УДК 539.3

УТОЧНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМИ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ ПРИ СРЕДНЕМ ИЗГИБЕ

В.Н. Паймушин, Т.В. Полякова

Аннотация

В развитие полученных ранее результатов построена уточненная двумерная математическая модель динамического деформирования многослойных пластин и оболочек с трансверсально-мягкими заполнителями, основанная на использовании классической модели Кирхгофа – Лява для несущих слоев и гипотезы о подобии законов изменения перемещений по толщине заполнителей как при статических, так и динамических процессах нагружения. Исходя из этой гипотезы, для трансверсально-мягкого заполнителя составлены упрощенные квазистатические уравнения теории упругости, допускающие интегрирование по поперечной координате. При их интегрировании для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) введены в рассмотрение, как и в статических задачах, две двумерные неизвестные функции, представляющие собой поперечные касательные напряжения, постоянные по толщине. На основе обобщенного вариационного принципа Остроградского – Гамильтона для описания динамических процессов деформирования с большими показателями изменяемости параметров НДС построены двумерные уравнения движения общего вида, в которых инерционные составляющие имеют одинаковую степень точности в сравнении с другими. Проведено упрощение построенных уравнений для случая малой изменяемости параметров НДС. Рассмотрена задача о малых свободных колебаниях прямоугольной многослойной пластины, характеризующихся нулевой изменяемостью функций в тангенциальных направлениях и реализующихся в пластине без деформаций несущих слоев.

Ключевые слова: ортотропная пластина, уточненная теория, тригонометрические функции, свободные колебания, продольно-поперечная форма, частоты колебаний.

Введение

В области механики многослойных пластин и оболочек к настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных как теоретическим, так и экспериментальным исследованиям. В указанной области задачи, связанные с выявлением и классификацией возможных форм потери устойчивости (ФПУ) и колебаний, а также построением для их описания соответствующих математических моделей и разрешающих уравнений, составляют одно из направлений научных исследований.

Общее состояние исследований в механике слоистых пластин и оболочек в 1996 г. было освещено в обзорной статье [1], а состояние теории устойчивости трехслойных пластин и оболочек с анализом этапов ее развития и направлений дальнейших исследований было отражено в статьях [2, 3]. В соответствии с разработанной там классификацией ФПУ в трехслойных пластинах и оболочках в зависимости от вида докритического напряженно-деформированного состояния (НДС) в несущих слоях и заполнителе следует различать:

1) кососимметричную (синфазную) ФПУ, являющуюся изгибно-сдвиговой, и симметричную (антифазную) ФПУ, связанную с антифазным изгибом несущих слоев и реализующуюся в пластинах при одинаковых значениях докритических усилий в несущих слоях и нулевых значениях докритических поперечных касательных напряжений в заполнителе;

2) смешанную изгибно-сдвиговую ФПУ, реализующуюся в пластинах и оболочках при неравных значениях докритических усилий в несущих слоях и как нулевых, так и ненулевых докритических поперечных касательных напряжениях в заполнителе;

3) чисто сдвиговую ФПУ, при реализации которой в заполнителе формируется чисто сдвиговое возмущенное напряженно-деформированное состояние;

4) сдвиговую ФПУ в тангенциальных направлениях, реализующуюся при малых значениях модуля сдвига материала несущих слоев в тангенциальной плоскости;

5) произвольную ФПУ, представляющую собой комбинацию указанных форм при докритическом НДС произвольного вида.

Изучение описанных выше ФПУ потребовало построения соответствующих уточненных уравнений теории устойчивости, которые отличаются от известных в литературе учетом ряда не принимавшихся во внимание принципиальных факторов.

Задачи прочностного анализа конструкций включают в себя как составную часть и задачи динамического анализа. К ним, в частности, относятся задачи о свободных колебаниях ненагруженных конструкций и задачи о собственных колебаниях конструкций, находящихся в условиях предварительного статического нагружения. Из этих задач в механике многослойных конструкций наиболее исследованной является задача о свободных колебаниях. Так же, как и в задачах устойчивости элементов конструкций, находящихся в безмоментном состоянии, в многослойных элементах симметричного строения наблюдаются две классические формы свободных колебаний (синфазная и антифазная), задачи для которых разделяются. При этом частота колебаний по синфазным формам в реальных элементах конструкций намного больше частот, отвечающих антифазным формам. Так как наибольший практический интерес представляют низшие частоты колебаний, то для их уточненного определения достаточно учета поперечных сдвигов в заполнителе. В связи с этим исследователи пришли к выводу о нецелесообразности учета поперечного обжатия заполнителя при постановке и исследовании задач указанных выше классов.

Иная ситуация имеет место в этих задачах при наличии предварительного статического нагружения конструкции. Если такое нагружение вызывает в ней безмоментное НДС (равные в несущих слоях начальные тангенциальные усилия), то задача об их собственных колебаниях принципиально не отличается от задачи о свободных колебаниях. Если же начальное состояние – моментное (как и в задачах статической устойчивости), то от вида и уровня указанного НДС принципиально будут зависеть и формы собственных колебаний, соответствующих низшим частотам.

К настоящему времени эти вопросы в некоторой степени рассматривались в механике трехслойных конструкций, а для многослойных конструкций общего вида оставались практически неизученными. Само собой разумеется, при наличии динамической составляющей начального НДС конструкции, являющейся моментной, соответствующие задачи о параметрических колебаниях требуют привлечения уравнений соответствующей степени точности. К настоящему времени из механики слоистых элементов конструкций известны лишь простейшие, построенные без учета поперечных обжатий заполнителя с одновременным учетом моментности НДС.

1. Уточненные уравнения теории пластин с учетом деформаций поперечных сдвигов и обжатия

Рассматривается многослойная оболочка с чередующимися жесткими слоями, которые в дальнейшем именуются несущими, и маложесткими слоями, называемыми заполнителями. Обозначим текущий номер несущего слоя через $k = 1, 2, \dots, N$, индекс, указывающий номер, заключим в круглые скобки. Аналогично пронумеруем расположенные между ними слои заполнителей через $k = 1, 2, \dots, N-1$, а их номера будем заключать в квадратные скобки. За базу параметризации примем срединную поверхность первого слоя заполнителя $\sigma_{[1]} = \sigma$, считая ее заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2) = \mathbf{r}(x^i)$ и отнеся пространство этого слоя к полуортогональной системе координат x^i, z, нормально связанной с поверхностью σ; через $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial x^i$ и $\mathbf{m}$ обозначим основные базисные векторы на σ и вектор единичной нормали соответственно. В дальнейшем будем считать, что изменением метрики в направлении оси z можно пренебречь, отождествляя тем самым базисные векторы для каждого несущего слоя $\mathbf{r}_i^{(k)} = \partial\mathbf{r}^{(k)}/\partial x^i$ и каждого слоя заполнителя $\mathbf{r}_i^{[k]} = \partial\mathbf{r}^{[k]}/\partial x^i$ с базисными векторами $\mathbf{r}_i$ на $\sigma = \sigma_{[1]}$. Кроме того, введем обозначения: $z_{(k)}$, $z_{[k]}$ – координаты по нормали $\mathbf{m}$ к срединным поверхностям $\sigma_{(k)}$ и $\sigma_{[k]}$ каждого несущего слоя и заполнителя; $h_{(k)}$, $h_{[k]}$ – соответствующие толщины слоев, причем $-h_{(k)}/2 \le z_{(k)} \le h_{(k)}/2$, $k = 1, 2, \dots, N$, и $-h_{[k]}/2 \le z_{[k]} \le h_{[k]}/2$, $k = 1, 2, \dots, N-1$; $a_{ij} = \mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_j$, $b_{ij} = -\mathbf{r}_i\,\mathbf{m}$ – ковариантные компоненты первого и второго метрических тензоров на σ, которые в силу введенного выше предположения являются неизменными при переходе от слоя к слою.

Предполагаем, что оболочка является тонкой и непологой, ее граничный срез представляет собой линейчатую поверхность, образованную движением вектора $\mathbf{m}$ вдоль некоторой гладкой кривой $C \in \sigma$, а через $\mathbf{n}$ и τ обозначим единичные векторы нормали и касательной к C, составляющие с вектором $\mathbf{m}$ правосторонний триэдр в каждой точке кривой C.

Известные в литературе варианты теории многослойных пластин и оболочек отличаются друг от друга главным образом принятыми в них моделями заполнителя. К настоящему времени детальный их анализ был проведен многими авторами, в частности Х.М. Муштари [4, 5] и В.В. Болотиным ([6] и др.). В этих работах было показано, что несущие слои, как правило, удовлетворительно описываются классической моделью Кирхгофа–Лява, и в них для деформаций поперечных сдвигов $2\,\varepsilon_{i3}^{z_{(k)}}$ и поперечного обжатия $\varepsilon_{33}^{z_{(k)}}$ имеют место оценки

$$2\,\varepsilon_{i3}^{z_{(k)}} \sim \eta\,\widetilde{\varepsilon}, \quad \varepsilon_{33}^{z_{(k)}} \sim \eta^2\,\widetilde{\varepsilon}. \tag{1.1}$$

Здесь $\widetilde{\varepsilon}$ – характерная тангенциальная деформация, то есть $\varepsilon_{ij}^{z_{[k]}} \sim \widetilde{\varepsilon}$, а за параметр η в соответствии с [6] можно взять число η, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{h_{[k]}}{\lambda} \le \eta \le \frac{H}{\lambda} \quad \text{или} \quad \frac{h_{(k)}}{\lambda} \le \eta \le \frac{H}{\lambda}, \tag{1.2}$$

где λ – один из характерных геометрических размеров оболочки или масштаб изменения НДС в направлениях x^1 и x^2; H – толщина оболочки, определяемая по формуле

$$H = \sum_{k=1}^{N} h_{(k)} + \sum_{k=1}^{N-1} h_{[k]}\,.$$

Характерные модули упругости $E^{[k]}$ при деформации в направлении x^i, $E_3^{[k]}$ – в направлении z и поперечного сдвига $G_{[k]}$ в заполнителях с характерным модулем упругости несущего слоя $\widetilde{E}$ свяжем зависимостями

$$E_{[k]} = \varphi_{[k]}\,\widetilde{E}, \quad E_3^{[k]} = \varphi_3^{[k]}\,\widetilde{E}, \quad G_{[k]} = \psi_{[k]}\,\widetilde{E},$$

где $\varphi_{[k]}$, $\varphi_3^{[k]}$, $\psi_{[k]}$ – некоторые параметры. Если эти параметры удовлетворяют условиям [6] (здесь и далее индекс $[k]$ опускается, ε – некоторая величина, пренебрежимо малая по сравнению с единицей):

$$\varphi \le \varepsilon, \quad \frac{\eta^2}{\psi} \ge 1, \quad \frac{\eta^4}{\varphi_3} \ge 1, \tag{1.3}$$

то заполнители называются трансверсально-мягкими, в них плотность потенциальной энергии деформации $U_{[k]}$ вычисляется по формуле

$$U_{[k]} = \left(2\,\sigma_{[k]}^{i3}\,\varepsilon_{i3}^{z_{[k]}} + \sigma_{[k]}^{33}\,\varepsilon_{33}^{z_{[k]}}\right)\Big/2, \tag{1.4}$$

что равносильно принятию допущения $\sigma_{[k]}^{ij} \approx 0$. В силу этих допущений для заполнителей уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{[k]}^{i3}}{\partial z_{[k]}} - b_s^i\,\sigma_{[k]}^{s3} = \rho_{[k]}\,\frac{\partial^2 U_{[k]}^i}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial \sigma_{[k]}^{33}}{\partial z_{[k]}} + \nabla_i\,\sigma_{[k]}^{i3} = \rho_{[k]}\,\frac{\partial^2 U_{[k]}^3}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где через ∇_i обозначен символ ковариантного дифференцирования по метрике $a_{ik} = \mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_k$; $U_{[k]}^i$, $U_{[k]}^3$ – тангенциальные перемещения и прогибы; $\rho_{[k]}$ – плотность k-го слоя заполнителя; t – время.

Если в соответствии с [6] принять

$$\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{H}, \qquad \nabla_i \sim \frac{\partial}{\partial x_i} \sim \frac{1}{\lambda}, \tag{1.6}$$

то в силу соотношения $\delta_s^i - Hb_s^i \sim \delta_s^i$ первое уравнение в (1.5) допускает упрощенную запись

$$\frac{\partial \sigma_{[k]}^{i3}}{\partial z_{[k]}} = \rho_{[k]}\,\frac{\partial^2 U_{[k]}^i}{\partial t^2}. \tag{1.7}$$

Кроме того, для трансверсально-мягких заполнителей по аналогии с [6] можно установить оценки

$$\frac{\partial \sigma_{[k]}^{i3}}{\partial z_{[k]}} \sim \frac{G_{[k]}}{H^2}\Big(U_{[k]}^i + \frac{H}{\lambda}\,U_{[k]}^3\Big), \quad \frac{\partial \sigma_{[k]}^{33}}{\partial z_{[k]}} \sim \frac{E_3^{[k]}\,U_{[k]}^3}{H^2}, \tag{1.8}$$

а при свободных колебаниях с частотой ω – оценки

$$\rho_{[k]}\,\frac{\partial^2 U_{[k]}^i}{\partial t^2} \sim \rho_{[k]}\,\omega^2\,U_{[k]}^i, \quad \rho_{[k]}\,\frac{\partial^2 U_{[k]}^3}{\partial t^2} \sim \rho_{[k]}\,\omega^2\,U_{[k]}^3. \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что при частотах колебаний

$$\omega^2 \ll \frac{G_{[k]}}{\rho_{[k]}\,H^2}, \quad \omega^2 \ll \frac{E_3^{[k]}}{\rho_{[k]}\,H^2} \tag{1.10}$$

уравнения (1.7) и второе уравнение в (1.5) допускают упрощенное представление

$$\frac{\partial \sigma^{i3}_{[k]}}{\partial z_{[k]}} = 0, \quad \frac{\partial \sigma^{33}_{[k]}}{\partial z_{[k]}} + \nabla_i \, \sigma^{i3}_{[k]} = 0, \tag{1.11}$$

интегралы которых приводятся к виду

$$\sigma^{i3}_{[k]} = q^{i}_{[k]}\big(x^1, x^2, t\big), \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \sigma^{33}_{[k]}}{\partial z_{[k]}} + \nabla_i \, q^{i}_{[k]} = 0. \tag{1.13}$$

В силу принятых оценок (1.6) из уравнения (1.13) следует, что

$$\sigma^{33}_{[k]} + \frac{q^{i}_{[k]} \, H}{\lambda} = 0. \tag{1.14}$$

Так как в заполнителях $\sigma^{33}_{[k]} \sim \sigma^{i3}_{[k]}$, то в зависимости от величины λ возможно рассмотрение следующих основных видов НДС.

1. Случай малой изменяемости касательных напряжений вдоль координат x^i, имеющий место при низкочастотных формах колебаний несущих слоев с образованием длинных волн, когда $\lambda \sim L$ (L – характерный размер оболочки) и

$$H/L \sim \varepsilon \ll 1. \tag{1.15}$$

При выполнении (1.15) в уравнении (1.13) можно пренебречь вторым слагаемым, и поэтому

$$\sigma^{33}_{[k]} = q^{3}_{[k]}\big(x^1, x^2, t\big). \tag{1.16}$$

Заметим, что при выполнении (1.15) возможно и более сильное упрощение задачи, так как при этом согласно (1.14) $\sigma^{33}_{[k]} + \varepsilon\sigma^{i3}_{[k]} \sim 0$, откуда следует $\sigma^{33}_{[k]} = 0$. Принятие такого допущения с учетом исходных допущений $\sigma^{ij}_{[k]} = 0$ приводит к модели мягких заполнителей [6].

2. Случай средней изменяемости касательных напряжений вдоль x^i, когда длина полуволн и толщина оболочки находятся в соотношении

$$H^2/L^2 \sim \varepsilon \ll 1. \tag{1.17}$$

При реализации в заполнителе НДС с масштабом изменения (1.17) в уравнении (1.13) оба слагаемых с точностью $O(\varepsilon)$ являются равнозначными, это уравнение не допускает упрощения вида (1.16).

3. Случай большой изменяемости касательных напряжений вдоль оси x^i, имеющий место при высокочастотных формах колебаний, когда длина полуволны λ соизмерима с толщиной оболочки

$$H/L \sim 1. \tag{1.18}$$

В этом случае для описания динамических процессов деформирования в заполнителях требуется использовать неупрощенную систему уравнений (1.5).

Если для описания механики деформирования несущих слоев использовать гипотезы классической теории Кирхгофа–Лява, то при слабом и среднем изгибах оболочки векторы перемещений и компоненты тензоров тангенциальных деформаций в несущих слоях будут определяться по формулам [7]

$$\mathbf{U}^{z_{(k)}} = u_i^{(k)}\mathbf{r}^i + w^{(k)}\mathbf{m} - z_{(k)}\omega_i^{(k)}\mathbf{r}^i, \quad \omega_i^{(k)} = \nabla_i w^{(k)} + u_j^{(k)} b_i^j, \tag{1.19}$$

$$\varepsilon_{ij}^{z_{(k)}} = \varepsilon_{ij}^{(k)} + z_{(k)}\chi_{ij}^{(k)}, \tag{1.20}$$

где $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\chi_{ij}^{(k)}$ – ковариантные компоненты тензоров тангенциальных деформаций и искривлений поверхностей $\sigma_{(k)}$, для которых имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &2\,\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)}, \quad e_{ij}^{(k)} = \nabla_i u_j^{(k)} - b_{ij}w^{(k)},\\ &2\,\chi_{ij}^{(k)} = -\nabla_i\omega_j^{(k)} - \nabla_j\omega_i^{(k)}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Для принятой степени точности $\sigma_{[k]}^{ij} \approx 0$ и $\delta_i^j - z_{[k]}b_i^j \approx \delta_i^j$ соотношения упругости для напряжений $\sigma_{[k]}^{33}$ в линейном приближении можно записать в виде

$$\sigma_{[k]}^{33} = E_3^{[k]}\varepsilon_{33}^{z_{[k]}} = E_3^{[k]}\,\frac{\partial U_3^{[k]}}{\partial z_{[k]}}. \tag{1.22}$$

После их подстановки в уравнения (1.13) и интегрирования по $z_{[k]}$ находим

$$U_3^{[k]} = W_1^{[k]} + z_{[k]}W_2^{[k]} - \frac{z_{[k]}^2}{2E_3^{[k]}}\,\nabla_i q_{[k]}^i, \tag{1.23}$$

где $W_1^{[k]}$, $W_2^{[k]}$ – функции интегрирования, зависящие от координат x^1, x^2 и времени t. Определяя их, исходя из кинематических условий сопряжения с несущими слоями

$$U_3^{[k]}\big(z_{[k]} = -h_{[k]}/2\big) = w^{(k)}, \quad U_3^{[k]}\big(z_{[k]} = h_{[k]}/2\big) = w^{(k+1)},$$

выражения (1.23) для прогибов в заполнителях приводим к виду

$$\begin{aligned} U_3^{[k]} = \frac{w^{(k)} + w^{(k+1)}}{2} &+ z_{[k]}\,\frac{w^{(k+1)} - w^{(k)}}{h_{[k]}} - \\ &- \frac{\nabla_i\, q_{[k]}^i}{2\,E_3^{[k]}}\left(z_{[k]}^2 - \frac{h_{[k]}^2}{4}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Для выявления в заполнителях закона изменения тангенциальных компонент перемещений по $z_{[k]}$ обратимся к соотношениям упругости для $\sigma_{[k]}^{i3}$, которые в линейном приближении в рамках принятой степени точности можно представить в следующей приближенной форме ($A_{[k]}^{is}$ – двухвалентный тензор сдвиговых упругих констант):

$$\sigma_{[k]}^{i3} = q_{[k]}^i = 2\,A_{[k]}^{is}\varepsilon_{s3}^{z_{[k]}} = A_{[k]}^{is}\left[\frac{\partial U_s^{[k]}}{\partial z_{[k]}} + \nabla_s\, U_3^{[k]}\right], \tag{1.25}$$

справедливой как при слабом, так и при среднем изгибах. После подстановки соотношений (1.24) в соотношения (1.25) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial U_i^{[k]}}{\partial z_{[k]}} = d_{is}^{[k]}q_{[k]}^s - \frac{\omega_i^{(k)} + \omega_i^{(k+1)}}{2} - \frac{z_{[k]}}{h_{[k]}}\Big(\omega_i^{(k+1)} - \omega_i^{(k)}\Big) + \frac{4z_{[k]}^2 - h_{[k]}^2}{8E_3^{[k]}}\nabla_i\nabla_s q_{[k]}^s, \tag{1.26}$$

в котором с принятой степенью точности выражения $\nabla_i w^{(k)}$ заменены на $\omega_i^{(k)}$, а через $d_{is}^{[k]}$ обозначен двухвалентный тензор податливости заполнителя на поперечный сдвиг. Интегрируя (1.26) по $z_{[k]}$, получим

$$\begin{aligned} U_i^{[k]} = u_i^{[k]} + z_{[k]}d_{is}^{[k]}\,q_{[k]}^s &- z_{[k]}\,\frac{\omega_i^{(k)} + \omega_i^{(k+1)}}{2} - \\ &- \frac{z_{[k]}^2}{2h_{[k]}}\Big(w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)}\Big) + \frac{\nabla_i\nabla_s q_{[k]}^s}{8E_3^{[k]}}\Big(\frac{4}{3}\,z_{[k]}^3 - h_{[k]}^2 z_{[k]}\Big), \end{aligned} \tag{1.27}$$

где $u_i^{[k]}$ – неизвестные двумерные функции. Для их определения полученные соотношения (1.27) необходимо подчинить условиям сопряжения по тангенциальным перемещениям

$$
\begin{aligned}
&u_i^{(k)} - \frac{h_{(k)}}{2}\,\omega_i^{(k)} = U_i^{(k)}\Big(-\frac{h_{[k]}}{2}, x^1, x^2, t\Big),\\
&u_i^{(k+1)} + \frac{h_{(k+1)}}{2}\,\omega_i^{(k+1)} = U_i^{(k)}\Big(\frac{h_{[k]}}{2}, x^1, x^2, t\Big),
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

из которых следуют зависимости

$$
\begin{aligned}
\mu_i^{(k)} = u_i^{(k)} - u_i^{(k+1)} - \frac{h_{(k)} + h_{[k]}}{2}\,\omega_i^{(k)} -{}&\\
- \frac{h_{(k+1)} + h_{[k]}}{2}\,\omega_i^{(k+1)} + h_{[k]} d_{is}^{[k]} q_{[k]}^s - \frac{h_{[k]}^3}{12E_3^{[k]}}\,\nabla_i\nabla_j q_{[k]}^j&,
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

$$
u_i^{[k]} = \frac{u_i^{(k)} + u_i^{(k+1)}}{2} - \Big(\frac{h_{(k)}}{4} + \frac{h_{[k]}}{8}\Big)\omega_i^{(k)} + \Big(\frac{h_{(k+1)}}{4} + \frac{h_{[k]}}{8}\Big), \omega_i^{(k+1)}. \tag{1.30}
$$

Уравнения статического равновесия. В рамках рассматриваемой модели заполнителей будем считать нагруженными внешними силами лишь несущие слои многослойной оболочки, введя в рассмотрение векторы заданных усилий и моментов

$$
\mathbf{\Phi}^{(k)} = \Phi_n^{(k)}\mathbf{n} + \Phi_{n\tau}^{(k)}\tau + \Phi_m^{(k)}\mathbf{m}, \quad \mathbf{L}^{(k)} = L_{n\tau}^{(k)}\mathbf{n} + L_n^{(k)}\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, N.
$$

приложенных к граничным линиям $C_{(k)}$ срединных поверхностей внешних слоев $\sigma_{(k)}$, а также векторы внешних поверхностных усилий и моментов

$$
\mathbf{X}_{(k)} = X_{(k)}^i\,\mathbf{r}_i + X_{(k)}^3\mathbf{m}, \quad \mathbf{M}_{(k)} = M_{(k)}^i\mathbf{r}_i,
$$

приложенных в точках поверхностей $\sigma_{(k)}$. Вариация работы этих сил на соответствующих перемещениях будет равна

$$
\begin{aligned}
\delta A = \sum_{k=1}^{N}\Big\{\int\limits_C \Big[\Phi_n^{(k)}\delta u_n^{(k)} + \Phi_{n\tau}^{(k)}\delta u_\tau^{(k)} + \Phi_m^{(k)}\delta w^{(k)} + L_{n\tau}^{(k)}\delta\omega_\tau^{(k)} -{}&\\
- L_n^{(k)}\delta\omega_n^{(k)}\Big]ds + \iint\limits_\sigma \Big[X_{(k)}^i\delta u_i^{(k)} + X_{(k)}^3\delta w^{(k)} - M_{(k)}^i\delta\omega_i^{(k)}\Big]d\sigma\Big\}&,
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

а вариация потенциальной энергии деформации оболочки будет вычисляться по формуле

$$
\begin{aligned}
\delta U = \sum_{k=1}^{N-1}\iint\limits_\sigma \int\limits_{-h_{[k]}/2}^{h_{[k]}/2}\Big(2\sigma_{[k]}^{i3}\delta\varepsilon_{i3}^{z_{[k]}} + \sigma_{[k]}^{33}\delta\varepsilon_{33}^{z_{[k]}}\Big)d\sigma\,dz_{[k]} +{}&\\
+\sum_{k=1}^{N}\iint\limits_\sigma \int\limits_{-h_{(k)}/2}^{h_{(k)}/2}\sigma_{(k)}^{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{z_{(k)}}\,d\sigma\,dz_{(k)} = \sum_{k=1}^{N}\iint\limits_\sigma \Big(T_{(k)}^{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{(k)} + M_{(k)}^{ij}\delta\chi_{ij}^{(k)}\Big)d\sigma +{}&\\
+ \sum_{k=1}^{N-1}\iint\limits_\sigma \Big[c_{is}^{[k]} q_{[k]}^s\delta q_{[k]}^i + c_3^{[k]}\big(w^{(k+1)} - w^{(k)}\big)\delta\big(w^{(k+1)} - w^{(k)}\big) +{}&\\
+ \frac{h_{[k]}^3}{12}\,\nabla_s q_{[k]}^s\nabla_i\delta q_{[k]}^i\Big]d\sigma, \quad c_{is}^{[k]} = h_{[k]} d_{is}^{[k]}, \quad c_3^{[k]} = \frac{E_3^{[k]}}{h_{[k]}}&,
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

полученной с помощью преобразований

$$2\sigma^{i3}_{[k]}\delta\varepsilon^{z_{[k]}}_{i3} = d^{[k]}_{is} q^s_{[k]} \delta q^i_{[k]}, \quad \sigma^{33}_{[k]}\delta\varepsilon^{z_{[k]}}_{33} = E^{[k]}_3 \varepsilon^{z_{[k]}}_{33} \delta\varepsilon^{z_{[k]}}_{33}$$

с использованием соотношений (1.22), (1.24) и обозначений

$$\omega^{(k)}_n = \omega^{(k)}_i n^i, \quad \omega^{(k)}_\tau = \omega^{(k)}_i \tau^i, \quad u^{(k)}_n = u^{(k)}_i n^i, \quad u^{(k)}_\tau = u^{(k)}_i \tau^i,$$

$$T^{ij}_{(k)} = \int\limits_{-h_{(k)}/2}^{h_{(k)}/2} \sigma^{ij}_{(k)}\, dz_{(k)}, \quad M^{ij}_{(k)} = \int\limits_{-h_{(k)}/2}^{h_{(k)}/2} \sigma^{ij}_{(k)}\, z_{(k)}\, dz_{(k)},$$

где $n^i = \mathbf{n}\mathbf{r}^i$, $\tau^i = \tau\mathbf{r}^i$ – контравариантные компоненты векторов $\mathbf{n}$, τ относительно базисных векторов $\mathbf{r}^i$; ds – элемент длины контурной линии C.

Если полученные кинематические соотношения (1.19), (1.27) не подчинены условиям сопряжения несущих слоев с заполнителями (1.28), то для вывода необходимого комплекса основных уравнений, описывающих статическое равновесие оболочки, в соответствии с работами [8–10] и др. должно быть составлено обобщенное вариационное уравнение вида

$$\delta I = \delta I_q + \delta A - \delta U = 0, \tag{1.33}$$

где

$$\delta I_q = \sum_{k=1}^{N-1} \delta \iint\limits_\sigma q^i_{[k]} \Big[u^{(k)}_i - u^{(k+1)}_i - \frac{h_{(k)}\,\omega^{(k)}_i}{2} - \frac{h_{(k+1)}\,\omega^{(k+1)}_i}{2} + \\ + U^{[k]}_i\big(z_{[k]} = h_{[k]}/2\big) - U^{[k]}_i\big(z_{[k]} = -h_{[k]}/2\big)\Big] d\sigma. \tag{1.34}$$

Входящая в (1.34) разность для $U^{[k]}_i$ определяется путем интегрирования (1.26) по $z_{[k]}$ от $-h_{[k]}/2$ до $h_{[k]}/2$:

$$U^{[k]}_i\big(z_{[k]} = h_{[k]}/2\big) - U^{[k]}_i\big(z_{[k]} = -h_{[k]}/2\big) = \\ = c^{[k]}_{is}\, q^s_{[k]} - \frac{h_{[k]}}{2}\left(\omega^{(k+1)}_i + \omega^{(k)}_i\right) - \frac{h^3_{[k]}}{12} \nabla_i \nabla_s q^s_{[k]}. \tag{1.35}$$

Внеся с учетом (1.35) выражения (1.31), (1.32), (1.34) в (1.33) и проведя традиционные преобразования, получим уравнение

$$\delta I_q = -\sum_{k=1}^{N} \big(L^{(k)}_{n\tau} - M^{(k)}_{n\tau}\big)\delta w^{(k)}\Big|_C - \int\limits_C \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \Big[\big(\Phi^{(k)}_n - T^{(k)}_n\big)\delta u^{(k)}_n + \\ + \big(\Phi^{(k)}_{n\tau} - T^{(k)}_{n\tau}\big)\delta u^{(k)}_\tau + \Big(\Phi^{(k)}_m - \frac{dL^{(k)}_{n\tau}}{ds} - S^i_{(k)}\, n_i + \frac{dM^{(k)}_{n\tau}}{ds}\Big)\delta w^{(k)} - \\ - \big(L^{(k)}_n - M^{(k)}_n\big)\delta\omega^{(k)}_n \Big] - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{h_{[k]}}{12E^{[k]}_3} q^i_{[k]} n_i \nabla_s\, \delta q^s_{[k]} \Big\} ds - \\ - \iint\limits_\sigma \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \Big[\big(\nabla_i T^{ij}_{(k)} - S^i_{(k)} b^j_i + \widetilde{X}^j_{(k)}\big)\delta u^{(k)}_j + \big(\nabla_i S^i_{(k)} + T^{ij}_{(k)} b_{ij} + \\ + \widetilde{X}^3_{(k)}\big)\delta w^{(k)}\Big] + \sum_{k=1}^{N-1} \mu^{[k]}_i \delta q^i_{[k]} \Big\} d\sigma = 0. \tag{1.36}$$

Здесь введены обозначения

$$
\begin{aligned}
&T_n^{(k)} = T_{(k)}^{ij} n_i n_j, \quad T_{n\tau}^{(k)} = T_{(k)}^{ij} n_i \tau_j, \quad M_n^{(k)} = M_{(k)}^{ij} n_i n_j, \quad M_{n\tau}^{(k)} = -M_{(k)}^{ij} n_i \tau_j, \\
&\widetilde{X}_{(k)}^i = X_{(k)}^i + q_{[k]}^i - q_{[k-1]}^i, \\
&\widetilde{X}_{(k)}^3 = X_{(k)}^3 - \frac{E_3^{[k-1]}}{h_{[k-1]}} \Big(w^{(k)} - w^{(k-1)} \Big) + \frac{E_3^{[k]}}{h_{[k]}} \Big(w^{(k+1)} - w^{(k)} \Big), \\
&S_{(k)}^i = \nabla_j M_{(k)}^{ji} + T_{(k)}^{ij} \omega_j^{(k)} + M_{(k)}^i + \frac{h_{(k)} + h_{[k-1]}}{2} q_{[k-1]}^i + \frac{h_{(k)} + h_{[k]}}{2} q_{[k]}^i,
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$, $h_{[0]} = q_{[0]}^i = h_{[N]} = q_{[N]}^i = 0$. В силу произвольности вариаций перемещений $\delta u_i^{(k)}$, $\delta w^{(k)}$ и поперечных касательных напряжений $\delta q_{[k]}^i$ из вариационного уравнения (1.36) следуют $3N$ дифференциальных уравнений равновесия несущих слоев

$$
f_{(k)}^i = \nabla_j T_{(k)}^{ij} - S_{(k)}^j b_j^i + \widetilde{X}_{(k)}^i = 0, \quad f_{(k)}^3 = \nabla_i S_{(k)}^i + T_{(k)}^{ij} b_{ij} + \widetilde{X}_{(k)}^3 = 0 \tag{1.38}
$$

и $2(N-1)$ дифференциальных уравнений вида

$$
\mu_i^{[k]} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{1.39}
$$

представляющих собой условия кинематического сопряжения несущих слоев с заполнителями по тангенциальным перемещениям. Для полученных уравнений на контуре C формулируются граничные условия

$$
\begin{aligned}
&T_n^{(k)} = \Phi_n^{(k)} \quad \text{при} \quad \delta u_n^{(k)} \neq 0, \quad T_{n\tau}^{(k)} = \Phi_{n\tau}^{(k)} \quad \text{при} \quad \delta u_\tau^{(k)} \neq 0, \\
&M_n^{(k)} = L_n^{(k)} \quad \text{при} \quad \delta \omega_n^{(k)} \neq 0, \\
&S_{(k)}^i n_i - \frac{dM_{n\tau}^{(k)}}{ds} = \Phi_m^{(k)} - \frac{dL_{n\tau}^{(k)}}{ds} \quad \text{при} \quad \delta w^{(k)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N,
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

$$
q_{[k]}^i n_i = 0 \quad \text{при} \quad \delta \nabla_s q_{[k]}^s \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{1.41}
$$

2. Уравнения движения

Для вывода уравнений движения в рамках принятой модели заполнителя необходимо использовать вариационное уравнение обобщенного вариационного принципа Гамильтона – Остроградского (см. [11–13] и др.)

$$
\delta L = \int_{t_0}^{t} \Big(\delta K - \delta U + \delta A + \delta I_q \Big) dt, \tag{2.1}
$$

где δK – вариация кинетической энергии, вычисляемая по формуле

$$
\delta K = -\sum_{k=1}^{N} \iint_{\sigma} \int_{-h_{(k)}/2}^{h_{(k)}/2} \rho_{(k)} \ddot{U}_{(k)}^{\alpha} \delta U_{\alpha}^{(k)} d\sigma dz_{(k)} - \sum_{k=1}^{N-1} \iint_{\sigma} \int_{-h_{[k]}/2}^{h_{[k]}/2} \rho_{[k]} \ddot{U}_{[k]}^{\alpha} \delta U_{\alpha}^{[k]} d\sigma dz_{[k]}, \tag{2.2}
$$

где $\rho_{(k)}$, $\rho_{[k]}$ – плотности материалов несущих слоев и заполнителей, а точка над функцией означает производную по времени t.

Как видно из выражений (1.24) и (1.27), входящие в них слагаемые вносят разный вклад в кинетическую энергию оболочки. Для их упрощения введем предположение о том, что имеют место оценки

$$\widetilde{\rho} \sim \frac{\rho_{[k]}}{\rho_{(k)}} \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \frac{\widetilde{h}}{\lambda} \sim \sqrt[4]{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1, \tag{2.3}$$

где $\widetilde{h}$ – характерная толщина несущего слоя или заполнителя. Как установлено в работе [14], при выполнении оценок (2.3) для вычисления δK выражения (1.24), (1.27) допустимо использовать в упрощенном виде

$$\begin{aligned} U_3^{[k]} &= \frac{w^{(k)} + w^{(k+1)}}{2} + z_{[k]}\, \frac{w^{(k+1)} - w^{(k)}}{h_{[k]}}, \\ U_i^{[k]} &= u_i^{[k]} + z_{[k]} d_{is}^{[k]} q_{[k]}^{is} - z_{[k]}\, \frac{\omega_i^{(k)} + \omega_i^{(k+1)}}{2} + \frac{z_{[k]}^2}{2h_{[k]}} \big(\omega_i^{(k+1)} - \omega_i^{(k)}\big). \end{aligned} \tag{2.4}$$

При их использовании выражение (2.2) преобразуется к виду

$$\delta K = -\iint\limits_{\sigma} \Big[\Big(\ddot{Q}_{(k)}^i\, \delta u_i^{(k)} + \ddot{Q}_{(k)}^3 \delta w^{(k)} + \ddot{G}_{(k)}^{\,i} \delta\omega_i^{(k)} \Big) + \sum_{k=1}^{N} \ddot{\mu}_j^{[k]} \delta q_{[k]}^j \Big]\, d\sigma. \tag{2.5}$$

Здесь введены следующие обозначения для инерционных сил и моментов

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{(k)}^i = {} & \frac{\rho_{[k-1]}\, h_{[k-1]}}{4}\, \ddot{u}_i^{(k-1)} + \Big(\rho_{(k)} h_{(k)} + \frac{\rho_{[k-1]} h_{[k-1]} + \rho_{[k]} h_{[k]}}{4}\Big) \ddot{u}_i^{(k)} + \\ & + \frac{\rho_{[k]} h_{[k]}}{4}\, \ddot{u}_i^{(k+1)} - \frac{\rho_{[k-1]} h_{[k-1]}}{8} \Big(h_{(k-1)} - \frac{13 h_{[k-1]}}{6}\Big) \ddot{\omega}_i^{(k-1)} + \\ & + \Big[\frac{\rho_{[k-1]} h_{[k-1]}}{8} \Big(h_{(k)} - \frac{13 h_{[k-1]}}{6}\Big) - \frac{\rho_{[k]} h_{[k]}}{8} \Big(h_{(k)} - \frac{13 h_{[k]}}{6}\Big)\Big] \ddot{\omega}_i^{(k)} + \\ & + \frac{\rho_{[k]} h_{[k]}}{8} \Big(h_{(k+1)} - \frac{13 h_{[k]}}{6}\Big) \ddot{\omega}_i^{(k+1)}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{(k)}^3 = {} & \rho_{(k)} h_{(k)} \ddot{w}^{(k)} + \frac{\rho_{[k-1]} h_{[k-1]}}{6}\, \ddot{w}^{(k-1)} + \\ & + \frac{\rho_{[k-1]} h_{[k-1]} + \rho_{[k]} h_{[k]}}{3}\, \ddot{w}^{(k)} + \frac{\rho_{[k]} h_{[k]}}{6}\, \ddot{w}^{(k+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{(k)}^{\,i} = {} & \frac{\rho_{[k-1]} h_{[k-1]}}{8} \Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k-1]}}{3}\Big) \ddot{u}_i^{(k-1)} + \Big[\frac{\rho_{[k-1]} h_{[k-1]}}{8} \Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k-1]}}{3}\Big) - \\ & - \frac{\rho_{[k]} h_{[k]}}{8} \Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k]}}{3}\Big)\Big]\, \ddot{u}_i^{(k)} - \frac{\rho_{[k]}\, h_{[k]}}{8} \Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k]}}{3}\Big) \ddot{u}_i^{(k+1)} + \\ & + \rho_{[k-1]} \Big[-\frac{h_{[k-1]}}{16} \Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k-1]}}{3}\Big) \Big(h_{(k-1)} + \frac{h_{[k-1]}}{2}\Big) + \\ & + \frac{h_{[k-1]}^2}{12} \Big(h_{(k)} + \frac{9 h_{[k-1]}}{16}\Big)\Big]\, \ddot{\omega}_i^{(k-1)} + \\ & + \Big\{ \rho_{(k)}\, \frac{h_{(k)}^3}{12} + \rho_{[k-1]} \Big[\frac{h_{[k-1]}}{16} \Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k-1]}}{3}\Big) \Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k-1]}}{2}\Big) - \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$
- \frac{h^2_{[k-1]}}{12}\Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k-1]}}{8}\Big)\Big] + \rho_{[k]}\Big[\frac{h_{[k]}}{16}\Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k]}}{3}\Big)\Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k]}}{2}\Big) -
$$

$$
-\frac{h^2_{[k]}}{12}\Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k]}}{8}\Big)\Big]\Big\}\ddot{\omega}^{(k)}_i + \rho_{[k]}\Big[-\frac{h_{[k]}}{16}\Big(h_{(k)} + \frac{h_{[k]}}{3}\Big)\Big(h_{(k+1)} + \frac{h_{[k]}}{2}\Big) +
$$

$$
+ \frac{h^2_{[k]}}{12}\Big(h_{(k)} + \frac{9\,h_{[k]}}{16}\Big)\Big]\ddot{\omega}^{(k+1)}_i - \rho_{[k]}\frac{h^3_{(k)}}{24}d^{i[k]}_s\ddot{q}^s_{[k]}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,
$$

в которых необходимо положить $\rho_{[0]} = h_{[0]} = \rho_{[N]} = h_{[N]} = 0$, а

$$
\ddot{\mu}^{[k]}_j = \rho_{[k]}\frac{h^3_{[k]}d^{[k]}_{ij}}{12}\Big(d^{i[k]}_s\ddot{q}^s_{[k]} - \frac{\ddot{\omega}^{(k)}_i + \ddot{\omega}^{(k+1)}_i}{2}\Big), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{2.8}
$$

Учитывая выражения (1.31), (1.32), (1.34), (2.5) и проведенные в (1.36) преобразования, из (2.1) получаем уравнения движения несущих слоев

$$
\begin{gathered}
\widetilde{f}^i_{(k)} = f^i_{(k)} - \ddot{Q}^i_{(k)} = \nabla_j T^{ij}_{(k)} - b^i_j\widetilde{S}^j_{(k)} + \widetilde{X}^i_{(k)} - \ddot{Q}^i_{(k)} = 0,\\
\widetilde{f}^3_{(k)} = f^3_{(k)} - \ddot{Q}^3_{(k)} = \nabla_i\widetilde{S}^i_{(k)} + T^{ij}_{(k)}b_{ij} + \widetilde{X}^3_{(k)} - \ddot{Q}^3_{(k)} = 0,
\end{gathered} \tag{2.9}
$$

где

$$
\widetilde{S}^i_{(k)} = S^i_{(k)} + \ddot{G}^i_{(k)}, \tag{2.10}
$$

а также уравнения

$$
\mu^{[k]}_i - \ddot{\mu}^{[k]}_i = 0, \tag{2.11}
$$

отличающиеся от условий (1.29) кинематического сопряжения слоев по тангенциальным перемещениям, имеющих место при статическом нагружении оболочки. Наличие в уравнениях (2.11) вторых слагаемых объясняется тем, что выражения (1.24) и (1.27), полученные на основе уравнений (1.12), (1.13), не удовлетворяют уравнениям движения (1.7) и последним уравнениям (1.5). Тем не менее, как показали исследования [15–17], использование уравнений (2.11) вместо уравнений (1.29) является более корректным и приводит к выявлению таких высокочастотных форм колебаний, которые получаются также и на основе решения неупрощенных уравнений теории упругости.

На контуре C для уравнений (2.9), (2.11) граничные условия формируются в том же виде (1.40), (1.41), что и для уравнений (1.38), (1.39).

3. Малые свободные колебания многослойной пластины с нулевой изменяемостью функций в тангенциальных направлениях и без деформаций несущих слоев

В многослойных пластинах в силу податливости заполнителей на деформации поперечных сдвигов и обжатие возможна реализация таких форм свободных колебаний, которые характеризуются плоскопараллельным движением несущих слоев относительно друг друга без деформаций и искривлений в направлениях x^1, x^2. Такие формы колебаний в трехслойных пластинах были исследованы, в частности, в работах [15–18], в которых установлено, что соответствующие им частоты являются наинизшими из частот антифазных форм колебаний, связанных с изгибом несущих слоев.

Если несущие слои и заполнители имеют одинаковые толщины $h_{(k)} = h_b$ и $h_{[k]} = h$, $\rho_{[k]}/\rho_{(k)} \approx 0$, то уравнения, описывающие некоторые из указанных форм колебаний, могут быть выведены из полученных нами выше, если в них отбросить все слагаемые, содержащие производные всех порядков по координатам

x^i от функций $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ и $q^i_{[k]}$. Если координаты x^i являются ортогональными и через G_{i3}, $E_i^{[k]} = E_3$ обозначить модули поперечных сдвигов и поперечного обжатия заполнителей, причем в рассматриваемом случае $d_{ii}^{[k]} = 1/G_{i3}$, $d_{12}^{[k]} = 0$, то при $\rho_{(k)} = \rho$ указанные формы свободных колебаний, совершающихся в направлении x^i, в предположении $\rho_{[k]} \approx 0$ будут описываться системами уравнений вида

$$\begin{gathered} q^i_{[1]} = \rho_b h_b \ddot{u}^i_{(1)}, \quad q^i_{[k]} - q^i_{[k-1]} = \rho_b h_b \ddot{u}^i_{(k)}, \quad k = 2, 3 \ldots, N-1, \\ q^i_{[N-1]} = \rho_b h_b \ddot{u}^i_{(N)}, \quad u^i_{(k)} - u^i_{(k+1)} + \frac{h}{G_{i3}} q^i_{[k]} = 0, \quad k = 1, 2 \ldots, N-1, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} \frac{E_3}{h}\left(w^{(2)} - w^{(1)}\right) = \rho_b h_b \ddot{w}^{(1)}, \\ \frac{E_3}{h}\left(w^{(k-1)} - 2w^{(k)} + w^{(k+1)}\right) = \rho_b h_b \ddot{w}^{(k)}, \quad k = 2, 3 \ldots, N-1, \\ \frac{E_3}{h}\left(w^{(N)} - w^{(N-1)}\right) = \rho_b h_b \ddot{w}^{(N)}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Представив неизвестные $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $q^i_{[k]}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, в виде

$$u_i^{(k)} = \widetilde{u}_i^{(k)} \sin \omega_i t, \quad q^i_{[k]} = \widetilde{q}^i_{[k]} \sin \omega_i t, \quad w^{(k)} = \widetilde{w}^{(k)} \sin \omega_u t, \tag{3.3}$$

решая уравнения (3.1), (3.2), для определения квадратов круговых частот колебаний ω_i, ω_u можно получить формулы:

при $N = 2$:

$$\omega_i^2 = 2\,\frac{G_{i3}}{\rho_b h_b\, h}, \quad i = 1, 2; \quad \omega_{u1}^2 = 2\,\frac{E_3}{\rho_b h_b h}; \tag{3.4}$$

при $N = 3$:

$$\omega_{i1}^2 = 0, \quad \omega_{i2}^2 = 3\,\frac{G_{i3}}{\rho_b h_b h}, \quad i = 1, 2; \quad \omega_{u1}^2 = 0, \quad \omega_{u2}^2 = 3\,\frac{E_3}{\rho_b h_b h}; \tag{3.5}$$

при $N = 4$:

$$\omega_{i1}^2 = (2 - \sqrt{2})\,\frac{G_{i3}}{\rho_b h_b h}, \quad \omega_{i2}^2 = 2\,\frac{G_{i3}}{\rho_b h_b h}, \quad \omega_{i3}^2 = (2 + \sqrt{2})\,\frac{G_{i3}}{\rho_b h_b h}. \tag{3.6}$$

Установленные формы относятся к классу форм свободных колебаний, совершающихся без деформаций и искривлений несущих слоев при малой изменяемости функций $q^i_{[k]}$ в направлениях координат $x = x^1$, $y = x^2$, когда для вычисления напряжений $q^i_{[k]} = \sigma^{i3}_{[k]}$, $\sigma^{33}_{[k]}$ допустимо использовать выражения

$$\begin{gathered} q^i_{[k]} = 2d^{is}_{[k]}\varepsilon^{[k]}_{s3} = \frac{d^{is}_{[k]}}{h_{[k]}}\Big[u_s^{(k+1)} - u_s^{(k)} + \frac{h_{(k)} + h_{[k]}}{2}\,\omega_s^{(k)} + \frac{h_{(k+1)} + h_{[k]}}{2}\,\omega_s^{(k+1)}\Big], \\ \sigma^{33}_{[k]} = E_3^{[k]}\varepsilon^{[k]}_{33} = \frac{E_3^{[k]}}{h_{[k]}}\big(w^{(k+1)} - w^{(k)}\big), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1. \end{gathered} \tag{3.7}$$

При их использовании уравнения движения оболочки в предположении $\varepsilon_{ij}^{z_{(k)}} = 0$ устанавливаются на основе вариационного уравнения

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Big[\delta K - \iint\limits_{\sigma} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-h_{[k]}/2}^{h_{[k]}/2} \Big(2q^i_{[k]}\delta\varepsilon^{[k]}_{i3} + \sigma^{33}_{[k]}\delta\varepsilon^{[k]}_{33}\Big)\, d\sigma\, dz_{[k]}\Big] dt = 0. \tag{3.8}$$

Представим перемещения $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ в виде соотношений

$$
\begin{gathered}
u_1^{(k)} = u^{(k)} = u_0^{(k)} + y\varphi^{(k)}, \quad u_2^{(k)} = v^{(k)} = v_0^{(k)} - x\varphi^{(k)}, \\
w^{(k)} = w_0^{(k)} + x\theta^{(k)} + y\psi^{(k)}, \quad -a/2 \le x \le a/2, \quad -b/2 \le y \le b/2,
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

в соответствии с которыми для многослойной пластины регулярного строения имеют место равенства

$$
2\,\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} \equiv 0, \quad \omega_1^{(k)} = \partial w^{(k)}/\partial x = \theta^{(k)}, \quad \omega_2^{(k)} = \psi^{(k)}, \ \chi_{ij}^{(k)} \equiv 0, \tag{3.10}
$$

$$
\begin{gathered}
2\varepsilon_{13}^{[k]} = \frac{1}{h}\Big[u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)} + y\big(\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}\big) + \frac{h_b + h}{2}\big(\theta^{(k+1)} + \theta^{(k)}\big)\Big], \\
2\varepsilon_{23}^{[k]} = \frac{1}{h}\Big[v_0^{(k+1)} - v_0^{(k)} - x\big(\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}\big) + \frac{h_H + h}{2}\big(\psi^{(k+1)} + \psi^{(k)}\big)\Big], \\
\varepsilon_{33}^{[k]} = \frac{1}{h}\Big[w_0^{(k+1)} - w_0^{(k)} + x\big(\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\big) + y\big(\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\big)\Big].
\end{gathered} \tag{3.11}
$$

При использовании составленных соотношений (3.9)–(3.11) и учете соотношений (3.7) из вариационного уравнения (3.8) в приближении $\rho_{[k]} = 0$ следуют уравнения движения вида

$$
\begin{gathered}
-\frac{G_{13}}{h}\Big[u_0^{(2)} - u_0^{(1)} + \frac{h_b + h}{2}\big(\theta^{(1)} + \theta^{(2)}\big)\Big] + \rho_b h_b \ddot{u}_0^{(1)} = 0, \\
\frac{G_{13}}{h}\Big[-u_0^{(k-1)} + 2\,u_0^{(k)} - u_0^{(k+1)} + \frac{h_b + h}{2}\big(\theta^{(k-1)} - \theta^{(k+1)}\big)\Big] + \\
+ \rho_b h_b, \ddot{u}_0^{(k)} = 0, \ k = 2, 3 \ldots, N-2, \\
\frac{G_{13}}{h}\Big[u_0^{(N)} - u_0^{(N-1)} + \frac{h_b + h}{2}\big(\theta^{(N-1)} + \theta^{(N)}\big)\Big] + \rho_b h_b \ddot{u}_0^{(N)} = 0,
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{G_{13}\big(h_b + h\big)}{2h}\Big[u_0^{(2)} - u_0^{(1)} + \frac{h_b + h}{2}\big(\theta^{(1)} + \theta^{(2)}\big)\Big] - \\
- \frac{E_3 a^2}{12h}\big(\theta^{(2)} - \theta^{(1)}\big) + \frac{\rho_b h_b a^2}{12}\ddot{\theta}^{(1)} = 0, \\
\frac{G_{13}\big(h_b + h\big)}{2h}\Big[-u_0^{(k-1)} - u_0^{(k+1)} + \frac{h_b + h}{2}\big(\theta^{(k-1)} - 2\theta^{(k)} + \theta^{(k+1)}\big)\Big] + \\
+ \frac{E_3 a^2}{12h}\big(-\theta^{(k-1)} + 2\,\theta^{(k)} - \theta^{(k+1)}\big) + \frac{\rho_b h_b a^2}{12}\ddot{\theta}^{(k)} = 0, \ k = 2, 3 \ldots, N-2, \\
\frac{G_{13}\big(h_b + h\big)}{2h}\Big[u_0^{(N)} - u_0^{(N-1)} + \frac{h_b + h}{2}\big(\theta^{(N-1)} + \theta^{(N)}\big)\Big] + \\
+ \frac{E_3 a^2}{12h}\big(\theta^{(N)} - \theta^{(N-1)}\big) + \frac{\rho_b h_b a^2}{12}\ddot{\theta}^{(N)} = 0, \quad \overleftrightarrow{1, 2}, \quad \overleftrightarrow{u, v}, \quad \overleftrightarrow{\theta, \psi},
\end{gathered} \tag{3.13}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{E_3}{h}\left(w_0^{(2)}-w_0^{(1)}\right)+\rho_b h_b \ddot{w}_0^{(1)}=0,\\
\frac{E_3}{h}\left(-w_0^{(k-1)}+2w_0^{(k)}-w_0^{(k+1)}\right)+\rho_b h_b \ddot{w}_0^{(k)}=0, \quad k=2,3\ldots,N-2,\\
\frac{E_3}{h}\left(w_0^{(N)}-w_0^{(N-1)}\right)+\rho_b h_b \ddot{w}_0^{(N)}=0,
\end{gathered}
\tag{3.14}
$$

$$
\begin{gathered}
-J_g\big(\varphi^{(2)}-\varphi^{(1)}\big)+\rho_b h_b(a^2+b^2)\ddot{\varphi}^{(1)}=0,\\
J_g\big(-\varphi^{(k-1)}+2\varphi^{(k)}-\varphi^{(k+1)}\big)+\rho_b h_b(a^2+b^2)\ddot{\varphi}^{(k)}=0,\ k=2,3\ldots,N-2,\\
J_g\big(\varphi^{(N)}-\varphi^{(N-1)}\big)+\rho_b h_b(a^2+b^2)\ddot{\varphi}^{(N)}=0,
\end{gathered}
\tag{3.15}
$$

где $J_g=G_{13}b^2+G_{23}a^2$.

Полученная система уравнений (3.14) полностью эквивалентна системе уравнений (3.2), и путем ее решения устанавливаются содержащиеся в (3.4)– (3.6) формулы для определения ω_u^2. Аналогичным образом решением уравнений (3.15) устанавливаются формулы:

при $N=2$:

$$
\omega_\varphi^2=\frac{2J_g}{\rho_b h_b h(a^2+b^2)}=\frac{2(G_{13}b^2+G_{23}\,a^2)}{\rho_b h_b h(a^2+b^2)},
\tag{3.16}
$$

при $N=3$:

$$
\omega_{\varphi 1}^2=0, \quad \omega_{\varphi 1}^2=\frac{3(G_{13}b^2+G_{23}a^2)}{\rho_b h_b h(a^2+b^2)},
\tag{3.17}
$$

при $N=4$:

$$
\begin{gathered}
\omega_{\varphi 1}^2=(2-\sqrt{2})\,\frac{J_g}{\rho_b h_b h(a^2+b^2)}, \quad \omega_{\varphi 2}^2=\frac{2J_g}{\rho_b h_b h(a^2+b^2)},\\
\omega_{\varphi 3}^2=(2+\sqrt{2})\,\frac{J_g}{\rho_b h_b h(a^2+b^2)}.
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

По этим формулам вычисляются частоты крутильных форм свободных колебаний, совершающихся вращением вокруг оси z несущих слоев относительно друг друга при $\delta\varphi^{(k)}\neq 0$. В случае $G_{13}=G_{23}=G$ они сводятся к формулам для определения частот ω_i^2, содержащихся в (3.4)–(3.6), и удовлетворяют равенству $\omega_u^2=\omega_\varphi^2$.

Рассмотрим систему уравнений (3.12), которая для случая $N=2$ (трехслойная пластина) представима в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{G_{13}}{h}\left[u_0^{(2)}-u_0^{(1)}+\frac{h_b+h}{2}\left(\theta^{(1)}+\theta^{(2)}\right)\right]+\rho_b h_b\omega^2 u_0^{(1)}=0,\\
\frac{G_{13}}{h}\left[u_0^{(2)}-u_0^{(1)}+\frac{h_b+h}{2}\left(\theta^{(1)}+\theta^{(2)}\right)\right]-\rho_b h_b\omega^2 u_0^{(2)}=0,
\end{gathered}
\tag{3.19}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{G_{13}\big(h_b+h\big)}{2h}\left[u_0^{(2)}-u_0^{(1)}+\frac{h_b+h}{2}\left(\theta^{(1)}+\theta^{(2)}\right)\right]-\\
-\frac{E_3a^2}{12h}\left(\theta^{(2)}-\theta^{(1)}\right)+\frac{\rho_b h_b a^2}{12}\,\omega^2\theta^{(1)}=0,\\
\frac{G_{13}\big(h_b+h\big)}{2h}\left[u_0^{(2)}-u_0^{(1)}+\frac{h_b+h}{2}\left(\theta^{(1)}+\theta^{(2)}\right)\right]-\\
-\frac{E_3,a^2}{12h}\left(\theta^{(2)}-\theta^{(1)}\right)+\frac{\rho_b h_b a^2}{12}\,\omega^2\theta^{(2)}=0.
\end{gathered}
\tag{3.20}
$$

Из системы уравнений (3.20) при условии $\theta^{(2)} - \theta^{(1)} \neq 0$ следует вторая формула в (3.4) и зависимость

$$u_0^{(2)} - u_0^{(1)} = \left(\frac{\rho_b h_b h a^2}{12G_{13}\big(h_b + h\big)\omega^2} - \frac{h_b + h}{2} \right) \big(\theta^{(1)} + \theta^{(2)}\big), \tag{3.21}$$

а из системы уравнений (3.19) – зависимость

$$\theta^{(1)} + \theta^{(2)} = \frac{h}{G_{13}\big(h_b + h\big)} \left(\rho_b h_b \omega^2 - \frac{2G_{13}}{h} \right) \big(u_0^{(2)} - u_0^{(1)}\big). \tag{3.22}$$

Если внести зависимость (3.22) в (3.21), то условие $u_0^{(2)} - u_0^{(1)} \neq 0$ имеет место при выполнении равенств

$$\omega_{i1} = 0, \quad \omega_{i2} = \frac{2G_{13}}{\rho h_b h} \left[1 + \frac{\big(h_b + h\big)^2}{a^2} \right]; \quad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}; \quad \overrightarrow{\underleftarrow{a,b}}.$$

Отсюда следует, что чисто сдвиговые формы колебаний с частотами (3.4), совершающихся за счет плоскопараллельных движений несущих слоев в направлениях осей x и y, имеют место лишь с точностью до выполнения равенств $3\big(h_b + h\big)^2/a^2 + 1 \approx 1$, $3\big(h_b + h\big)^2/b^2 + 1 \approx 1$, $\theta^{(k)} \approx 0$, $\psi^{(k)} \approx 0$. Эти равенства в реальных конструкциях с точностью $1 + \varepsilon \approx 1$ выполняются даже при $\big(h_b + h\big)/a \sim \sqrt{\varepsilon}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-08-90435, 13-08-97076).

Summary

V.N. Paimushin, T.V. Polyakova. Refined Equations of Motion of Multilayered Shells with Transversely Soft Fillers under a Medium Bending.

As a development of the earlier results, we constructed a refined two-dimensional mathematical model of the dynamic deformation of multilayered plates and shells with transversely soft fillers, based on the classic Kirchhoff–Love model for supporting layers and the hypothesis on similarity of the laws of variation of movements along the thickness of fillers under both static and dynamic loading process. On the ground of this hypothesis, for a transversely soft filler, we derived simplified quasi-static equations of the theory of elasticity, which allow transverse integrating. When integrating the equations to describe the stress-strain state (SSS), we introduced (as in the static problems) two-dimensional unknown functions representing transverse tangent stresses, constant in thickness. Based on the generalized variational Ostrogradskii–Hamilton principle for describing the dynamic processes of deformation with high variability of SSS parameters, we obtained two-dimensional motion equations of general form, where the inertial components have the same degree of accuracy in comparison with the other ones. We simplified the obtained equations for the case of low variability of SSS parameters and considered the problem of free oscillations of a small rectangular multilayered plate, which are characterized by a zero variability of the functions in the tangential directions and are realized in the plate without deformation of the supporting layers.

Keywords: orthotropic plate, refined theory, trigonometric functions, free oscillations, longitudinal-transverse form, oscillation frequencies.

Литература

1. *Norr A.K., Burton W.S., Bert Ch.W.* Computational models for sandwich panels and shells // Appl. Mech. Rev. – 1996. – V. 49, No 3. – P. 155–199.

2. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных элементов конструкций. Анализ современного состояния и уточненная классификация форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 707–716.

3. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (Этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 2. – С. 148–162.

4. *Муштари Х.М.* О применимости различных теорий трехслойных пластин и оболочек // Изв. АН СССР. ОТН Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 163–165.

5. *Муштари Х.М.* К общей теории пологих оболочек с заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1961. – № 2. – С. 24–29.

6. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

7. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – 326 с.

8. *Паймушин В.Н.* К вариационным методам решения пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.

9. *Паймушин В.Н.* Уточненная нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем при термосиловых воздействиях // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1989. – № 4. – С. 8–12.

10. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягким заполнителем) // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 11. – С. 29–42.

11. *Паймушин В.Н., Петрушенко Ю.Я.* Вариационный метод решения задач механики пространственных составных тел. Обобщенный вариационный принцип Гамильтона–Остроградского // Сообщ. АН Грузинской ССР. – 1988. – Т. 131, № 1. – С. 130–135.

12. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем и численно-аналитический метод их решения // Прикл. механика и техн. физика. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 137–151.

13. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточнение уравнений динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягкими заполнителями // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – № 3. – С. 142-152.

14. *Паймушин В.Н., Хусаинов В.Р.* Уточненная теория трехслойных пластин и оболочек для исследования динамических процессов деформирования с большими показателями изменяемости // Механика композитных материалов и конструкций. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 215–235.

15. *Паймушин В.Н., Хусаинов В.Р.* Уравнения и классификация свободных и собственных колебаний симметричных по толщине трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Механика композитных материалов и конструкций. – 2001. – Т. 7, № 3. – С. 310–317.

16. *Паймушин В.Н., Иванов В.А., Хусаинов В.Р.* Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины с использованием для заполнителя уравнений теории упругости // Механика композитных материалов и конструкций. – 2002. – Т. 8, № 2. – С. 197–213.

17. *Паймушин В.Н., Иванов В.А., Хусаинов В.Р.* Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории // Механика композитных материалов и конструкций. – 2002. – Т. 8, № 4. – С. 543–554.

18. *Паймушин В.Н., Иванов В.А., Хусаинов В.Р.* Анализ уравнений и задач о свободных колебаниях трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем и симметричным по толщине строение // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2001. – № 4. – С. 22–25.

Поступила в редакцию
12.12.12

Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия.

E-mail: *dsm@dsm.kstu-kai.ru, vpajmushin@mail.ru*

Полякова Татьяна Витальевна – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия.

E-mail: *dsm@dsm.kstu-kai.ru*