучения, рассеянного под углами $\theta_1 = 60°$ и $\theta_2 = 120°$, отличается в $\eta = 2$ раза. Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, найти длину волны падающего излучения.

1.7 В эффекте Комптона фотон при соударении с электроном рассеян под углом $\theta = 90°$. Энергия рассеянного фотона 0.4 МэВ. Определить энергию фотона до рассеивания.

1.8 Фотон с $\lambda = 0.17$ А вырывает из покоившегося атома электрон, энергия связи которого $E = 69.3$ кэВ. Найти импульс, переданный атому в результате этого процесса, если электрон вылетел под прямым углом к направлению падающего фотона.

1.9 Фотон с импульсом $p = 60$ кэВ/с, где c – скорость света, испытав комптоновское рассеяние под углом 120° на покоившемся свободном электроне, вырвал затем из атома молибдена электрон, энергия связи которого $E = 20$ кэВ. Найти кинетическую энергию фотоэлектрона.

1.10 При облучении атома рентгеновскими лучами с $\lambda = 0.14$ А регистрируются два электрона, которые вылетают под углом 90° к направлению движения фотонов с энергиями 82 кэВ и 6.25 кэВ. Как можно объяснить происхождение этих электронов?

1.11 При облучении вещества жестким монохроматическим излучением обнаружено, что максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов $T_{max} = 0.44$ МэВ. Определите длину волны падающего излучения.

1.12 Фотон с энергией $= 1$ МэВ рассеян на свободном покоившемся электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на $\eta = 25\%$.

1.13 В Комптон-эффекте найти энергию электрона отдачи и выразить ее через угол рассеяния.

1.14 Показать с помощью законов сохранения, что свободный электрон не может полностью поглотить фотон.

1.15 Объяснить следующие особенности комптоновского рассеяния света веществом:

а) независимость величины смещения $\Delta\lambda$ от природы рассеивающего вещества;

б) увеличение интенсивности смещенной компоненты рассеянного света с уменьшением атомного номера вещества, а также с ростом угла рассеяния;

в) наличие несмещенной компоненты в рассеянном излучении.

§2. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ

1. Соотношение де-Бройля для энергии и импульса движущейся микрочастицы:

$$E = \hbar\omega, \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k},$$

где ω – частота дебройлевской волны, $\vec{k}$ – волновой вектор, $|\vec{k}| = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, λ – длина волны.

2. Длина волны де-Бройля микрочастицы, движущейся с импульсом p :

$$\lambda = 2\pi\hbar/p$$

или

$$\lambda = 2\pi\hbar/m\vartheta,$$

где m, ϑ – масса и скорость частицы, соответственно.

В случае малых скоростей $\vartheta << c$ выполняется соотношение:

$$\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2mE}.$$

где λ – длина волны де-Бройля для частицы с массой m и энергией E.

3. Формула Вульфа-Брега для дифракционных максимумов, наблюдаемых на пространственной дифракционной решетке:

$$n\lambda = 2d\sin\phi,$$

где d – межплоскостное расстояние в кристалле, ϕ – угол скольжения (угол между падающим лучом и плоскостью решетки), n – порядок максимума.

4. Волновой пакет:

Под **группой волн**, или **волновым пакетом** подразумевается суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по длине волны и направлению распространения

$$\Psi\,(x,t) = \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k)\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)}dk,$$

где $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$ – волновое число центра группы волн ($\Delta\ k$ – мало), $a(k)$ – амплитуды волн, образующих группу.

После интегрирования получаем

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= 2a(k_0)\frac{\sin\left\{\left[\left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} t - x\right]\Delta k\right\}}{\left[\left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} t - x\right]}\,\mathrm{e}^{i(\omega_0 t - k_0 x)} = \\ &= A(x,t)\mathrm{e}^{i(\omega_0 t - k_0 x)},\end{aligned}$$

где ω_0 – основная частота соответствующая волновому числу k_0. Точка x, в которой амплитуда $A(x,t)$ имеет максимум, называется *центром группы волн*. Скорость, с которой она перемещается, называется *групповой скоростью*

$$\upsilon_{\text{гр}} \quad = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k_0}.$$

Скорость, с которой распространяется некоторая фиксированная точка волны, где фаза имеет определенное значение, называется *фазовой скоростью*

$$u = \frac{\omega}{k},$$

где ω, k – частота и волновое число волны, соответственно.

Пример 4. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де-Бройля была равна 1 А?

Решение: Длина волны де-Бройля λ определяется формулой

$$\lambda = \frac{2\pi h}{p}.$$

Отсюда можно найти импульс частицы

$$p = \frac{2\pi h}{\lambda} \tag{0.7}$$

Зная импульс, можно определить кинетическую энергию частицы T. Связь импульса с кинетической энергией различна для *нерелятивистского случая* $(v \ll c)$

$$p = \sqrt{2mT} \tag{0.8}$$

и для *релятивистского случая* (v - сопоставима со скоростью света c)

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_c + T)\,T}, \tag{0.9}$$

где $E_c = mc^2$ – энергия покоя частицы, m – масса покоя частицы.

Оценим скорость частицы v, имея в виду, что импульс в нерелятивистском случае $p = mv$, а в релятивистском $p = \dfrac{m\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}}$.

Подставляя числовые значения, получаем

$2\pi\hbar = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$ с;

$m = 0.91 \cdot 10^{-30}$ кг;

$\lambda = 1$ А $= 10^{-10}$ м.

Тогда

$$\frac{p}{m} = \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{10^{-10} \cdot 0.91 \cdot 10^{-30}} \text{ м/с} \approx 7 \cdot 10^7 \text{ м/с},$$

что почти в пять раз меньше скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Поэтому, применяя формулу для нерелятивистского случая, находим

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{2\pi\hbar}{\lambda}\right)^2 / m = 2.4 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} = \frac{2.4 \cdot 10^{-16}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = \\ &= 1.5 \cdot 10^2 \text{ эВ} = 0.15 \text{ КэВ}. \end{aligned}$$

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U равна $T = eU$. Отсюда получаем

$$eU = 150 \text{ эВ}, \quad U = 150 \text{ В},$$

т.к. электрон приобретает энергию в один электрон-вольт при прохождении разности потенциалов в один вольт.

Пример 5. На узкую щель шириной $a = 1$ мкм направлен параллельный пучок электронов, имеющий скорость $\upsilon = 3.65$ Мм/с. Учитывая волновые свойства электронов, определить расстояние между двумя максимумами первого порядка в дифракционной картине, полученной на экране, отстоящем на $L = 10$ см от щели.

Решение: Согласно гипотезе де-Бройля длина волны λ, соответствующая частице массой m, движущаяся со скоростью υ, выражается формулой:

$$\lambda = 2\pi\hbar/m\upsilon.$$

Условие максимального усиления волны при дифракции на одной щели имеет вид:

$$a \sin\varphi = (2n + 1)\,\lambda/2, \tag{0.10}$$

где $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$ - порядковые номера максимумов, а – ширина щели.

Для максимума первого порядка ($n = 1$) угол φ заведомо мал, поэтому $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение (0.10) примет следующий вид:

$$a\varphi = \frac{3}{2}\lambda, \tag{0.11}$$

Искомая величина x, как это следует из рисунка, равна

$$x = 2L\tan\varphi \approx 2L\varphi, \tag{0.12}$$

так как при малых углах $\tan\varphi \approx \varphi$.

Подставив φ из соотношения (0.11) в формулу (0.12), получаем

$$x = 3\frac{L\lambda}{a}.$$

Подставив в последнее равенство длину волны де-Бройля, находим

$$x = 6\pi \frac{L\hbar}{am\vartheta}. \tag{0.13}$$

Выпишем числовые значения величин, входящих в формулу (0.13)

$L = 0.1$ м, $\quad v = 3.65$ Мм/с $= 3.65 \cdot 10^6$ м/с,

$a = 1$ мкм$= 10^{-6}$ м; $\quad \hbar = 1.057 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

В результате находим

$$x = \frac{6 \cdot 3.14 \cdot 10^{-1} \cdot 1.057 \cdot 10^{-34}}{10^{-6} \cdot 0.91 \cdot 10^{-30} \cdot 3.65 \cdot 10^{6}} \text{ м} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Пример 6. На грань кристалла никеля падает параллельный пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения изменяется. Когда этот угол делается равным 64°, наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее дифракционному максимуму первого порядка. Принимая расстояние между атомными плоскостями кристалла равным 2 А, определить длину волны де-Бройля электронов и их скорость.

Решение: К расчету дифракции электронов от кристаллической решетки применяется формула Вульфа-Брегга:

$$2d \sin\phi = n\lambda,$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла, ϕ – угол скольжения, n – порядковый номер дифракционного максимума, λ – длина волны де-Бройля.

Отсюда выражаем длину волны

$$\lambda = \frac{2d \sin\varphi}{n}.$$

Сделав подстановку числовых значений величин, получаем

$$\lambda = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-10} \sin 64^\circ}{1} \text{м} = 3.6 \cdot 10^{-10} \text{м} = 3.6 \text{ А}.$$

Скорость электронов найдем из формулы длины волны де-Бройля $\vartheta = \dfrac{2\pi\hbar}{m\lambda}$. Подстановка числовых значений величин в последнее выражение дает следующий результат:

$$\vartheta = \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{0.91 \cdot 10^{-30} \cdot 3.6 \cdot 10^{-10}} \text{ м/с} = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с} = 2 \text{ Мм/с}.$$

Пример 7. Функция распределения атомов по скоростям в атомарном пучке имеет вид $f(u) = Au^3 e^{-u^2}$, где A – нормировочный коэффициент, $u = v/v_{\text{вер}}$, $v_{\text{вер}}$ – наиболее вероятная скорость максвелловского распределения в источнике. Найти соответствующую функцию распределения атомов в пучке по дебройлевским длинам волн. Вычислить наиболее вероятную длину волны в пучке атомов гелия при температуре источника 300 К.

Решение: Число атомов в пучке, скорости которых лежат в узком интервале $(v,\ v + dv)$, определяется следующим выражением:

$$dN = f(u)du, \tag{0.14}$$

а длины волн де-Бройля этих атомов равны $\lambda = 2\pi\hbar/mv$.

Это позволяет найти распределение атомов в пучке по дебройлевским длинам волн $F(\lambda)$, зная их распределение по скоростям $f(u)$. Число атомов в пучке, дебройлевские длины волн которых лежат в узком интервале $(\lambda,\ \lambda + d\lambda)$ соответствующем интервалу скоростей $(v,\ v + dv)$, равно

$$dN = F(\lambda)d\lambda. \tag{0.15}$$

Приравнивая одинаковые выражения (0.14) и (0.15), получаем

$$F(\lambda)d\lambda = f(u)du.$$

Отсюда

$$F(\lambda) = f(u)\frac{du}{d\lambda}. \tag{0.16}$$

Тогда $u = 2\pi\hbar/m\lambda v_{\text{вер}}$. Подставляя это значение в (0.16), получаем:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= A\left(\frac{2\pi\hbar}{m\vartheta_{\text{вер}}}\right)^3 \lambda^{-3} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2\pi\hbar}{m\vartheta_{\text{вер}}}\right)^2 \lambda^{-2}} \cdot \frac{2\pi\hbar}{m\vartheta_{\text{вер}}}\left(-\lambda^{-2}\right) = \\ &= B\lambda^{-5}\exp\left(-\frac{2\pi^2\hbar^2}{mkT\lambda^2}\right). \end{aligned} \tag{0.17}$$

где в коэффициент B включены все константы.

Наиболее вероятная длина волны де-Бройля в пучке атомов находится из условия максимума функции $F(\lambda)$:

$$dF/d\lambda = 0.$$

Отсюда, дифференцируя (0.17) получим,

$$-5\lambda^{-6} + \frac{4\pi^2\hbar^2}{mkT}\lambda^{-8} = 0.$$

В результате находим

$$\lambda_{\text{вер}} = 2\pi\hbar/\sqrt{5mkT}.$$

Подставляя в последнее выражение следующее численные значения величин

$$2\pi\hbar = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж·с}, \quad k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К},$$

$$m = 6.14 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \, T = 300 \text{ К},$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{вер}} &= \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{5 \cdot 6.64 \cdot 10^{-27} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2}} \text{ м} \\ &= 5.65 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 0.565 \text{ А}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

2.1 Вычислить дебройлевскую длину волны электрона и протона с кинетической энергией 1 кэВ. При каких значениях кинетической энергии длина волны будет равна 1 А?

2.2 При увеличении энергии электрона на 200 эВ его дебройлевская длина волны изменилась в 2 раза. Найти первоначальную длину волны электрона.

2.3 Найти добавочную энергию, которую нужно сообщить электрону с импульсом 14 кэВ/c (где c – скорость света), чтобы его длина волны де-Бройля стала равной 0.45 А.

2.4 Параллельный поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью шириной $= 0.1$ мм. Определить скорость этих электронов, если на экране, отстоящем от щели на расстоянии $L = 0.75$ м, ширина центрального максимума $\Delta x = 8$ мкм.

2.5 Определить кинетическую энергию электронов, падающих на диафрагму с двумя узкими щелями, если известно, что на экране, отстоящем от диафрагмы на расстоянии $L = 0.75$ м, расстояния между соседними максимумами Δx и между щелями d равны 7.5 и 25 мкм, соответственно.

2.6 Пучок электронов с кинетической энергией $T = 180$ эВ падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол $\alpha = 55^\circ$ с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения четвертого порядка. Найти межплоскостное расстояние, соответствующее этому отражению.

2.7 Пучок электронов с кинетической энергией $T = 10$ кэВ проходит через тонкую полиметаллическую фольгу и образует систему дифракционных колец на экране, отстоящем от фольги на расстоянии $L = 0.1$ м. Найти межплоскостное расстояние, для которого максимум отражения третьего порядка соответствует кольцу с радиусом $r = 1.6$ см.

2.8 Параллельный поток электронов, ускоренный разностью потенциалов $U = 25$ В, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми $d = 50$ мкм. Определить расстояние между соседними максимумами дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии $L = 1$ м от щелей.

2.9 Узкий пучок моноэнергетических электронов падает под углом скольжения $\theta = 30^\circ$ на естественную грань монокристалла алюминия. Расстояние между соседними кристаллическими плоскостями, параллельными этой грани, равно $d = 0.20$ нм. При некотором ускоряющем напряжении U_0 наблюдается максимум зеркального отражения. Найти U_0 , если известно, что следующий максимум отражения возникает при увеличении U_0 в $\eta = 2.25$ раза.

2.10 Выразить длину волны де-Бройля релятивистской частицы через ее кинетическую энергию.

2.11 В тепловом равновесии молекулы газа подчиняются распределению Максвелла по скоростям $f\left(v\right) = Cv^2e^{-mv^2/kT}$. Исходя из этого, найти а) распределение молекул по дебройлевским длинам волн, б) наиболее вероятную длину волны молекулы кислорода O_2 при $T = 300$ К.

2.12 Получить формулу для групповой скорости $v_{\text{гр}}$ при известном законе дисперсии для фазовой скорости

а) $u\left(k\right) = ak^{1/2}$,
б) $u\left(\lambda\right) = a\sqrt{1 + b^2\lambda^2}$,
в) $u\left(\omega\right) = \alpha\omega^2/\omega^2 - b^2$.

2.13 Показать, что групповая $v_{\text{гр}}$ и фазовая u скорости связаны соотношением $v_{\text{гр}} = u - \lambda\dfrac{du}{d\lambda}$.

2.14 Для нерелятивистских частиц с энергией $E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$ показать, что фазовая скорость равна $u(\lambda) = \frac{\pi h^2}{m\lambda} + \frac{mc^2}{2\pi h}\lambda$. Найти групповую скорость волнового пакета с $\lambda = \lambda_0$.

2.15 Показать, что для релятивистской частицы групповая скорость совпадает со скоростью ее движения.

2.16 Для случая, когда скорость движения свободного электрона в пространстве близка к скорости света c, найти зависимость его фазовой скорости u от длины волны λ, т.е. $u = u(\lambda)$.

2.17 В начальный момент времени $t = 0$ волновой пакет имел амплитуду $a(k) = \exp\left\{-(k - k_0)^2/\sigma^2\right\}$. Какой будет форма пакета в произвольной точке пространства при $t = 0$?

2.18 В начальный момент времени волновой пакет обладал формой гауссовой кривой с амплитудой $a(k) = \exp\left\{-\frac{(k-k_0)^2}{\sigma^2}\right\}$. Найти:
а) форму пакета в произвольный момент времени $t > 0$,
б) распределение вероятностей,
в) среднюю скорость частицы,
г) изменение ширины пакета Δ со временем.

2.19 Определить кинетическую энергию электрона, при которой дебройлевская длина волны совпадает с комптоновской.

§3. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

1. Соотношения неопределенностей для координаты и импульса

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar,$$

для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Пример 8. Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношения неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение: Для оценки линейных размеров атома достаточно ограничиться рассмотрением проекций физических величин на одну из декартовых осей, например, x. Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l, тогда электрон атома находится в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2$.

Соотношение неопределенностей можно записать в этом случае в виде $\frac{l}{2}\Delta p_x \geq \hbar$, откуда $l \geq \frac{2\hbar}{p_x}$.

Физически разумная неопределенность импульса Δp_x во всяком случае не должна превышать значения самого импульса p_x, т. е. $\Delta p_x \leq p_x$.

Проекция импульса p_x связана с кинетической энергией T соотношением $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 2mT$. Тогда можно записать следующее выражение:

$$p_x \leq \sqrt{2mT}.$$

Заменим Δp_x значением p_x (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенств к равенствам, получаем следующее оценочное соотно-

шение:
$$l_{\min} \approx \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}}.$$
Подставляя в последнее выражение численные значения входящих в него величин, находим
$$l_{\min} = \frac{2\cdot 1.054\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 0.91\cdot 10^{-30}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\cdot 10}} = 1.24\cdot 10^{-10}\ \text{м} = 124\ \text{пм}.$$

Пример 9. Атом испустил фотон $\lambda = 0.55$ мкм за время $\tau \sim 10^{-8}$ сек. Оценить величину относительной неопределенности его длины волны $\Delta\lambda/\lambda$.

Решение: Согласно соотношению неопределенностей
$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$
неопределенность энергии фотона ΔE определяется временем его излучения
$$\Delta E \geq \hbar/\tau.$$
Используя связь энергии фотона E с его длиной волны λ
$$E = 2\pi\hbar c/\lambda,$$
получим следующее выражение для ΔE:
$$\Delta = 2\pi\hbar c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+\Delta\lambda}\right) \approx 2\pi\hbar c\Delta\lambda/\lambda^2.$$
Отсюда становиться очевидным, что относительная неопределенность длины волны испускаемого излучения имеет вид
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{2\pi\hbar} \geq \frac{\hbar}{\tau}\frac{\lambda}{2\pi\hbar c} = \frac{\lambda}{2\pi c\tau}.$$
Подставляя числовые значения входящих величин, получаем следующий результат:
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{0.55\cdot 10^{-6}}{2\cdot 3.14\cdot 10^{-8}\cdot 3\cdot 10^{8}} \approx 3\cdot 10^{-8}.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3.1 Приняв, что минимальная энергия нуклона в ядре $E_{min} = 10$ МэВ, оценить размеры ядра.

3.2 Оценить неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая его размер порядка $0.5 \cdot 10^{-10}$ м.

3.3 Оценить для электрона, локализованного в области размером l:

а) минимально возможную кинетическую энергию, если $l = 10^{-10}$ м;

б) относительную неопределенность скорости $\Delta v/v$, если $T = 10$ эВ и $l = 1$ мкм.

3.4 Электрон с кинетической энергией $T = 15$ эВ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить относительную неточность, с которой может быть определена скорость электрона.

3.5 Если допустить, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волне, то какова будет относительная неточность $\Delta p/p$ импульса этой частицы (ограничиться линейным случаем)?

3.6 Используя соотношение неопределенностей, найти выражение, позволяющее оценить минимальную энергию E_{min} электрона, находящегося в одномерном потенциальном ящике шириной l.

3.7 Моноэнергетический пучок электронов $E = 10$ эВ падает на щель шириной a. Можно считать, что если электрон прошел через щель, то его координата известна с неточностью $\Delta x = a$. Оценить получаемую при этом относительную неточность в определении импульса $\Delta p/p$ электрона в двух случаях:
а) $a = 100$ A, б) $a = 1$ A.

3.8 Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределенность кинетической энергии порядка $1.6 \cdot$

10^{-4}. Оценить, во сколько раз неопределенность координаты больше ее дебройлевской длины волны.

3.9 Используя соотношение неопределенностей для энергии и времени, оценить уширение энергетического уровня в атоме водорода, находящегося: а) в основном состоянии, б) в возбужденном состоянии со временем жизни $\tau \sim 10^{-8}$ сек.

3.10 Оцените относительное уширение спектральной линии $\Delta\omega/\omega$, если известно время жизни атома в возбужденном состоянии ($\tau \sim 10^{-8}$ сек) и длина волны излучаемого фотона $\lambda = 0.6$ мкм.

3.11 Исходя из соотношения неопределенностей Гейзенберга, найти минимальную энергию линейного гармонического осциллятора.

3.12 Найти произведение $\Delta x^2 \Delta p_x^2$ для n – го состояния гармонического осциллятора.

3.13 С какой точностью можно определить координаты молекул азота при их тепловом движении в газе при комнатной температуре?

3.14 Газ, состоящий из молекул водорода, заключен в сферу с диаметром 1.5 см. Какова минимальная энергия молекул согласно соотношению неопределенностей?

3.15 Показать, что для частицы неопределенность местоположения которой $\Delta x = \lambda/2\pi$, где λ – ее дебройлевская длина волны, неопределенность скорости равна по порядку величины самой скорости частиц.

3.16 Возбужденный атом со средним временем жизни $\tau \sim 10^{-8}$ сек испустил фотон с длиной волны $\lambda = 5000$ A. Определить величину неопределенности, с которой можно установить координату фотона в направлении его движения, а также относительную неопределенность его длины волны.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§1. Корпускулярные свойства света

1.1 $v = 2\pi\hbar/m\lambda = 0.7 \cdot 10^7$ м/с.

1.2 2.06 эВ и 4.58 эВ.

1.3 10^6 м/с.

1.4 $\lambda_0 = \dfrac{2\pi\hbar c}{A} \cdot \dfrac{n-\eta}{n-1} = 0.26$ мкм.

1.5 $\phi = (\hbar\omega - A)/e = 8$ В.

1.6 $\lambda = [4\pi\Lambda/\eta - 1][\sin^2(\theta_2/2) - \eta\sin^2(\theta_1/2)] = 1.2$ пм.

1.7 1.85 МэВ.

1.8 $|p_{\text{э}}| = 2m\sqrt{\hbar\omega - E}, \quad |p_{\text{ф}}| = \hbar\omega/c.$

Согласно закону сохранения импульса

$|\mathrm{p}| = \frac{1}{2}\sqrt{(\hbar\omega)^2 + 2mc^2(\hbar\omega - E)} = 95.5$ кэВ$/c$, где c– скорость света.

1.9 $T = \hbar\omega' - E = pc/[1 - 2(pc/mc^2)\sin^2\theta/2] = 0.2$ МэВ.

1.11 Кинетическая энергия электрона определяется из выражения $T = E' - E = \hbar(\omega' - \omega)$, где ω' и ω связаны формулой Комптона. Очевидно, что T будет максимальна при $\sin^2\theta/2 = 1$, т. е. при $\Delta\lambda = \dfrac{4\pi\hbar}{mc}, \quad T_{\max} = \dfrac{8\pi^2 h^2}{m\lambda\lambda'}.$

Отсюда $\lambda = \Lambda(\sqrt{1 + 2mc^2/T_{\max}} - 1) = 0.02$ A.

1.12 $T = E\eta/(1+\eta) = 0.2$ МэВ.

§2. Волновые свойства частиц

2.1 0.39 А, 0.009 А, 150 эВ, 0.082 эВ.

2.2 1.5 А.

2.3 554 эВ.

2.4 $\upsilon = 4\pi\hbar L/ma\Delta x = 9 \cdot 10^5$ м/с.

2.5 $T = \dfrac{2}{m}\left(\dfrac{\pi\hbar L}{d\Delta x}\right)^2 = 24$ эВ.

2.6 $d = \pi k n/\sqrt{2mT}\cos\frac{\alpha}{2} = 2.06$ А.

2.7 $d = \pi\hbar n\sqrt{2mT}\sin\theta = 2.32$ А, $tg(2\theta) = r/L$.

2.8 $\Delta x = 2\pi\hbar L/d\sqrt{2meu} = 4.9 \cdot 10^{-6}$ м.

2.9 $u_0 = \pi^2\hbar^2/2m$.

2.10 $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2mT(1 + T/2mc^2)}$.

2.11 $\lambda_{\text{B}} = 2\pi\hbar/\sqrt{mkT}$.

2.12 а) $\upsilon_{\text{гр}} = \frac{3}{2}u$, б) $\upsilon_{\text{гр}} = a^2/u$, в) $\upsilon_{\text{гр}} = au/(2u - a)$.

2.14 $\upsilon_{\text{гр}} = 2\pi\hbar/m\lambda_0$.

2.15 $u = c\sqrt{1 + m^2c^2\lambda^2/4\hbar^2}$

2.17 $\Psi(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(k)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}dk = \sqrt{\pi}e^{ik_0x} \cdot \mathrm{e}^{-x^2\delta^2/4}$.

2.19 $E = (\sqrt{2} - 1)mc^2 = 0.211$ МэВ.

§3. Соотношения неопределеностей Гейзенберга

3.1 $L = 2\hbar/\sqrt{2mE_{\min}} = 2.9 \cdot 10^{-15}$ м.

3.2 $\Delta\upsilon \sim 10^6$ м/с.

3.3 $T_{\min} = \dfrac{p_{\min}^2}{2m} = \dfrac{2\hbar^2}{me^2} = 15$ эВ, $\dfrac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \dfrac{2\hbar}{l\sqrt{2mT}} = 1.2 \cdot 10^{-4}$.

3.4 $\Delta\upsilon/\upsilon = 0.01\%$.

3.5 16%.

3.6 $E_{\min} = 2\hbar^2/ml^2$.

3.7 0.62%, 62%.

3.8 $\Delta T = \dfrac{p\Delta p}{m}, \quad \dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{2\Delta p}{p}, \quad \dfrac{\Delta x}{\lambda} = \dfrac{\Delta x p}{2\pi\hbar} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{T}{\Delta T} \approx 2 \cdot 10^3$.

3.9 $E = 0.2$ мкэВ.

3.10 $3 \cdot 10^{-8}$.

3.11 $\Delta x \sim \hbar/\sqrt{3mkT}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Постоянная Планка: $\hbar = 1.057 \cdot 10^{-34}$ Дж·с,
Скорость света в вакууме: $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с,
Постоянная Бльцмана: $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К,
Заряд электрона: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл,
Масса электрона: $m_e = 0.91 \cdot 10^{-30}$ кг,
Масса протона: $m_p = 1.672 \cdot 10^{-27}$ кг,

1 эВ $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ Дж, 1A $= 10^{-10}$ м.

Десятичные приставки к названиям единиц:
М – мега (10^6),
к – кило (10^3),
м – мили (10^{-3}),
мк – микро (10^{-6}),
н – нано (10^{-9}),
п – пико (10^{-12}).

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А.С. *Квантовая механика: учеб. пособие..* – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

2. Браун А.Г., Левитина И.Г. *Элементы квантовой механики и физики атомного ядра.* – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015.

3. Кузнецов С.И., Лидер А.М. *Физика. Волновая оптика. Квантовая природа излучения. Элементы атомной и ядерной физики.* – М.: Вузов. учеб.: НИЦ ИНФРА-М, 2015.

4. Стрекалов Ю.А., Тенякова Н.А. *Физика твердого тела: Учебное пособие.* – М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013.

5. Сергеев Н.А., Рябушкин Д.С. *Основы квантовой теории ядерного магнитного резонанса.* –М.: Логос, 2013.

6. Канн К.Б. *Курс общей физики.* – М.: КУРС: НИЦ ИНФРА-М, 2014.

7. Кузнецов С.И. *Физика в вузе. Современный учебник по механике.* – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014.

8. Ильюшонок А.В., Астахов П.В., Гончаренко И.А. и др. *Физика: Учебное пособие.* – М.: Нов. знание, 2013.

9. Никеров В.А. *Физика. Современный курс.* – М: Дашков и К, 2012.

10. Кузнецов С.И. *Ускорители заряженных частиц. Курс физики с примерами решения задач.* – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011.