УДК 624.131.526+532.546

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА КОНСОЛИДАЦИИ С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ф.М. Кадыров

Аннотация

Решена плоская задача консолидации для треугольно-распределенных усилий. Была использована упрощенная модель консолидации, в которой принимаются следующие предположения: сжимаемостью зерен скелета и жидкости можно пренебречь; в момент приложения нагрузки во всем объеме грунта устанавливается начальное распределение давления жидкости; выполняется гипотеза Терцаги, согласно которой весь дальнейший процесс консолидации следует уравнению пьезопроводности для давления. Установлено, что в фиксированный момент времени давление изменяется с глубиной лишь в некоторой области под поверхностью, называемой областью влияния. Вне этой области давление остается равным своему начальному распределению. Рассчитана предельная осадка для случая бесконечно большого времени консолидации.

Ключевые слова: теория фильтрационной консолидации, треугольное распределение усилий, предельная осадка.

Введение

Теория консолидации получила свое развитие в работах зарубежных и отечественных ученых, среди которых К. Терцаги [1], Н.М. Герсеванов [2], В.А. Флорин [3, 4] и др. Общая математическая модель фильтрационной консолидации и методы её аналитического решения были предложены М. Био [5, 6]. Следует отметить оригинальный метод, предложенный Мак Нами и Гибсоном [7]. Тестовые неодномерные задачи консолидации были решены в работах [7–9]. Н.Н. Веригин [10] рассмотрел плоскую задачу консолидации под гибким, равномерно действующим фундаментом конечной ширины.

Математические модели, учитывающие разнообразные физические свойства процесса консолидации, а также прикладные методы расчета, основанные на применении метода конечных элементов, построены в [11]. Обзор работ, касающихся теории консолидации, дан в [12]. Основные результаты по теории фильтрационной консолидации, полученных в Казанском университете, представлены в [13].

При осадке оснований и фундаментов сжимаемость насыщенных грунтов обусловлена изменением пористости и связана с переупаковкой зерен скелета [14]. Поэтому сжимаемостью зерен скелета и жидкости можно пренебречь [15] (коэффициенты сжимаемости зерен скелета и воды соответственно равны: $\beta_1 = (0.2 \div 1.0)\cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, $\beta_2 = 4.5\cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$ [16]). В этом случае математическая модель фильтрационной консолидации насыщенной пористой среды, находящейся под воздействием нагрузки, включает в себя суммарное уравнение движения фаз, уравнения неразрывности (баланса масс), закон фильтрации, реологическое соотношение для пористого скелета, граничные и начальные условия.

Суммарное уравнение движения фаз имеет вид [15]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + [m\rho_1 + (1-m)\rho_2]F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где x_i – декартовы координаты, σ_{ij}^f – эффективные напряжения в скелете [14], p – давление жидкости, m – пористость скелета, ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкой и твердой фаз соответственно, F_i – плотность внешних массовых сил.

Суммарные напряжения в скелете состоят из напряжения в твердой фазе (эффективных напряжений) и давления жидкости:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^f - p\delta_{ij},$$

где δ_{ij} – дельта-символ Кронекера.

Исключим из уравнения движения фаз закон статики. Введем статические напряжения и напряжения от нагрузки, гидростатическое давление и напор жидкости, внешние массовые силы и архимедову силу. Тогда получим

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{f'}}{\partial x_j} - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \left[\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)(1 - m')\right] F_i + \\ + \frac{\partial \sigma_{ij}^{f''}}{\partial x_j} - \frac{\partial p''}{\partial x_i} - (\rho_2 - \rho_1) m'' F_i = 0,$$

где штрих относится к статической компоненте уравнения движения, два штриха – к компоненте процесса консолидации.

Учтем, что уравнение статики выполняется отдельно, и пренебрежем изменением пористости среды в процессе консолидации. В результате получим (штрихи опущены)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

Особенность модели состоит в том, что объемные деформации скелета однозначно определяются изменением объема пор за счет выдавливания оттуда жидкости. Тогда условие неразрывности процесса консолидации имеет вид [15]

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{\theta} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{q} = m(\mathbf{V} - \dot{\mathbf{U}})$ – скорость фильтрации, $\theta = \operatorname{div} \mathbf{U}$ – объемная деформация скелета, $\mathbf{V}$ и $\dot{\mathbf{U}}$ – среднефазовые макроскорости жидкой и твердой фаз соответственно, $\mathbf{U}$ – перемещения скелета. Точка сверху означает дифференцирование по времени.

Закон фильтрации примем в линейном виде

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu_0} \nabla p, \tag{3}$$

где k – проницаемость скелета, μ_0 – вязкость жидкости.

Реологическое соотношение для пористого скелета связано только с эффективными напряжениями (закон упругости) [17]:

$$\sigma_{ij}^f = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_{ij} = \left(\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i\right)/2$ – тензор макродеформаций, λ, μ – коэффициенты Ламе упругой пористой матрицы.

Модель (1)–(4) является замкнутой. В настоящей работе на основе данной модели и гипотезе Терцаги решена задача фильтрационной консолидации под действием треугольно-распределенных усилий.

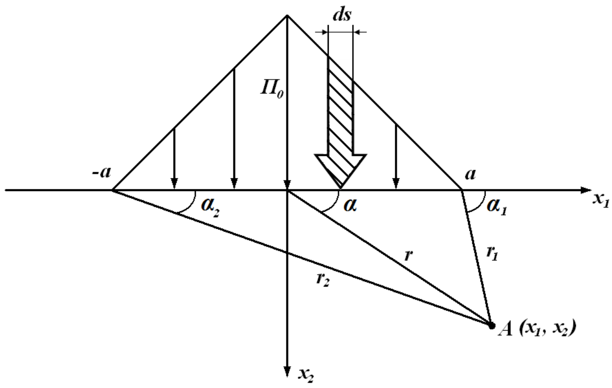

Рис. 1. Треугольное распределение усилий

Треугольное распределение усилий

Рассмотрим упругое ненагруженное полупространство $x_2 \geq 0$. При $t = 0$ эффективные напряжения и давление жидкости равны нулю. Приложение нагрузки на границе полупространства $x_2 \geq 0$ вызывает деформации самой границы. Таким образом, модель (1)–(4) становится, вообще говоря, нелинейной за счет появления свободной границы. Однако, предполагая, что деформации границы полупространства малы, можно использовать известный в теории возмущений метод сноса граничных условий с неизвестной свободной границы на известную невозмущенную границу полупространства. В результате такого пренебрежения малыми деформациями математическая модель остается линейной [18].

Пусть в момент времени $t = 0 + 0$ по подошве фундамента шириной $2a$ мгновенно прикладывается треугольная нагрузка $\Pi(x_1)$ [19] (см. рис. 1):

$$\Pi(x_1) = \frac{\Pi_0}{a}(a - |x_1|), \quad |x_1| \leq a. \tag{5}$$

Волны, создаваемые мгновенной нагрузкой, затухают по экспоненте. В теории консолидации в суммарном уравнении движения фаз инерционными членами пренебрегают.

Поставим специальную задачу по выводу начальных условий консолидации. В момент времени $t = 0+0$ приложенная к поверхности нагрузка целиком воспринимается жидкостью [2, 4]:

$$p^0(x_1, 0, 0 + 0) = \Pi(x_1).$$

Следовательно, на поверхности эффективные напряжения равны нулю: $\sigma_{ij}^{f0}(x_1, 0, 0 + 0) = 0$.

При $t = 0+0$ фильтрационная консолидация не успевает развиться, и объемные деформации скелета сохраняются [15]:

$$\theta^0(x_1, x_2, 0 + 0) = 0. \tag{6}$$

Тогда уравнения начального импульса запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{f0}}{\partial x_j} - \frac{\partial p^0}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma_{ij}^{f0} = 2\mu\varepsilon_{ij}^0, \quad \frac{\partial U_i^0}{\partial x_i} = 0. \tag{7}$$

Из уравнений начального импульса получим связь перемещений скелета и давления жидкости [20]:

$$\mu\Delta\mathbf{U}^0 - \nabla p^0 = 0.$$

Продифференцировав это уравнение и предполагая, что среда несжимаемая, то есть $\operatorname{div}\mathbf{U}^0 = 0$, получим

$$\Delta p^0 = 0, \tag{8}$$

то есть p^0 – гармоническая функция.

Следовательно, давление под поверхностью в момент времени $t = 0+0$ описывается решением задачи Дирихле [2]

$$p^0(x_1, x_2, 0+0) = -\frac{\Pi_0}{\pi a}\left[(x_1 - a)\alpha_1 + (x_1 + a)\alpha_2 - 2x_1\alpha + x_2 \ln\frac{r_1 r_2}{r^2}\right], \tag{9}$$

где

$$r_1^2 = (x_1 - a)^2 + x_2^2, \quad r_2^2 = (x_1 + a)^2 + x_2^2, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = x_2/(x_1 - a), \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = x_2/(x_1 + a), \quad \operatorname{tg}\alpha = x_2/x_1.$$

Поскольку скелет несжимаемый, должно выполняться условие [2–4]

$$\sigma_{11}^{f0}(x_1, x_2, 0+0) + \sigma_{22}^{f0}(x_1, x_2, 0+0) = 0. \tag{10}$$

Согласно (7) найдем эффективные напряжения при $t = 0+0$ [19]

$$\sigma_{11}^{f0} = x_2 \ln\frac{r_1 r_2}{r^2}, \quad \sigma_{22}^{f0} = -x_2 \ln\frac{r_1 r_2}{r^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\Pi_0 x_2}{\pi a}\,[\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha]\,. \tag{11}$$

Таким образом, условия (6) и (10) связывают решение задачи фильтрационной консолидации при $t = 0+0$ с решением задачи теории упругости с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.5$.

Рассмотрим процесс фильтрационной консолидации во времени. Подставив уравнение фильтрации (3) в уравнение неразрывности (2), получим

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{k}{\mu_0}\Delta p.$$

Далее, из реологического соотношения имеем

$$\frac{\partial(\sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f)}{\partial t} = 2\kappa\cdot\Delta p,$$

где $\kappa = (\lambda + \mu)k/\mu_0$.

Граничные условия для пористого скелета примем в виде

$$\begin{cases} \sigma_{22} = -\Pi(x_1), & \sigma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad |x_1| \le a, \\ \sigma_{22} = 0, & \sigma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad |x_1| > a. \end{cases} \tag{12}$$

Предположим, что приложение нагрузки на границе осуществляется по типу «высокопроницаемый поршень» [17]:

$$p(x_1, 0, t) = 0. \tag{13}$$

Гипотеза Терцаги предполагает, что тензор суммарных напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$ не зависит от времени [1]. Давление жидкости компенсируется эффективными напряжениями

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2) = \sigma_{ij}^f(x_1, x_2, t) - p(x_1, x_2, t)\delta_{ij},$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\delta_{ij} = 0.$$

Таким образом, давление уменьшается, а эффективные напряжения, наоборот, увеличиваются до тех пор, пока вся нагрузка не передастся на скелет.

По принятой гипотезе давление жидкости $p(x_1, x_2, t)$ описывается диффузионным уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \cdot \Delta p. \tag{14}$$

Представим давление в виде

$$p(x_1, x_2, t) = p^0(x_1, x_2, 0+0) - p^1(x_1, x_2, t).$$

Здесь функция $p^1 = p^1(x_1, x_2, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p^1}{\partial t} = \kappa \cdot \Delta p^1$$

с начальным условием

$$p^1(x_1, x_2, 0+0) = 0$$

и граничным условием

$$p^1(x_1, 0, t) = \Pi(x_1).$$

Треугольную нагрузку можно интерпретировать как совокупность сосредоточенных усилий, действующих на элемент поверхности шириной ds в точках нагружения, расположенных на расстоянии s от начала координат (см. рис. 1). Величина таких усилий составит $\Pi(s)ds$. Поэтому сначала найдем решение $p^1(x_1, x_2, t)$ для сосредоточенной силы с граничным условием

$$p^1(x_1, 0, t) = \Pi\delta(x_1),$$

где $\delta(x_1)$ – дельта-функция.

Решение краевой задачи для $p^1(x_1, x_2, t)$ известно [21]. Тогда решение $p(x_1, x_2, t)$ для сосредоточенной нагрузки примет вид

$$p(x_1, x_2, t) = \frac{\Pi x_2}{\pi(x_1^2 + x_2^2)}\left[1 - \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\kappa t}\right)\right].$$

Интегрируем решение для сосредоточенной нагрузки в интервале нагружения от $-a$ до $+a$, учитывая вид распределения (5), получим решение $p(x_1, x_2, t)$ для треугольной нагрузки

$$p(x_1, x_2, t) = \frac{\Pi_0}{\pi a}\int\limits_{-a}^{+a} \frac{(a - |\xi|)x_2}{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2}{4\kappa t}\right)\right] d\xi. \tag{15}$$

При $t \to \infty$ имеем, что $p(x_1, x_2, \infty) = 0$.

На рис. 2 представлено распределение давления жидкости в различные моменты времени. Распределение давления в начальный момент времени было получено в соответствии с уравнением (9). С течением времени давление рассчитывалось на основании уравнения (15). В фиксированный момент времени распределение давления по глубине отличается от начального распределения только внутри зоны влияния, размер которой растет как $\pi/\sqrt{t}$ [22]. Внутри зоны влияния отличия текущего значения давления от начального тем больше, чем меньше глубина.

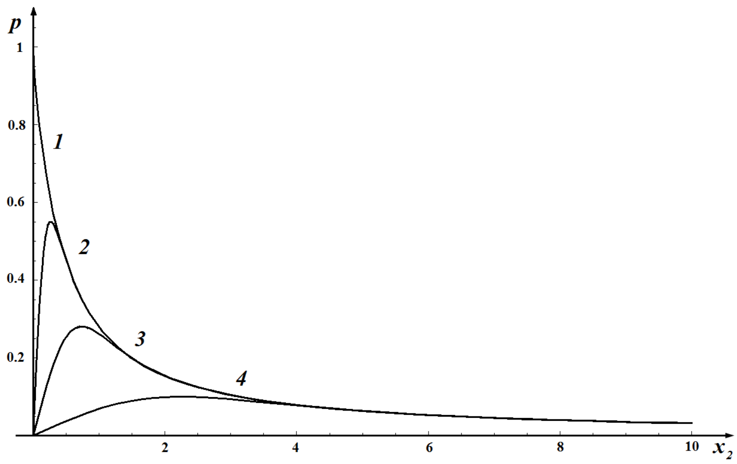

Рис. 2. Давление жидкости при $x_1 = 0$, $\Pi_0 = 1$, $\kappa = 1$, $a = 1$: 1) $t = 0$, 2) $t = 0.01$, 3) $t = 0.1$, 4) $t = 1$

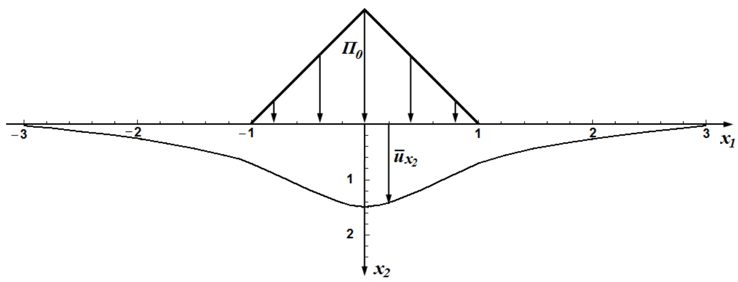

Рис. 3. Нормальные перемещения при $t \to \infty$: $\Pi_0 = 1$, $a = 1$, $\nu = 0.33$, $E = 1$

Вычислим предельную осадку под треугольной нагрузкой. Предельная осадка – это осадка при $t \to \infty$. Но при $t \to \infty$ имеем, что $p(x_1, x_2, \infty) = 0$. Тогда из уравнения суммарных напряжений следует

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2) = \sigma_{ij}^f(x_1, x_2).$$

В таком случае выражение для перемещений для всех точек поверхности под действием треугольной нагрузки при $t \to \infty$ примет вид [19]

$$\overline{u}_{x_2} = -\frac{1-\nu^2}{2\pi E}\frac{\Pi_0}{a}\times$$
$$\times\left[(x_1+a)^2\ln\left(\frac{x_1+a}{a}\right)^2 + (x_1-a)^2\ln\left(\frac{x_1-a}{a}\right)^2 - 2x_1^2\ln\left(\frac{x_1}{a}\right)^2\right] + C.$$

На рис. 3 показаны нормальные перемещения в безразмерных величинах, полученные в предположении, что $\overline{u}_{x_2} = 0$ при $x_1 = \pm 3$.

Заключение

Решена плоская задача консолидации для нагрузки, имеющей треугольную форму. В основу решения была положена упрощенная модель фильтрационной консолидации, в которой сжимаемостью зерен скелета и жидкости пренебрегают.

В таком случае объемные деформации скелета однозначно определяются изменением объема пор за счет выдавливания оттуда жидкости.

Предположение о мгновенном установлении стационарного распределения давления жидкости во всем объеме грунта в момент приложения нагрузки обосновано деформируемостью скелета пористой среды. При этом устанавливается и напряжение в скелете: при $t = 0 + 0$ сумма нормальных эффективных напряжений равна нулю, и в любой момент времени $t \geq 0$ распределение суммарных напряжений в грунте сохраняется (гипотеза Терцаги). Касательные напряжения в скелете возникают сразу после приложения нагрузки и остаются неизменными.

Выполнение гипотезы Терцаги при $t > 0$ сводит закон распределения давления жидкости к уравнению пьезопроводности. Для уравнений параболического типа, к которым относится и уравнение пьезопроводности, характерно сглаживание возмущений со временем и глубиной исследуемой области. Поэтому вводят понятие области влияния, в которой давление заметно отличается от своего первоначального значения. Размер области влияния пропорционален квадратному корню от времени.

Summary

F.M. Kadyrov. A Plane Consolidation Problem with Discontinuous Initial Conditions.

A plane consolidation problem for triangular load distribution was solved. A simplified consolidation model was used, which assumed the following: the compressibility of skeleton grains and fluid can be neglected; at the moment of load application, the initial distribution of fluid pressure is established throughout the soil; Terzaghi's hypothesis holds, according to which the whole further process of consolidation follows the equation of piezoconductivity for pressure. It was found that at a fixed moment of time, the pressure increases with the depth only in a certain domain above the surface, which is called the influence domain. Out of this domain, the pressure remains practically constant and the same as the initial distribution. The maximum soil settlement for an infinitely long consolidation time was calculated.

Keywords: theory of filtrational consolidation, triangular load distribution, maximum soil settlement.

Литература

1. *Терцаги К.* Теория механики грунтов. – М.: Госстройиздат, 1961. – 544 с.
2. *Герсеванов Н.М.* Собрание сочинений: в 2 т. – М.: Стройвоенмориздат, 1948.
3. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов: в 2 т. – М.: Госстройиздат, 1959–1961.
4. *Флорин В.А.* Теория уплотнения земляных масс. – М.: Госстройиздат, 1948. – 284 с.
5. *Bio M.A.* General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials // J. Appl. Mech. – 1956. – V. 23, No 1. – P. 91–96.
6. *Био М.А.* Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. – 1963. – № 6. – С. 103–134.
7. *Mc Namee G., Gibson R.E.* Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media // Quart. J. mech. Appl. Math. – 1960. – V. 13. – P. 98–111.
8. *Партон В.З.* Одна задача теории консолидации насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред // Инж. журн. – 1965. – Т. V, № 1. – С. 176–180.
9. *Партон В.З.* Осесимметричная задача теории консолидации насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 160, № 4. – С. 785–788.

10. *Веригин Н.Н.* Консолидация грунта под гибким фундаментом (плоская задача) // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1961. – № 5. – С. 20–23.

11. *Bear J., Corapcioglu M.Y.* Fundamentals of transport phenomena in porous media. – Dordrecht: Martinus Nijhoff Publ., 1984. – 1003 p.

12. *Shiffman R.L.* A bibliography of consolidation // Bear J., Corapcioglu M.Y. Fundamentals of transport phenomena in porous media. – Dordrecht: Martinus Nijhoff Publ., 1984. – P. 617–669.

13. *Костерин А.В.* Новые модели и обобщенные решения нелинейных задач механики насыщенных пористых сред // Матем. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 2. – С. 71–77.

14. *Цытович Н.А.* Механика грунтов. – М.: Высш. шк., 1983. – 287 с.

15. *Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 105 с.

16. *Котяхов Ф.И.* Физика нефтяных и газовых коллекторов. – М.: Недра, 1977. – 283 с.

17. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.

18. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. I. – М.: Наука, 1983. – 528 с.

19. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

20. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 875 с.

21. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

22. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 288 с.

Поступила в редакцию
14.03.13

Кадыров Фархад Маратович – аспирант кафедры аэрогидромеханики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *farhad1987@mail.ru*