УДК 517.54

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Ф.Д. Каюмов

Аннотация

В работе доказана гипотеза Бреннана для конформных отображений f единичного круга в предположении, что четные коэффициенты Тейлора функции $\ln f'$ удовлетворяют некоторому условию. Доказана также справедливость гипотезы Бреннана в случае, когда существует разложение функции $1/f'$ в ряд простых дробей, при условии, что этот ряд абсолютно сходится в нуле. Кроме того, получена оценка для приближения функции $1/f'$ простыми дробями.

Ключевые слова: гипотеза Бреннана, аппроксимация простыми дробями.

Пусть Ω – односвязная область на плоскости, граница которой состоит из более чем одной точки, и φ – конформное отображение области Ω на круг $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

Бреннаном [1] была высказана гипотеза о том, что $\varphi' \in L_p(\Omega)$ при $4/3 < p < 4$, то есть

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi'|^p \, dx \, dy < \infty, \quad \frac{4}{3} < p < 4. \tag{1}$$

Пусть $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ – конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на Ω. В [2] было доказано, что гипотеза Бреннана эквивалентна соотношению

$$\int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{1}{f'(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta = O\left(\left(\frac{1}{1-r} \right)^{1+\varepsilon} \right) \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Поскольку гипотезу Бреннана не удалось доказать прямыми методами геометрической теории функции, то эту гипотезу стали доказывать для частных случаев. Бертильсон в своей диссертации [3] исследовал локальную версию гипотезы Бреннана для функций, близких к функции Кёбе. В работе [4] также была доказана гипотеза Бреннана в предположении, что $f(0) = 0$ и тейлоровские коэффициенты функции $\log(zf'/f)$ неотрицательны. Мы же докажем гипотезу Бреннана в предположении, что коэффициенты разложения $\ln f'$ заданы специальным образом, то есть докажем, что справедлива

Теорема 1. *Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{2k}| r^{2k} = o\left(\ln \frac{1}{1-r} \right), \quad r \to 1, \tag{3}$$

где a_k *– коэффициенты тейлоровского разложения* $\ln f'$*:*

$$\ln f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

то выполнено (2)*, и, следовательно, гипотеза Бреннана справедлива.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $f \in S$. Здесь S – класс голоморфных и однолистных в единичном круге функций f, имеющих разложение

$$f(z) = z + c_2z^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

Из условия теоремы следует, что

$$f'(z) = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}\right).$$

Поэтому

$$f'(-z) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}\right) =$$
$$= \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k} + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}\right).$$

Принимая во внимание то, что

$$\frac{1}{f'(z)} = \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right),$$

получим

$$f'(-z) = \exp\left(2\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}\right) \Big/ f'(z). \tag{4}$$

Из равенства (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C_ε такая, что

$$\exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{2k}| r^{2k}\right) \leqslant C_\varepsilon \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\varepsilon}, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$|f'(-z)| = \left|\exp\left(2\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}\right) \Big/ f'(z)\right| \leqslant C_\varepsilon^2 \frac{(1+r)^3}{(1-r)^{1+2\varepsilon}}. \tag{5}$$

Здесь для оценки $|1/f'|$ мы использовали тот факт, что

$$\left|\frac{1}{f'(z)}\right| \leqslant \frac{(1+r)^3}{1-r},$$

который очевидным образом следует из теоремы искажения.

Так как f однолистна в круге, верно неравенство

$$\iint\limits_{|z|<r} |f'(z)|^2\, dx\, dy \leqslant \pi M^2,$$

где $M = \max\limits_{|z|<r} |f|$.

Воспользовавшись оценкой (5), получим

$$|f(-z)| \leqslant C_\varepsilon^2 \int\limits_0^r \frac{(1+r)^3}{(1-r)^{1+2\varepsilon}}\,dr \leqslant 8C_\varepsilon^2 \int\limits_0^r \frac{dr}{(1-r)^{1+2\varepsilon}} = \frac{4C_\varepsilon^2}{\varepsilon}\frac{1}{(1-r)^{2\varepsilon}},$$

значит,

$$M \leqslant \frac{4C_\varepsilon^2}{\varepsilon}\frac{1}{(1-r)^{2\varepsilon}}.$$

Таким образом, мы получаем неравенство

$$\iint\limits_{|z|<r} |f'(-z)|^2\,dx\,dy \leqslant \frac{\pi}{(1-r)^{4\varepsilon}}\frac{16C_\varepsilon^4}{\varepsilon^2}. \tag{6}$$

Далее, перепишем равенство (4) следующим образом:

$$\left|\frac{1}{f'(-z)f'(z)}\right| = \left|\exp\left(-2\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}z^{2k}\right)\right| \leqslant \frac{C_\varepsilon^2}{(1-r)^{2\varepsilon}},$$

откуда

$$\iint\limits_{|z|<r} \frac{dx\,dy}{|f'(z)|^2} \leqslant \max_{|\zeta|<r}\frac{1}{|\ f'(-\zeta)f'(\zeta)\ |^2} \iint\limits_{|z|<r} |f'(-z)|^2\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_\varepsilon^4}{(1-r)^{4\varepsilon}} \iint\limits_{|z|<r} |f'(-z)|^2\,dx\,dy. \tag{7}$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется равенство Парсеваля

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|f'(re^{i\theta})|^2} = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 r^{2k}, \tag{8}$$

где α_k – тейлоровские коэффициенты функции

$$\frac{1}{f'(z)} = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k.$$

Перепишем равенство (8) следующим образом:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|f'(r^2e^{i\theta})|^2} = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 r^{4k}. \tag{9}$$

Воспользовавшись равенством (8), получим

$$\iint\limits_{|z|<r} \frac{dx\,dy}{|f'(z)|^2} = \int\limits_0^r r\,dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|f'(re^{i\theta})|^2} = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha_k|^2 r^{2k+2}}{2k+2}. \tag{10}$$

В силу того, что

$$(2k+2)r^{2k-2} \leqslant \frac{e^{-1}}{1-r},$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 r^{4k} \leqslant \frac{e^{-1}}{(1-r)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha_k|^2 r^{2k+2}}{2k+2}. \tag{11}$$

Из (9)–(11) вытекает, что

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|f'(r^2e^{i\theta})|^2} \leqslant \frac{e^{-1}}{1-r}\iint\limits_{|z|<r}\frac{dx\,dy}{|f'(z)|^2}. \tag{12}$$

В итоге из соотношений (6), (7) и (12) получим следующий результат:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|f'(r^2e^{i\theta})|^2} \leqslant \frac{C}{(1-r)^{1+8\varepsilon}},$$

где $C = 16\pi C_\varepsilon^8/(e\varepsilon^2)$.

Отсюда при $r^2 = \rho$ получим

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|f'(\rho e^{i\theta})|^2} \leqslant \frac{C}{(1-\sqrt{\rho})^{1+8\varepsilon}} \leqslant \frac{C_1}{(1-\rho)^{1+8\varepsilon}},$$

где $C_1 = 2^{1+8\varepsilon}C$.

Теорема доказана. □

Рассмотрим ряд простых дробей

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{z-z_k}, \quad |z_k| \geqslant 1. \tag{13}$$

Ряды вида (13) обладают важными свойствами. Вольф [8] в 1921 г. доказал теорему о разложении произвольной аналитической функции в ряд вида (13). Эта теорема была усилена в работах Данжуа [9]. В настоящее время исследования простых дробей активно продолжаются(см., в частности, работы [10, 11]).

Исследуем этот ряд на сходимость в круге $\{|z|<1\}$. Рассмотрим круг $D_r = \{z : |z| < r\}$, где $r<1$.

Если $|z|<r$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k}{z-z_k}\right| < \frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k}{z_k}\right|.$$

Откуда следует, что если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k}{z_k}\right|$, то по признаку Вейерштрасса ряд (13) сходится в круге $|z|<r$.

Тогда ряд (13) сходится и притом равномерно по признаку сравнения Вейерштрасса, вследствие чего по теореме Вейерштрасса [7, с. 17] этот ряд сходится к голоморфной функции.

Пусть $f \in S$, тогда по теореме искажения $|1/f'(z)| \leqslant (1+r)^3/(1-r)$. Поэтому можно надеяться, что $1/f'$ имеет разложение в ряд $\sum \frac{\alpha_k}{z-z_k}$. В следующей теореме мы докажем справедливость гипотезы Бреннана в части предположения о том, что для функции $1/f'$ существует разложение в ряд простых функции, который сходится в нуле абсолютно.

Теорема 2. *Пусть f – конформное отображение единичного круга на односвязную область. Предположим, что $1/f'$ представима в виде ряда из простых дробей, то есть*
$$\frac{1}{f'(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{z - z_k}. \tag{14}$$
Если
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_k}{z_k}\right| \leqslant \sqrt{\frac{C}{2\pi}},$$
то справедливо неравенство
$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{f'(re^{i\theta})}\right|^2 d\theta \leqslant \frac{C}{1-r^2},$$
то есть справедлива гипотеза Бреннана.

Доказательство. Пусть
$$\varphi_N(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{z - z_k}.$$
Для оценки интеграла из равенства (2) проинтегрируем квадрат модуля этой функции по окружности $|z| = r$
$$\int_0^{2\pi} \left|\varphi_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{re^{i\theta} - z_k}\right|^2 d\theta =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\alpha_k}{re^{i\theta} - z_k}\right) \overline{\left(\frac{\alpha_j}{re^{i\theta} - z_j}\right)} d\theta. \tag{15}$$
После замены $e^{i\theta} = t$ получим
$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int_{|t|=1} \frac{1}{i} \frac{\alpha_k}{rt - z_k} \frac{\overline{\alpha_j}}{r - t\overline{z_j}} dt = 2\pi \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_k \overline{\alpha_j}}{z_k \overline{z_j} - r^2}.$$
В силу того, что
$$\varphi_N(re^{i\theta}) \to \frac{1}{f'(re^{i\theta})}$$
при $N \to \infty$ равномерно по θ, имеют место равенства
$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{f'(re^{i\theta})}\right|^2 d\theta = \lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} \left|\varphi_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \overline{\alpha_j}}{z_k \overline{z_j} - r^2}.$$
Поэтому
$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{f'(re^{i\theta})}\right|^2 d\theta \leqslant 2\pi \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_k \overline{\alpha_j}}{z_k \overline{z_j} - r^2}\right| \leqslant \frac{2\pi}{(1-r^2)} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_k \overline{\alpha_j}}{z_k \overline{z_j}}\right|. \tag{16}$$

Из условия (14) следует, что двойной ряд из неравенства (16) сходится и верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k\overline{\alpha_j}}{z_k\overline{z_j}}\right| \leqslant \frac{C}{2\pi}. \qquad (17)$$

Оценки (16) и (17) доказывают утверждение теоремы, так как

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{f'(re^{i\theta})}\right| d\theta \leqslant \frac{C}{1-r^2}$$

Теорема доказана. □

В книге [6] было доказано утверждение о представлении аналитической в круге функции в виде предела последовательности рациональных функций. Поскольку f' не имеет нулей в единичном круге, функция $1/f'$ аналитична, и, следовательно, к ней применима теорема Уолша. В следующей теореме мы дополним данный результат.

Теорема 3 (О приближении простыми дробями). *Пусть $R<1$ и f – однолистная в круге $D=\{z:|z|<1\}$ функция, тогда существует функция g_n,*

$$g_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{z-z_k},$$

такая, что для $z\in D_R=\{z:|z|<R\}$ верно неравенство

$$\left|\frac{1}{f'(z)}-g_n(z)\right| \leqslant \frac{512\pi}{n(1-R)^3}. \qquad (18)$$

Доказательство. Положим

$$r=\frac{2R}{1+R}. \qquad (19)$$

Рассмотрим интеграл Коши на границе круга $D_r=\{z:|z|<r\}$

$$\frac{1}{f'(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{dt}{f'(t)(t-z)}, \quad z\in D_r. \qquad (20)$$

Интеграл (20) является пределом при $n\to\infty$ последовательности

$$g_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{t_{k+1}-t_k}{f'(t_k)(t_k-z)},$$

где $t_1,t_2,\ldots,t_n,t_{n+1}=t_1$ – последовательные точки, лежащие на окружности ∂D_r и выбранные так, что $|t_{k+1}-t_k|\to 0$ равномерно при $n\to\infty$.

Мы можем записать

$$g_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{f'(t_k)(t_k-z)},$$

$$\frac{1}{f'(z)} - g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{1}{f'(t)(t-z)} - \frac{1}{f'(t_k)(t_k - z)} \right] dt. \tag{21}$$

Для оценки $\left| \frac{1}{f'(z)} - g_n(z) \right|$ в равенстве (21) воспользуемся неравенством

$$\left| \frac{1}{f'(t)(t-z)} - \frac{1}{f'(t_k)(t_k - z)} \right| \leqslant \left| \frac{1}{t_k - z} \right| \left| \frac{1}{f'(t)} - \frac{1}{f'(t_k)} \right| + \\ + \left| \frac{1}{f'(t)} \right| \frac{|t_k - t|}{|t-z||t_k - z|}. \tag{22}$$

Воспользуемся формулой оценки конечных приращений

$$\left| \frac{1}{f'(t)} - \frac{1}{f'(t_k)} \right| \leqslant \max_{\zeta \in [t_k, t]} \left| \left(\frac{1}{f'(\zeta)} \right)' \right| |t_k - t| = \max_{\zeta \in [t_k, t]} \left| \frac{f''(\zeta)}{f'^2(\zeta)} \right| |t_k - t|.$$

Известно [7, с. 53], что

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leqslant \frac{6}{1 - r^2},$$

следовательно,

$$\left| \frac{f''(\zeta)}{f'^2(\zeta)} \right| \leqslant \frac{6(1+r)^2}{(1-r)^2} \leqslant \frac{24}{(1-r)^2}.$$

Воспользуемся следующими очевидными неравенствами:

$$\left| \frac{1}{t_k - z} \right| \leqslant \frac{1}{||t_k| - |z||} \leqslant \frac{1}{r - |z|},$$

$$\left| \frac{1}{t - z} \right| \leqslant \frac{1}{||t| - |z||} \leqslant \frac{1}{r - |z|},$$

$$|t_k - t| \leqslant \frac{2\pi r}{n}.$$

Учитывая вышеизложенное, получим оценку подынтегрального выражения равенства (21) на дуге $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\left| \frac{1}{f'(t)(t-z)} - \frac{1}{f'(t_k)(t_k - z)} \right| \leqslant \frac{16\pi r}{n(r - |z|)(1-r)} \left(\frac{1}{r - |z|} + \frac{3}{1-r} \right),$$

следовательно, на Γ_r имеет место неравенство

$$|f(z) - g_n(z)| \leqslant \frac{16\pi r^2}{n(r - |z|)(1-r)} \left(\frac{1}{r - |z|} + \frac{3}{1-r} \right). \tag{23}$$

В силу последнего неравенства в круге D_R верно неравенство

$$\left| \frac{1}{f'(z)} - g_n(z) \right| \leqslant \frac{512\pi}{n(1-R)^3}.$$

$\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-97013).

Summary

F.D. Kayumov. Integral Estimates for the Derivatives of Univalent Functions.

In this paper we prove Brennans's conjecture for the conformal mapping of the unit circle on the assumption that even the Taylor coefficients of the function $\ln f'$ satisfies a certain condition. We also prove Brennan's conjecture for the case when there is an expansion of the function $1/f'$ into a series of simple fractions, provided that this series converges absolutely to zero. In addition, we obtain an estimate for the approximation of the function $1/f'$ by simple fractions.

Keywords: Brennan's conjecture, approximation by simple fractions.

Литература

1. *Brennan J.E.* The integrability of derivative in conformal mapping // J. London Math. Soc. – 1978. – V. s2-18, No 2. – P. 261–272.
2. *Pommerenke Ch.*On the integral means of the derivative of a univalent function // J. London Math. Soc. – 1985. – V. s2-32, No 2. – P. 254–258.
3. *Bertilsson D.* On Brennan's conjecture in conformal mapping: Doct. Thesis. – Stockholm, Sweden, 1999. – 110 p. – URL: http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:8593/FULLTEXT01.pdf, свободный.
4. *Каюмов И.Р.* О гипотезе Бреннана для специального класса функций // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, Вып. 4. – С. 537–541.
5. *Gronwall T.H.* Some remarks on conformal representation // Ann. Math. Ser. 2. – 1914–1915. – V. 16, No 1–4. – P. 72–76.
6. *Уолш Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 526 с.
7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 345 с.
8. *Wolff J.* Sur les séries $\sum_1^\infty \frac{A_k}{z-a_k}$ // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1921. – V. 173. – P. 1057–1058, 1327–1328.
9. *Denjoy A.* Sur les séries de fractions rationnelles // Bull. Soc. Math. France. – 1924. – T. 52. – P. 418–434.
10. *Протасов В.Ю.* Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем. – 2009. – Т. 73, № 2. – С. 123–140.
11. *Данченко В.И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Матем. сб. – 2006. – Т. 197, № 4. – С. 33–52.

Поступила в редакцию
25.01.13

Каюмов Фаниль Дамирович – аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *fkauymov@gmail.com*