

УДК 519.63

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РОССБИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Свидлов

Аннотация

В работе даны обобщенные постановки первой и второй начально-краевых задач для уравнения Россби, доказана однозначная разрешимость этих задач. Для первой начально-краевой задачи построено приближенное решение, исследована его сходимость к обобщенному, приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: уравнение Россби, уравнение соболевского типа, уравнение планетарных волн.

Введение

В геофизической гидродинамике изучаются планетарные волны, возникновение и распространение которых обуславливается вращением Земли. Эволюция этих волн описывается уравнением Россби [1, § 43]

$$\Delta u_t + u_{x_1} = f.$$

Решение u уравнения Россби является функцией тока течения, то есть физическую скорость $v = (v_1, v_2)$ можно определить следующим образом: $v_1 = u_{x_2}$, $v_2 = -u_{x_1}$. Кроме того, можно рассматривать и нелинейные варианты уравнения Россби, включив нелинейность в правую часть f подобно тому, как это сделано в работе [2].

Впервые планетарные волны были рассмотрены в работе К.-Г. Россби [3] в 1949 г. Этой тематике посвящен ряд работ (см. [4–8] и приведенную в них библиографию), в которых рассмотрены постановки некоторых задач для уравнения Россби.

В настоящей работе сформулирована обобщенная постановка первой начально-краевой задачи для уравнения Россби, построено приближенное решение, исследована его сходимость, приведены результаты численного эксперимента. Приведены также обобщенная постановка и теорема о разрешимости второй начально-краевой задачи.

1. Обобщенная постановка первой начально-краевой задачи

Будем считать, что область течения $Q \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, ∂Q – кусочно-гладкая поверхность, $u_0 \in H_0^1(Q)$, $T \in (0, +\infty]$, $f \in C([0, T]; L_2(Q))$.

Определение 1. Классическим решением первой начально-краевой задачи для уравнения Россби будем называть функцию $u \in C^1([0, +\infty); C^2(\bar{Q}))$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u_t + u_{x_1} = f \quad \text{при } 0 < t < T, \quad x \in Q, \quad (1)$$

начальному условию

$$u(0) = u_0 \quad (2)$$

и граничному

$$u|_{\partial Q} = 0. \quad (3)$$

Определение 2. Функцию $u \in C^1([0, T]; H_0^1(Q))$ будем называть обобщенным решением первой начально-краевой задачи для уравнения Россби, если она удовлетворяет равенству (2) и при любом $t \in (0, T)$ интегральному тождеству

$$\int_Q (\nabla u_t(x, t) \nabla h(x) - u_{x_1}(x, t) h(x)) dx = - \int_Q f(x, t) h(x) dx \quad (4)$$

для любой функции $h \in H_0^1(Q)$.

Возможны варианты обобщенных постановок первой начально-краевой задачи для уравнения Россби с более слабыми требованиями на гладкость [9].

Связь между обобщенным и классическим решениями устанавливается следующей леммой.

Лемма 1. Пусть $u_0 \in C^2(\bar{Q})$. Функция $u \in C^1([0, T]; C^2(\bar{Q}))$ является классическим решением тогда и только тогда, когда является обобщенным решением.

Доказательство. Для $u \in C^1([0, T]; C^2(\bar{Q}))$ при любых $h \in H_0^1(Q)$, $t \in (0, T)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \int_Q (\Delta u_t(x, t) h(x) + \nabla u_t(x, t) \nabla h(x)) dx &= \\ &= \int_Q \operatorname{div}(h(x) \nabla u_t(x, t)) dx = \\ &= \int_{\partial Q} h(x) \frac{\partial}{\partial \nu} u_t(x, t) dx = 0. \end{aligned}$$

Вычтем из равенства

$$\int_Q (\Delta u_t(x, t) h(x) + \nabla u_t(x, t) \nabla h(x)) dx = 0$$

интегральное тождество (4), получим равенство

$$\int_Q (\Delta u_t(x, t) h(x) + u_{x_1}(x, t) h(x)) dx = \int_Q f(x, t) h(x) dx, \quad (5)$$

эквивалентное интегральному тождеству (4). С другой стороны, в силу произвольности $h \in H_0^1(Q)$ и $t \in (0, T)$ равенство (5) эквивалентно уравнению (1).

Заметим, что для функции u принадлежность пространству $C^1([0, T]; H_0^1(Q))$ и выполнение условия (3) равносильны; это завершает доказательство леммы. \square

Докажем эквивалентность обобщенной постановки первой начально-краевой задачи для уравнения Россби задаче Коши (6) для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве $H_0^1(Q)$.

Лемма 2. Функция $u \in C^1([0, T]; H_0^1(Q))$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} u_t(t) = \Delta^{-1} \left(f(t) - \frac{\partial}{\partial x_1} u(t) \right) & \text{при всех } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (6)$$

тогда и только тогда, когда является обобщенным решением задачи (1)–(3).

Здесь $\Delta^{-1} : L_2(Q) \rightarrow H_0^1(Q)$ – оператор, который ставит в соответствие правой части ψ обобщенное решение φ задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \psi \text{ в } Q, \\ \varphi|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

то есть $\Delta^{-1}\varphi = \psi$ тогда и только тогда, когда для любого $h \in H_0^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q \nabla \varphi(x) \nabla h(x) dx = - \int_Q \psi(x) h(x) dx. \quad (8)$$

Известно, что оператор Δ^{-1} является непрерывным [10].

Доказательство леммы 2 основывается на сопоставлении тождеств (8) и (4).

Из леммы 2 следует

Теорема 1. Для любых $u_0 \in H_0^1(Q)$ и $f \in C([0, T]; L_2(Q))$ обобщенное решение задачи (1)–(3) существует и единственно. При этом оно имеет вид

$$u(t) = \exp \left(-t \Delta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left(u_0 + \int_0^t \exp \left(\tau \Delta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Delta^{-1} f(\tau) d\tau \right). \quad (9)$$

Доказательство. Задача Коши (6) имеет единственное решение для любых $u_0 \in H_0^1(Q)$ и $f \in C([0, T]; L_2(Q))$, это решение имеет вид (9) [11, гл. VII, § 31]. Следовательно, по лемме 2 существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3), при этом оно имеет вид (9). Доказательство теоремы завершено. \square

2. Приближенное решение

Для простоты изложения далее будем полагать $f = 0$, $T < +\infty$. Рассмотрим оператор $A : H_0^1(Q) \rightarrow H_0^1(Q)$, определенный равенством $A = -\Delta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}$. Этот оператор является непрерывным. Заметим, что при $f = 0$ из равенства (9) следует равенство

$$u(t) = \exp(tA) u_0. \quad (10)$$

Определение 3. Пусть $p, N \in \mathbb{N}$, $\tau = T/N$, $\varepsilon > 0$. Назовем (p, τ, ε) -приближенным решением первой начально-краевой задачи последовательность функций $\{u^i\}_{i=0}^N$, $u^i \in H^1(Q)$, определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0, \\ u^i &= v_0^i + \tau v_1^i + \frac{\tau^2}{2!} v_2^i + \cdots + \frac{\tau^p}{p!} v_p^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где $v_0^i = u^{i-1}$, функции $v_k^i \in H^1(Q)$ для всех $k = 1, 2, \dots, p$ удовлетворяют неравенству

$$\|v_k^i - A v_{k-1}^i\|_{H_0^1(Q)} < \varepsilon.$$

Сходимость приближенного решения к обобщенному решению задачи (1)–(3) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть u – обобщенное решение первой начально-краевой задачи для уравнения Россби, а $\{u^i\}_{i=1}^N$ – ее (p, τ, ε) -приближенное решение. Тогда для всех $i = 1, 2, \dots, N$ имеют место неравенства

$$\|u^i - u(i\tau)\|_{H_0^1(Q)} \leq \frac{1}{P(\tau)} (\varepsilon S(\tau) + K\tau^p) ((1 + \tau P(\tau))^i - 1), \quad (11)$$

где константа K и полиномы $P(\tau)$, $S(\tau)$ определены следующим образом:

$$K = \|A\|^{p+1} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^1(Q)} \exp(\|A\|T), \quad (12)$$

$$P(\tau) = \sum_{k=0}^{p-1} \|A\|^k \frac{\tau^k}{k!}, \quad S(\tau) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{j=0}^k \|A\|^j \right) \frac{\tau^k}{(k+1)!}.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $b > 0$, $m > 0$, $\{a_i\}_{i=0}^N$ – множество неотрицательных действительных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

$$a_0 = 0,$$

$$a_i \leq (1 + b)a_{i-1} + m, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда для $i = 0, 1, \dots, N$ имеет место неравенство

$$a_i \leq \frac{m}{b} ((1 + b)^i - 1). \quad (13)$$

Доказательство. Доказательство будем вести по индукции. Очевидно, что для $i = 0$ неравенство (13) выполняется. Предположим, что оно выполняется для некоторого $i - 1$. Тогда

$$a_i \leq (1 + b) \frac{m}{b} ((1 + b)^{i-1} - 1) + m = \frac{m}{b} ((1 + b)^i - 1),$$

то есть неравенство (13) имеет место и для i . Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 2. Используя формулу (10) и определение (p, τ, ε) -приближенного решения, представим разность $u^i - u(i\tau)$ в виде

$$u^i - u(i\tau) = \sum_{k=0}^p \frac{\tau^k}{k!} (v_k^i - A^k u((i-1)\tau)) - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} A^k u((i-1)\tau).$$

Теперь, пользуясь неравенством треугольника, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \|u^i - u(i\tau)\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^p \frac{\tau^k}{k!} \|v_k^i - A^k u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} + \left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} A^k u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)}. \quad (14) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части неравенства (14) оценим следующим образом:

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} A^k u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq K\tau^{p+1},$$

где K определено формулой (12). Для оценки остальных слагаемых в правой части неравенства (14) докажем справедливость неравенства

$$\|v_k^i - A^k u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{k-1} \|A\|^j + k \|A\|^k \|u^{i-1} - u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} \quad (15)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, p$. При $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|v_1^i - Au((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} &\leq \\ &\leq \|v_1^i - Au^{i-1}\|_{H_0^1(Q)} + \|Au^{i-1} - Au((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ &\leq \varepsilon + \|A\| \|u^{i-1} - u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)}, \end{aligned}$$

то есть неравенство (15) выполняется. Предположим, что для некоторого $k < p$ неравенство (15) выполнено, тогда оно выполнено и для $k+1$, так как

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}^i - A^{k+1}u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} &\leq \\ &\leq \|v_{k+1}^i - Av_k^i\|_{H_0^1(Q)} + \|Av_k^i - A^{k+1}u^{i-1}\|_{H_0^1(Q)} + \\ &\quad + \|A^{k+1}u^{i-1} - A^{k+1}u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ &\leq \varepsilon + \|A\| \|v_k^i - A^k u^{i-1}\|_{H_0^1(Q)} + \|A\|^{k+1} \|u^{i-1} - u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ &\leq \varepsilon + \|A\| \left(\varepsilon \sum_{j=0}^{k-1} \|A\|^j + k \|A\|^k \|u^{i-1} - u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} \right) + \\ &\quad + \|A\|^{k+1} \|u^{i-1} - u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} = \\ &= \varepsilon \sum_{j=0}^k \|A\|^j + (k+1) \|A\|^{k+1} \|u^{i-1} - u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)}. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (15) имеет место для всех $k = \overline{1, 2, \dots, p}$.

С помощью неравенства (15) преобразуем неравенство (14) к виду

$$\|u^i - u(i\tau)\|_{H_0^1(Q)} \leq (1 + \tau P(\tau)) \|u^{i-1} - u((i-1)\tau)\|_{H_0^1(Q)} + \varepsilon \tau S(\tau) + K\tau^{p+1}. \quad (16)$$

Применяя лемму 3, из неравенства (16) получим оценку (11). Доказательство теоремы завершено. \square

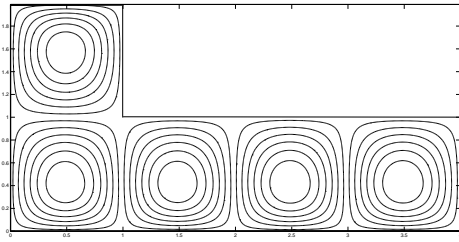
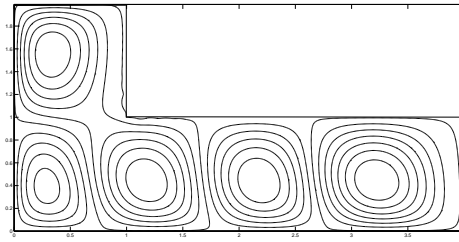
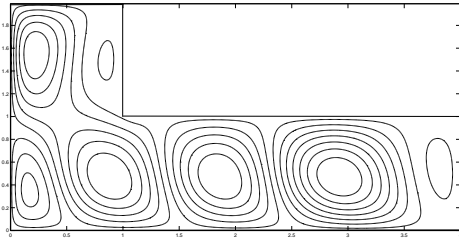
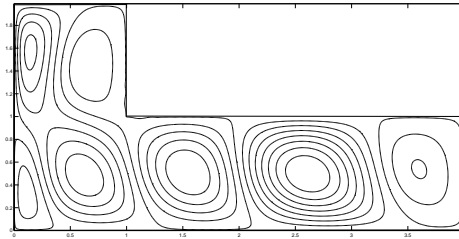
Следствие из теоремы 2. *Обозначим*

$$C_1 = \frac{\sup_{\tau \in [0, T]} S(\tau)}{\inf_{\tau \in [0, T]} P(\tau)}, \quad C_2 = \frac{K}{\inf_{\tau \in [0, T]} P(\tau)}, \quad C_3 = \sup_{\tau \in [0, T]} P(\tau).$$

Тогда из неравенства (11) следует выполнение неравенства

$$\|u^i - u(i\tau)\|_{H_0^1(Q)} \leq (C_1 \varepsilon + C_2 \tau^p) \exp(C_3 T) \quad (17)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Рис. 1. $t = 0$ Рис. 2. $t = 6$ Рис. 3. $t = 12$ Рис. 4. $t = 18$

3. Результаты численного эксперимента

Наибольшую сложность при построении приближенного решения, особенно в областях сложной конфигурации, представляет нахождение функций v_k^i , которое сводится к численному решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона (7). Для этого использовался метод точечных потенциалов [12, 13].

Опишем результаты двух численных экспериментов. В первом (тестовом) случае задача решалась в квадрате $Q = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$,

$$u_0(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(x_1 \pi \sqrt{2}),$$

$$u(x, t) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos\left(x_1 \pi \sqrt{2} + \frac{t \sqrt{2}}{4\pi}\right).$$

Сравнение аналитического решения с численным решением подтвердило теоретические результаты о сходимости, изложенные в п. 3.

Во втором случае задача решалась в Г-образной области,

$$u_0(x) = x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2) \sin(\pi x_1).$$

На рис. 1–4 приведены результаты расчетов (линии уровня функции u) при $t = 0, 6, 12$ и 18 соответственно. Наблюдалось смещение вихревых пятен в западном направлении, а также образование и исчезновение вихревых пятен на восточной и западной границах соответственно.

4. Вторая начально-краевая задача

Обозначим $L_2^c(Q) = \{v \in L_2(Q) : (v, 1)_{L_2(Q)} = 0\}$, $H_c^1(Q) = L_2^c(Q) \cap H^1(Q)$.

Определение 4. Обобщенным решением второй начально-краевой задачи

$$\Delta u_t + u_{x_1} = 0, \quad T > t > 0, \quad (18)$$

$$u(0) = u_0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q} = 0 \quad (20)$$

будем называть функцию $u \in C^1([0, T]; H_c^1(Q))$, удовлетворяющую равенству (19) и для любого $t \in (0, T)$ интегральному тождеству

$$\int_Q (\nabla u_t(x, t) \nabla h(x) - u_{x_1}(x, t) h(x)) dx = 0$$

при любой функции $h \in H^1(Q)$.

Разрешимость обобщенной постановки второй начально-краевой задачи для уравнения Россби устанавливается следующей теоремой (см. [15]).

Теорема 3. Пусть в области Q выполняется неравенство Пуанкаре [14, гл. 3, § 6]. Обобщенное решение задачи (18)–(20) существует тогда и только тогда, когда $u_0 \in H_c^1(Q)$ такова, что $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_0, h\right)_{L_2(Q)} = 0$ для любой $h \in L_2(Q)$, зависящей только от переменной x_1 . Причем решение единственно и имеет вид

$$u(t) = \exp\left(-t \Delta_2^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u_0. \quad (21)$$

Здесь $\Delta_2^{-1} : L_2^c(Q) \rightarrow H_c^1(Q)$ – оператор, который ставит в соответствие правой части ψ обобщенное решение φ задачи Неймана для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \psi & \text{в } Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q} = 0. \end{cases}$$

Автор выражает глубокую признательность А.Э. Бирюку, М.И. Дроботенко и В.В. Кожевникову за плодотворные обсуждения результатов работы.

Summary

A.A. Svidlov. Solving the Linear Rossby Equation in a Finite Domain.

We state a generalized formulation for the first and the second initial-boundary value problems for the Rossby equation and prove the unique solvability of these problems. For the first initial-boundary value problem, the approximate solution is constructed. The convergence rate to the generalized solution is studied. The results of the numerical experiments are discussed.

Keywords: Rossby equation, Sobolev-type equations, planetary wave equation.

Литература

1. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
2. *Biryuk A.* Lower bounds for derivatives of solutions for nonlinear Schrödinger equations // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. – 2009. – V. 139, No 2. – P. 237–251.
3. *Rossby C.-G.* On the dispersion of planetary waves in a barotropic atmosphere // Tellus. – 1949. – V. 1, No 1. – P. 54–58.

4. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О поведении при $t \rightarrow \infty$ решений некоторых задач гидродинамики // Докл. РАН. – 1985. – Т. 280, № 5. – С. 1072–1075.
5. Тикиляйнен А.А. Об одной задаче, связанной с теорией планетарных волн // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1988. – Т. 28, № 4. – С. 534–548.
6. Огородников И.Е. Стабилизация решения уравнения планетарных волн в неограниченных по пространственным переменным областях: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – М., 2000. – 101 с.
7. Ильин А.М. О поведении решения одной краевой задачи при $t \rightarrow \infty$ // Матем. сборник. – 1972. – Т. 87, № 4. – С. 529–553.
8. Лежнёв В.Г. Асимптотические задачи линейной гидродинамики. – Краснодар: Изд-во КубГУ, 1993. – 92 с.
9. Свидлов А.А., Бирюк А.Э., Дроботенко М.И. Негладкое решение уравнения Россби // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. – 2013. – № 2. – С. 89–94.
10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 401 с.
11. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
12. Купрадзе В. Д. О приближенном решении задач математической физики // Усп. матем. наук. – 1967. – Т. XXII, № 2. – С. 59–107.
13. Дроботенко М.И., Игнатъев Д.В. Метод точечных потенциалов для уравнения Лапласа // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. – 2007. – № 1. – С. 5–9.
14. Михлин С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с.
15. Свидлов А.А. О второй начально-краевой задаче для уравнения Россби в ограниченной области // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. – 2009. – № 3. – С. 80–84.

Поступила в редакцию
08.04.13

Свидлов Александр Анатольевич – преподаватель кафедры теории функций, Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия.

E-mail: svidlov@mail.ru