УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
*Том 155, кн. 2* Физико-математические науки *2013*

УДК 517.54+517.982.274

# МНОЖЕСТВО ГАХОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ХОРНИЧА ПРИ БЛОХОВСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПРЕДШВАРЦИАНЫ

*А.В. Казанцев*

**Аннотация**

Множество Гахова объединяет функции из пространства Хорнича над единичным кругом, имеющие единственную критическую точку конформного радиуса. Исследуется расположение пересечения $\mathcal{A}$ множества Гахова с пространством Блоха $\mathcal{B}$ относительно банаховой структуры $\mathcal{B}$. Выявлена связь между топологическими характеристиками множества $\mathcal{A}$ и значениями кривизны и индекса критических точек для функций из $\mathcal{A}$. Дано эффективное описание множества точек границы $\mathcal{A}$ с минимальной преднормой. С использованием функционала Минковского установлена звездообразность подмножества функций из $\mathcal{A}$ с нулевой критической точкой конформного радиуса.

**Ключевые слова:** гиперболическая производная, конформный радиус, бифуркации критических точек, пространство Хорнича, пространство Блоха, предшварциан, множество Гахова, внутренность и граница множества.

## Введение

Для функции $f$, голоморфной в единичном круге $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta| < 1\}$, рассмотрим величину
$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\big|f'(\zeta)\big| \tag{1}$$
при $\zeta \in \mathbb{D}$. Проблема исследования экстремумов функции (1) и построения достаточных условий единственности таких экстремумов восходит к трактату Г. Полиа и Г. Сегё [1] и оформилась в отдельное направление в работе Г. Хиги [2] (см. [3]). В 80-е годы XX в. данное направление стало развиваться на казанском семинаре по геометрической теории функций (см., например, [4, 5]) уже в рамках гаховской традиции, о которой речь пойдет ниже.

В классической постановке Полиа – Сеге – Хиги функция $f$ – однолистная, и величина (1) представляет собой выражение для *внутреннего конформного радиуса* области $D = f(\mathbb{D})$ в точке $w = f(\zeta)$. Ямашита [6, 7] предложил постановку, где $f$ – голоморфная универсальная накрывающая проекция $\mathbb{D}$ на гиперболическую область $D$ в $\hat{\mathbb{C}}$, называя величину (1) *производной Блоха* функции $f$. В общем случае ($f$ – произвольная голоморфная функция в $\mathbb{D}$) автор использовал для (1) название «*гиперболическая производная* функции $f$» [8, 9], заимствовав его в работе [10].

Применение термина «конформный радиус *области*» к величине (1), зависящей от *функции*, причем в классической постановке, усложняет формулировки и искусственно сужает запас функций $f$. Издержки такого подхода проявились, например, в § 2 работы [5], где вместо локальной однолистности приходилось использовать более сильное условие однолистности. Тем не менее при всей актуальности перехода к новому названию величины (1) представляется важным сохранение связей с классической историей предмета, символом которой является понятие конформного радиуса. Об этом свидетельствует, например, название «конформный радиус как функция точки» из работы [11].

Вернемся к экстремумам функции (1). Пусть $H$ – класс всех голоморфных функций в $\mathbb{D}$, $H_0$ – подкласс функций $f$, выделяемый из $H$ нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и условием локальной однолистности в $\mathbb{D}$: $f'(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \mathbb{D}$. Элементы множества $M_f = \{a \in \mathbb{D} : \nabla h_f(a) = 0\}$ критических точек функции $h_f$, $f \in H_0$, есть в точности нули отображения Гахова

$$G(\zeta, \bar{\zeta}) = f''(\zeta)/f'(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2). \tag{2}$$

Эквивалентность $\nabla h_f(\zeta) = 0 \Leftrightarrow G(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$, установленная в работе [12], по существу восходит к Ф.Д. Гахову [13]. Сделать такой вывод позволило новое прочтение работы [13], предпринятое в статье [4], которая вместе с работами [5, 14] сфокусировала начатую в [13] проблематику по внешним обратным краевым задачам с нефиксированным полюсом на изучении однозначной разрешимости уравнения Гахова $G(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$, или, что то же самое, на условиях, достаточных для выполнения равенства $k_f = 1$, где $k_f$ – количество элементов $M_f$. Скорректированную таким образом проблематику продолжим называть гаховской.

Истоки развиваемого в настоящей статье подхода к условиям единственности экстремума (1) относятся к дискуссии по докладу М.И. Киндера и автора «Условия единственности решения внешней обратной краевой задачи» на итоговой научной конференции Казанского государственного университета за 1985 г., когда С.Р. Насыров установил единственность корня уравнения Гахова при выполнении строгой оценки $|(f''/f')'(\zeta)| < 2/(1 - |\zeta|^2)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, для функции $f$ из малого класса Блоха

$$\mathcal{B}_0 = \{f \in H : \lim_{\zeta \to \partial\mathbb{D}} h_f(\zeta) = 0\}$$

(не опубликовано); автор же показал, что, постулируя наличие в $M_f$ нулевого элемента, эту оценку можно ослабить до нестрогой и заменить $\mathcal{B}_0$ подклассом $H_0$ (позднее от условия $0 \in M_f$ удалось освободиться). Получившийся таким образом прототип теоремы 2 (см. ниже разд. 1) был представлен автором в докладе [15] вместе с частью результатов, вошедших в разд. 2 и 3 настоящей статьи, в частности, использующих функционал Минковского. Привлечение последнего к рассматриваемой проблематике послужило важным стимулом для ее развития благодаря концептуальным связям со статьей [16], где (на материале однолистности) отрабатывалась концепция «предельно широкого класса» объектов (в [16] это были области, у нас – функции), «характеризуемых разрешимостью проблемы». В настоящей статье такая концепция воплощается в понятии множества Гахова. Формированию функционально-аналитического контекста развиваемой тематики способствовало участие автора в работе [17].

Направленность настоящей статьи можно охарактеризовать как исследование множеств $M_f$ «вдоль траектории», намеченной в [3, 8, 9, 15, 18, 19] и нацеленной на изучение множества

$$\mathcal{G}_1 = \{f \in H_0 : k_f = 1\}$$

«в целом». Множество $\mathcal{G}_1$ мы и будем называть *множеством*, или *классом Гахова* (см. также [20]).

Рассмотрим отображение

$$P : H_0 \to H : f \mapsto F = f''/f', \tag{3}$$

сопоставляющее каждой функции $f \in H_0$ ее предшварциан $F = f''/f'$ и взаимно однозначное в силу нормировок $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

В настоящей статье множество Гахова изучается в рамках следующей постановки, впервые предложенной в [15] (см. также [8] и тезисы [19]). Ограничим класс-«мишень» $H$ в (3), сузив его до пространства Блоха $\mathcal{B}$, состоящего из всех функций $F \in H$ с конечной полунормой $|F|_{\mathcal{B}} = \sup\limits_{\zeta \in \mathbb{D}} h_F(\zeta)$ и являющегося банаховым относительно нормы $||F||_{\mathcal{B}} = |F(0)| + |F|_{\mathcal{B}}$ (см., например, [21]). Банахова структура позволяет получать содержательную информацию о множестве $\mathcal{G}_1$ в терминах топологических свойств (в топологии нормы) множества

$$\mathcal{A} = P(\mathcal{G}_1) \bigcap \mathcal{B}. \tag{4}$$

Коограничение $P$ на пространство $\mathcal{B}$ – отображение

$$P_{\mathcal{B}} : P^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B} \tag{5}$$

(в обозначениях [22, с. 113]) – назовем *погружением Блоха* и будем вновь обозначать через $P$.

Приведенная постановка нуждается в существенном дополнении. В 1969 г. Х. Хорнич [23] определил на $H_0$ ставшие уже классическими операции $\oplus$ и $\odot$, задаваемые формулами

$$(f \oplus g)(\zeta) := \int\limits_0^\zeta f'(\omega)g'(\omega)\,d\omega \quad \text{и} \quad (b \odot f)(\zeta) := \int\limits_0^\zeta (f'(\omega))^b\,d\omega, \quad f,\, g \in H_0,\ b \in \mathbb{R},$$

и ввел класс $\mathcal{H}$ функций $f \in H_0$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{\zeta \in \mathbb{D}} |\arg f'(\zeta)| < \infty$ ($\arg 1 = 0$), которое обеспечивает линейное пространство $(\mathcal{H}, \oplus, \odot)$ (над $\mathbb{R}$) банаховой структурой. Не вдаваясь в детали последующих трансформаций исходной постановки Хорнича, отметим, что в рамках одного из подходов, принятых в геометрической теории функций, термин «пространство Хорнича» закрепился не за банаховым пространством $(\mathcal{H}, \oplus, \odot, ||\ ||_{\mathcal{H}})$, а за линейным пространством $(H_0, \oplus, \odot)$ (см., например, [24]). Именно такого подхода мы придерживаемся в настоящей работе; он позволяет рассматривать отображение (3) как алгебраический изоморфизм $P : (H_0, \oplus, \odot) \to (H, +, \cdot)$, отождествляющий лучи $b \odot f$ и $bF$ при $F = P(f) (\in \mathcal{B})$, вдоль которых мы будем исследовать множество (4). Никаких дополнительных сужений (5) при этом не возникнет – мы не выйдем даже за пределы исходной (банаховой) постановки Хорнича, как показывает включение $P^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}$ из следующего утверждения [12, 21], в котором $M(F) := M_f$.

**Предложение 1.** *Если $F = P(f) \in \mathcal{B}$, то $f \in \mathcal{H} \bigcap \mathcal{B}_0$ и*

$$M(F) \subset \overline{\mathbb{D}}_\rho = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \rho\} \quad \textit{для некоторого} \quad \rho \in (0, 1). \tag{6}$$

*Кроме того, если $F$ – любая функция с $|F(0)| \le \sigma$ и $|F|_{\mathcal{B}} \le \tau$, то число $\rho$ в (6) можно выбрать зависящим только от $\sigma$ и $\tau$. Наконец, множество $M(F)$ конечно для всякой $F \in \mathcal{B}$.*

**Доказательство.** Используем такой вариант неравенства из [21, с. 113]:

$$|F(\zeta)| \le |F(0)| + |F|_{\mathcal{B}} f_s(|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad F \in \mathcal{B}, \tag{7}$$

где $f_s(\zeta) = (1/2)\ln((1+\zeta)/(1-\zeta))$. Включение $f \in \mathcal{H} \bigcap \mathcal{B}_0$ следует из (7) с помощью интегрирования, а существование $\rho$ с требуемыми свойствами устанавливается сравнением правой части (7) и выражения $2|\zeta|/(1 - |\zeta|^2)$ на основе (2). Конечность $M(F)$ получается из (6) с учетом результатов [12], запрещающих наличие циклов в $M(F)$. $\square$

**Замечание 1.** В случаях, когда непустота $M_f$ в исследуемом классе влечет за собой равенство $k_f = 1$, а сам класс содержит функции $f$, для которых $k_f = 0$, множество Гахова $\mathcal{G}_1$ целесообразно рассматривать вместе с множеством

$$\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}.$$

Основой для примера такого рода может служить импликация

$$f \in H, \quad (1-|\zeta|^2)^2|\{f,\zeta\}| \le 2, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad f(\mathbb{D}) \ne \textit{полоса и } f''(0) = 0 \implies k_f = 1 \quad (8)$$

из статьи [25] (см. также [3, 6, 26]); здесь $\{f,\zeta\} = (f''/f')'(\zeta) - (1/2)(f''/f')^2(\zeta)$ – производная Шварца функции $f$. Действительно, отмена равенства $f''(0) = 0$ в условиях (8) приводит к неравенству $k_f \le 1$, поскольку класс функций $f \in H$, удовлетворяющих условию $(1-|\zeta|^2)^2|\{f,\zeta\}| \le 2$, $\zeta \in \mathbb{D}$, открытому Нехари [27], содержит, в частности, функцию $f(\zeta) = \ln(1/(1-\zeta)) \in \mathcal{G}_0$. Предлагаемая в настоящей статье постановка подобные примеры исключает:

**Следствие 1.** *Имеет место соотношение* $P^{-1}(\mathcal{B}) \bigcap \mathcal{G}_0 = \varnothing$.

**Доказательство.** Требуемое равенство получается из двух включений – $P^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}_0$ (предложение 1) и $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{G}_1$; последнее устанавливается на основе соотношения $\lim\limits_{\zeta \to \partial\mathbb{D}} h_f(\zeta) = 0$ (ср. с [28]). $\square$

Другим очевидным следствием предложения 1 является дискретность множества $M_f$ для любой $f \in P^{-1}(\mathcal{B})$ (ср. с [12, 29]).

Теперь приведем важное

**Замечание 2.** Под действием погружения Блоха (5) часть множества Гахова теряется: $\mathcal{G}_1 \setminus P^{-1}(\mathcal{B}) \ne \varnothing$.

Действительно, для функции

$$f_q(\zeta) = \frac{w_q(\zeta)-1}{w_q(\zeta)+1}, \quad w_q(\zeta) = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^q,$$

при вещественных $x \in (-1,1)$ имеем $(1-x^2)(f_q''/f_q')'(x) = 2 + 4\Phi_q(x)/(1-x^2)$, где функция

$$\Phi_q(x) = x(x - qf_q(x)) - \frac{2q^2(1-x^2)^q}{[(1+x)^q + (1-x)^q]^2}$$

при $x \to 1$ стремится к $1-q$; отсюда следует, что $f \notin P^{-1}(\mathcal{B})$, когда $q \in (0,2)$, $q \ne 1$. Однако $f_q \in \mathcal{G}_1$ при $q \in (0, \sqrt{2}]$ благодаря (8) и $\{f_q,\zeta\} = 2(1-q^2)/(1-\zeta^2)^2$.

Перенос исследования в пространство предшварцианов $F = P(f)$ вводит парные обозначения: $M(F) := M_f$ (см. выше) и $k(F) := k_f$. Для гауссовой кривизны $K_f$ поверхности $h = h_f(\zeta)$ и индекса $\gamma_f$ векторного поля $\nabla h_f(\zeta)$ будет использована запись $K_F := K_f$ и $\gamma_F := \gamma_f$; при этом

$$K_F(a) = h_f(a)^2\big[4/(1-|a|^2)^4 - |F'(a) - F(a)^2/2|^2\big], \quad a \in M(F), \quad (9)$$

а выражение для $\gamma_F(a)$ нам не понадобится (см. [9, 28]). Все необходимые факты о $K_F$ и $\gamma_F$ приведены в следующей лемме ($m_F^{\pm} := \{a \in M(F) : \gamma_F(a) = \pm 1\}$).

**Лемма 1.** *Пусть* $f \in H_0$ *и* $F = P(f) \in \mathcal{B}$. *Тогда*

1) *в любой точке* $a \in M(F)$ *функция* (1) *имеет локальный максимум* ($\gamma_F(a) = +1$), *либо седло* ($\gamma_F(a) = -1$), *либо полуседло* ($\gamma_F(a) = 0$);

2) *если* $K_F(a) \ne 0$ *и* $a \in M(F)$, *то* $\gamma_F(a) = \operatorname{sgn} K_F(a)$;

3) $\sum\limits_{a \in M(F)} \gamma_F(a) = m_F^+ - m_F^- = 1$;

4) *из* $\gamma_F(M(F)) = +1$ *следует* $k(F) = 1$.

Утверждения 1) – 3) установлены в [28], а 4) – ослабленный вариант теоремы 1 из [9] (см. также [28]).

Анализ динамики множества $M(bF)$, $F \in \mathcal{B}$, с ростом $b > 0$ аналогичен проведенному в [3] и [9] для случая «линий уровня» $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$. Определим слоение

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_F := \bigcup_{b>0} M(bF) \times \{b\}$$

и функционал

$$\bar{b} = \bar{b}(F) := \sup\{\sigma \in (0, +\infty) : b \in [0, \sigma] \Rightarrow k(bF) = 1\}$$

первого выхода из множества $\mathcal{A}$ (см. (4)) вдоль луча $bF$, $b > 0$. Положительность $\bar{b}$ на $\mathcal{B}$ установлена ниже в теореме 2 и не использует следующее утверждение; обозначим $g(\zeta) := \zeta F(\zeta)$, $K_b := K_{bF}$ и $\gamma_b := \gamma_{bF}$.

**Лемма 2.** *Пусть $F \in \mathcal{B}$, $\alpha \in M(\beta F)$ при $\beta \in [\bar{b}(F), +\infty)$, $k$ – кратность $\alpha$ как нуля функции $g(\zeta) - g(\alpha)$. Если $\alpha \neq 0$ либо $\alpha = 0$ и $K_\beta(\alpha) = 0$, то слоение $\mathfrak{B}$ в некоторой окрестности $W = U \times V \subset \mathbb{D} \times \mathbb{R}_+$ точки $(\alpha, \beta)$ состоит из $k$ ($k = 2$ при $\alpha = 0$) аналитических дуг, пересекающихся в $(\alpha, \beta)$.*

*Пусть $\alpha \neq 0$. При $k = 1$ дугу $\mathfrak{B} \bigcap W$ параметризует ее модуль. Если $k \geq 2$, то $b \in V$ – параметр всех $k$ дуг в $\mathfrak{B} \bigcap W$ либо $k - 1$ из них. В последнем случае оставшаяся дуга расположена по одну сторону от плоскости $b = \beta$ и параметризуется с помощью $b$ только на своих «половинах», лежащих над соответствующей полуокрестностью $V_{\gtrless} = V \bigcap \{b \gtrless \beta\}$. На каждой из $2k$ полудуг $(a(b), b)$, $b \in V_{\gtrless}$, в $(\mathfrak{B} \bigcap W) \setminus \{(\alpha, \beta)\}$ индекс $\gamma_b$ постоянен и отличен от нуля;*

$$\sum_{a \in M(bF) \cap U} \gamma_b(a) = \gamma_\beta(\alpha), \quad b \in V \setminus \{\beta\}. \tag{10}$$

*Если $\alpha = 0$ и $K_\beta(\alpha) = 0$, то $0 \in M(bF)$ для всех $b > 0$, $\gamma_b(0) = \operatorname{sgn}(\beta - b)$ при $b \neq \beta$, $\beta = 2/|F'(0)|$ ($F'(0) \neq 0$) и с ростом $b$ возможны три сценария бифуркации при $b = \beta$ (как и для $\alpha \neq 0$, $k = 2$):* а) *максимум переходит в седло с ответвлением двух максимумов (бифуркация типа $\Psi$);* б) *максимум и два седла сливаются в седло;* в) *максимум и седло меняются ролями, переходя через полуседло. В каждом случае $b$ – параметр любой полудуги в $\mathfrak{B} \bigcap W$, исходящей из $(0, \beta)$.*

*Если же $\beta = \bar{b}(F)$, то неравенство $k(\beta F) > 1$ при $b > \beta$ вблизи $\beta$ выполняется за счет бифуркации типа $\Psi$ или наличия в $M(\beta F)$ точки $\alpha \neq 0$ такой, что $\mathfrak{B} \bigcap W$ – аналитическая дуга над $V_> \bigcup \{\beta\}$ (бифуркация типа $\bigcup$).*

Сразу отметим, что бифуркация типа $\bigcap$ (при $\beta > \bar{b}(F)$) определяется наличием в $M(\beta F)$ точки $\alpha \neq 0$ такой, что $\mathfrak{B} \bigcap W$ – аналитическая дуга над $V_< \bigcup \{\beta\}$. Для локализации $\mathfrak{B}$ над точкой $b = \beta$ в случае $0 \in M(\beta F)$ нам потребуется исследовать $\mathfrak{B}'(\beta) := (M(\beta F) \setminus \{0\}) \times \{\beta\}$. Ситуация, когда слой $\mathfrak{B}'(\beta)$ состоит только из точек бифуркации типа а) $\bigcup$, б) $\bigcap$ или в) $\bigcup$ и $\bigcap$, формализуется соответственно записью а) $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\bigcup\}$, б) $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\bigcap\}$ или в) $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\bigcup, \bigcap\}$. Пусть $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$.

Обоснование леммы 2 почти дословно повторяет доказательство основной леммы из [3]. Тем не менее в динамике множеств $M_{f_r}$ из [3] и $M_{b \odot f}$ имеется существенная разница: если для «линий уровня» с ростом параметра локальные максимумы возрастают, а седла убывают по модулю, то для «предшварцианов» это свойство сохраняется только у максимумов – седла же могут двигаться в обоих направлениях. Данное обстоятельство усложняет доказательство звездообразности множества $\widetilde{\mathcal{G}}_1 \bigcap P^{-1}(\mathcal{B})$, где $\widetilde{\mathcal{G}}_1 = \{f \in \mathcal{G}_1 : f''(0) = 0\}$, в пространстве Хорнича (теорема 4 ниже) по сравнению с $r$-случаем (см. [9]), на который придется опираться.

Условие $f''(0)=0$ фиксирует в $M_f$ точку $a=0$. При переходе к предшварцианам $F=P(f)$ данное условие выделяет из $\mathcal{B}$ новое объемлющее пространство

$$\widetilde{\mathcal{B}}=\{F\in\mathcal{B}:F(0)=0\},$$

в котором множество Гахова представлено как

$$\widetilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}\bigcap\widetilde{\mathcal{B}}.$$

Пространство $\widetilde{\mathcal{B}}$, очевидно, уравнивает банахову и преднормированную структуры на $\mathcal{B}$, являясь банаховым подпространством пространства $(\mathcal{B},||\ ||_{\mathcal{B}})$; в частности, на $\widetilde{\mathcal{B}}$ предшары $B_\varepsilon(F)=\{G\in\mathcal{B}:|G-F|_{\mathcal{B}}<\varepsilon\}$ уравниваются с шарами $\mathbb{B}_\varepsilon(F)=\{G\in\mathcal{B}:||G-F||_{\mathcal{B}}<\varepsilon\}$: $\widetilde{\mathbb{B}}_\varepsilon(F):=\mathbb{B}_\varepsilon(F)\bigcap\widetilde{\mathcal{B}}=B_\varepsilon(F)\bigcap\widetilde{\mathcal{B}}=:\widetilde{B}_\varepsilon(F)$ (одинаковый след на $\widetilde{\mathcal{B}}$ имеют также сферы $\mathbb{S}_\varepsilon(F)$ и предсферы $S_\varepsilon(F)$). Однако с топологическими операторами $\mathcal{F}=\mathrm{Int},\mathrm{Cl}$ и $\mathrm{Fr}$ (в топологии нормы на $\mathcal{B}$) дело обстоит сложнее: соотношение

$$\mathcal{F}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}=\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\mathcal{F}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \tag{11}$$

справедливо только для внутренности $\mathcal{F}=\mathrm{Int}$, а для замыкания $\mathcal{F}=\mathrm{Cl}$ и границы $\mathcal{F}=\mathrm{Fr}$ в (11) следует удержать лишь включение левой части в правую. Утверждение из [8] о равенстве (11) при $\mathcal{F}=\mathrm{Fr}$ некорректно; здесь эта ошибка исправлена: доказано, что

$$C:=(\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\mathrm{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A})\setminus\mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}\neq\varnothing,$$

причем

$$\mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}=\Gamma_1\bigcap\mathrm{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}\quad\text{и}\quad C=\Gamma_0\bigcap\mathrm{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A},$$

где $\Gamma_k=\{F\in\widetilde{\mathcal{B}}:\gamma_F(0)=k\}$, $k=0,1$ (предложение 4, теорема 7).

Цель настоящей статьи – исследовать связь между топологическими характеристиками $\mathcal{F}$ множеств $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}$ и геометрическими характеристиками $K_F$ и $\gamma_F$ элементов $M(F)$ для соответствующих $F$. Направления работы были намечены в [8]; утверждения, имеющие прототипы в [8], формулируются ниже как теоремы и снабжены подробными обоснованиями; этапы исследования отражены в названиях разделов.

## 1. Представление множества $\overline{S_2(0)}\bigcap Fr_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$

Начнем со следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}\bigcap\mathrm{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}=\{F\in\mathcal{A}:K_F(M(F))=0\},\\&\mathrm{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}=\{F\in\mathcal{B}:K_F(M(F))>0\}.\end{aligned} \tag{12}$$

**Доказательство.** Обозначим $\mathcal{A}_0=\{F\in\mathcal{A}:K_F(M(F))=0\}$.

Для любого $F\in\mathcal{A}\bigcap\mathrm{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ существует последовательность $F_n\notin\mathcal{A}$, сходящаяся к $F$ по норме $\mathcal{B}$. Стандартными рассуждениями с использованием предложения 1 получаем отсюда, что если $M(F)\ni a_n\to a(\in M(F))$, то $K_{F_n}(a_n)\to K_F(a)$. Включение $\mathcal{A}\bigcap\mathrm{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}\subset\mathcal{A}_0$ будет обосновано, если показать, что для каждого $n\geq1$ в $M(F_n)$ найдутся элементы $\alpha_n$ и $\beta_n$ такие, что $K_{F_n}(\alpha_n)\geq0\geq K_{F_n}(\beta_n)$. Действительно, сохранение последних неравенств при переходе к подпоследовательностям $\alpha_{n_k}\to\alpha$, $\beta_{n_k}\to\beta$ $(k\to\infty)$, с учетом $F\in\mathcal{A}$ влечет за собой соотношения $\alpha=\beta$, $M(F)=\{\alpha\}$ и $K_F(\alpha)=0$.

Проверим наличие элементов $\alpha_n$ и $\beta_n$ с требуемыми свойствами. Поскольку $f_n = P^{-1}(F_n) \in \mathcal{B}_0$ (предложение 1), то в качестве $\alpha_n$ берем глобальный максимум функции $h_{f_n}$. Так как $F_n \notin \mathcal{A}$, $n \geq 1$, то в $M(F_n)$ существует $q_n \neq \alpha_n$, причем если $K_{F_n}(q_n) \leq 0$, то полагаем $\beta_n = q_n$, а если $K_{F_n}(q_n) > 0$, то $\gamma_{F_n}(q_n) = +1$, что вместе с $\gamma_{F_n}(\alpha_n) = +1$ приводит к существованию такого $\beta_n \in M(F_n)$, что $\gamma_{F_n}(\beta_n) = -1$, поэтому $K_{F_n}(\beta_n) \leq 0$ (использованы пп. 1)–3) леммы 1).

Докажем включение $\mathcal{A} \bigcap \mathrm{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$. Пусть $F \in \mathcal{A}_0$, то есть $F \in \mathcal{A}$, $M(F) = \{a\}$ и $K_F(a) = 0$. Рассмотрим семейство функций $F_\lambda(\zeta) = F(\zeta) + \lambda(\zeta - a)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Имеем $F_\lambda \in \mathcal{B}$, $a \in M(F_\lambda)$ и $||F_\lambda - F||_{\mathcal{B}} = (1 + |a|)|\lambda|$. Поскольку $K_{F_\lambda}(a)/h_f(a)^2 = -2\mathrm{Re}\{\overline{\lambda}[F'(a) - F(a)^2/2]\} - |\lambda|^2$, неравенство $K_{F_\lambda}(a) < 0$, обеспечивающее $\gamma_{F_\lambda}(a) = -1$, выполняется на некотором $\lambda$-луче с началом в $\lambda = 0$. По лемме 1, пп. 2), 3), в любой окрестности $F$ найдется функция вида $F_\lambda$, для которой $a$ – неединственный элемент $M(F_\lambda)$, значит, $F \in \mathcal{A} \bigcap Fr_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$.

Теперь установим второе равенство (12). Если $F \in \mathrm{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$, то в силу включения $\mathrm{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ будет $M(F) = \{a\}$ для некоторого $a \in \mathbb{D}$, откуда $\gamma_F(a) = +1$ ($a$ – глобальный максимум $h_f$ в $\mathbb{D}$ для $f = P^{-1}(F)$) и, согласно лемме 1, $K_F(a) \geq 0$. Но так как $F \notin \mathrm{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$, то с учетом первого, полученного выше равенства (12) отсюда следует, что $K_F(a) > 0$. Обратно, выбирая $F \in \mathcal{B}$ с $K_F(M(F)) > 0$, заключаем, что $\gamma_F(M(F)) = +1$. По лемме 1, п. 4), получим $F \in \mathcal{A}$, что вместе с $K_F(M(F)) > 0$ и $\mathcal{A} \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ дает $F \in \mathrm{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ в силу первого равенства (12). □

В следующем утверждении как частный случай содержится условие единственности $(1 - |\zeta|^2)|F'(\zeta)| \leq 2, \zeta \in \mathbb{D}, \Rightarrow k(F) = 1$, послужившее в свое время отправной точкой данных исследований [8, теорема $1'$].

**Теорема 2.** *Имеют место неулучшаемые включения* $\overline{B_2(0)} \subset \mathcal{A}$ *и* $B_2(0) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$, *причем* $\gamma_F(M(F)) = +1$, $F \in \overline{B_2(0)}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) $F \in \overline{B_2(0)}$ *и* $K_F(M(F)) = 0$*;*

(b) $F \in S_2(0) \bigcap \mathrm{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$*;*

(c) $F$ *– точка выхода (при* $b = 1$*) из множества* $\overline{B_2(0)} \bigcap \mathcal{A}$ *вдоль луча* $bF$, *при этом динамика* $M(bF)$ *допускает только бифуркацию типа* $\Psi$.

**Доказательство.** Воспользуемся цепочкой неравенств

$$|\{f, a\}| \leq |F'(a)| + |F(a)|^2/2 \leq 2/(1 - |a|^2)^2, \ a \in M(F), \ F = P(f) \in \overline{B_2(0)}. \quad (13)$$

Так как при $F \in B_2(0)$ второе неравенство в (13) будет строгим $K_F(M(F)) > 0$ (см. (9)), то $B_2(0) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ по теореме 1. Тогда, согласно лемме 1, п. 2), $\gamma_F(M(F)) = +1$ для $F \in B_2(0)$, а также для $F \in S_2(0) \bigcap \mathrm{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$. По лемме 1, п. 4), для проверки включения $\overline{B_2(0)} \subset \mathcal{A}$ остается показать, что $\gamma_F(M(F)) = +1$ и для $F \in S_2(0) \bigcap \mathrm{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$.

Поскольку при $F \in S_2(0)$ выполнение (13) означает $K_F(M(F)) \geq 0$, в силу $F \in \mathrm{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ и второго равенства (12) имеет место соотношение $K_F(M(F)) = 0$, превращающее (13) в цепочку равенств. Если $a = 0 \in M(F)$, то требуемое заключение $\gamma_F(0) = +1$ (с бифуркацией $\Psi$ вдоль луча $bF$ при $b = 1$) получается с использованием леммы 2 и $B_2(0) \subset \mathcal{A}$. Если же $a \in M(F) \setminus \{0\}$, а тогда $F(a) = |F(a)|e^{-i\alpha}$ при $a = |a|e^{i\alpha}$, то цепочка (равенств) (13) благодаря «внутренним сокращениям» за счет $|F'(a)| = 2/(1 - |a|^2)$, $F'(a) = -|F'(a)|e^{-i2\alpha}$ и $F(a) = 2\overline{a}/(1 - |a|^2)$ сводится к равенству $e^{i2\alpha}\{f, a\} = -2/(1 - |a|^2)^2$, то есть $g'(a) = 0$ ($g(\zeta) = \zeta F(\zeta)$). Применение леммы 2 вновь приводит к бифуркации типа $\Psi$ в силу $B_2(0) \subset \mathcal{A}$; при этом $\gamma_F(a) = +1$, что и требовалось. Попутно доказано, что $(b) \Leftrightarrow (c)$.

Эквивалентность $(a) \Leftrightarrow (b)$ получается как «след» первого равенства (12) на только что установленном соотношении $\overline{B_2(0)} \subset \mathcal{A}$ с учетом $B_2(0) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$. □

**Следствие 2.** *Функции* $F \in S_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ *имеют следующие начальные отрезки тейлоровских разложений в окрестностях точек* $a$ *с* $\{a\} = M(F)$*: если* $a = 0$*, то* $F(\zeta) = 2\varepsilon\zeta + a_3\zeta^3 + \cdots$*,* $|\varepsilon| = 1$*, где* $|a_3| \le 2/3$*, а если* $a \ne 0$*, то*

$$F(\zeta) = \frac{2\bar{a}}{1-|a|^2} - \frac{2\bar{a}}{a(1-|z|^2)}(\zeta - a) - \frac{2\bar{a}^2}{a(1-|a|^2)^2}(\zeta-a)^2 + \cdots,$$

*причем*

$$g(\zeta) = \frac{2|a|^2}{1-|a|^2} - \frac{2\bar{a}}{a(1-|a|^2)^2}(\zeta-a)^2 + \cdots$$

Прежде чем дать полное описание множества $S_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$, докажем следующее

**Предложение 2.** *Имеют место равенства*

$$\mathbb{S}_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} = \mathbb{S}_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}} = \{F \in \mathbb{S}_2(0) : |F'(0)| = 2\}.$$

**Доказательство.** Обозначим $s_1 = \mathbb{S}_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$, $s_2 = \{F \in \mathbb{S}_2(0) : |F'(0)| = 2\}$, $s_3 = \mathbb{S}_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ и покажем, что $s_1 \subset s_2 \subset s_3 \subset s_1$.

1) Пусть $F \in s_1$. Тогда по теореме 2 $F \in \overline{B_2(0)} \bigcap \operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \bigcap \operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$, значит, по теореме 1, $K_F(M(F)) = 0$; кроме того, $F \in S_2(0)$. Легко проверить, что $\mathbb{S}_2(0) \bigcap S_2(0) \subset \widetilde{\mathcal{B}}$, поэтому $s_1 \subset \widetilde{\mathcal{B}}$. Вместе с $F \in \mathcal{A}$ это влечет $M(F) = \{0\}$, следовательно, $K_F(0) = 0$, и формула (9) немедленно дает $|F'(0)| = 2$, откуда $F \in s_2$.

2) Пусть $F \in s_2$. Условие $F \in \mathbb{S}_2(0)$ с учетом равенства $|F'(0)| = 2$ приводит к $F \in S_2(0)$, значит, как и выше, $F \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Далее, так как $|F'(0)| = 2$, то $(0,1) \in \mathfrak{B}_F$ – точка бифуркации в силу (9) и леммы 2. Поскольку согласно условию при $b \le 1$ будет $bF \in \overline{B_2(0)}$, то $\bar{b}(F) = 1$, и, по лемме 2, указанная бифуркация имеет тип $\Psi$. Значит, при $b > 1$, близких к 1, $bF \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Пересечение с $\widetilde{\mathcal{B}}$ дает $bF \in \widetilde{\mathcal{A}}$ при $b \le 1$ и $bF \in \widetilde{\mathcal{B}} \setminus \widetilde{\mathcal{A}}$ при $b > 1$ вблизи 1. Таким образом, $F \in \operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, и $F \in s_3$.

3) Включение $s_3 \subset s_1$ – немедленное следствие соотношения $\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{B}} \bigcap \operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ (см. [22, с. 120–121]). □

Основной результат настоящего раздела – следующая

**Теорема 3.** *Пересечение* $\mathcal{S} = S_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ *разбивается в дизъюнктное объединение*

$$\mathcal{S} = \mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}} \bigsqcup \mathcal{B}_{\mathcal{A}}, \tag{14}$$

*где* $\mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \mathbb{S}_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$*, а* $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ *– образ множества* $\mathcal{E} = \{(\phi, a) \in \mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}} \times \mathbb{D}^* : \phi'(0) = -2\bar{a}/a\}$ $(\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\})$ *при взаимно однозначном отображении*

$$\mathcal{F} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}_{\mathcal{A}} : (\phi, a) \mapsto \frac{2\bar{a}}{1-|a|^2} + \phi\left(\frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}\right). \tag{15}$$

*Продолжим* $\mathcal{F}$ *в слой* $\mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}} \times \{0\}$*:* $\mathcal{F}(\phi, 0) = \phi$*,* $\phi \in \mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}}$*. Тогда суперпозиция* $\mathcal{P} \circ \mathcal{F}$*, где* $\mathcal{P} : \mathbb{S} \times I \times \mathbb{P}^1 \to \mathcal{E} \bigsqcup (\mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}} \times \{0\}) : (G, \xi, \varepsilon) \mapsto (-2\varepsilon^{-2}G, \xi\varepsilon)$*,* $\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}}_1(0) \bigcap \bigcap \{G \in H : G'(0) = 1\}$ *и* $I = (-1, 1)$*, устанавливает представление*

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\bar{\varepsilon}\xi}{1-\xi^2} - 2\varepsilon^{-2}G\left(\frac{\zeta - \varepsilon\xi}{1 - \bar{\varepsilon}\xi\zeta}\right) : G \in \mathbb{S},\, \xi \in I,\, \varepsilon \in \mathbb{P}^1\right\}. \tag{16}$$

**Доказательство.** Разложение (14) соответствует разбиению $\mathcal{B}$ на $\widetilde{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{B}\setminus\widetilde{\mathcal{B}}$. Из предложения 2 получаем

$$\mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}} := \widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\mathcal{S} = \mathbb{S}_2(0)\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} = \mathbb{S}_2(0)\bigcap\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}} = \{2\eta F : F\in\mathbb{S}, |\eta|=1\}; \tag{17}$$

таким образом, остается описать множество $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} := \mathcal{S}\setminus\widetilde{\mathcal{B}}$. Сначала покажем, что

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \{F\in S_2(0) : (1-|a|^2)F'(a) = -2\bar{a}/a, \text{ где } M(F)=\{a\} \text{ и } a\neq 0\}. \tag{18}$$

Пусть $F\in\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$. Так как $\mathcal{S}\subset\mathcal{A}\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ (см. теорему 2, $\overline{B_2(0)}\subset\mathcal{A}$), по теореме 1 имеем $K_F(a)=0$ для единственного элемента $a$ из $M(F)$, причем $a\neq 0$ в силу $F\notin\widetilde{\mathcal{B}}$. Тогда из доказательства теоремы 2 следует, что $|F|_{\mathcal{B}}=2$ и $g'(a)=0$, где $g(\zeta)=\zeta F(\zeta)$. Выполняющаяся при $M(F)\ni a\neq 0$ эквивалентность

$$g'(a)=0 \iff (1-|a|^2)F'(a) = -2\bar{a}/a \tag{19}$$

устанавливает включение множества $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ в выделяемое правой частью (18) подмножество предсферы $S_2(0)$.

Включение, противоположное установленному, основано на том, что в силу (19), леммы 2 и условия $F\in S_2(0)$ слоение $\mathfrak{B}_F$ в точке $(a,1)$ имеет бифуркацию типа $\Psi$, а это значит (теорема 2, $(b)\Leftrightarrow(c)$), что $F\in\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$, и соотношение (18) доказано.

Теперь покажем, что $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}=\mathcal{F}(\mathcal{E})$ (см. (15)).

Проверим, что $\mathcal{F}(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$. Выберем произвольный элемент $(\phi,a)\in\mathcal{E}$ и рассмотрим в качестве $F(\zeta)$ выражение из правой части (15). Тогда из свойств $\phi$ непосредственным вычислением получаем, что $F'(a)(1-|a|^2)=\phi'(0)$ и $|F|_{\mathcal{B}} = ||\phi||_{\mathcal{B}}=2$, поэтому по теореме 2 множество $M(F)$ одноточечно и совпадает с $\{a\}$ в силу соотношения $F(a)=2\bar{a}/(1-|a|^2)$ – уравнения Гахова при $\zeta=a$ (см. (2)).

Инъективность: пусть $\mathcal{F}(\phi_1,a_1)=\mathcal{F}(\phi_2,a_2)=F$ для $(\phi_i,a_i)\in\mathcal{E}$, $i=1,2$. Тогда ввиду только что доказанного имеем $F\in\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$, поэтому $M(F)$ – одноточечное множество, следовательно, $a_1=a_2$, откуда $\phi_1=\phi_2$.

Сюръективность почти очевидна: функция $\phi(\zeta) = F\circ((\zeta+a)/(1+\bar{a}\zeta)) - 2\bar{a}/(1-|a|^2)$ – решение уравнения $\mathcal{F}(\phi,a)=F$ при заданном $F\in\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ с $M(F) = \{a\}$, $a\neq 0$.

Для параметризации множества $\mathcal{S}$ перейдем от $a=\xi\varepsilon\in\mathbb{D}$ к переменным $\xi\in I$ и $\varepsilon\in\mathbb{P}^1$; здесь $\mathbb{P}^1$ отождествляется с полуокружностью в духе предложения 2.11 из [30, с. 147]. Указанный переход позволяет рассматривать уравнение $\phi'(0)=-2\varepsilon^{-2}$ в качестве определяющего как для $\mathcal{E}$ ($\xi\neq 0$), так и для $\mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}}\times\{0\}$ ($\xi=0$), см. (17). Биекция $\mathcal{P}$ преобразует данное уравнение к виду $G'(0)=1$; тем самым область определения параметризации упрощается до $\mathbb{S}\times I\times\mathbb{P}^1$. Продолжая $\mathcal{F}$ на $\mathcal{B}_{\widetilde{\mathcal{A}}}\times\{0\}$ как проекцию на первый сомножитель, окончательно имеем $\mathcal{S}=\mathcal{F}\circ\mathcal{P}(\mathbb{S}\times I\times\mathbb{P}^1)$, а это и есть представление (16). □

## 2. Звездообразность множества $\widetilde{\mathcal{A}}$

В качестве основы выступает следующая

**Лемма 3.** *Если* $F\in\widetilde{\mathcal{B}}$ *и* $\gamma_{\beta F}(0)=+1$ *при* $\beta>\bar{b}=\bar{b}(F)$, *то* $\mathfrak{B}'(\beta)\neq\{\bigcap\}$.

**Доказательство.** По лемме 2 в некоторой окрестности $W=U\times V\subset\mathbb{D}\times\mathbb{R}_+$ точки бифуркации $(\alpha,\beta)\in\mathfrak{B}'(\beta)$ типа $\bigcap$ пересечение $\mathfrak{B}'\bigcap W$ есть аналитическая дуга вида $(a(\nu),b(\nu))$, $\nu\in\Omega$. $C^\omega$-функции $a:\Omega\to U$ и $b:\Omega\to V_< = \{\tau\in V : \tau < b\}$ определены в окрестности $\Omega$ точки $|\alpha|$, причем $a'(\nu)\neq 0$, $|a(\nu)|=\nu$, $\nu\in\Omega$, $a(|\alpha|)=\alpha$ и $b(|\alpha|)=\beta$; кроме того, $b'(\nu)>0$ при $\nu<|\alpha|$, $\nu\in\Omega$, и $b'(\nu)<0$

при $\nu > |\alpha|$, $\nu \in \Omega$. Последнее неравенство с помощью непосредственно проверяемого соотношения

$$4 - \left(1-\nu^2\right)^4 \left|\left\{f_{b(\nu)}, a(\nu)\right\}\right|^2 = \frac{4(1-\nu^2)^2}{|a'(\nu)|^2}\nu\frac{b'(\nu)}{b(\nu)}\left[\frac{2}{1-\nu^2} - \nu\frac{b'(\nu)}{b(\nu)}\right],\ \nu \in \Omega,$$

и п. 2) леммы 1 влечет за собой $\gamma_{b(\nu)}(a(\nu)) = -1$ при $\nu > |\alpha|$, $\nu \in \Omega$. В силу (10) отсюда следует, что $\gamma_{b(\nu)}(a(\nu)) = +1$ при $\nu < |\alpha|$, $\nu \in \Omega$.

Теперь предположим, что $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\bigcap\}$. Согласно только что доказанному уменьшение модулей элементов $a \in M(bF) \setminus \{0\}$ с убыванием $b < \beta$ вблизи $\beta$ может происходить только за счет движения точек $(a,b) \in \mathfrak{B}'$ вдоль полудуг индекса $\gamma = +1$ с вершинами в $\mathfrak{B}'(\beta)$ (другие варианты исключаются леммой 2 с учетом конечности $M(\beta F)$). Но тогда при любом $b < \beta$, достаточно близком к $\beta$, $\min\{|a| : a \in M(bF) \setminus \{0\}\}$ достигается в некоторой точке $c$, в которой $\gamma_{bF}(c) = +1$, а это противоречит заключению леммы 1 из [9]. □

**Лемма 4.** *Если $F \in \widetilde{\mathcal{B}}$ и $M(F) = \{0\}$, то $\gamma_F(0) = +1$.*

**Доказательство.** Вариант $\gamma_F(0) = -1$ исключается с помощью п. 3) леммы 1: в этом случае, кроме седла в $\zeta = 0$, множество $M(F)$ содержит по крайней мере два максимума, что противоречит условию.

Предположим теперь, что $\gamma_F(0) = 0$ ($\zeta = 0$ – полуседло). По лемме 2 существуют окрестности $U \subset \mathbb{D}$ и $V \subset \mathbb{R}_+$ точек $\zeta = 0$ и $b = 1$ соответственно, такие, что $\mathfrak{B}' \bigcap (U \times V_<)$ есть $C^\omega$-полудуга над $V_< = \{b \in V : b < 1\}$ с параметрическим представлением $(a(b), b)$, $b \in V_<$, причем $\lim\limits_{b \to 1} a(b) = 0$ и $a(b) \neq 0$, $\gamma_{bF}(a(b)) = -1$ при $b \in V_<$. Так как $\gamma_{bF}(0) = +1$, $b \in V_<$, то по лемме 1, п. 3), отсюда следует, что для любого $b \in V_<$ существует точка $c(b) \in M(bF) \setminus \{0\}$ с $\gamma_{bF}(c(b)) = +1$, $b \in V_<$.

Возьмем последовательность $(b_n)$ такую, что $b_n \in V_<$ и $b_n \to 1$ при $n \to \infty$. Переход к подпоследовательности устанавливает сходимость $c(b_n) \to c_0$, $n \to \infty$, где $c_0 \in \mathbb{D}$ в силу предложения 1. Так как слоение $\mathfrak{B}$ замкнуто в $\mathbb{D} \times \mathbb{R}_+$, то $c_0 \in M(F)$, а поскольку, как показано выше, в цилиндре $U \times V_<$ нет точек $\mathfrak{B}'$ с $\gamma = +1$, то $c_0 \notin U$. Итак, $c_0 \in M(F) \setminus \{0\}$, вновь получили противоречие, значит, $\gamma_F(0) = +1$. □

Теперь докажем звездообразность $\widetilde{\mathcal{A}}$.

**Теорема 4.** *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Если $k(F) = 1$, то $k(bF) = 1$ для любого $b \in (0,1)$.*

**Доказательство.** Предположим, что множество $T = \{b \in (0,1) : k(bF) > 1\}$ не пусто; $\beta := \sup T$. Рассмотрим последовательность $(b_n)$ с условиями $b_n \in T$, $b_n < \beta$, $n \in \mathbb{N}$, и $b_n \to \beta$ при $n \to \infty$. По $(b_n)$ строится последовательность $(a_n)$ такая, что $a_n \in M(b_n F) \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$; переходя к подпоследовательности, будем иметь $a_n \to \alpha$, $n \to \infty$, причем $\alpha \in M(\beta F)$ в силу предложения 1 и замкнутости $\mathfrak{B}$. Так как $\gamma_F(0) = +1$ по лемме 4, то в силу леммы 2 точки $(a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, не могут сгущаться к точке $(0, \beta)$, поэтому $\alpha \neq 0$, и, значит, $M(\beta F) \neq \{0\}$. Отсюда, в частности, следует, что $\beta \in T$ и $\beta < 1$. Поскольку $k(bF) = 1$ при $b \in (\beta, 1]$, то $b$ не может служить параметром ни для какой $C^\omega$-дуги, проходящей через $\mathfrak{B}'(\beta)$. Единственная возможность, оставляемая при этом леммой 2, – $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\bigcap\}$ – исключается леммой 3. Таким образом, $T = \varnothing$, и теорема доказана. □

**Замечание 3.** Леммы 2–4 организуют локальный подход к обоснованию звездообразности $\widetilde{\mathcal{A}}$. В работе [8] для такого обоснования использовалось разбиение $\mathfrak{B}$ на вещественно аналитические компоненты. В [8] также построен пример функции $F \in \mathcal{B} \setminus \widetilde{\mathcal{B}}$, демонстрирующий отсутствие звездообразности множества $\mathcal{A}$.

### 3. Свойства функционала первого выхода из множества $\widetilde{\mathcal{A}}$

Напомним, что положительность функционала $\bar{b}$ установлена в теореме 2. Обозначим $\widetilde{b} = \bar{b}_{|\widetilde{\mathcal{B}}}$. Множество $\widetilde{\mathcal{A}}$ будет поглощающим в $\widetilde{\mathcal{B}}$, то есть $\bigcup\limits_{b>0} b\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{B}}$ (теорема 2) и звездообразным в $\widetilde{\mathcal{B}}$ (теорема 4). Поэтому [31, с. 147] на $\widetilde{\mathcal{A}}$ корректно определен функционал Минковского $\rho(F) = 1/\widetilde{b}(F)$, причем $\widetilde{\mathcal{A}}_< \subset \widetilde{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{A}}_\leq$, где $\widetilde{\mathcal{A}}_< := \{F \in \widetilde{\mathcal{B}} : \rho(F) < 1\}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_\leq := \{F \in \widetilde{\mathcal{B}} : \rho(F) \leq 1\}$. Так как любая функция из $\widetilde{\mathcal{B}}$ поглощается предсферой $\widetilde{S}_1 = \widetilde{S}_1(0)$, следовательно, однозначно представляется в виде $bF$ с $b > 0$ и $F \in \widetilde{S}_1$, и так как функционал $\rho$ положительно однороден, $\widetilde{\mathcal{A}}_< = \{bF : F \in \widetilde{S}_1, b < \widetilde{b}(F)\}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_\leq = \{bF : F \in \widetilde{S}_1, b \leq \widetilde{b}(F)\}$.

**Теорема 5.** *Имеют место соотношения* 1) $\widetilde{\mathcal{A}}_< = \operatorname{Int}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, 2) $\widetilde{\mathcal{A}}_\leq = \operatorname{Cl}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, 3) $\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{b}(F)F : F \in \widetilde{S}_1\}$. *Функционал* $\widetilde{b}$: 4) *конечен и* 5) *непрерывен на* $\widetilde{S}_1$, *причем* 6) $2 \leq \widetilde{b}(F) \leq 2/|F'(0)|$, $F \in \widetilde{S}_1$. *Кроме того,* 7) *одновременное выполнение обоих неравенств из п.* 6) *эквивалентно условию* $2F \in S_2(0) \bigcap \operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, $F \in \widetilde{S}_1$.

**Доказательство.** Левое неравенство 6) – следствие теоремы 2. Далее, по лемме 2 бифуркационным значением параметра $b$ для элемента $0 \in M(F)$ при $F'(0) \neq 0$ будет $b^* = 2/|F'(0)|$, то есть $k(bF) > 1$ при $b > b^*$. Отсюда следует правое неравенство 6), тривиальное в случае $F'(0) = 0$.

1) Если $bF \in \widetilde{\mathcal{A}}_<$, то по теореме 1 неравенство $K_{bF}(0) > 0$ (очевидное при $F'(0) = 0$ и справедливое в силу второй оценки 6) при $F'(0) \neq 0$, см. (9)) обеспечивает принадлежность $bF \in \operatorname{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$, усиливающуюся до $bF \in \operatorname{Int}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ благодаря стандартно проверяемому включению $\widetilde{\mathcal{B}} \bigcap \operatorname{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \subset \operatorname{Int}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$. Обратно, соотношение $\mathbb{B}_\varepsilon(bF) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ для $bF \in \operatorname{Int}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ в силу звездообразности $\widetilde{\mathcal{A}}$ влечет за собой неравенства $b < b + \varepsilon \leq \widetilde{b}(F)$, откуда $bF \in \widetilde{\mathcal{A}}_<$.

2) Для обоснования включения $\widetilde{\mathcal{A}}_\leq \subset \operatorname{Cl}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ достаточно заметить, что для любого $bF \in \widetilde{\mathcal{A}}_\leq$ и любого $\varepsilon > 0$ функция $\beta F$ в силу соотношения $\widetilde{\mathcal{A}}_< \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ содержится в $\mathbb{B}_\varepsilon(bF) \bigcap \widetilde{\mathcal{A}}$ при каждом $\beta \in (b - \varepsilon, b)$.

Чтобы доказать включение $\widetilde{\mathcal{A}}_\leq \supset \operatorname{Cl}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, предположим существование последовательности $b_nF_n \in \widetilde{\mathcal{A}}_\leq$ с $F_n \in \widetilde{S}_1$, для которой $b_nF_n \xrightarrow{\mathcal{B}} bF$ $(n \to \infty)$, $F \in \widetilde{S}_1$, но $bF \notin \widetilde{\mathcal{A}}_\leq$. Тогда $b > \widetilde{b}(F)$. Ясно, что $b_n \to b$ и $F_n \xrightarrow{\mathcal{B}} F$ при $n \to \infty$.

Обозначая для краткости $M_b = M(bF) \setminus \{0\}$, покажем, что найдется сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $b' = b - \varepsilon > \widetilde{b}(F)$ и множество $M_{b'}$ содержит точку $\alpha$ с $\gamma_{b'F}(\alpha) \neq 0$. Действительно, в случае, когда $\gamma_{bF}(M_b) = 0$ и кратности элементов $a \in M_b$ как нулей соответствующих функций $g - g(a)$ равны 1, то наличие такой точки $\alpha$ обеспечивается леммой 2: хотя бы один элемент из $M_b$ представляет бифуркацию типа $\bigcap$ – в противном случае ($\mathfrak{B}'(b) = \{\bigcup\}$) при всех $\beta < b$, близких к $b$, функции $\beta F$ принадлежали бы множеству $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{A}}_\leq$, откуда $b \leq \widetilde{b}(F)$ – противоречие с $bF \notin \widetilde{\mathcal{A}}_\leq$. Если же найдется $\bar{\alpha} \in M_b$ с $\gamma_{bF}(\bar{\alpha}) \neq 0$ или с $\gamma_{bF}(\bar{\alpha}) = 0$, но с кратностью $\geq 2$, то вновь по лемме 2 из $\alpha$ в слой $\mathfrak{B}$ над $\beta < b$ будет исходить полудуга, вдоль которой $\gamma_{\beta F} \neq 0$ при $\beta < b$, близких к $b$, в частности, при $\beta = b'$.

Пусть теперь $\overline{U}$ – замкнутая окрестность точки $\alpha$ в $\mathbb{D}$, такая что $M(b'F) \bigcap \overline{U} = \{\alpha\}$. Последовательность отображений Гахова $G_n(\zeta) := b'_nF_n(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2)$ с $b'_n = b_n - \varepsilon$ равномерно сходится на $\overline{U}$ к функции $b'F(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2)$, имеющей в $\overline{U}$ единственный нуль $\alpha$ с индексом $\gamma_{b'F}(\alpha) \neq 0$. По обобщенной теореме Гурвица [32] отсюда следует существование номера $N$ такого, что любая функция $G_n$ при $n \geq N$ имеет в $\overline{U}$ алгебраическое число нулей, равное $\gamma_{b'F}(\alpha)$; тогда с учетом того, что $0 \notin \overline{U}$, имеем $k(b'_n F_n) > 1$, $n \geq N$, что противоречит соотношениям $b'_n F_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$, выполняющимся в силу $b'_n < b_n \leq \widetilde{b}(F)$, $n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие показывает, что $\widetilde{\mathcal{A}}_{\leq}$ – замкнутое множество, поэтому $\mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{A}}_{\leq}$.

Равенство 3) есть следствие 1) и 2).

4) При $F'(0) \neq 0$ обоснование исчерпывается применением второго неравенства 6). При $F'(0) = 0$ достаточно установить существование отличного от нуля элемента $M(bF)$ при некотором $b$. Уравнение

$$bF(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2), \tag{20}$$

определяющее множество $M(bF)$, перепишем с $b = 1$ в (эквивалентном при $\zeta \neq 0$) виде

$$(1 - |\zeta|^2)g(\zeta)/|\zeta|^2 = 2, \tag{21}$$

где $g(\zeta) = \zeta F(\zeta) = c\zeta^m + \cdots$, $c \neq 0$, $m \geq 3$. Униформизируя соответствие $w = g(\zeta)$ вблизи $\zeta = 0$, придем к существованию окрестности $V$ точки $v = 0$ и функции $\alpha(v) = \alpha_1 v + \ldots$, $\alpha_1 \neq 0$, голоморфно и однолистно отображающей $V$ на окрестность $\zeta = 0$ так, что $g(\alpha(v)) = v^m$, $v \in V$. Тогда уравнение (21) перепишется в виде $(1 - |\alpha(v)|^2)v^m/|\alpha(v)|^2 = 2$. Так как выражение слева равно нулю при $v = 0$ и так как $|F|_{\mathcal{B}} = 1$, откуда $k(F) = 1$ по теореме 2, то $M(F) = \{0\}$, и левая часть меньше 2 на $V \bigcap \mathbb{R}_+$, иначе множество $M(F)$ содержало бы ненулевой элемент. Но тогда для (любого) $v_0 \in V \bigcap \mathbb{R}_+$ найдется $b_0 (> 1)$ такое, что $b_0(1 - |\alpha(v_0)|^2)v_0^m/|\alpha(v_0)|^2 = 2$, таким образом, уравнение (20) при $b = b_0$ имеет ненулевой корень $\zeta_0 = \alpha(v_0)$. Поэтому $k(b_0 F) \geq 2$, значит, $\widetilde{b}(F) \leq b_0 < \infty$.

5) Пусть последовательность $F_n \in \widetilde{S}_1$ сходится к $F (\in \widetilde{S}_1)$ по норме $\mathcal{B}$. Тогда для (любого) $b > \widetilde{b}(F)$ имеет место сходимость $bF_n \xrightarrow{\mathcal{B}} bF$. Рассуждая так же, как при доказательстве включения $\widetilde{\mathcal{A}}_{\leq} \supset \mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ в п. 2), устанавливаем существование элемента $\alpha \in M(bF)$ такого, что $k(bF_n) > |\gamma_{bF}(\alpha)| = 1$, значит, $\widetilde{b}(F_n) \leq b$ для всех $n$, начиная с некоторого. Поэтому последовательность $\widetilde{b}(F_n)$ – ограниченная.

Пусть $(F_{n_k})$ – произвольная подпоследовательность $(F_n)$, на которой функционал $\widetilde{b}$ сходится: $\widetilde{b}(F_{n_k}) \to b_1$ при $k \to \infty$. Ясно, что $\mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}} \ni \widetilde{b}(F_{n_k})F_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{B}} b_1 F$, откуда $b_1 F \in \mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, поэтому $b_1 = \widetilde{b}(F)$ в силу 3). Таким образом, $\widetilde{b}(F)$ – единственная предельная точка последовательности $(\widetilde{b}(F_n))$: $\widetilde{b}(F) = \lim\limits_{n \to \infty} \widetilde{b}(F_n)$.

7) Осталось доказать представление $S_2(0) \bigcap \mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}} = \{2F : F \in \widetilde{S}_1, |F'(0)| = 1\}$.

Очевидное свойство $2F \in S_2(0)$ и неравенства 6), в силу $|F'(0)| = 1$ приводящие к $\widetilde{b}(F) = 2$, а значит, и к $2F \in \mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ (см. п. 3)), демонстрируют, что правая часть доказываемого представления есть подмножество левой.

Если теперь $bF \in S_2(0) \bigcap \mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, $F \in \widetilde{S}_1$, то $b = 2$. По теореме 2 имеем $2F \in \mathcal{A}$, поэтому $2F \in \widetilde{\mathcal{A}} \bigcap \mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$. Благодаря $\mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{B}} \bigcap \mathrm{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ имеем $2F \in \mathcal{A} \bigcap \mathrm{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$, значит, по теореме 1 $K_{2F}(0) = 0$, то есть $|F'(0)| = 1$ (см. (9)). □

Утверждение 7) теоремы 5 допускает следующую очевидную переформулировку.

**Следствие 3.** *Пересечение $S_2(0) \bigcap \mathrm{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ параметризуется $(F \mapsto 2F)$ в точности теми элементами $F \in \widetilde{S}_1$, для которых гиперболическая производная $h_F(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|F'(\zeta)|$ достигает своего максимума, равного 1, при $\zeta = 0$.*

Из результатов [33] следует, что указанному пересечению принадлежат, например, все функции $2F$, где $F \in H_0$ с $F''(0) = 0$ и одним из условий $\mathrm{Re}\, F'(\zeta) > 1/2$ или $(1 - |\zeta|^2)^2 |\{F, \zeta\}| \leq 2$ при $\zeta \in \mathbb{D}$. Если $F(\mathbb{D})$ не совпадает с полосой, то в обоих случаях будет $k_F = 1$, то есть функция $h_F$ имеет единственную критическую точку ($\zeta = 0$) в $\mathbb{D}$. Разумеется, последнее нетипично для функций из

$$\mathcal{A} = \{F \in \mathcal{B} : k(F) = 1\}$$

и $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \bigcap \widetilde{\mathcal{B}}$ (напомним, что равенство $k(F) = 1$ означает единственность критической точки функции $h_f$ для $f = P^{-1}(F)$). Источником примеров $F \in \mathcal{A}$ с $k_F > 1$ может служить подкласс

$$\mathcal{R} = \{F \in H_0 : \operatorname{Re} F'(\zeta) > 0, \zeta \in \mathbb{D}, \text{ и } F''(0) = 0\},$$

содержащийся в $\overline{B_2(0)}$. Если в определении $\mathcal{R}$ исключить условие $F''(0) = 0$, то получившийся класс будет содержаться уже в предшаре $\overline{B_4(0)}$, оставаясь, тем не менее, в $\mathcal{A}$. Выход из $\overline{B_2(0)}$ при отмене условия $F''(0) = 0$ связан с тем, что согласно следствию 3 оно будет необходимым для одновременного выполнения равенств в оценках п. 6) теоремы 5. Однако оно не является достаточным: как показывает пример из следующего замечания, нарушение одновременного равенства в указанных оценках возможно и при $F''(0) = 0$. Сам пример строится на основе функции из класса $\mathcal{R}$, в определении которого отсутствует нормировка $F'(0) = 1$.

**Замечание 4.** Кроме исследованного выше случая $2 = \widetilde{b}(F) = \widetilde{\beta}(F)$, где $\widetilde{\beta}(F) = 2/|F'(0)|$, имеется еще три варианта оценок п. 6) теоремы 5:

1) $2 = \widetilde{b}(F) < \widetilde{\beta}(F)$;
2) $2 < \widetilde{b}(F) = \widetilde{\beta}(F)$;
3) $2 < \widetilde{b}(F) < \widetilde{\beta}(F)$.

Первый вариант невозможен: если $\widetilde{b}(F) = 2$ при $F \in \widetilde{S}_1$, то из п. 3) теоремы 5 следует, что $2F \in S_2(0) \bigcap Fr_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, а из п. 7) – $\widetilde{b}(F) = \widetilde{\beta}(F)$. Вариант 2) реализуется, пример – функция $F \in \widetilde{\mathcal{B}}$, удовлетворяющая условиям $F'(\zeta) = (1/2)(1 + \zeta^2)/(1 - \zeta^2)$, $||F||_{\mathcal{B}} = 1$, $\widetilde{b}(F) = \widetilde{\beta}(F) = 4$. Выполнимость варианта 3) устанавливается ниже в замечании 5.

## 4. Связь между топологическими операциями на $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}$

Продолжим исследование, начатое в леммах 3 и 4. Справедлива

**Лемма 5.** *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{B}}$ и $\beta > \bar{b} = \bar{b}(F)$. Если $\gamma_{\beta F}(0) \neq 0$, то множество $M(\beta F) \setminus \{0\}$ содержит не менее двух точек ненулевого индекса.*

**Доказательство.** Требуется исключить две возможности: 1) в $M(\beta F) \setminus \{0\}$ только один элемент имеет индекс $\gamma_{\beta F} \neq 0$; 2) $\gamma_{\beta F}(M(\beta F) \setminus \{0\}) = 0$. Применение леммы 1 в случае $\gamma_{\beta F}(0) = -1$ опровергает как 1), так и 2) (ср. с доказательством леммы 4), а при $\gamma_{\beta F}(0) = +1$ – только 1). Остается исключить ситуацию, когда $\gamma_{\beta F}(0) = +1$ и слоение $\mathfrak{B}'(\beta)$ состоит только из точек бифуркации типа $\bigcup$ или $\bigcap$. Случай $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\bigcup\}$ невозможен в силу $\beta > \bar{b}$, случай $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\bigcap\}$ – в силу леммы 3. Последняя налагает запрет и на случай $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\bigcup, \bigcap\}$, так как динамика $M(bF) \setminus \{0\}$ с убыванием $b < \beta$ вблизи $\beta$, приводящая к противоречию в доказательстве леммы 3, не зависит от наличия бифуркаций типа $\bigcup$ в $\mathfrak{B}'(\beta)$. $\square$

Существенность условия $\gamma_{\beta F}(0) \neq 0$ в лемме 5 демонстрирует следующий

**Пример 1.** Пусть $\omega \in (0, 1)$. Рассмотрим функцию

$$F = F_\omega(\zeta) = (1 - \omega^2)\,\frac{\zeta}{1 - \omega\zeta} \tag{22}$$

с $||F||_{\mathcal{B}} = 1$. Слоение $\mathfrak{B}_{F_\omega}$ состоит из двух $C^\omega$-компонент: $\mathfrak{b}_0 = \{0\}\times\mathbb{R}_+$ и $\mathfrak{b}_1 = \{(x, b(x)) : x \in (-1,1)\}$, где

$$b(x) = \frac{2}{1-\omega^2}\,\frac{1-\omega x}{1-x^2}.$$

Кривая $\mathfrak{b}_1$ пересекает луч $\mathfrak{b}_0$ в точке $(0,\beta)$, где

$$\beta = \widetilde{\beta}(F_\omega) = 2/(1-\omega^2). \tag{23}$$

При этом $\gamma_{\beta F}(0) = 0$, $M(\beta F)\setminus\{0\} = \{\omega\}$ и $\gamma_{\beta F}(\omega) = +1$.

**Следствие 4.** *Существует единичный вектор $F \in \widetilde{\mathcal{B}}$ такой, что величина $k(bF)$ не является монотонной на $\mathbb{R}_+$ как функция от $b$.*

**Доказательство.** Требуемым вектором служит функция (22). Действительно, для $F = F_\omega$ имеем $k(bF) = 1$, если $b \in (0, \widetilde{b}(F_\omega))$, где

$$\widetilde{b}(F_\omega) = \min_{x\in(-1,1)} b(x) = \frac{1+\sqrt{1-\omega^2}}{1-\omega^2}, \tag{24}$$

$k(\widetilde{b}(F_\omega)F) = k(\beta F) = 2$ и $k(bF) = 3$, когда $b \in (\widetilde{b}(F_\omega), \beta)\bigcup(\beta, +\infty)$. □

**Замечание 5.** Из (23) и (24) видно, что для $F = F_\omega(\zeta)$ справедливы неравенства $2 < \widetilde{b}(F) < \widetilde{\beta}(F)$. Таким образом, вариант 3) в замечании 4 содержателен.

**Теорема 6.** *Имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap \operatorname{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} = \operatorname{Int}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}. \tag{25}$$

**Доказательство.** Результат содержится в обосновании п. 1) теоремы 5; элементарный характер включения левой части (25) в правую там уже отмечен. Чтобы доказать противоположное включение, напомним, что соотношение $\widetilde{\mathcal{A}}_< \subset \operatorname{Int}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ опирается на импликацию $bF \in \widetilde{\mathcal{A}}_< \Rightarrow bF \in \operatorname{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$. Если вновь применить ее, но уже с учетом итогового равенства $\widetilde{\mathcal{A}}_< = \operatorname{Int}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$, то в силу $bF \in \widetilde{\mathcal{B}}$ как раз и получается включение правой части (25) в левую. □

Приведем теперь три признака, достаточных для принадлежности $F$ множеству $\operatorname{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$, в зависимости от ненулевых значений функционала $\gamma_F$.

**Предложение 3.** *Если $F \in \mathcal{B}$ и множество $M(F)$ содержит хотя бы две точки ненулевого индекса, то $F \in \operatorname{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$.*

**Доказательство.** Предположим противное; тогда найдется последовательность $(F_n)$ такая, что $F_n \in \mathcal{A}$, $n \in\mathbb{N}$, и $F_n \xrightarrow{\mathcal{B}} F$ при $n \to \infty$. По условию $M(F)$ содержит две различные точки $a_1$ и $a_2$ с $\gamma_F(a_i) \neq 0$, $i = 1,2$. Действуя, как в п. 2) теоремы 5, возьмем замкнутые окрестности $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ точек $a_1$ и $a_2$ в $\mathbb{D}$, такие, что $M(F)\bigcap\overline{U}_i = \{a_i\}$, $i = 1,2$, и воспользуемся тем, что последовательность $F_n(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2)$ равномерно сходится на $\overline{U}_1$ и на $\overline{U}_2$ к функции $F(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2)$. По обобщенной теореме Гурвица, начиная с некоторого номера $N$, каждая функция последовательности $(G_n)$ имеет в $\overline{U}_1$ и в $\overline{U}_2$ по одному нулю, откуда $F_n \notin \mathcal{A}$, $n \geq N$, – противоречие. □

В условиях леммы 5 предложение 3 принимает такой вид:

**Следствие 5.** *Если $F \in \widetilde{\mathcal{B}}$, $\beta > \bar{b} = \bar{b}(F)$ и $\gamma_{\beta F}(0) \neq 0$, то $F \in \operatorname{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$.*

Как показывает доказательство леммы 5, наличие в $M(\beta F)\setminus\{0\}$ двух точек индекса $\gamma_{\beta F}\neq 0$ в случае $\gamma_{\beta F}(0)=-1$ устанавливается применением п. 3) леммы 1 независимо от значений $\beta$. Это дает упрощенный вариант следствия 5:

**Следствие 6.** *Если $F\in\widetilde{\mathcal{B}}$ и $\gamma_F(0)=-1$, то $F\in\operatorname{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$.*

При переходе от $\mathcal{F}=\operatorname{Int}$ к $\mathcal{F}=\operatorname{Fr}$ связь между $\mathcal{F}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\mathcal{F}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ усложняется. Сначала покажем, что $\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}\neq\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$; справедливо

**Предложение 4.** *Множество $C:=(\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A})\setminus\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ не пусто.*

**Доказательство.** Выполнение $\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}\subset\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ уже отмечалось выше. Для проверки соотношения $C\neq\varnothing$ нормируем функцию $F_\omega$ из (22):

$$G_\omega=\frac{2}{1-\omega^2}F_\omega. \tag{26}$$

Так как $\beta=2/(1-\omega^2)>\widetilde{b}(F_\omega)$ (см. замечение 5), то $G_\omega\notin\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ по теореме 5. Принадлежность $G_\omega\in\widetilde{\mathcal{B}}$ очевидна. Чтобы установить включение $G_\omega\in\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$, достаточно исследовать множества $M(H_\lambda)$ при $H_\lambda=\lambda+G_\omega$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Действительно, $||H_\lambda-G_\omega||_{\mathcal{B}}=|\lambda|$, $\lambda\in\mathbb{R}$, и несложный, но рутинный анализ показывает, что для сколь угодно малых $\lambda$ будет $k(H_\lambda)=1$, если $\lambda>0$, и $k(H_\lambda)=3$, если $\lambda<0$. □

Теперь докажем основной результат этого раздела.

**Теорема 7.** *Разбиение пространства $\widetilde{\mathcal{B}}$ в дизъюнктное объединение множеств $\Gamma_k=\{F\in\widetilde{\mathcal{B}}:\gamma_F(0)=k\}$, $k=-1,0,1$, согласовано с разбиением пересечения $\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ в дизъюнктное объединение множеств*

$$\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}=\Gamma_1\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}\quad\text{и}\quad C=\Gamma_0\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}. \tag{27}$$

**Доказательство.** Начнем с первого представления (27).

Покажем, что 1) $\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}\subset\Gamma_1\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ и 2) $\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}\supset\Gamma_1\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$.

1) Предположим, что $F\in\widetilde{S}_1$ и $\gamma_{\beta F}(0)=0$ или $-1$. Из леммы 2 следует, что $k(\beta F)>1$ при значениях $b<\beta$, близких к $\beta$. По определению $\widetilde{b}$ это означает, что $\widetilde{b}(F)<\beta$, откуда по теореме 5, п. 3), получим $\beta F\notin\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$.

2) Пусть $F\in\widetilde{S}_1$ и $bF\in\Gamma_1\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$. По теореме 5, п. 3), достаточно установить равенство $b=\widetilde{b}(F)$. Проверим, что предположения $b<\widetilde{b}(F)$ и $b>\widetilde{b}(F)$ противоречат соотношению $bF\in\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$. Действительно, в первом случае таким противоречием будет $bF\in\operatorname{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ по теореме 5, п. 1), и теореме 6, во втором – $bF\in\operatorname{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$ согласно следствию 5 при $\gamma_{bF}(0)=+1$. Таким образом, $bF\in\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$.

Итак, первое соотношение (27) доказано. Вычитая его из множества $\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}=(\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}})\bigsqcup C$, будем иметь $C=(\Gamma_0\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A})\bigcup(\Gamma_{-1}\bigcap\operatorname{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A})$. Но второе пересечение в этом представлении пусто благодаря включению $\Gamma_{-1}\subset\operatorname{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{A})$ (см. следствие 6), и в результате остается второе соотношение (27). □

Легко проверить, что $C\ni G_\omega\to G_0\in\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ по норме $\mathcal{B}$ при $\omega\to 0$ (см. (26)). Поэтому $\operatorname{Cl}_{\widetilde{\mathcal{B}}}C\bigcap\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}\neq\varnothing$ и $\operatorname{dist}_{\mathcal{B}}(C,Fr_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}})=0$. Имеет место

**Следствие 7.** *Если $F\in\widetilde{S}_1$ и точка $bF\in\operatorname{Fr}_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{\mathcal{A}}$ – предельная для множества $C$, то элемент $(0,b)\in\mathfrak{B}_F$ является точкой бифуркации типа $\Psi$ и $\widetilde{b}(F)=$ $=\widetilde{\beta}(F)$.*

**Доказательство.** По условию найдется последовательность $(F_n)$ функций из $C$ такая, что $F_n \to bF$ по норме $\mathcal{B}$ при $n \to \infty$. Тогда $K_{F_n}(0) \to K_{bF}(0)$, $n \to \infty$, что по теореме 7 и лемме 1, п. 2), приводит к $K_{bF}(0) = 0$, откуда $\beta = \widetilde{\beta}(F)$ (см. формулу (9)). Кроме того, равенство $K_{bF}(0) = 0$ вместе с включением $bF \in \Gamma_1$, справедливым в силу теоремы 7, обеспечивает наличие в точке $(0, b) \in \mathfrak{B}_F$ бифуркации типа $\Psi$. Наконец, $b = \widetilde{b}(F)$ согласно п. 3) теоремы 5. $\square$

Автор выражает благодарность профессору И.Б. Бадриеву за ценные советы и полезные дискуссии при подготовке статьи к печати.

**Summary**

*A.V. Kazantsev.* Gakhov Set in the Hornich Space under the Bloch Restriction on Pre-Schwarzians.

Gakhov set contains exactly those functions in the Hornich space over the unit disk which have the unique critical point of the conformal radius. The position of the intersection $\mathcal{A}$ of the Gakhov set and the Bloch space $\mathcal{B}$ is studied relative to the Banach structure of $\mathcal{B}$. A connection is revealed between the topological characteristics of the set $\mathcal{A}$ and the values of the curvature and index of the critical points for the functions in $\mathcal{A}$. An effective description is given for the set of points on the boundary of $\mathcal{A}$ with minimal pre-norm. By using the Minkowski functional, the starlikeness of the subset of the functions in $\mathcal{A}$ with the zero critical point of the conformal radius is established.

**Keywords:** hyperbolic derivative, conformal (inner mapping) radius, bifurcations of critical points, Hornich space, Bloch space, pre-Schwarzian, Gakhov set, interior and boundary of a set.

**Литература**

1. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
2. *Haegi H.R.* Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen // Compositio Math. – 1950. – V. 8, F. 2. – P. 81–111.
3. *Kazantsev A.V.* On a problem of Polya and Szegö // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 9. – P. 37–46.
4. *Аксентьев Л.А.* Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
5. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киселев А.В.* О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 10. – С. 8–18.
6. *Yamashita S.* The Schwarzian derivative and local maxima of the Bloch derivative // Math. Japonica. – 1992. – V. 37, No 6. – P. 1117–1128.
7. *Yamashita S.* The Poincaré density and the Liouville differential equation // Math. Japonica. – 1995. – V. 42, No 3. – P. 489–508.
8. *Казанцев А.В.* Гиперболические производные с предшварцианами из пространства Блоха // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2002. – Т. 14. – С. 135–144.
9. *Казанцев А.В.* Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 180–194.
10. *Garnett J., Nicolau A.* Interpolating Blaschke products generate $H^\infty$ // Pacific J. Math. – 1996. – V. 173, No 2. – P. 501–510.

11. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* The conformal radius as a function and its gradient image // Israel J. Math. – 2005. – V. 145, No 1. – P. 349–374.

12. *Ruscheweyh St., Wirths K.-J.* On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91–106.

13. *Гахов Ф.Д.* Об обратных краевых задачах // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 4. – С. 649–652.

14. *Аксентьев Л.А., Хохлов Ю.Е., Широкова Е.А.* О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – С. 319–333.

15. *Kazantsev A.V.* Parametric families of inner mapping radii // 2nd European Congr. Math., Budapest, July 22-26, 1996, Abstracts. – Budapest: János Bolyai Math. Soc., 1996. – P. 30.

16. *Авхадиев Ф.Г.* Функционал Минковского по областям значений логарифма производной и условия однолистности // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1992. – Вып. 27. – С. 3–21.

17. *Grigoryan S.A., Gumerov R.N., Kazantsev A.V.* Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups // Lobachevskii J. Math. – 2000. – V. 6. – P. 39–46.

18. *Казанцев А.В.* Бифуркации корней уравнения Гахова с левнеровской левой частью // Изв. вузов. Матем. – 1993. – № 6. – С. 69–73.

19. *Казанцев А.В.* Производные Блоха с блоховскими предшварцианами // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2001. – Т. 8. – С. 117–118.

20. *Казанцев А.В.* Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т, 2012. – 64 с.

21. *Anderson J.M., Clunie J., Pommerenke Ch.* On Bloch functions and normal functions // J. Reine Angew. Math. – 1974. – Bd. 270. – S. 12–37.

22. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

23. *Hornich H.* Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zusammenhang mit den schlichten Funktionen // Monatsh. Math. – 1969. – Bd. 73. – S. 36–45.

24. *Lamprecht M.* Starlike functions in the Hornich space // Comput. Meth. Funct. Theor. – 2007. – V. 7, No 2. – P. 573–582.

25. *Gehring F.W., Pommerenke Ch.* On the Nehari univalence criterion and quasicircles // Comment. Math. Helv. – 1984. – V. 59. – P. 226–242.

26. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 25. – С. 33–51.

27. *Nehari Z.* The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55, No 6. – P. 545–551.

28. *Киндер М.И.* Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104–116.

29. *Киселев А.В., Насыров С.Р.* О структуре множества корней уравнения Ф.Д. Гахова для односвязной и многосвязной областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 24. – С. 105–115.

30. *Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.* Общая топология. – М.: Высш. шк., 1979. – 336 с.

31. *Рид М., Саймон Р.* Методы современной математической физики. Т. 1. – М.: Мир, 1977. – 359 с.

32. *Švecova H.* Zobecnění vět o kořenech analytických funkcí // Čas. Pro Pěst. Mat. – 1960. – Sv. 85, Č. 4. – С. 418–438.

33. *Казанцев А.В.* Об одной задаче, связанной с экстремумом внутреннего радиуса // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1992. – Вып. 27. – С. 47–62.

Поступила в редакцию
06.06.12

**Казанцев Андрей Витальевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *kazandrey0363@rambler.ru*