

УДК 519.71

МОНАДИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПРИ АСИНХРОННО АВТОМАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Н.Н. Корнеева

Аннотация

Доказано, что свойство разрешимости монадических теорий бесконечных последовательностей сохраняется при асинхронно автоматных преобразованиях. Получен критерий разрешимости монадической теории полной последовательности.

Ключевые слова: автоматные преобразования, монадические теории, полные последовательности.

1. Асинхронно автоматные преобразования

В [1] введено понятие конечно-автоматной сводимости для бесконечных последовательностей над конечными алфавитами при помощи автоматов Мили, классов эквивалентности (или степеней автоматных преобразований) и частичный порядок на классах эквивалентности. Эти определения обобщены на случай асинхронных автоматов в [2].

Определение 1 [3, с. 14, 35]. Конечным автоматом Мили (конечным асинхронным автоматом) называется набор $T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$, где S, Σ, Σ' – конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно; $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$ – функция переходов; $\omega : S \times \Sigma \rightarrow \Sigma'$ (соответственно $\omega : S \times \Sigma \rightarrow (\Sigma')^*$) – функция выходов. Если выделено начальное состояние s_0 , то автомат (T, s_0) называется начальным.

Единственное отличие конечного асинхронного автомата от конечного автомата Мили в том, что областью значений функции выхода являются не только символы выходного алфавита, но и слова из символов выходного алфавита произвольной длины (в том числе и пустое слово).

Определение 2 [1, 2]. Пусть x, y – бесконечные последовательности над конечными алфавитами (каждая над своим). Последовательность y автоматна сводится (асинхронно автоматна сводится) к последовательности x , если существует конечный начальный автомат Мили (соответственно конечный начальный асинхронный автомат) (T, s_0) такой, что $\omega_T(s_0, x) = Ay$, где блок A определяет некоторую конечную задержку (соответственно $\omega_T(s_0, x) = y$).

Данное отношение сводимости индуцирует отношение эквивалентности на множестве бесконечных последовательностей.

Определение 3 [1, 2]. Последовательность x автоматна эквивалентна (асинхронно автоматна эквивалентна) последовательности y , если существуют конечные начальные автоматы Мили (соответственно конечные начальные асинхронные автоматы) (S, s_0) и (T, t_0) такие, что $\omega_S(s_0, x) = Ay$, $\omega_T(t_0, y) = A'x$, где блоки $A \in \Sigma_S^*$ и $A' \in \Sigma_T^*$ определяют некоторые конечные задержки (соответственно $\omega_S(s_0, x) = y$, $\omega_T(t_0, y) = x$).

Класс эквивалентности последовательности x называется степенью автоматных преобразований (соответственно степенью асинхронно автоматных преобразований) и обозначается через $[x]$ (соответственно $[x]^*$) [1, 2].

На множестве степеней автоматных преобразований определяется частичный порядок: $[x] \geq [y]$ ($[y]$ сводится к $[x]$), если существует конечный инициальный автомат Мили (T, s) и блок $A \in \Sigma_T^*$ такие, что $\omega_T(s, x) = Ay$.

Аналогично определяется частичный порядок на множестве степеней асинхронно автоматных преобразований: $[x]^* \geq^* [y]^*$ ($[y]^*$ асинхронно сводится к $[x]^*$), если существует конечный инициальный асинхронный автомат (T, s) такой, что $\omega_T(s, x) = y$.

В.Р. Байрашева показала [4], что из разрешимости монадической теории последовательности x следует разрешимость монадической теории последовательности y , если $[y] \leq [x]$. Обобщим этот результат на случай асинхронно автоматной сводимости.

Под логической теорией первого порядка для последовательности x понимают обычную теорию первого порядка структуры $\langle \mathbb{N}, <, X \rangle$, где \mathbb{N} – множество натуральных чисел, которое пробегают индивидуальные переменные, $<$ – двухместный предикат порядка, X – функциональный символ, который интерпретируется как последовательность $x : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$. Истинность формул интерпретируется естественным образом. Более сильная теория – монадическая теория (второго порядка). В этой теории кроме предметных переменных (по натуральным числам) разрешены также монадические переменные по множествам натуральных чисел (или одноместным предикатам) $P(y), Q(z), \dots$. Разрешаются кванторы как по предметным переменным (натуральным числам), так и по монадическим переменным. Вводятся также атомарные формулы вида $P(p)$ (« p принадлежит P »). Такую теорию обозначают $MT\langle \mathbb{N}, <, x \rangle$ [5]. Во всех теориях подразумевается наличие двухместного предиката равенства, который интерпретируется естественным образом.

Теория называется разрешимой, если существует алгоритм, который по любой замкнутой формуле определяет ее истинность.

Существует критерий разрешимости монадической теории бесконечной последовательности на языке теории автоматов. Приведем необходимые определения и результаты.

Недетерминированным автоматом Бюхи называется набор $(S, \Sigma, s_0, \Delta, F)$, где S – множество состояний, Σ – входной алфавит, s_0 – выделенное начальное состояние, $\Delta \subseteq S \times \Sigma \times S$ – множество переходов, F – множество заключительных состояний. Ходом автомата на последовательности $x = x_0x_1x_2\dots$ называется такая последовательность состояний $\rho = \rho_0\rho_1\rho_2\dots$, что $\rho_0 = s_0$ и $(\rho_i, x_i, \rho_{i+1}) \in \Delta$ для любого i . Автомат принимает последовательность x , если существует хотя бы один ход ρ этого автомата на последовательности x такой, что хотя бы одно состояние, которое встречается в ρ бесконечное число раз, принадлежит множеству заключительных состояний F . Детерминированный автомат Бюхи отличается от недетерминированного лишь тем, что множество переходов Δ заменяется на функцию переходов $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$.

Недетерминированным автоматом Мюллера называется набор $(S, \Sigma, s_0, \Delta, \mathcal{F})$, где $S, \Sigma, s_0, \Delta \subseteq S \times \Sigma \times S$ определяются так же, как для недетерминированного автомата Бюхи, $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ – множество заключительных макросостояний (под макросостоянием понимается подмножество множества состояний S). Аналогично ходу автомата Бюхи определяется ход автомата Мюллера на последовательности $x = x_0x_1x_2\dots$ как такая последовательность состояний $\rho = \rho_0\rho_1\rho_2\dots$, что $\rho_0 = s_0$ и $(\rho_i, x_i, \rho_{i+1}) \in \Delta$ для любого i . Пределом автомата на последовательности x вдоль хода ρ назовем множество состояний, которые встречаются в ρ бесконечное число

раз. Автомат принимает последовательность x , если существует хотя бы один ход ρ этого автомата на последовательности x , для которого предел принадлежит \mathcal{F} . Для детерминированного автомата Мюллера множество переходов Δ заменяется на функцию переходов $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$.

Теорема 1 [6]. *Недетерминированные автоматы Бюхи, недетерминированные автоматы Мюллера и детерминированные автоматы Мюллера распознают один и тот же класс языков. Более того, по автомату одного типа можно получить эквивалентный автомат другого типа алгоритмически.*

Детерминированные автоматы Бюхи распознают меньший класс языков.

Множество последовательностей, принимаемых автоматом Бюхи или Мюллера S , будем обозначать как L_S .

Теорема 2 [5]. *Монадическая теория последовательности x разрешима тогда и только тогда, когда существует алгоритм, который по любому автомату Бюхи (или любому детерминированному автомату Мюллера) может определить, принимает этот автомат последовательность x или нет.*

Воспользовавшись только что приведенным критерием, докажем, что свойство разрешимости монадических теорий бесконечных последовательностей сохраняется при асинхронно автоматных преобразованиях.

Теорема 3. *Пусть $[y]^* \leq^* [x]^*$ и $MT\langle\mathbb{N}, <, x\rangle$ разрешима. Тогда $MT\langle\mathbb{N}, <, y\rangle$ также разрешима.*

Доказательство. Пусть x, y – последовательности над алфавитами Σ и Σ' соответственно, причем существует автомат $T = (T, \Sigma, \Sigma', t_0, \delta_T, \omega_T)$ такой, что $\omega_T(t_0, x) = y$. Действие автомата T на любую последовательность можно представить как действие композиции автоматов U и V ($T = VU$), которые определяются следующим образом:

1) $U = (U, \Sigma, \Sigma'', u_0, \delta_U, \omega_U)$, где $U = T$, $\Sigma'' = T \times \Sigma$, $u_0 = t_0$, $\delta_U(t, a) = \delta_T(t, a)$, $\omega_U(t, a) = (t, a)$, где $t \in T$, $a \in \Sigma$;

2) $V = (V, \Sigma'', \Sigma', v_0, \delta_V, \omega_V)$, где $V = \{v\}$, $\Sigma'' = T \times \Sigma$, $v_0 = v$, $\delta_V(v, (t, a)) = v$, $\omega_V(v, (t, a)) = \omega_T(t, a)$, где $t \in T$, $a \in \Sigma$.

Пусть $S = (S, \Sigma', s_0, \delta_S, \mathcal{F}_S)$ – произвольный детерминированный автомат Мюллера. Согласно теореме 2 для разрешимости монадической теории последовательности y достаточно уметь определять по S , действующему на y , принимает он y или нет. Причем для последовательности x мы умеем это определять по любому детерминированному автомату Мюллера, запущенному на x .

По автомату S , действующему на y , будем определять некий автомат, действующий на x , сначала для случая, когда T – конечный автомат Мили, потом для случая, когда T – конечный асинхронный автомат. В каждом случае построение разбивается на 2 шага.

Пусть T – конечный автомат Мили. Докажем теорему в этом случае способом, отличным от доказательства В.Р. Байрашевой [4]. Это позволит нам затем обобщить ее на случай асинхронных автоматов.

Шаг 1. Строим автомат $VS = (V \times S, \Sigma'', (v_0, s_0), \delta_{VS}, \mathcal{F}_{VS})$, где $V \times S \cong S$, $(v_0, s_0) \cong s_0$. Функция перехода определяется следующим образом:

$$\delta_{VS}((v, s), a'') = (v, \delta_S(s, \omega_V(v, a''))).$$

Множество заключительных макросостояний $\mathcal{F}_{VS} \cong \mathcal{F}_S$.

Тогда очевидно, если $y \in L_S$ (принимается автоматом S), то для любой последовательности z такой, что $y = \omega_V(v_0, z)$, справедливо $z \in L_{VS}$. Если $z \in L_{VS}$, то $\omega_V(v_0, z) \in L_S$.

Обозначим полученный автомат через $W = VS = (W, \Sigma'', w_0, \delta_W, \mathcal{F}_W)$.

Шаг 2. Строим автомат $UW = (U \times W, \Sigma, (u_0, w_0), \delta_{UW}, \mathcal{F}_{UW})$, где $U \times W = T \times W$, $(u_0, w_0) = (t_0, w_0)$. Функция перехода определяется следующим образом:

$$\delta_{UW}((u, w), a) = (\delta_U(u, a), \delta_W(w, \omega_U(u, a))).$$

Определим множество заключительных макросостояний \mathcal{F}_{UW} по заданному \mathcal{F}_W . Выберем $F_W \in \mathcal{F}_W$ и зафиксируем все дуги, ведущие из F_W в F_W . Пусть $w \in F_W$, $u \in U$ произвольно выбраны. Рассмотрим (u, w) и найдем все состояния, в которые можно прийти из (u, w) по пути из выделенных дуг. В итоге получим некоторое множество F_{UW} . Рассмотрим подмножества $G \subseteq F_{UW}$ такие, что множество, состоящее из вторых координат элементов G , образует все F_W , то есть $pr_2 G = F_W$. Все такие множества G добавим в \mathcal{F}_{UW} . Аналогично поступаем для всех $F_W \in \mathcal{F}_W$, $w \in F_W$, $u \in U$.

Теперь если $x \in L_{UW}$, то предел автомата UW на последовательности x (обозначим это множество через G) принадлежит \mathcal{F}_{UW} . Отсюда следует, что предел автомата W на последовательности $\omega_U(u_0, x)$ есть $pr_2 G$, следовательно, по построению он принадлежит \mathcal{F}_W , то есть $\omega_U(u_0, x) = z \in L_W$.

Если $x \notin L_{UW}$, тогда предел автомата UW на последовательности x (пусть это снова множество G) не принадлежит \mathcal{F}_{UW} . Если допустить, что предел автомата W на последовательности $\omega_U(u_0, x)$ (то есть $pr_2 G$) принадлежит \mathcal{F}_W , то по построению получим, что $G \in \mathcal{F}_{UW}$, что невозможно. Значит, $\omega_U(u_0, x) = z \notin L_W$.

В итоге получаем: если $x \in L_{UW}$, то $\omega_U(u_0, x) = z \in L_W = L_{VS}$, значит, $\omega_V(v_0, z) = \omega_V(v_0, \omega_U(u_0, x)) = y \in L_S$. Если $x \notin L_{UW}$, то $\omega_U(u_0, x) \notin L_W = L_{VS}$. Допустив, что $\omega_V(v_0, \omega_U(u_0, x)) = y \in L_S$, получим $\omega_U(u_0, x) \in L_{VS}$, что невозможно. Следовательно, $y \notin L_S$.

Поскольку монадическая теория последовательности x разрешима, то мы всегда можем определить $x \in L_{UW}$ или $x \notin L_{UW}$, значит, для последовательности y мы можем ответить на аналогичный вопрос для произвольного детерминированного автомата Мюллера S . Следовательно, монадическая теория последовательности y разрешима.

Пусть теперь T – конечный асинхронный автомат. Отличия от случая конечного автомата Мили возникают лишь в автомате V , а именно у функции выхода автомата V : $\omega_V(v, (t, a)) = \omega_T(t, a) \in \Sigma'^*$.

Сначала строим промежуточный автомат $VS = (V \times S, \Sigma'', (v_0, s_0), \delta_{VS}, \mathcal{F}_{VS})$, где $V \times S \cong S$, $(v_0, s_0) \cong s_0$. Функция перехода определяется следующим образом:

$$\delta_{VS}((v, s), a'') = (v, \delta_S(s, \omega_V(v, a''))).$$

Отличие от случая, когда T – автомат Мили, состоит в том, что на каждой дуге, ведущей из некоторого состояния (v, s) в состояние (v, s') и помеченной буквой a'' , пишем множество всех промежуточных состояний пути из s в s' по слову $\omega_V(v, a'')$ в исходном автомате S .

Поскольку на каждой дуге записано, кроме метки, еще и множество промежуточных состояний, немного изменим построенный автомат. Каждому состоянию поставим в соответствие некоторое множество состояний следующим образом. Для каждого состояния (v, s) и каждого множества промежуточных состояний $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_l}\}$, записанного на дуге, приводящей в (v, s) , построим одно «новое» состояние, причем «новые» состояния будут иметь двойную метку:

$((v, s), \{s_{i_1}, \dots, s_{i_l}, s\})$. Соответственно, дуги из этих состояний будут выходить так же, как в автомате VS из состояния, указанного в первой метке, но с учетом промежуточных состояний, указанных на дуге в автомате VS .

Построим множество заключительных макросостояний по заданному множеству заключительных макросостояний \mathcal{F}_S автомата S . Рассмотрим произвольное $F_S \in \mathcal{F}_S$. В качестве F'_{VS} возьмем все состояния $((v, s), \{s_{i_1}, \dots, s_{i_l}, s\})$, у которых в первых метках есть состояния из F_S , то есть $s \in F_S$. Удалим из полученного множества те состояния, у которых во вторых метках есть состояния, не принадлежащие F_S . Получим F''_{VS} . Теперь рассмотрим все подмножества $G \subseteq F''_{VS}$ такие, что множество, состоящее из вторых координат элементов G , образует все F_S , то есть $pr_2G = F_S$. Все такие множества G добавим в \mathcal{F}_{VS} . Аналогично поступаем для всех $F_S \in \mathcal{F}_S$. Полученный автомат, как и в случае с автоматами Мили, обозначим $W = (W, \Sigma'', w_0, \delta_W, \mathcal{F}_W)$.

Теперь если $y \in L_S$, то предел автомата S на последовательности y (пусть это множество F_S) принадлежит \mathcal{F}_S . Пусть z – такая последовательность, что $\omega_V(v_0, z) = y$. Очевидно, по построению, предел автомата W на последовательности z содержится в F''_{VS} , причем множество состояний, принадлежащих вторым меткам, образует F_S , отсюда указанный предел принадлежит \mathcal{F}_W . Следовательно, $z \in L_W$.

Пусть теперь $z \in L_W$. В этом случае предел автомата W на последовательности z (обозначим его G) принадлежит \mathcal{F}_W . Тогда предел автомата S на последовательности $\omega_V(v_0, z)$ будет pr_2G . Следовательно, по построению, получаем $pr_2G \in \mathcal{F}_S$ и $\omega_V(v_0, z) \in L_S$.

Осталось показать, что из $x \in L_{UW}$ следует $y \in L_S$ и из $x \notin L_{UW}$ следует $y \notin L_S$. Это доказывается так же, как и в случае конечных автоматов Мили. Поэтому из разрешимости монадической теории последовательности x следует разрешимость монадической теории последовательности y . □

2. Полные последовательности

Второй основной результат настоящей работы – критерий разрешимости монадической теории полной последовательности. Приведем основные определения.

Определение 4 [1]. Последовательность $x = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ над алфавитом Σ называется полной, если для любого блока $B = b_1b_2 \dots b_k \in \Sigma^*$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $a_{m+i} = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Для полных последовательностей введем понятие регулятора полноты.

Пусть $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – одноместная функция. Регулятором полноты для полной последовательности $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ назовем функцию f , которая каждому натуральному числу k сопоставляет наименьшее натуральное число l такое, что любое слово длины k из символов алфавита Σ встречается на начальном отрезке последовательности x длины l .

Нам достаточно будет знать не сам регулятор полноты, а только какую-нибудь верхнюю оценку для него. Полную последовательность x с регулятором полноты, ограниченным функцией f , для краткости будем называть f -полной.

Определение 5. Последовательность $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ называется f -полной, если для любого $k \in \mathbb{N}$ каждый блок длины k из символов алфавита Σ встречается на начальном отрезке последовательности x длины $f(k)$.

Определение 6. Вычислимая последовательность x называется эффективно полной, если x является f -полной для некоторой вычислимой функции f .

Ясно, что не каждый автомат может давать на выходе полную последовательность.

Определение 7 [7]. Конечный сильно связный автомат Мили $S = (S, \Sigma, \delta, \omega)$ (входной и выходной алфавит здесь есть Σ) называется полным, если для любого натурального k и любого k -блока $B \in \Sigma^*$ существуют состояние $s \in S$ и k -блок $A \in \Sigma^*$ такие, что $\omega(s, A) = B$.

Теорема 4 [7]. Пусть $S = (S, \Sigma, \delta, \omega)$ – сильно связный конечный автомат с n состояниями, x – полная последовательность, $A \in \Sigma^+$, $s \in S$. Тогда S находится в состоянии s бесконечно часто с A как блоком x , следующем на входе.

Теорема 5 [7]. Пусть $S = (S, \Sigma, \delta, \omega)$ – произвольный конечный автомат, $s_0 \in S$, $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ – полная последовательность, $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность состояний S , которую проходит автомат при подаче на вход последовательности x в начальном состоянии s_0 . Тогда $S_c = (S_c, \Sigma, \delta_c, \omega_c)$, где $S_c = \{s \in S : s = s_n \text{ для бесконечного числа } n \in \mathbb{N}\}$, δ_c и ω_c – ограничение на $S_c \times \Sigma$ функций δ и ω соответственно, является сильно связным подавтоматом S .

Теорема 6. Пусть $T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$ является (сильно связным) полным автоматом Мили с n состояниями, x – f -полная последовательность. Тогда $\omega(s_0, x)$ будет g -полной последовательностью, где $g(k) = f((k + n - 1)^n)$.

Доказательство. В силу теоремы 4 полная последовательность проводит сильно связный автомат через каждое состояние с каждым блоком, следующим на входе (бесконечно часто). Следовательно, последовательность $\omega(s_0, x)$ (обозначим ее через y) полная.

Перенумеруем состояния автомата q_0, q_1, \dots, q_{n-1} и выделим одно из них q . Так как автомат сильно связный, то из любого состояния можно прийти до состояния q по слову длины не более $n - 1$.

Для произвольного натурального k , произвольного слова $B \in \Sigma^*$ длины k и выделенного состояния q построим такое слово, что при чтении этого слова с любого состояния обязательно придем в состояние q со словом B на входе. Из состояния q_0 можно прийти до состояния q по слову A_1 длины не более $n - 1$, далее подадим на вход слово B . Теперь из состояния q_1 по слову $A_1 B$ придем в некоторое состояние \tilde{q}_1 , из которого по слову A_2 длины не более $n - 1$ можно прийти в состояние q , далее снова подадим на вход слово B . Повторим эту процедуру со всеми состояниями. Тогда из состояния q_{n-1} по слову $A_1 B \dots A_{n-1} B$ придем в состояние \tilde{q}_{n-1} , из которого по слову A_n длины не более $n - 1$ дойдем до состояния q , далее подадим на вход слово B . Тогда при чтении слова $A_1 B A_2 B \dots A_{n-1} B A_n B$ с любого состояния обязательно придем в состояние q со словом B на входе.

Указанное слово $A_1 B A_2 B \dots A_{n-1} B A_n B$ имеет длину не более $(k + n - 1)^n$, следовательно, встречается на начальном отрезке последовательности x длины $f((k + n - 1)^n)$. Отсюда получаем, что каждый блок длины k встречается в последовательности y на начальном отрезке длины $f((k + n - 1)^n)$, то есть последовательность y является g -полной. \square

Следствие 1. Пусть $T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$ – (сильно связный) полный автомат Мили, x – эффективно полная последовательность. Тогда $\omega(s_0, x)$ также эффективно полная последовательность.

Теорема 7. Монадическая теория $MT\langle \mathbb{N}, <, x \rangle$ полной последовательности x разрешима тогда и только тогда, когда x – эффективно полная последовательность.

Доказательство. Пусть x — f -полная последовательность для некоторой функции f .

Необходимость. Пусть монадическая теория $MT\langle N, <, x \rangle$ f -полной последовательности x , где f — регулятор полноты, разрешима. Тогда для каждого натурального числа n перебором можно найти значение $x(n)$, проверяя верно ли, что $x(n) = a$ для каждого $a \in \Sigma$. Поэтому x вычислима. Перебором можно также найти $f(n)$, поскольку для любых $n \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$ можно записать, что $f(n) \leq l$, при помощи следующей формулы:

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma \quad \exists m \quad ((m + n - 1 \leq l) \wedge \\ \wedge (x(m) = a_1) \wedge (x(m + 1) = a_2) \wedge \dots \wedge (x(m + n - 1) = a_n)).$$

Достаточность. Пусть теперь x — вычисляемая f -полная последовательность для некоторой вычислимой функции f . Согласно теореме 2 для разрешимости монадической теории последовательности x достаточно уметь определять по любому детерминированному автомату Мюллера, действующему на x , принимает он x или нет.

Пусть $S = (\{q_1, \dots, q_n\}, \Sigma, \delta_S, \mathcal{F}_S)$ — произвольный детерминированный автомат Мюллера с n состояниями. Разобьем множество состояний автомата на компоненты сильной связности. В графе конденсации существуют такие компоненты сильной связности, из которых не выходят дуги в другие компоненты. Именно они образуют сильно связанные подавтоматы исходного автомата S . Выберем из каждой компоненты сильной связности, отвечающей сильно связному подавтомату, по одному состоянию. Обозначим выбранные состояния s_1, \dots, s_l .

Подадим на вход автомата S последовательность x . Согласно теореме 5 существует сильно связный подавтомат S' автомата S такой, что начиная с некоторого момента все состояния хода автомата S на последовательности x принадлежат S' .

Для вершины $q_1 \in S$ найдем путь из q_1 в s_1 (если он существует) длины не более $n - 1$. Пусть этот путь определяется словом A_1 . Далее, подадим на вход слово A_1 в состоянии $q_2 \in S$ и придем в состояние $\tilde{q}_2 \in S$. Из него найдем путь в s_1 (если он существует) длины не более $n - 1$. Пусть этот путь определяется словом A_2 . Продолжая процесс, найдем слово $A_1 \dots A_n$ (если оно существует) длины не более $n(n - 1)$. Так поступаем для каждого состояния s_1, \dots, s_l и строим соответствующие слова (если они существуют) длины не более $n(n - 1)$.

Поскольку на отрезке длины не более $f(n(n - 1))$ последовательности x встречаются все слова длины $n(n - 1)$, то, прочитав этот отрезок, придем в один из сильно связанных подавтоматов автомата S . Согласно теореме 4 полная последовательность проводит сильно связный автомат через каждое состояние бесконечное число раз. Значит, пределом автомата S на последовательности x будет полученный сильно связный подавтомат. Если множество состояний полученного подавтомата принадлежит множеству допускающих макросостояний \mathcal{F}_S , то x принимается автоматом ($x \in L_S$), если оно не принадлежит \mathcal{F}_S , то не принимается ($x \notin L_S$). \square

Последняя теорема обобщается на последовательности, которые становятся полными, если на блоки длины k смотреть как на буквы нового алфавита.

Пусть теперь $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma'^*$ — k -равномерный морфизм (то есть $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ для любых $A, B \in \Sigma^*$ и $|\varphi(a)| = k$ для любого $a \in \Sigma$), x — полная последовательность над алфавитом Σ . Последовательность вида $\varphi(x)$ будем называть k -полной.

Определение 8. Последовательность называется k -полной, если она является образом полной последовательности при действии k -равномерного морфизма.

Следствие 2. *Монадическая теория $MT\langle\mathbb{N}, <, x\rangle$ k -полной последовательности x разрешима тогда и только тогда, когда x является образом эффективно полной последовательности при действии k -равномерного морфизма.*

Основные результаты настоящей статьи (теоремы 3, 6, 7) были опубликованы в кратком сообщении в журнале «Известия вузов. Математика» [8].

Автор выражает благодарность профессору М.М. Арсланову за полезное обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00399-а) и гранта для поддержки ведущих научных школ НШ-5383.2012.1.

Summary

N.N. Korneeva. Monadic Theories of Infinite Sequences under Asynchronous Automata Transformations.

It is proved that the decidability property of the monadic theories for infinite sequences remains under asynchronous automata transformations. We get a criterion of decidability for the monadic theory of a complete sequence.

Key words: automata transformations, monadic theories, complete sequences.

Литература

1. Рейна Г. Степени автоматных преобразований // Киберн. сб. – 1977. – № 14. – С. 95–106.
2. Корнеева Н.Н. Степени асинхронно автоматных преобразований // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 3. – С. 30–40.
3. Кудрявцев В.В., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
4. Байрашева В.Р. Степени автоматных преобразований почти периодических сверхслов и сверхслов с разрешимой монадической теорией. – Казань, 1989. – 29 с. – Деп. в ВИНТИ 11.05.1989 № 3103-В89.
5. Мучник А.А., Притыкин Ю.Л., Семенов А.Л. Последовательности, близкие к периодическим // Усп. мат. наук. – 2009. – Т. 64, № 5. – С. 21–96.
6. McNaughton R. Testing and generating infinite sequences by a finite automaton // Inform. Control. – 1966. – V. 9. – P. 521–530.
7. Gordon H.G. Complete Degrees of Finite-State Transformability // Inform. Control. – 1976. – V. 32. – P. 169–187.
8. Корнеева Н.Н. Об автоматных преобразованиях и монадических теориях бесконечных последовательностей // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 8. – С. 90–93.

Поступила в редакцию
16.02.12

Корнеева Наталья Николаевна – инженер отдела алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: Natalia.Korneeva@ksu.ru