УДК 519.68

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ПОЛОГОЙ НЕЗАКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ

М.М. Карчевский

Аннотация

Получены достаточные условия разрешимости вариационной задачи о равновесии пологой оболочки со свободными краями в рамках геометрически и физически нелинейной модели среднего изгиба.

Ключевые слова: пологая оболочка, геометрически нелинейная теория среднего изгиба, вариационная задача, условия разрешимости.

Введение

Вопросы разрешимости краевых задач геометрически нелинейной теории тонких оболочек издавна привлекают внимание ученых. Довольно подробный обзор работ этого направления содержится в [1]. Отметим также работу [2], в которой исследование разрешимости геометрически нелинейной задачи равновесии пологой оболочки выполнено на основе теории псевдомонотонных операторов, работу [3], в которой изучалась вариационная постановка задачи о равновесии пологой оболочки в рамках геометрически и физически нелинейной модели, работу [4], в которой целый ряд геометрически нелинейных моделей непологих оболочек изучается с единых позиций на основе теоремы о неявной функции, а также работы [5–7], в которых различные геометрически нелинейные модели пологих оболочек исследованы на основе интегральных представлений теории аналитических функций.

Во всех указанных выше работах предполагалось то или иное закрепление границы оболочки. В настоящей заметке, примыкающей к [3], изучается задача о равновесии свободной пологой оболочки. При этом возникают определенные затруднения уже на уровне корректной постановки задачи. На протяжении всей работы материал оболочки предполагается, вообще говоря, физически нелинейным, деформации срединной поверхности описываются нелинейными соотношениями теории среднего изгиба (см. [1, 8]). Показано, что соответствующая вариационная задача имеет решение в классе перемещений, исключающих бесконечно малые жесткие движения оболочки, если величины внешних сил и моментов согласованы с порядком роста плотности потенциальной энергии деформации оболочки.

1. Постановка задачи

Задача о равновесии пологой незакрепленной оболочки связана с задачей минимизации функционала (потенциальной энергии)

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\varepsilon, \varkappa)\, dx - \int\limits_{\Omega} f \cdot u\, dx - \int\limits_{\Gamma} g \cdot u\, dx - \int\limits_{\Gamma} h \frac{\partial u_3}{\partial \nu}\, dx\,. \tag{1}$$

Здесь $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область, отождествляемая с срединной поверхностью оболочки, Γ – граница области Ω, ν – внешняя единичная нормаль к Γ; точкой, как обычно, будем обозначать скалярное произведение в арифметическом пространстве вещественных векторов. Срединную поверхность оболочки будем относить к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3, ось x_3 направлена по нормали к плоскости, содержащей Ω, u_1, u_2, u_3 – смещения точек срединной поверхности в направлении соответствующих координатных осей, u_3 – прогиб, f, g, h – заданные функции, характеризующие плотности внешних сил и моментов, действующих на оболочку. Тангенциальная и изгибная деформации оболочки определяются следующими величинами:

$$\varepsilon_{ij}(u) = e_{ij}(u) + k_{ij}u_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\frac{\partial u_3}{\partial x_j}, \quad e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2, \tag{2}$$

$$\varkappa_{ij}(u_3) = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i,j = 1,2, \tag{3}$$

где k_{ij} – начальные кривизны оболочки. Вещественная функция $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in R^6$ – плотность потенциальной энергии деформации срединной поверхности оболочки. В простейшем случае, когда материал оболочки подчиняется закону Гука,

$$\varphi(\varepsilon, \varkappa) = \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} b_{ijkl}\varkappa_{ij}, \varkappa_{kl}, \tag{4}$$

где квадратичные формы с коэффициентами a_{ijkl}, b_{ijkl} положительно определены. Множество всех векторов $\mathcal{R}$ с компонентами вида

$$r_1 = a_1 - \delta x_2, \quad r_2 = a_2 + \delta x_1, \quad r_3 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

где a_1, a_2, δ, b_0, b_1, b_2 – произвольные постоянные, есть линейное пространство бесконечно малых жестких смещений оболочки. При этом a_1, a_2 характеризуют сдвиг параллельно плоскости x_1, x_2, δ – угол поворота относительно оси x_3, b_0 – сдвиг в направлении оси x_3, b_1, b_2 – углы поворота относительно осей x_2, x_1 соответственно. Нетрудно убедиться (см., например, [9]), что пространство $\mathcal{R}$ описывает общее решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$e_{ij}(u) = 0, \quad \varkappa_{ij}(u) = 0, \quad i,j = 1,2. \tag{6}$$

Будем полагать далее, что действующие на оболочку внешние силы и моменты самоуравновешиваются, то есть для любого $r \in \mathcal{R}$

$$\int\limits_{\Omega} f \cdot r \, dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot r \, dx + \int\limits_{\Gamma} h \frac{\partial r_3}{\partial \nu} \, dx = 0. \tag{7}$$

Следует иметь в виду, что, как и, по-видимому, для всех известных геометрически нелинейных моделей оболочек, функционал F чувствителен к бесконечно малым жестким смещениям, а именно $F(r)$, вообще говоря, не равно нулю при $r \in \mathcal{R}$. Тем не менее если априори наложить ограничения на величину жестких смещений оболочки, то можно корректным образом поставить задачу о минимизации энергетического функционала F.

Будем предполагать далее, что функция $\varphi : R^6 \to R$ непрерывна, выпукла и существуют такие постоянные c_0, $c_1 > 0$ и $p \in (1, \infty)$ что

$$c_0|\zeta|^p \le \varphi(\zeta) \le c_1|\zeta|^p \quad \forall\, \zeta \in R^6. \tag{8}$$

Отметим, что применительно к функции φ, определяемой соотношением (4), последнее требование при $p=2$ означает, что соответствующие квадратичные формы равномерно положительно определены и ограничены.

Положим $V = W_p^1(\Omega)\times W_p^1(\Omega)\times W_p^2(\Omega)$, где $W_p^s(\Omega)$ – пространство Соболева,

$$V_\perp = \left\{ v\in V : \int\limits_\Omega v\cdot r\,dx = 0 \ \ \forall r\in\mathcal{R}\right\}.$$

По определению для $u\in V$ полагаем $\|u\|^p = \|u_1\|^p_{W_p^1(\Omega)} + \|u_2\|^p_{W_p^1(\Omega)} + \|u_3\|^p_{W_p^2(\Omega)}$. Нетрудно убедиться, что при любом $p\in(1,\infty)$ линеал $V_\perp$ – замкнутое подпространство пространства V, причем $V_\perp\cap\mathcal{R}=\{0\}$.

В дальнейшем всегда будем считать, что $f\in(L_q(\Omega))^3$, $g\in(L_q(\Gamma))^3$, $h\in L_q(\Gamma)$, где $q=p/(p-1)$, $k_{ij}\in L_{p_1}(\Omega)$, $p_1>p$, $i,j=1,2$, Γ – кривая класса C^1.

Сформулируем теперь задачу о равновесии свободной оболочки как задачу об отыскании функции $u\in V_\perp$ такой, что

$$F(u) = \inf_{v\in V_\perp} F(v). \tag{9}$$

Замечание. Поскольку минимум функционала F разыскивается на $V_\perp$, то условие (7) можно всегда считать выполненным. Действительно, с одной стороны, из определения $V_\perp$ вытекает, что $\int\limits_\Omega (f+\widetilde{r})\cdot u\,dx = \int\limits_\Omega f\cdot u\,dx$ для любых $\widetilde{r}\in\mathcal{R}$, $u\in V_\perp$, с другой стороны, вследствие конечномерности $\mathcal{R}$ функцию $\widetilde{r}$ можно выбрать так, что для функций $f+\widetilde{r}$, g, h равенство (7) будет выполнено для любого $r\in\mathcal{R}$.

2. Исследование разрешимости задачи (9)

Как и в работе [3], будем опираться на обобщенную теорему Вейерштрасса (см., например, [10, с. 114]). При этом нам придется установить условия, при которых функционал F слабо полунепрерывен и коэрцитивен на пространстве $V_\perp$.

Точно так же, как и в работе [3], доказывается, что при сформулированных выше условиях относительно компонент внешней нагрузки, плотности потенциальной энергии деформации и начальных кривизн оболочки функционал F слабо полунепрерывен снизу на пространстве $V_\perp$.

При исследовании коэрцитивности функционала F будем использовать следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Функционал*

$$G(u) = \left(\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^2 \left(|e_{ij}(u)|^p + |\varkappa_{ij}(u)|^p\right)dx\right)^{1/p}$$

определяет норму на пространстве $V_\perp$, эквивалентную норме пространства V.

Справедливость этого утверждения сразу же следует из неравенства Корна

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^2 \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^p dx \le C_{K,\Omega}\sum_{i,j=1}^2 |e_{ij}(u)|^p\,dx \quad \forall\,(u_1,u_2,0)\in V_\perp \tag{10}$$

(см. [11, § 2, теорема 4]), неравенства Пуанкаре[1]

$$\int\limits_\Omega |u|^p \le C_\Omega \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \left| \int\limits_\Omega u \, dx \right|^p \right) \quad \forall\, u \in W_p^1(\Omega) \tag{11}$$

и теоремы об эквивалентных нормировках пространств Соболева (см., например, [12, с. 444]). При этом надо учесть, что если функция $(0, 0, u_3)$ принадлежит $V_\perp$ и $\int\limits_\Omega \sum\limits_{i,j=1}^{2} \varkappa_{ij}^p(u))\, dx = 0$, то $u_3 = 0$.

Лемма 2. *Пусть* $F_0(u) = \int\limits_\Omega \varphi(\varepsilon(u), \varkappa(u))\, dx$. *Тогда*

$$F_0(u) \ge c_0 \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} (|\varepsilon_{ij}(u)|^p + |\varkappa_{ij}(u)|^p)\, dx \quad \forall\, u \in V, \tag{12}$$

существует положительная постоянная c такая, что

$$\|u_1\|^p_{W_p^1(\Omega)} + \|u_2\|^p_{W_p^1(\Omega)} \le c(F_0(u) + F_0^2(u)) \quad \forall\, u \in V_\perp. \tag{13}$$

Доказательство. Оценка (12) – непосредственное следствие условия (8). Оценка (13) с использованием неравенств (10), (11) получается точно так же, как и неравенство (14) из работы [3]. □

Теорема 1. *Задача* (9) *имеет решение при выполнении одного из следующих условий:*

1) $p > 2$;

2) $1 < p < 2$, f_1, f_2, g_1, $g_2 = 0$;

3) $p = 2$, f_1, f_2, g_1, g_2 *достаточно малы в смысле норм* $L_q(\Omega)$, $L_q(\Gamma)$ *соответственно.*

Доказательство. Проводимые ниже рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2 из [3] и сводятся к выяснению условий, при которых функционал F коэрцитивен на пространстве $V_\perp$. Заметим прежде всего, что вследствие (12), (13)

$$\lim_{u \in V_\perp,\, \|u\| \to \infty} F_0(u) = +\infty. \tag{14}$$

Используя далее хорошо известные теоремы вложения и неравенства (12), (13), получим для любого $u \in V_\perp$

$$F(u) \ge F_0(u) - c_{1,\Omega} \sum_{i=1}^{2} (\|f_i\|_{L_q(\Omega)} + \|g_i\|_{L_q(\Gamma)})(F_0(u) + F_0^2(u))^{1/p} - \\ - c_{2,\Omega}(\|f_3\|_{L_q(\Omega)} + \|h\|_{L_q(\Gamma)})(F_0(u))^{1/p},$$

где $c_{1,\Omega}$, $c_{2,\Omega}$ – постоянные, зависящие лишь от постоянных в соответствующих теремах вложения. Вследствие (14) можно считать, что $F_0(u) > 1$ и тогда

$$F(u) \ge F_0(u) - c_{1,\Omega} \sum_{i=1}^{2} (\|f_i\|_{L_q(\Omega)} + \|g_i\|_{L_q(\Gamma)})(F_0(u))^{2/p} - \\ - c_{2,\Omega}\, (\|f_3\|_{L_q(\Omega)} + \|h\|_{L_q(\Gamma)})(F_0(u))^{1/p}.$$

[1]Постоянные $C_{K,\Omega}$, C_Ω в (10), (11) зависят только от Ω.

Пусть $p > 2$. Тогда

$$F(u) \geq F_0(u)(1 - c_{1,\Omega} \sum_{i=1}^{2} (\|f_i\|_{L_q(\Omega)} + \|g_i\|_{L_q(\Gamma)}) F_0(u)^{2/p-1} - \\ - c_{2,\Omega} \, (\|f_3\|_{L_q(\Omega)} + \|h\|_{L_q(\Gamma)})(F_0(u))^{1/p-1}) \to \infty$$

при $\|u\| \to \infty$ и при любых внешних нагрузках. Если выполнены условия 2), то из этих же оценок получаем, что $F(u) \to \infty$ при любых f_3, h. Наконец, если $p = 2$, то

$$F(u) \geq F_0(u)\Big(1 - c_{1,\Omega} \sum_{i=1}^{2} (\|f_i\|_{L_q(\Omega)} + \|g_i\|_{L_q(\Gamma)})\Big) - c_{2,\Omega}(\|f_3\|_{L_q(\Omega)} + \|h\|_{L_q(\Gamma)}) F_0(u)^{1/2},$$

откуда вытекает, что функционал F коэрцитивен, если

$$\sum_{i=1}^{2} (\|f_i\|_{L_q(\Omega)} + \|g_i\|_{L_q(\Gamma)}) < 1/c_{1,\Omega}.$$

□

Автор благодарен С.Н. Тимергалиеву, привлекшему наше внимание к задаче, рассмотренной в настоящей статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00667, 12-01-00955, 12-01-97026).

Summary

M.M. Karchevsky. Investigation of Solvability of the Nonlinear Equilibrium Problem of a Shallow Unfixed Shell.

We deduce sufficient conditions for the solvability of the variational equilibrium problem of a shallow shell with free edges within the geometrically and physically nonlinear model of middle bending.

Keywords: shallow shell, geometrically nonlinear theory of middle bending, variational problem, solvability conditions.

Литература

1. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – М.: Наука, 1989. – 373 с.
2. *Bernadou M., Oden J.T.* An existence theorem for a class of nonlinear shallow shell problems // J. Math. Pures Appl. – 1981. – V. 60, No 3. – P. 285–308.
3. *Карчевский М.М.* О разрешимости вариационных задач нелинейной теории пологих оболочек // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 7. – С. 1996–1203.
4. *Карчевский М.М.* О разрешимости геометрически нелинейных задач теории тонких оболочек // Изв. вузов. Матем. – 1995. – № 6. – С. 30–37.
5. *Тимергалиев С.Н.* Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 2003. – 340 с.
6. *Тимергалиев С.Н.* К вопросу о разрешимости краевых задач нелинейной теории пологих оболочек типа Тимошенко // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 115–123.

7. *Тимергалиев С.Н.* О разрешимости геометрически нелинейных краевых задач для анизотропных оболочек типа Тимошенко с жестко заделанными краями // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 8. – С. 56–68.

8. *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань, Таткнигоиздат, 1957. – 432 с.

9. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. – М.: Мир, 1974. – 160 с.

10. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

11. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы уравнений теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Усп. матем. наук. – 1988. – Т. 43, Вып. 5. – С. 55–98.

12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Поступила в редакцию
07.06.13

Карчевский Михаил Миронович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Mikhail.Karchevsky@kpfu.ru*