УДК 510.5

СПЕКТРЫ ПРЕДЕЛЬНОЙ МОНОТОННОСТИ Σ_2^0-МНОЖЕСТВ

И.Ш. Калимуллин, М.Х. Файзрахманов

Аннотация

Исследуются классы тьюринговых степеней, содержащиеся в нетривиальных спектрах предельной монотонности. В частности, доказано, что спектры предельной монотонности Σ_2^0-множеств имеют ко-первую категорию. Кроме того, построено Σ_2^0-множество, спектр предельной монотонности которого имеет меру нуль.

Ключевые слова: вычислимые функции, Σ_2^0-множества, предельно монотонные множества, тьюринговы степени.

Введение

Пусть дано множество натуральных чисел $X \in 2^\omega$. Функция F называется X*-предельно монотонной*, если для некоторой частично X-вычислимой функции $\psi(x,s)$ выполнены условия:

1) для всех x максимум $\max_s \psi(x,s)$ существует;

2) $F(x) = \max\limits_s \psi(x,s)$.

Множество S называется X*-предельно монотонным*, если S совпадает с областью значений некоторой X-предельно монотонной функции или $S = \emptyset$.

Ясно, что если S является X-предельно монотонным, то $S \in \Sigma_2^X$. Иногда верно и обратное, как показывает следующий известный результат.

Предложение 1. *Пусть F – X-предельно монотонная функция с бесконечной областью значений. Тогда каждое Σ_2^X-множество $S \supseteq \operatorname{ran} F$ является X-предельно монотонным.*

Доказательство этого утверждения можно найти в обзорной работе [1]. Доказательство существования Σ_2^0 множеств, не являющихся предельно монотонными, можно найти в статье [2].

Спектром предельной монотонности (а в рамках настоящей статьи просто *спектром*) множества S будем называть класс всех множеств $X \in 2^\omega$ таких, что S является X-предельно монотонным.

Зафиксируем эффективную нумерацию $\{\Xi_e\}_{e\in\omega}$ всех вычислимых операторов $\Xi : 2^\omega \times \omega \times \omega \to \omega$ такую, что для всех X, x, s:

1) $\Xi(X \restriction s; x, s)$ определено, где через $X \restriction s$ обозначена конечная строка длины s, являющаяся началом характеристической функции множества X;

2) $\Xi(X; x, s) \leqslant s$;

3) $\Xi(X; x, s) \leqslant \Xi(X; x; s+1)$.

Пусть дан вычислимый оператор $\Phi(X; x, s)$. Определим частичный оператор $\widehat{\Phi}:\ 2^\omega \times \omega \to \omega$, полагая

$$\widehat{\Phi}(X;x) = \begin{cases} \max\limits_s \Phi(X;x,s), & \text{если } \max\limits_s \Phi(X;x,s) \text{ существует,} \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что функция F является X-предельно монотонной тогда и только тогда, когда существует такое e, что $F(x) = \widehat{\Xi}_e(X;x)$. Из Предложения 1 теперь непосредственно получаем

Предложение 2. *Бесконечное $\Sigma^0_2(X)$-множество S является X-предельно монотонным тогда и только тогда, когда существует такой оператор Ξ_n, что*
(i) $\widehat{\Xi}_n(X)$ тотальная функция;
(ii) $\widehat{\Xi}_n(X;x) > x$ для всех x;
(iii) $\operatorname{ran} \widehat{\Xi}_n(X) \subseteq S$.

В обозначениях и терминологии мы придерживаемся в основном монографии [3]. Малыми греческими буквами будем обозначать конечные строки из $2^{<\omega}$. Для строки σ через $|\sigma|$ обозначим ее длину; для строк σ и ρ пишем $\sigma \preceq \rho$, если σ является началом строки ρ и пишем $\sigma \prec \rho$, если $\sigma \preceq \rho$ и $\sigma \neq \rho$. Для множества X и строки $\sigma \in 2^{<\omega}$ пишем $\sigma \prec X$, если $\sigma \prec X \upharpoonright n$ для некоторого n. *Деревом* в $2^{<\omega}$ будем называть такое непустое множество строк, что если $\rho \in T$ и $\sigma \preceq \rho$, то $\sigma \in T$. Множество X называется *путем* в дереве T, если $X \upharpoonright n \in T$ для всех n. Через $\mathrm{Paths}(T)$ обозначим множество всех путей в дереве T. Для строки σ обозначим через $[\sigma] = \{X : \sigma \prec X\}$ базовую окрестность, порожденную σ. Для произвольного множества строк $U \subseteq 2^{<\omega}$ определим класс $[U]^{\prec} = \bigcup\limits_{\sigma\in U} [\sigma]$.

Через λ будем обозначать равномерно распределенную вероятностную меру в канторовском пространстве 2^ω, а именно: если $\mathcal{G} \subseteq 2^\omega$ открыто, то $\lambda(\mathcal{G}) = \sum\limits_{\sigma\in U} 2^{-|\sigma|}$ для такого множества попарно несравнимых строк U, что $\mathcal{G} = [U]^{\prec}$; для произвольного класса $\mathcal{C} \subseteq 2^\omega$ полагаем $\lambda(\mathcal{C}) = \inf\{\lambda(\mathcal{G}) : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}\ \&\ \mathcal{G}$ открыто$\}$.

1. Ненулевые спектры предельной монотонности

В данном разделе изучаются и строятся примеры не предельно монотонных множеств, мера спектров предельной монотонности которых равна 1. Установим сначала, что такой спектр не может иметь такую меру только за счет того, что он содержит все 1-случайные множества.

Теорема 1. *Если P – непустой Π^0_1-класс и S предельно монотонно относительно каждого элемента из P, то S предельно монотонно.*

Доказательство. По теореме о низком базисе [4] существует элемент низкой степени, принадлежащий P. Отсюда $S \in \Sigma^0_2$.

Предположим, что S непредельно монотонно. Нашей целью будет найти множество $Z \in P$, относительно которого S непредельно монотонно. Для этого определим последовательность непустых Π^0_1-классов

$$P = P_0 \supseteq P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots,$$

удовлетворяющую для каждого $e > 0$ требованию:

$$\mathcal{R}_e : S \text{ и } \widehat{\Xi}_e(X) \text{ не удовлетворяют условиям (i)–(iii) предложения 2}$$
$$\text{ни для какого } X \in P_e.$$

Тогда $Z \in \bigcap\limits_e P_e$ будет искомым. Предположим, что P_e уже определено. Определим P_{e+1}, рассматривая три возможных случая.

Случай 1. Существуют такие $Y \in P_e$ и $n \in \omega$, что $\widehat{\Xi}_{e+1}(Y;n) \leqslant n$. Определим

$$P_{e+1} = \{X \in P_e : \widehat{\Xi}_{e+1}(X;n) \leqslant n\}.$$

Тогда $\widehat{\Xi}_{e+1}(X)$ для всех $X \in P_{e+1}$ не удовлетворяет условию (ii).

Случай 2. Существуют такие $Y \in P_e$ и n, что значение $\widehat{\Xi}_{e+1}(Y;n)$ определено, но не принадлежит S. Выберем t и y, для которых $\Xi_{e+1}(Y;n,t) = \widehat{\Xi}_{e+1}(Y;n) = y$, и определим

$$P_{e+1} = \{X \in P_e : Y \upharpoonright t \prec X \ \& \ \forall s \geqslant t \ \Xi_{e+1}(X;n,s) = y\}.$$

Тогда S и $\widehat{\Xi}_{e+1}(X)$ для каждого $X \in P_{e+1}$ не удовлетворяют (iii).

Случай 3. Случай 1 и Случай 2 не выполняются. В этом случае просто положим $P_{e+1} = P_e$. Тогда $\widehat{\Xi}_{e+1}(X)$ для каждого $X \in P_{e+1}$ не удовлетворяет (i). Предположим, напротив, что функция $\widehat{\Xi}_{e+1}(X)$ тотальна для некоторого $X \in P_{e+1}$. Выберем такое вычислимое дерево $T \subseteq 2^{<\omega}$, что $P_{e+1} = \mathrm{Paths}(T)$. Рассмотрим вычислимую функцию f, определенную следующим образом:

$$f(n,s) = \min\{\Xi_{e+1}(\sigma;n,s) : \sigma \in T \ \& \ |\sigma| = s\}.$$

Легко видеть, что если $f(n,s) = \Xi_{e+1}(\sigma;n,s)$ для некоторого $\sigma \in T$, $|\sigma| = s$, и $f(n,s+1) = \Xi_{e+1}(\tau;n,s+1)$ для некоторого $\tau \in T$, $|\tau| = s+1$, то

$$f(n,s) \leq \Xi_{e+1}(\tau \upharpoonright s;n,s)$$

и

$$\Xi_{e+1}(\tau \upharpoonright s;n,s) \leq \Xi_{e+1}(\tau;n,s+1),$$

так что $f(n,s) \leq f(n,s+1)$ для всех n и s.

Функция $F(n) = \max_s f(n,s)$ тотальна, поскольку

$$f(n,s) \leq \Xi_{e+1}(X \upharpoonright s;n,s) \leq \widehat{\Xi}_{e+1}(X;n)$$

для всех s. Так как 2^ω компактно, то для любого n существует бесконечная последовательность элементов из T:

$$\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \cdots$$

такая, что

$$F(n) = f(n,|\sigma_k|) = \Xi_{e+1}(\sigma_k;n,|\sigma_k|)$$

для каждого k. Более того, для любой строки σ, $\sigma_k \subseteq \sigma \subseteq \sigma_{k+1}$, имеем

$$\Xi_{e+1}(\sigma_k;n,|\sigma_k|) \leq \Xi_{e+1}(\sigma;n,|\sigma|) \leq \Xi_{e+1}(\sigma_{k+1};n,|\sigma_{k+1}|),$$

и поэтому

$$\Xi_{e+1}(\sigma;n,|\sigma|) = F(n).$$

Отсюда для любого n существует путь $Y_n = \cup_k \sigma_k \in P_e$ такой, что

$$F(n) = \widehat{\Xi}_{e+1}(Y_n;n).$$

Теперь для любого n верно $F(n) > n$ и $F(n) \in S$, поскольку случаи 1 и 2 не имеют места. По предложению 1 множество S предельно монотонно. Противоречие. □

Известно, что существуют непустые Π_1^0 классы, содержащие только 1-случайные множества. Поэтому следующее утверждение немедленно следует из теоремы 1.

Следствие 1. *Если спектр предельной монотонности множества содержит все 1-случайные множества, то это множество предельно монотонно.*

Покажем теперь, как строить примеры непредельно монотонных множеств, спектр предельной монотонности которых содержит все 2-случайные множества.

Теорема 2. *Существует непредельно монотонное Δ^0_2-множество S, спектр которого содержит $\Pi^0_1(\emptyset')$-класс ненулевой меры.*

Доказательство. Фиксируем биекцию $c:\omega\to 2^{<\omega}$, определенную следующим образом:

$$c(n)=\sigma \Leftrightarrow 1\sigma \text{ является двоичной записью } n+1.$$

Легко видеть, что если строка σ относительно лексикографического порядка меньше строки ρ, то $c^{-1}(\sigma)<c^{-1}(\rho)$.

Для данной частично вычислимой функции $\varphi_e(x,s)$ определим

$$x_e=\mu x\exists s\,[|c(\max_{t\leqslant s}\varphi_e(x,t))|\geqslant e+2],$$

$$y_e=\max_s \varphi_e(x_e,s).$$

Отметим, что x_e и y_e могут быть и неопределенными. Определим Δ^0_2-дерево $T\subseteq 2^{<\omega}$ и Δ^0_2-множество S, полагая

$$T=2^{<\omega}-\{\sigma:\exists e\,[y_e \text{ определено } \&\ c(y_e)\preceq\sigma]\},$$

$$S=c^{-1}(T).$$

Определенное таким образом множество S непредельно монотонно, так как оно бесконечно, и если x_e определено, то $\max\limits_s \varphi_e(x_e,s)\notin S$.

Рассмотрим $\Pi^0_1(\emptyset')$-класс $P=\mathrm{Paths}(T)$. Множество S предельно монотонно относительно каждого $X\in P$, так как $c^{-1}(X\restriction n)\in S$ для всех n. Покажем, что P имеет ненулевую меру. Для этого рассмотрим возрастающую последовательность открытых множеств

$$U_e=\bigcup_{i\leqslant e}[c(y_i)].$$

Легко видеть, что $P=2^\omega-\bigcup_e U_e$. По определению величин y_e имеем

$$\lambda U_e\leqslant\sum_{i\leqslant e}2^{-|c(y_i)|}\leqslant\sum_{i\leqslant e}2^{-(i+2)}.$$

Отсюда $\lambda(\bigcup\limits_e U_e)\leqslant\sum_i 2^{-(i+2)}=1/2$. Следовательно, $\lambda P\geqslant 1/2$. □

Из теоремы 2 немедленно следует недавний результат Валбаума [5], показывающий, что предельная монотонность и предельная монотонность относительно почти всех оракулов не одно и то же.

Следствие 2 [5]. *Существует непредельно монотонное Δ^0_2-множество S, спектр которого имеет меру 1.*

В силу результата Каутца [6, 7] в каждом Π^0_n-классе ненулевой меры P содержатся элементы произвольной n-случайной степени. Поэтому имеем

Следствие 3. *Существует непредельно монотонное Δ^0_2-множество S, спектр которого содержит все 2-случайные множества.*

Из приведенной ниже теоремы следует, что теорему 2 нельзя усилить, предъявив класс меры 1, относительно которого множество S предельно монотонно с помощью фиксированного функционала $\widehat{\Psi}$, то есть множество S, построенное в теореме 2, можно назвать почти предельно монотонным, но не равномерно предельно монотонным.

Теорема 3. *Пусть дано множество S и класс $\mathcal{C} \subseteq 2^\omega$ меры 1. Если существует вычислимый оператор $\Psi(X;x,s)$ такой, что для всех $X \in \mathcal{C}$ функция $\widehat{\Psi}(X)$ тотальна и $S = \operatorname{ran}\widehat{\Psi}(X)$, то S предельно монотонно.*

Доказательство. Так как $S \in \Sigma_2^0(X)$ для всех $X \in \mathcal{C}$ и $\lambda(\mathcal{C}) = 1$, то $S \in \Sigma_2^0$ (см. [8]). Поскольку S равномерно предельно монотонно относительно класса $\mathcal{C}$, можно выбрать оператор $\Xi_n = \Xi$, удовлетворяющий условиям (i)–(iii) для каждого $X \in \mathcal{C}$. Нашей целью будет определить такую частично вычислимую функцию ψ, что функция $F(x) = \max_s \psi(x,s)$ тотальна, $\operatorname{ran} F$ бесконечно и $\operatorname{ran} F \subseteq S$.

Обозначим
$$\mathcal{A}^y_{x,s} = \{X : \Xi(X;x,s) > y\}$$
и определим
$$\psi(x,0) = 0,$$
$$\psi(x,y+1) = \begin{cases} y+1, & \text{если } \psi(x,y)\downarrow \ \& \ \exists s\ \lambda(\mathcal{A}^y_{x,s}) > 1/2, \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
Определенная таким образом функция ψ частично вычислима согласно предложению 3. На самом деле, в определении ψ вместо $1/2$ можно взять любое рациональное число из $(0,1)$.

Покажем, что для всех x $\max\limits_s \psi(x,s) < \infty$. Поскольку
$$1 = \lambda(\mathcal{C}) \leqslant \sum_y \lambda\{X : \widehat{\Xi}(X;x) = y\},$$
то можно выбрать y_0, для которого $\lambda\{X : \widehat{\Xi}(X;x) \leqslant y_0\} \geqslant 1/2$. Таким образом, $\max\limits_y \psi(x,y) \leqslant y_0$.

Покажем теперь, что $\operatorname{ran} F \subseteq S$. Предположим противное, то есть $F(x) \notin S$ для некоторого x. Выберем наибольшее y, для которого значение $\psi(x,y)$ определено. Тогда $F(x) = \psi(x,y) = y$ и для всех $z < y$ существует такое s, что $\lambda(\mathcal{A}^z_{x,s}) > 1/2$. Отсюда $\lambda\{X : \widehat{\Xi}(X;x) = y\} > 0$. Это противоречит условию $\lambda(\mathcal{C}) = 1$ и выбору Ξ.

Наконец, $\operatorname{ran} F$ бесконечно, поскольку $\widehat{\Xi}(X;x) > x$ для всех x и всех $X \in \mathcal{C}$. Таким образом, S предельно монотонно. □

2. Нулевые спектры предельной монотонности

Целью настоящего раздела является построение Δ_2^0 множества, мера спектра предельной монотонности которого равна нулю.

Предложение 3. *Пусть предикаты P, $Q \subseteq \omega^3 \times \mathbb{Q}^+$ определены следующим образом:*
$$P(n,x,y,\delta) \Leftrightarrow \lambda\{X : \exists s\ \Xi_n(X;x,s) \geqslant y\} > \delta,$$
$$Q(n,x,y,\delta) \Leftrightarrow \lambda\{X : \widehat{\Xi}_n(X;x) = y\} > \delta.$$
Тогда $P \in \Sigma_1^0$ и $Q \in \Sigma_2^0$.

Доказательство. Для предиката P верны следующие импликации

$$P(n,x,y,\delta) \Leftrightarrow \exists \text{ конечное } D \subseteq 2^{<\omega}[\bigwedge_{\sigma\in D} \Xi_n(\sigma;x,|\sigma|) \geqslant y \;\&\; \lambda[D]^{\prec} > \delta].$$

Поэтому $P \in \Sigma^0_1$. Покажем, что $Q \in \Sigma^0_2$. Для этого установим равносильность предиката Q со следующей Σ^0_2-формулой:

$$Q(n,x,y,\delta) \Leftrightarrow \exists\varepsilon > \delta[P(n,x,y,\varepsilon) \;\&\; \forall\varepsilon' > 0\, P(n,x,y+1,\varepsilon') \to \varepsilon - \varepsilon' > \delta] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists[\Sigma^0_1 \;\&\; \Pi^0_1] \Leftrightarrow \Sigma^0_2,$$

где все кванторы берутся по рациональным числам.

Определим классы

$$\mathcal{C} = \{X : \widehat{\Xi}_n(X;x) = y\},$$
$$\mathcal{C}_0 = \{X : \exists s\; \Xi_n(X;x,s) \geqslant y\},$$
$$\mathcal{C}_1 = \{X : \exists s\; \Xi_n(X;x,s) \geqslant y+1\}.$$

Заметим, что $\lambda\mathcal{C} = \lambda\mathcal{C}_0 - \lambda\mathcal{C}_1$. Теперь если для некоторого $\varepsilon > \delta$ верно $\lambda\mathcal{C}_0 > \varepsilon$ и для любого рационального $\varepsilon' > 0$ выполнена импликация

$$\lambda\mathcal{C}_1 > \varepsilon' \Rightarrow \varepsilon - \varepsilon' > \delta,$$

то для каждого $\varepsilon' \in (0, \lambda\mathcal{C}_1)$ выполняются неравенства

$$\lambda\mathcal{C} = \lambda\mathcal{C}_0 - \lambda\mathcal{C}_1 > \varepsilon - \lambda\mathcal{C}_1 > \varepsilon - \varepsilon' > \delta.$$

Отсюда $\lambda\mathcal{C} > \varepsilon - \lambda\mathcal{C}_1 \geqslant \delta$. Следовательно, значение $Q(n,x,y,\delta)$ истинно.

Обратно, пусть $Q(n,x,y,\delta)$ истинно. Выберем какое-нибудь рациональное $\varepsilon \in (\lambda\mathcal{C}_1 + \delta, \lambda\mathcal{C}_0)$. Легко видеть, что истинно $P(n,x,y,\varepsilon)$. Выберем произвольное $\varepsilon' > 0$ со свойством $P(n,x,y+1,\varepsilon')$. Тогда $\lambda\mathcal{C}_1 > \varepsilon'$, и следовательно, $\varepsilon - \varepsilon' > > \varepsilon - \lambda\mathcal{C}_1 > \delta$. □

Теорема 4. *Существует Δ^0_2-множество S, спектр которого имеет нулевую меру.*

Доказательство. Согласно теореме Лебега о плотности (см. [3, § 1.9]) достаточно построить бесконечное Δ^0_2-множество S, удовлетворяющее для каждого e требованию

$$\mathcal{R}_e: \;\lambda\{X : \widehat{\Xi}_e(X) \text{ тотальна } \& \;\forall x\, \widehat{\Xi}_e(X;x) > x \;\&\; \operatorname{ran}\widehat{\Xi}_e(X) \subseteq S\} \leqslant 1/2.$$

Чтобы выполнить одно требование $\mathcal{R}_e$, будем поступать следующим образом:

1. Обозначим $x_e = 1 + \max S$ (считаем $\max\emptyset = 0$).

2. Если не верно условие

$$\lambda\{X : \exists s\, \Xi_e(X;x_e,s) > x_e\} > 1/2, \tag{1}$$

то отмечаем $\mathcal{R}_e$ выполненным. В этом случае $\mathcal{R}_e$ действительно удовлетворено, поскольку

$$\lambda\{X : \forall x\, \widehat{\Xi}_e(X;x) > x\} \leqslant \lambda\{X : \exists s\, \Xi_e(X;x_e,s) > x_e\} \leqslant 1/2.$$

3. Выберем такое $b \geqslant x_e$, что либо $\mathcal{R}_e$ выполнено, либо

$$\lambda\{X : \widehat{\Xi}_e(X;x_e) \notin S_t \;\&\; \widehat{\Xi}_e(X;x_e) \neq b\} > 1/2, \tag{2}$$

где t – это текущий шаг в построении S, и положим b в S. Ниже мы покажем, что такое b всегда существует и его можно выбрать с помощью оракула $\emptyset'$.

Построим теперь требуемое множество S. Пусть $S_0=\emptyset$. Предположим, что S_t определено, найдем S_{t+1}. Обозначим $x_t = 1+\max S_t$. Если условие (1) при $e=t$ не верно, то отмечаем $\mathcal{R}_t$ выполненным. Выберем такое $b \geqslant x_t$, что для каждого $e \leqslant t$ выполнено либо $\mathcal{R}_e$, либо (2). Полагаем $S_{t+1}=S_t\cup\{b\}$. Пусть $S=\bigcup\limits_t S_t$.

То, что S удовлетворяет условиям теоремы, следует из следующих лемм 1–3.

Лемма 1. S *бесконечно.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждого t и каждого $e \leqslant t$, если $\mathcal{R}_e$ не отмечено выполненным, то найдется такое a, что каждое $b>a$ удовлетворяет условию (2). Допустим, что для некоторых t и $e\leqslant t$ это неверно. Выберем наименьшие такие t и $e \leqslant t$. Отметим, что

$$\lambda\{X : \widehat{\Xi}_e(X;x_e)\notin S_t\} > 1/2+\varepsilon$$

для некоторого $\varepsilon>0$. Согласно предположению существует бесконечно много b, для которых $\lambda\{X : \widehat{\Xi}_e(X;x_e)=b\}>\varepsilon$, что невозможно, поскольку

$$\sum_b \lambda\{X : \widehat{\Xi}_e(X;x_e)=b\}\leqslant 1.$$

□

Лемма 2. $S\in\Delta^0_2$.

Доказательство. Покажем, что (1) и (2) являются Σ^0_1- и Σ^0_2-условиями соответственно. Пусть P и Q – предикаты из предложения 3. Условие (1) равносильно $P(e,x_e,x_e+1,1/2)$. Покажем, что (2) является Σ^0_2-условием. Для данных e, t и $b>\max S_t$ выполнено (2) в том и только в том случае, если существует такое конечное множество рациональных чисел $\{\delta_i\}_{i\leqslant k}$, что

1) $\exists y_1\dots y_k\in[0,b)-S_t[\bigwedge\limits_{i=1}^{k} Q(e,x_e,y_i,\delta_i)]$;
2) $P(e,x_e,b+1,\delta_0)$;
3) $\sum\limits_{i=0}^{k}\delta_i>1/2$.

Поэтому (2) является Σ^0_2-условием. По доказательству леммы 1 искомое b всегда существует, поэтому последовательность $\{S_t\}_{t\in\omega}$ является равномерной Δ^0_2-последовательностью. Кроме того, если $b\in S_{t+1}-S_t$, то $b>t$. Следовательно, $S\in\Delta^0_2$. □

Лемма 3. *Каждое* $\mathcal{R}_e$ *удовлетворено.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}_e$ не отмечено выполненным. Тогда для каждого t

$$\lambda\{X : \widehat{\Xi}_e(X;x_e)\in S_t\}<1/2.$$

Следовательно,

$$\lambda\{X : \widehat{\Xi}_e(X;x_e)\in S\}\leqslant 1/2.$$

Этим завершается доказательство леммы и теоремы в целом. □

3. Категорные свойства спектров предельной монотонности

Построенные в предыдущих разделах множества принадлежат уровню Δ^0_2 арифметической иерархии. Как мы видели, меры спектров предельной монотонности этих множеств могут быть как нулевыми так и ненулевыми. Теперь мы покажем, что с токи зрения категорной классификации такие спектры имеют одинаковый характер.

Теорема 5. *Пусть $S \in \Sigma^0_2$. Существует такая возрастающая функция $f \leqslant_T \emptyset'$, что для каждого множества X если $g \leqslant_T X$ и f не доминирует g, то S предельно монотонно относительно X.*

Доказательство. Пусть S – бесконечное Σ^0_2-множество. Не ограничивая общности, будем считать, что $S \in \Delta^0_2$, в противном случае вместо S можно рассматривать его бесконечное Δ^0_2-подмножество. Выберем равномерно вычислимую последовательность $\{S_t\}_{t\in\omega}$ такую, что $S = \lim_t S_t$ и $\max S_t \leqslant t$. Определим функцию $f \leqslant_T \emptyset'$, полагая

$$\begin{cases} f(0) = \mu t & \exists x \quad \forall v \geqslant t\,[x \in S_v], \\ f(s+1) = \mu t & \exists x > f(s) \quad \forall v \geqslant t\,[x \in S_v]. \end{cases}$$

Легко видеть, что f возрастает.

Пусть $g \leqslant_T X$ и $\exists^\infty x\, g(x) > f(x)$. Не ограничивая общности, будем считать, что g возрастает. Определим функцию $h \leqslant_T X$ такую, что функция $H(x) = \max_s h(x,s)$ тотальна, $\operatorname{ran} H \subseteq S$ и $H(x) > x$ для всех x. Полагаем

$$h(x,s) = \begin{cases} x+1, & \text{если } s \leqslant x, \\ \mu y > x\,[y \in S_{g(s)} \ \&\ y \geqslant h(x,s-1)], & \text{если } s > x \text{ и такое } y \text{ существует}, \\ h(x,s-1), & \text{если } s > x \text{ и такого } y \text{ не существует}. \end{cases}$$

По определению h для каждого x верно: либо $H(x)$ не определено, либо $H(x) > x$.

Покажем, что $\max_s h(x,s) < \infty$ для всех x. Для данного x выберем наименьшее $s > x$ такое, что $f(s) < g(s)$. Если $s = x+1$, то

$$x < f(x) < f(x+1) < g(x+1).$$

Если $s > x+1$, то

$$g(s-1) \leqslant f(s-1) < f(s) < g(s) \quad \text{и} \quad x < f(s-1).$$

По определению f существует такое $y > f(s-1) > x$, что $y \in S_t$ для каждого $t \geqslant f(s)$. Тогда $\max_s h(x,s) \leqslant y$.

Покажем, что $\operatorname{ran} H \subseteq S$. Если $H(x) = y$, то существует такое t, что $y \in S_{g(s)}$ для всех $s \geqslant t$. Следовательно, $y \in S$.

Таким образом, S предельно монотонно относительно X согласно предложению 1. □

Следствие 4. *Если $S \in \Sigma^0_2$, то спектр S имеет ко-первую категорию.*

Доказательство. Пусть дано Σ^0_2-множество S, f – возрастающая функция из теоремы 5.

Для каждого i рассмотрим класс $\mathcal{L}_i$, состоящий из всех таких бесконечных множеств

$$X = \{x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\} \subseteq \omega,$$

что $x_k \leqslant f(k)$ для всех $k \geqslant i$. Каждое $\mathcal{L}_i$ замкнуто и имеет пустую внутренность. В самом деле, если $X \notin \mathcal{L}_i$, то существует такое $k \geqslant i$, что $f(k) < x_k$. Тогда базовая окрестность $[X \upharpoonright x_{k+1}]$ целиком содержится в дополнении $\mathcal{L}_i$. Если дана произвольная базовая окрестность $[\sigma]$, то любое конечное множество $X \in [\sigma]$ не принадлежит $\mathcal{L}_i$. Следовательно, множество

$$\mathcal{L} = \bigcup_i \mathcal{L}_i \bigcup \mathcal{FIN},$$

где $\mathcal{FIN}$ – класс всех конечных множеств, имеет первую категорию.

Покажем, что S предельно монотонно относительно каждого $X \notin \mathcal{L}$. Выберем произвольное

$$X = \{x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\} \notin \mathcal{L}.$$

Существует бесконечно много k, для которых $f(k) < x_k$. Тогда функция $g(k) = x_k$ вычислима относительно X и не доминируется функцией f. Таким образом, S предельно монотонно относительно X по теореме 5. □

Приведем другие следствия теоремы 5. Для каждой функции $f \leqslant_T \emptyset'$ нетрудно построить функцию g низкой степени, не доминируемую функцией f.

Следствие 5. *Если $S \in \Sigma_2^0$, то спектр S содержит низкую степень.*

Отметим, что рассматриваемые спектры содержат не только некоторую низкую степень, но и все не обобщенно 2-низкие степени.

Следствие 6. *Если $S \in \Sigma_2^0$ и $X \notin GL_2$, то S предельно монотонно относительно X.*

Доказательство. Если $X \notin GL_2$, то для каждой функции $h \leqslant_T \emptyset'$ существует функция $g \leqslant_T X$, которая не доминируется функцией h (см., например, [3]). Пусть $f \leqslant_T \emptyset'$ – функция из теоремы 5. Тогда f не доминирует некоторую функцию $g \leqslant_T X$. □

Доуни, Каш и Турецкий [1] показали, что вычислимо перечислимое множество X не является высоким тогда и только тогда, когда каждое множество $S \leqslant_T X$ предельно монотонно. Используя этот результат, можно увидеть, что в классе оракулов $X \leqslant_T \emptyset'$ предыдущее следствие нельзя улучшить.

Следствие 7. *Множество $X \leqslant_T \emptyset'$ не является 2-низким тогда и только тогда, когда X принадлежит спектру каждого множества $S \in \Sigma_2^0$.*

Доказательство. Если $X \leqslant_T \emptyset'$ не 2-низкое, то $X \notin GL_2$, и тогда S предельно монотонно относительно X. Пусть теперь $X \leqslant_T \emptyset'$ 2-низкое. Поскольку $X'' \leqslant_T \emptyset''$, то согласно упомянутому выше результату из [1] существует множество $S \leqslant_T \emptyset'$, не предельно монотонное относительно X. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00399 и 12-01-97008), гранта для поддержки ведущих научных школ НШ-5383.2012.1, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (мероприятия 1.2.1 и 1.2.2), а также гранта Президента РФ МК-6106.2012.1. Второй автор поддержан ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 14.740.11.1142).

Summary

I.Sh. Kalimullin, M.Kh. Faizrakhmanov. Limitwise Monotonic Spectra of Σ_2^0-Sets.

In this paper, we study classes of Turing degrees, contained in limitwise monotonic spectra. In particular, we prove that limitwise monotonic spectra of Σ_2^0-sets are co-meager. Moreover, we construct a Σ_2^0-set whose limitwise monotonic spectrum is co-null.

Key words: computable functions, Σ_2^0-sets, limitwise monotonic functions, Turing degrees.

Литература

1. *Downey R.G., Kach A.M., Turetsky D.* Limitwise monotonic functions and their applications // Proceedings of the 11th Asian Logic Conference. – River Edge, N. J.: World Sci. Publ., 2011. – P. 59–85.
2. *Khoussainov B., Nies A., Shore R.* Computable models of theories with few models // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – V. 38, No 2. – P. 165–178.
3. *Nies A.* Computability and randomness. – N. Y.: Oxford Univ. Press, 2009. – 420 p.
4. *Jockusch C.G. Jr., Soare R.I.* Π_1^0-classes and degrees of theories // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 173. – P. 33–56.
5. *Wallbaum J.* Computability of algebraic structures: PhD Thesis. – Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame, 2010.
6. *Kautz S.M.* Degrees of Random Sets: PhD Thesis. – Ithaca, N. Y.: Cornell University, 1991.
7. *Kautz S.M.* An improved zero-one law for algorithmically random sequences // Theor. Comput. Sci. – 1998. – V. 191, No 1–2. – P. 185–192.
8. *Stillwell J.* Decidability of the “almost all” theory of degrees // J. Symbolic Logic. – 1972. – V. 37, No 3. – P. 501–506.
9. *Kechris A.* Classical Descriptive Set Theory. – N. Y.: Springer-Verlag, 1995. – 428 p.
10. *Oxtoby J.C.* Measure and Category: A Survey of the Analogies Between Topological and Measure Spaces. – N. Y.: Springer-Verlag, 1980. – 124 p.

Поступила в редакцию
24.01.12

Калимуллин Искандер Шагитович – доктор физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *ikalimul@gmail.com*

Файзрахманов Марат Хайдарович – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *marat.faizrahmanov@gmail.com*