УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 155, кн. 2 Физико-математические науки *2013*

УДК 517.544

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

И.Г. Салехова, М.М. Яхина

Аннотация

Решена смешанная задача для плоскости $u^+(t) = f^+(t)$, $v^-(t) = g^-(t)$, $t \in L$, где L – объединение конечного или счётного числа отрезков (расположенных в том числе периодически) с точкой сгущения на бесконечности. Для счётного множества отрезков решение задачи получено путем сведения к соответствующей задаче Римана в случае счётного множества контуров, в частности периодического расположения контуров.

Ключевые слова: смешанная задача для плоскости, задача Римана, одноперιодическое расположение отрезков, одноперιодическая функция, двоякопериодическое расположение отезков, эллиптическая функция, квазиэллиптическая функция.

Введение

Смешанная задача для плоскости в случае конечного числа отрезков рассматривалась в статье [1]. К этой задаче сводится основная смешанная задача теории упругости для плоскости с прямолинейными разрезами в случае, когда на верхних краях щелей задаются внешние напряжения, а на нижних краях – смещения. Метод, предложенный в [1], довольно сложный и содержит некоторые неточности. В настоящей работе для решения этой задачи применяется другой метод, позволяющий свести решение задачи к решению задачи Римана и упростить решение задачи. С учётом результатов решения задачи Римана в случае счётного множества контуров [2, с. 236–275] дано обобщение задачи на случай счётного множества отрезков, в частности, на случай периодического расположения отрезков и периодических данных [3, 4]. Предложенный аппарат позволяет исследовать задачу для непериодических данных.

1. Случай конечного числа интервалов

1.1. Постановка задачи. Пусть S обозначает плоскость, разрезанную вдоль отрезков $L_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, \ldots, n$ действительной оси, причём $a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n$. Обозначим $L = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$.

Требуется найти кусочно-голоморфную в S функцию

$$\Phi(z) = u(z) + iv(z),$$

исчезающую на бесконечности, по заданным граничным значениям вещественной и мнимой части

$$\begin{cases} u^+(t) = f^+(t), \\ v^-(t) = g^-(t), \end{cases} \qquad t \in L, \tag{1}$$

где $f^+(t)$, $g^-(t)$ – заданные действительные функции, принадлежащие классу $H_\lambda(\overline{L})$.

Введём вспомогательные функции

$$\Omega(z) = \frac{\Phi(z) + i\overline{\Phi}(z)}{2}, \quad \Psi(z) = \frac{\Phi(z) - i\overline{\Phi}(z)}{2}, \quad \text{где} \quad \overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\overline{z})},$$

обладающие свойствами

$$\overline{\Omega}(z) = -i\Omega(z), \tag{2}$$

$$\overline{\Psi}(z) = i\Psi(z). \tag{3}$$

Учитывая, что

$$u^+(t) = \frac{\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+(t)}}{2}, \quad v^-(t) = \frac{\Phi^-(t) - \overline{\Phi^-(t)}}{2i},$$

получим, что граничное условие (1) сведётся к следующим:

$$\Omega^+(t) - i\Omega^-(t) = f(t), \tag{4}$$

$$\Psi^+(t) + i\Psi^-(t) = g(t), \tag{5}$$

где $t \in L$, то есть к двум задачам Римана (4), (5) в классе функций, удовлетворяющих соответственно условиям (2), (3), причём $f(t) = f^+(t) + g^-(t)$, $g(t) = f^+(t) - g^-(t)$.

Очевидно, что решение задачи (1) запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \Psi(z). \tag{6}$$

Решение поставленной задачи получено в классах $h(b_k)$, $h(a_k)$, $h(a_k, b_k)$, h_0, $h(c_q)$. Под классом $h(b_k)$ будем понимать класс функций, ограниченных в окрестности концов b_k, а на остальных концах имеющих бесконечность порядка не выше единицы.

1.2. Решение задачи в классе $h(b_k)$. Под классом $h(b_k)$ будем понимать класс функций, ограниченных в окрестности концов b_k, а в остальных концах имеющих бесконечность порядка не выше единицы.

Остановимся на задаче (4).

Рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\Omega_0^+(t) - i\Omega_0^-(t) = 0. \tag{7}$$

Для решения задачи построим каноническую функцию $\mathcal{X}_b^{\Omega}(z) \in h(b_k)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1.\ \ \mathcal{X}_b^+(t) - i\mathcal{X}_b^-(t) = 0, \\ &2.\ \ \mathcal{X}_b^+(t) \neq 0, \quad \mathcal{X}_b^-(t) \neq 0, \quad t \in L, \\ &3.\ \ \mathcal{X}_b(z) \in h(b_k). \end{aligned} \tag{8}$$

С этой целью рассмотрим функцию $\gamma^{\Omega}(z)$, которая является решением задачи о скачке $\gamma^{\Omega+}(t) - \gamma^{\Omega-}(t) = \ln G(t)$. Учитывая, что в нашем случае $G(t) \equiv i$, и выбирая $\ln(i) = i(\pi/2)$, получим

$$\gamma^{\Omega}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln(i)}{\tau - z}\, d\tau = \ln \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - b_k}{z - a_k}\right)^{1/4}.$$

Тогда

$$\mathcal{X}_b^\Omega(z) = e^{\gamma^\Omega(z)} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - b_k}{z - a_k} \right)^{1/4}.$$

Учитывая (8), перепишем (7) в виде $\dfrac{\Omega_0^+(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(t)} = \dfrac{\Omega_0^-(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega-}(t)}$, $t \in L$, откуда следует, что функция $f(z) = \dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}$ принадлежит $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ и обращается в нуль на бесконечности. Тогда на основании теоремы Лиувилля $f(z) \equiv 0$, то есть $\Omega_0(z) \equiv 0$. Имея $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$, перепишем (4) в виде $\dfrac{\Omega^+(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(t)} - \dfrac{\Omega^-(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega-}(t)} = \dfrac{f(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(t)}$, то есть функция $\dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}$ является частным решением задачи о скачке и обращается в нуль на бесконечности.

Таким образом,

$$\Omega(z) = \frac{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(\tau)(\tau - z)}\, d\tau.$$

Поскольку $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$симметрична, то есть $\overline{\mathcal{X}}_b^\Omega(z) = \mathcal{X}_b^\Omega(z)$, функция $\Omega(z)$ удовлетворяет условию (2).

Рассуждая аналогичным образом для задачи (5) и учитывая, что

$$\chi_b^\Psi(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{z - b_k}{z - a_k} \right)^{3/4},$$

получим

$$\Psi(z) = \frac{\mathcal{X}_b^\Psi(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi+}(\tau)(\tau - z)}\, d\tau.$$

Итак, согласно (6) общее решение задачи (1) в классе $h(b_k)$ запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \Psi(z) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathcal{X}_b^\Omega(z) \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(\tau)(\tau - z)}\, d\tau + \mathcal{X}_b^\Psi(z) \int\limits_L \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi+}(\tau)(\tau - z)}\, d\tau \right].$$

1.3. Решение задачи в классе $h(c_q)$**.** Через $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ обозначим концы a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, взятые в каком-нибудь порядке. Предположим, что количество a-точек и b-точек равно q_1 и q_2 соответственно, причём $q = q_1 + q_2$. Под классом $h(c_q)$ понимается класс функций, ограниченных в некоторых заранее заданных концах $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Класс, соответствующий $q = 0$, мы будем обозначать h_0. Если $q_1 = 0$, $q_2 = n$, то соответствующий класс будем обозначать $h(b_k)$, если же $q_1 = n$, $q_2 = 0$, то имеем класс $h(a_k)$. Если же $q = 2n$, то получаем класс $h(a_k, b_k)$.

Тогда канонические функции в этом классе запишем в виде

$$\mathcal{X}_q^\Omega(z) = \left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{q} (z - c_k)}{\prod\limits_{k=q+1}^{2n} (z - c_k)} \right)^{1/4}, \quad \mathcal{X}_q^\Psi(z) = \left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{q} (z - c_k)}{\prod\limits_{k=q+1}^{2n} (z - c_k)} \right)^{3/4}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим

1) при $q < n$ решение задачи (1) имеет вид

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \Psi(z) = \frac{\mathcal{X}_q^{\Omega}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Omega+}(\tau)(z-\tau)}\, d\tau + \mathcal{X}_q^{\Omega}(z) P_{n-q-1}^{\Omega}(z) + \\ + \frac{\mathcal{X}_q^{\Psi}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Psi+}(\tau)(z-\tau)}\, d\tau + \mathcal{X}_q^{\Psi}(z) P_{n-q-1}^{\Psi}(z), \quad (9)$$

где в силу (2) и (3) многочлены $P_{n-q-1}^{\Omega}(z)$, $P_{n-q-1}^{\Psi}(z)$ удовлетворяют условиям

$$\overline{P}_{n-q-1}^{\Omega}(z) = -iP_{n-q-1}^{\Omega}(z), \quad \overline{P}_{n-q-1}^{\Psi}(z) = iP_{n-q-1}^{\Psi}(z);$$

2) при $q = n$ задача (1) имеет единственное решение

$$\Phi(z) = \frac{\mathcal{X}_q^{\Omega}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Omega+}(\tau)(z-\tau)}\, d\tau + \frac{\mathcal{X}_q^{\Psi}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Psi+}(\tau)(z-\tau)}\, d\tau;$$

3) при $q > n$ задача (1) имеет единственное решение

$$\Phi(z) = \frac{\mathcal{X}_q^{\Omega}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Omega+}(\tau)(z-\tau)}\, d\tau + \frac{\mathcal{X}_q^{\Psi}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_q^{\Psi+}(\tau)(z-\tau)}\, d\tau$$

при выполнении условий разрешимости

$$\int\limits_L \frac{f(\tau)\tau^j}{\mathcal{X}_q^{\Omega+}(\tau)}\, d\tau = 0, \quad \int\limits_L \frac{g(\tau)\tau^j}{\mathcal{X}_q^{\Psi+}(\tau)}\, d\tau = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, q-n-1.$$

При $q \geqslant n$ в формуле (9) надо положить $P_{n-q-1}(z) \equiv 0$.

2. Структура решения задачи Римана в случае счётного множества интервалов

2.1. Постановка задачи. Пусть S обозначает плоскость, разрезанную вдоль отрезков $L_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, действительной оси, причём $a_1 < b_1 < \cdots < a_k < b_k < \cdots$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$. Обозначим $L = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L_k$.

Требуется найти кусочно-голоморфную в S функцию

$$\Phi(z) = u(z) + iv(z),$$

удовлетворяющую условию (1).

Можно записать структуру решения задачи в классах $h(a_k)$, $h(b_k)$, $h(a_k, b_k)$, h_0, $h(c_{k_n})$.

Остановимся на классе $h(b_k)$.

2.2. Структура решений в классе $h(b_k)$. На основании результатов по решению задачи Римана в случае счётного множества гладких разомкнутых дуг [3] задача о скачке

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = g(t), \quad t \in L, \quad g(t) = g_k(t), \quad t \in L_k, \quad L = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k \quad (10)$$

имеет частное решение

$$\gamma(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)\,d\tau}{\tau^{n_k}(\tau-z)},\tag{11}$$

где последовательность целых чисел $\{n_k\}$ подобрана так, что ряд (11) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов. Учитывая, что в нашем случае $g(t)=\ln G(t)$, имеем

$$\gamma^{\Omega}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{i\pi}{2}\,\frac{d\tau}{\tau^{n_k}(\tau-z)}=\frac{1}{4}\int\limits_{L_k}\left[\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau}-\frac{z}{\tau^2}-\frac{z^2}{\tau^3}-\dots-\frac{z^{n_k-1}}{\tau^{n_k}}\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{L_k}\frac{d\tau}{\tau-z}-\frac{1}{4}\int\limits_{L_k}\frac{d\tau}{\tau}-\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n_k-1}\int\limits_{L_k}\frac{z^j}{\tau^{j+1}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{b_k-z}{a_k-z}-\frac{1}{4}\ln\frac{b_k}{a_k}+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n_k-1}\frac{z^j}{jb_k^j}-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n_k-1}\frac{z^j}{ja_k^j}=\ln\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\dfrac{z}{b_k},n_k-1\right)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\dfrac{z}{a_k},n_k-1\right)}\right)^{1/4},$$

где под $\ln\dfrac{b_k-z}{a_k-z}$ понимается однозначная ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль L_k плоскости и исчезающая на бесконечности, а под $\ln\dfrac{b_k}{a_k}$ – вполне определённое фиксированное значение этого выражения в точке $z=0$, $E(u,q)=$ $=(1-u)\exp\left(\sum\limits_{p=1}^{q}\dfrac{u^p}{p}\right)$ – первичный множитель Вейерштрасса,

$$\gamma^{\Psi}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\left(-\frac{i\pi}{2}\right)\frac{d\tau}{\tau^{n_k}(\tau-z)}=\ln\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{b_k},n_k-1\right)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_k},n_k-1\right)}\right)^{3/4}.$$

Канонические функции соответственно имеют вид

$$\mathcal{X}_b^{\Omega(z)}=\exp(\gamma^{\Omega}(z))=\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{b_k},n_k-1\right)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_k},n_k-1\right)}\right)^{1/4},$$

$$\mathcal{X}_b^{\Psi(z)}=\exp(\gamma^{\Psi}(z))=\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{b_k},n_k-1\right)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_k},n_k-1\right)}\right)^{3/4}.$$

Тогда решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z)=\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)P^{\Omega}(z)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)z^{n_k}}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{f(\tau)\,d\tau}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(\tau)\tau^{n_k}(\tau-z)}+$$

$$+\ \mathcal{X}_b^{\Psi}(z)P^{\Psi}(z)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)z^{n_k}}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)\,d\tau}{\mathcal{X}_b^{\Psi+}(\tau)\tau^{n_k}(\tau-z)},$$

где $P^{\Omega}(z)$ и $P^{\Psi}(z)$ – целые функции, удовлетворяющие условиям

$$\overline{P}^{\Omega}(z) = -iP^{\Omega}(z), \quad \overline{P}^{\Psi}(z) = iP^{\Psi}(z).$$

Аналогично можно записать структуру решения в других классах.

3. Случай однопериодического расположения контуров

Пусть дан отрезок $L_0 = (a_0, b_0)$ в полосе $0 < \operatorname{Re} z \leq 2\pi$. Обозначим $L = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} L_k$, где L_k получены из L_0 преобразованиями однопериодической группы $z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

На основании вышеизложенного $\gamma(z)$ имеет вид (11). Можно конкретизировать набор целых чисел n_k при построении частного решения (11). Справедлива [3]

Теорема 1. *Если $n > 0$ есть целое число, при котором ряд*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (R_k)^{-(n+1)}, \quad A_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau|, \quad R_k = \min|\tau|, \quad \tau \in L_k \tag{12}$$

сходится, то ряд (11) *при всех $n_k = n$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек контуров L_k (после отбрасывания соответствующего числа членов).*

Задача (10) в этом случае имеет частное решение

$$\widetilde{\gamma}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^n (\tau - z)}. \tag{13}$$

Предположим, что выполняется условие

$$g_0(t) = g_k(t + 2\pi k), \quad t \in \overline{L}_0, \tag{14}$$

тогда $A_k = A_0$, и сходимость ряда (13) обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} R_k^{-(n+1)} + R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)},$$

где $R_0 = a_0$, $R_k = a_0 + 2\pi k$, $k > 0$, $R_k = |b_{-1} + 2\pi k|$, $k < 0$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)}$ можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a_0 + 2\pi k)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}(\frac{a_0}{k} + 2\pi)^{n+1}}. \tag{15}$$

Учитывая, что $(a_0/k + 2\pi) \to 2\pi$ при $k \to \infty$ имеем, что сходимость ряда (15) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}. \tag{16}$$

Известно, что наименьшее n, при котором сходится ряд (16), будет равно 1.

Итак, задача (10) имеет частное решение

$$\widetilde{\gamma}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau-z)}=$$

$$=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g_0(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau-z)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau(\tau-z)}+\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_{-k}}\frac{g_{-k}(\tau)d\tau}{\tau(\tau-z)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g_0(\tau)\left[\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau}\right]d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g_0(\tau)\left[\frac{1}{\tau-z+2\pi k}-\frac{1}{\tau+2\pi k}\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g_0(\tau)\left[\frac{1}{\tau-z-2\pi k}-\frac{1}{\tau-2\pi k}\right]d\tau\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g_0(\tau)\left\{\left[\frac{1}{\tau-z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-z+2\pi k}+\frac{1}{\tau-z-2\pi k}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\tau}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau+2\pi k}+\frac{1}{\tau-2\pi k}\right)\right]\right\}d\tau=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0}g_0(\tau)\left[\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau,$$

при этом мы учли (14) и разложение $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби.

Таким образом, с точностью до постоянного слагаемого получен однопериодический аналог интеграла типа Коши [2, с. 201].

4. Случай двоякопериодического расположения интервалов

Пусть отрезок $L_0=(a_0,b_0)$ лежит в R, где R – прямоугольник с вершинами $-\frac{i\widetilde{\omega}_2}{2}$, $\omega_1-\frac{i\widetilde{\omega}_2}{2}$, $\omega_1+\frac{i\widetilde{\omega}_2}{2}$, $i\frac{\widetilde{\omega}_2}{2}$, ω_1, $\widetilde{\omega}_2\in\mathbb{R}$, $\omega_2=i\widetilde{\omega}_2$. Обозначим $L=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}L_k$, где L_k получены из L_0 преобразованиями двоякопериодической группы $z+\omega$, $\omega=k_1\omega_1+$ $+k_2\omega_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$. Пусть в задаче о скачке (10) функции $g_k(\tau)$ удовлетворяют условию

$$g_0(t)=g_k(t+\omega),\quad t\in\overline{L}_0. \tag{17}$$

В данном случае в силу (17) сходимость ряда (13) обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}R_k^{-(n+1)},\quad R_k=|\tau+\omega|. \tag{18}$$

Ряд (18) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}R^{-(n+1)}=\frac{1}{R_0^{n+1}}+\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{|\tau+\omega|^{n+1}}=\frac{1}{R_0^{n+1}}+\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{|\omega|^{n+1}\left|\dfrac{\tau}{\omega}+1\right|^{n+1}}.$$

Учитывая, что $|\tau/\omega+1|^{n+1}\to 1$ при $k_1,k_2\to\pm\infty$ имеем, что сходимость ряда (18) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{|\omega|^{n+1}}. \tag{19}$$

Из теории двоякопериодических функций [2, с. 212] известно, что наименьшее n, при котором сходится ряд (19), будет равно 2.

Таким образом, задача (1) имеет частное решение

$$\widetilde{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^2(\tau - z)}. \tag{20}$$

Суммируя ряд (20) с учётом (17), получим [4]

$$\widetilde{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau)[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]\, d\tau + \frac{z}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

где $\zeta(u) = \dfrac{1}{u} + \sum\limits_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}' \left(\dfrac{1}{u-\omega} + \dfrac{u}{\omega^2} + \dfrac{1}{\omega} \right)$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, есть дзета-функция Вейерштрасса.

Очевидно, что скачок, равный $g_0(t)$ на L_0, имеет каждая функция однопериметрического семейства $\gamma_1(z) = \widetilde{\gamma}(z) + Az$.

Если отыскивать двоякопериодические решения задачи (10) с периодами ω_1 и ω_2 и учитывать, что условие $\int\limits_{L_0} g_0(\tau)\, d\tau = 0$ [4] является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи, то получим

$$\gamma_1(z + \omega_k) = \gamma_1(z) + \frac{\omega_k}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau)\, d\tau + A\omega_k, \quad k = 1, 2,$$

откуда $A = -\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau) d\tau$.

Таким образом, с точностью до постоянного слагаемого получен двоякопериодический аналог интеграла типа Коши [2, с. 217] $\gamma(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]\, d\tau$.

5. Решение задачи в случае однопериодического расположения интервалов

5.1. Постановка задачи. Пусть отрезки $L_k = (a_k, b_k)$ расположены так, как указано в п. 3.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$, ограниченную на бесконечности и удовлетворяющую условию (1), где функции $f^+(t) = f_k^+(t)$, $g^-(t) = g_k^-(t)$, $t \in \overline{L}_k$ удовлетворяют условиям $f_0^+(t) = f_k^+(t + 2\pi k)$, $g_0^-(t) = g_k^-(t + 2\pi k)$, $t \in \overline{L}_0$, $k \in \mathbb{Z}$, $f_0^+(t), g_0^-(t) \in H_\lambda(\overline{L}_0)$.

Поставленная задача равносильна задаче нахождения периодической с периодом 2π функции $\Phi(z)$ с линией скачков L_0 по условию

$$\begin{cases} u^+(t) = f^+(t), \\ v^-(t) = g^-(t), \end{cases} \qquad t \in L_0,$$

где $f^+(t)$, $g^-(t)$ – заданные функции класса Гёльдера $H_\lambda(\overline{L_0})$.

Решение задачи отыскивается в классе функций, ограниченных на верхнем и нижнем концах полосы периода.

5.2. Решение задачи в классе $h(b_0)$. На основании вышеизложенного имеем

$$\gamma^{\Omega}(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0}\ln G(\tau)\left[\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau=\ln\left(\frac{\sin\dfrac{b_0-z}{2}\sin\dfrac{a_0}{2}}{\sin\dfrac{a_0-z}{2}\sin\dfrac{b_0}{2}}\right)^{1/4},$$

$$\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)=\left(\frac{\sin\dfrac{b_0-z}{2}\sin\dfrac{a_0}{2}}{\sin\dfrac{a_0-z}{2}\sin\dfrac{b_0}{2}}\right)^{1/4}, \tag{22}$$

причём $\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)=\mathcal{X}_b^{\Omega}(z+2\pi)$, $\overline{\mathcal{X}}_b^{\Omega}(z)=\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)$.

Функция $\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)$ ограничена на концах полосы периода, так как при $z\to x\pm\infty$ она стремится к конечным пределам [2, с. 201].

С помощью канонической функции задача сводится к задаче о скачке в классе функций, ограниченных на концах полосы периода

$$\frac{\Omega^+(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(t)}-\frac{\Omega^-(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega-}(t)}=\frac{f(t)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(t)},\quad t\in L_0,$$

откуда

$$\Omega(z)=\frac{\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)}{4\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau+c_b^{\Omega}\mathcal{X}_b^{\Omega}(z),$$

где

$$c_b^{\Omega}=b(1+i),\quad b=\mathrm{const},\quad b\in\mathbb{R}. \tag{23}$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)=\left(\frac{\sin\dfrac{b_0-z}{2}\sin\dfrac{a_0}{2}}{\sin\dfrac{a_0-z}{2}\sin\dfrac{b_0}{2}}\right)^{3/4}, \tag{24}$$

причём $\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)=\mathcal{X}_b^{\Psi}(z+2\pi)$, $\overline{\mathcal{X}}_b^{\Psi}(z)=\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)$. Функция $\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)$ ограничена на концах полосы периода.

Рассуждая, как и выше, получим

$$\Psi(z)=\frac{\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)}{4\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi+}(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau+c_b^{\Psi}\mathcal{X}_b^{\Psi}(z),$$

где

$$c_b^{\Psi}=a(1-i)\quad a=\mathrm{const},\quad a\in\mathbb{R}. \tag{25}$$

Тогда решение задачи (1) в классе $h(b_0)$ запишется в виде

$$\Phi(z)=\frac{\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)}{4\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega+}(\tau)}\left[ctg\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau+c_b^{\Omega}\mathcal{X}_b^{\Omega}+$$
$$+\frac{\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)}{4\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi+}(\tau)}\left[ctg\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau+c_b^{\Psi}\mathcal{X}_b^{\Psi},$$

где $\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)$, $\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)$, c_b^{Ω}, c_b^{Ψ} определяются соответственно формулами (22), (24), (23), (25).

Аналогичным образом можно записать решение в классе $h(a_0)$.

5.3. Решение задачи в классе $h(a_0, b_0)$. Остановимся сначала на задаче для $\Omega(z)$.

Построим каноническую функцию $\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)$:

$$\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z) = \mathcal{X}_{b}^{\Omega}(z)\,\frac{\sin((a_0-z)/2)}{\sin((\theta-z)/2)},$$

где $\theta \notin \overline{L}_0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Поведение $\mathcal{X}_{b}^{\Omega}(z)$ нами было исследовано, поэтому остановимся на исследовании функции $f(z) = \dfrac{\sin((a_0-z)/2)}{\sin((\theta-z)/2)}$.

1. Для исследования функции на верхнем конце полосы периода сделаем замену $e^{iz} = t$ [2, с. 201], тогда

$$f(z) = \frac{\sin((a_0-z)/2)}{\sin((\theta-z)/2)} = \frac{e^{i(a_0-z)/2} - e^{-i(a_0-z)/2}}{e^{i(\theta-z)/2} - e^{-i(\theta-z)2}} = \frac{e^{ia_0} - e^{iz}}{e^{i\theta} - e^{iz}} = \frac{e^{ia_0} - t}{e^{i\theta} - t}.$$

Пусть $z \to x + i\infty$, тогда $t \to 0$, и $\lim\limits_{z\to x+i\infty} f(z) = e^{ia_0}/e^{i\theta}$. Таким образом, $f(z)$ ограничена на верхнем конце полосы периода.

2. Если же положить $e^{-iz} = t$, то

$$f(z) = \frac{e^{ia_0} - 1/t}{e^{i\theta} - 1/t} = \frac{te^{ia_0} - 1}{te^{i\theta} - 1}.$$

Если $z \to x - i\infty$, $t \to 0$, то $\lim\limits_{z\to x-i\infty} f(z) = 1$, и поэтому функция $f(z)$ ограничена на нижнем конце полосы периода.

Имея $\mathcal{X}_{ab}(z)$, перепишем однородное граничное условие в виде

$$\frac{\Omega_0^+(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega+}(t)} = \frac{\Omega_0^-(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega-}(t)}$$

Таким образом, $\dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)}$ является периодической функцией, ограниченной на верхнем и нижнем концах полосы периода, а значит, $\dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)} \equiv C$, где $C = \mathrm{const}$. Но, так как функция $\dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)}$ обращается в нуль в точках $z_k = \theta - 2\pi k$, то $C = 0$. Таким образом, соответствующая однородная задача не имеет отличных от нуля решений.

Единственное решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \Psi(z) = \frac{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)}{4\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau - z}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-\theta}{2}\right)\right]d\tau +$$
$$+ \frac{\mathcal{X}_{ab}^{\Psi}(z)}{4\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Psi}(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau - z}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-\theta}{2}\right)\right]d\tau.$$

5.4. Решение задачи в классе h_0. Каноническая функция будет иметь вид

$$\mathcal{X}_{0}^{\Omega}(z) = \mathcal{X}_{b}^{\Omega}(z)\frac{1}{\sin((b_0-z)/2)\sin((\theta-z)/2)}, \quad \theta \notin \overline{L}_0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Поведение $\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)$ нами было исследовано, поэтому остановимся на исследовании функции $F(z)=\dfrac{1}{\sin((b_0-z)/2)\sin((\theta-z)/2)}$.

1. Для исследования функции на верхнем конце полосы периода сделаем замену $e^{iz}=t$, тогда

$$F(z)=\frac{-4}{e^{i(b_0+\theta)/2}/t+e^{-i(b_0+\theta)/2}\,t}.$$

Пусть $z\to x+i\infty$, тогда $t\to 0$, поэтому функция $F(z)$ на верхнем конце полосы периода имеет нуль первого порядка.

2. Если же положить $e^{-iz}=t$, то

$$F(z)=\frac{-4}{e^{i(b_0+\theta)/2}\,t+e^{-i(b_0+\theta)/2}/t},$$

поэтому функция $F(z)$ и на нижнем конце полосы периода имеет нуль первого порядка.

Рассмотрим функцию $\dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_0^{\Omega}(z)}$, которая будет периодической, имеющей полюсы первого порядка на верхнем и нижнем концах полосы периода. Тогда на основании [2, с. 204] имеем

$$\frac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_0^{\Omega}(z)}=\sum_{k=-1}^{1}c_ke^{ikz},$$

где $c_k=\mathrm{const},\ k=-1,0,1$.

Таким образом,

$$\Omega_0(z)=\mathcal{X}_0^{\Omega}(z)(c_{-1}e^{-iz}+c_0+c_1e^{iz})=\mathcal{X}_0^{\Omega}(z)(\widetilde{c}_1\cos z+\widetilde{c}_2\sin z+c_0).$$

Функция $\mathcal{X}_0(z)$ в точках $z_k=\theta-2\pi k$ имеет полюсы первого порядка, поэтому для ограниченности решения в точках z_k необходимо, чтобы $c_0=-\widetilde{c}_1\cos\theta-\widetilde{c}_2\sin\theta$.

Тогда

$$\Omega_0(z)=\mathcal{X}_0^{\Omega}(z)(\widetilde{c}_1\cos z+\widetilde{c}_2\sin z-\widetilde{c}_1\cos\theta-\widetilde{c}_2\sin\theta)=$$
$$=\mathcal{X}_0^{\Omega}(z)[\,\widetilde{c}_1(\cos z-\cos\theta)+\widetilde{c}_2(\sin z-\sin\theta)].$$

Тогда общее решение задачи в классе h_0 можно записать в виде

$$\Phi(z)=\frac{\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)}{4\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Omega}(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau+$$
$$+\ \mathcal{X}_0^{\Omega}(z)\,[\widetilde{c}_1(\cos z-\cos\theta)+\widetilde{c}_2(\sin z-\sin\theta)]+$$
$$+\ \frac{\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)}{4\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_b^{\Psi}(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau+$$
$$+\ \mathcal{X}_0^{\Psi}(z)[\widetilde{\widetilde{c}}_1(\cos z-\cos\theta)+\widetilde{\widetilde{c}}_2(\sin z-\sin\theta)],$$

где $\widetilde{c}_1,\ \widetilde{c}_2,\ \widetilde{\widetilde{c}}_1,\ \widetilde{\widetilde{c}}_2$ имеют соответственно вид (23), (25).

6. Решение задачи в случае двоякопериодического расположения интервалов

6.1. Пусть отрезки $L_k=(a_k,b_k)$ расположены так, как указано в п. 4. Требуется найти функцию $\Phi(z)=u(z)+iv(z)$, ограниченную на бесконечности, удовлетворяющую условию (1), где функции $f^+(t)=f_k^+(t)$, $g^-(t)=g_k^-(t)$,

$t \in L_k$, удовлетворяют условиям $f_0^+(t) = f_k^+(t+\omega)$, $g_0^-(t) = g_k^-(t+\omega)$, $t \in L_0$, $f_0(t)$, $g_0(t) \in H_\lambda(\overline{L}_0)$.

Поставленная задача равносильна задаче нахождения двоякопериодической эллиптической кусочно-голоморфной функции, ограниченной в параллелограмме периодов [4] с линией скачков L_0 по краевому условию

$$u^+(t) = f^+(t), \quad v^-(t) = g^-(t), \quad t \in L_0, \tag{26}$$

где $f^+(t)$, $g^-(t)$ – заданные функции, $f^+(t)$, $g^-(t) \in H_\lambda(L_0)$.

Решение задачи получено в классах $h(b_0)$, $h(a_0)$, h_0, $h(a_0,\ b_0)$.

6.2. Решение задачи в классе $h(b_0)$. На основании вышеизложенного имеем

$$\gamma^\Omega(z) = \frac{1}{4}\int\limits_{L_0}[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]\,d\tau = \frac{1}{4}\ln\frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)},$$

где

$$\sigma(u) = u\prod_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{u}{\omega}\right)\exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}\right), \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0,$$

– сигма-функция Вейерштрасса, при этом $\zeta(u) = \sigma'(u)/\sigma(u)$.

Тогда

$$\mathcal{X}_b^\Omega(z) = \exp(\gamma^\Omega(z)) = \left[\frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}\right]^{1/4}, \quad \overline{\mathcal{X}}_b^\Omega(z) = \mathcal{X}_b^\Omega(z).$$

Функция $\mathcal{X}_b^\Omega(z)$ является квазиэллиптической [4], то есть

$$\mathcal{X}_b^\Omega(z+\omega_k) = \mathcal{X}_b^\Omega(z)\exp(-\eta_k\alpha), \quad k = 1, 2, \quad \eta_k = 2\zeta\left(\frac{\omega_k}{2}\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\pi i}{2}\,d\tau = \frac{1}{4}(b_0 - a_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Остановимся на решении однородной задачи (7). Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_b^\Omega(z)}$, которая является квазиэллиптической с условием

$$f(z+\omega_k) = f(z)\exp(\eta_k\alpha). \tag{28}$$

Таким образом, получили задачу построения квазиэллиптической функции, удовлетворяющей условию (28). Однако критерием существования квазиэллиптической голоморфной функции $f(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющей условию (28), является условие $\alpha(\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1) = 2\pi i\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ [5]. Но в силу соотношения Лежандра, связывающего основные периоды и величины η_1, η_2 имеем $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$, откуда $\alpha = \widetilde{\omega}$.

В нашем случае α, определяемая формулой (27), не может быть периодом, поэтому $f(z) \equiv 0$.

Таким образом, задача (7) не имеет отличных от нуля решений.

Для решения неоднородной задачи (4) будем использовать квазипериодический аналог ядра Коши [5]

$$A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \alpha)}{\sigma(-\alpha)\sigma(\tau - z)},$$

причём $A(\tau, z + \omega_k) = A(\tau, z)\exp(\alpha\eta_k)$.

Единственным решением задачи (4) будет функция

$$\Omega(z) = \frac{\mathcal{X}_b^{\Omega}(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} A(\tau, z) \frac{f(\tau)\, d\tau}{\mathcal{X}_b^{\Omega^+}(\tau)},$$

причём функция удовлетворяет условию (2).

Рассуждая аналогично, получим

$$\Psi(z) = \frac{\mathcal{X}_b^{\Psi}(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{A_1(\tau, z) g(\tau)\, d\tau}{\mathcal{X}_b^{\Psi^+}(\tau)}, \quad \mathcal{X}_b^{\Psi}(z) = \left[\frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)}\right]^{3/4},$$

где $A_1(\tau, z) = \dfrac{\sigma(\tau - z - \alpha_1)}{\sigma(-\alpha_1)\sigma(\tau - z)}$, $\alpha_1 = \frac{3}{4}(b_0 - a_0)$.

Решение задачи (1) представимо в виде (6).

Решение в классе $h(a_0)$ запишется в виде

$$\Phi(z) = \frac{\mathcal{X}_a^{\Psi}(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{A(\tau, z) f(\tau)\, d\tau}{\mathcal{X}_a^{\Psi^+}(\tau)} + \frac{\mathcal{X}_a^{\Omega}(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{A_1(\tau, z) g(\tau)\, d\tau}{\mathcal{X}_a^{\Omega^+}(\tau)},$$

где $\mathcal{X}_a^{\Psi}(z) = \left[\dfrac{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)}{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}\right]^{1/4}$, $\mathcal{X}_a^{\Omega}(z) = \left[\dfrac{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)}{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}\right]^{3/4}$.

6.3. Решение задачи в классе $h(a_0, b_0)$. Каноническая функция будет иметь вид

$$\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z) = \left[\frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)}\right]^{1/4} \frac{\sigma(z - a_0)}{\sigma(z - \theta)}, \quad \theta \notin \overline{L}_0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Функция $\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)$ удовлетворяет условию $\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z + \omega_k) = \mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z) \exp(\beta \eta_k)$, где $\beta = -\alpha + \theta - a_0$ и β не равно периоду. Тогда квазиэллиптическая функция $f(z) = \dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)}$ тождественно равна нулю, откуда следует, что соответствующая однородная задача не имеет отличных от нуля решений.

Для решения неоднородной задачи возьмём $\theta = a_0 + \alpha$, тогда $\beta = 0$ и $\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z + \omega_k) = \mathcal{X}_{ab}^{\omega}(z)$, $k = 1, 2$.

Имея $\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)$, перепишем краевое условие (4) в виде

$$\frac{\Omega^+(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega+}(t)} - \frac{\Omega^-(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega-}(t)} = \frac{f(t)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega+}(t)}, \quad t \in L_0,$$

Таким образом, функция $\dfrac{\Omega(z)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)}$ является решением задачи о скачке в классе двоякопериодических функций. На основании известных результатов [4] имеем, что необходимым условием разрешимости получившейся задачи является равенство $\displaystyle\int\limits_{L_0} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega+}(\tau)} = 0$. Решение задачи имеет вид

$$\Omega(z) = \frac{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega}(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Omega+}(\tau)} \left[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - a_0 - \alpha)\right] d\tau.$$

Аналогично запишем

$$\Psi(z)=\frac{\mathcal{X}_{ab}^{\Psi}(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_{ab}^{\Psi+}(\tau)}\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau-a_0-\alpha_1)\right]d\tau,$$

где $\mathcal{X}_{ab}^{\Psi}(z)=\mathcal{X}_{b}^{\Psi}(z)\dfrac{\sigma(z-a_0)}{\sigma(z-\theta_1)}$, $\theta_1\notin\overline{L}_0$, $\theta_1\in\mathbb{R}$.

6.4. Решение задачи в классе h_0**.** Каноническая функция задачи имеет вид

$$\mathcal{X}_{0}^{\Omega}(z)=\left[\frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}\right]^{1/4}\frac{\sigma(z-\theta_2)}{\sigma(z-b_0)},\quad \theta_2\notin\overline{L}_0,\quad \theta_2\in\mathbb{R},$$

причём $\mathcal{X}_{0}^{\Omega}(z+\omega_k)=\mathcal{X}_{0}^{\Omega}(z)e^{-\eta_k\beta_1}$, $\beta_1=\theta_2+\alpha-b_0$ и β_1 не равно периоду.

Рассмотрим функцию $F_3(z)=\dfrac{\Omega_0(z)}{\mathcal{X}_{0}^{\Omega}(z)}$, которая является квазиэллиптической с условием

$$F_3(z+\omega_k)=F_3(z)\exp(\eta_k\beta_1).$$

Кроме того, функция $F_3(z)$ имеет в точке θ_2 полюс первого порядка. На основании известных свойств квазиэллиплических функций [5, с. 8], функция $F_3(z)$ должна в иметь нуль первого порядка в точке $\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}$, причём имеет место равенство

$$\theta_2-\widetilde{\theta}=\beta_1(\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1)/2\pi i=\beta_1,$$

при этом мы учли соотношение Лежандра. Функция $F_3(z)$ тогда имеет вид

$$F_3(z)=C\frac{\sigma(z+\alpha-b_0)}{\sigma(z-\theta_2)}.$$

Итак, $\Omega_0(z)=C\mathcal{X}_{0}^{\Omega}(z)\dfrac{\sigma(z+\alpha-b_0)}{\sigma(z-\theta)}$, где $C=(1+i)C_1$, $C_1\in\mathbb{R}$.

Таким образом,

$$\Omega(z)=\frac{\mathcal{X}_{0}^{\Omega}(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}A_2(\tau,z)\frac{f(\tau)}{\mathcal{X}_{0}^{\Omega+}(\tau)}\,d\tau+\Omega_0(z),\quad A_2(\tau,z)=\frac{\sigma(\tau-z-\beta_1)}{\sigma(-\beta_1)\sigma(\tau-z)}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получим

$$\mathcal{X}_{0}^{\Psi}(z)=\left[\frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}\right]^{3/4}\frac{\sigma(z-\theta_3)}{\sigma(z-b_0)},\quad \theta_3\notin\overline{L}_0,\quad \theta_3\in\mathbb{R},$$

$$\Psi(z)=\widetilde{C}\mathcal{X}_{0}^{\Psi}(z)\frac{\sigma(z+\alpha_1-b_0)}{\sigma(z-\theta_3)}+\frac{\mathcal{X}_{0}^{\Psi}(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}A_3(\tau,z)\frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_{0}^{\Psi}(\tau)}\,d\tau,$$

$$A_3(\tau,z)=\frac{\sigma(\tau-z-\beta_2)}{\sigma(-\beta_2)\sigma(\tau-z)},\quad \beta_2=\theta_3+\alpha_1-b_0,\quad \widetilde{C}=(1-i)C_2,\quad C_2\in\mathbb{R}.$$

Summary

I.G. Salekhova, M.M. Yakhina. A Mixed Problem for a Plane with Rectilinear Cuts.

We solve a mixed problem for a plane $u^+(t)=f^+(t)$, $v^-(t)=g^-(t)$, $t\in L$, where L is the union of a finite or denumerable set of segments (including those arranged periodically) with an accumulation point at infinity. For a denumerable set of segments, the problem is solved by the reduction to the corresponding Riemann problem in the case of a denumerable set of circuits, including those arranged periodically.

Keywords: mixed problem for a plane, Riemann problem, singly periodic arrangement of segments, singly periodic function, doubly periodic arrangement of segments, elliptic function, quasi-elliptic function.

Литература

1. *Шерман Д.И.* Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов // Докл. АН СССР. – 1940. – Т. 27, № 4. – С. 330–334.

2. *Чибрикова Л.И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. – 302 с.

3. *Салехова И.Г.* Однородная задача Римана в случае счётного множества разомкнутых дуг // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С. 124–135.

4. *Аксентьева Е.П., Салехова И.Г.* Задача Римана в случае двоякопериодического расположения дуг // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 4. – С. 66–79.

5. *Аксентьева Е.П.* Функции Вейерштрасса в краевых задачах. Методическая разработка к специальному курсу. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 42 с.

Поступила в редакцию
12.03.13

Салехова Илюся Гаруновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Ilysia.Salekhova@kpfu.ru*

Яхина Мария Миргасимовна – магистрант кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *husainovam@bk.ru*