

УДК 517.957

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ МЯГКОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ. I. ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА

*Г.Р. Абдюшева, И.Б. Бадриев, В.В. Бандеров,
О.А. Задворнов, Р.Р. Тагиров*

Аннотация

Работа посвящена построению математической модели задачи о равновесии мягкой биологической оболочки (тонкой кишки). Эта биологическая оболочка моделируется мягкой сетчатой оболочкой, образованной двумя семействами взаимно пересекающихся армирующих нитей в продольном и радиальном направлениях. Приведена обобщенная постановка задачи в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным оператором. Исследована его разрешимость.

Ключевые слова: мягкая биологическая оболочка, математическая модель, вариационное неравенство, итерационный метод.

Введение

Рассматривается задача об определении положения равновесия мягкой биологической оболочки. В качестве такой оболочки выбирается тонкая кишка. Тонкая кишка человека и животных представляет собой длинную цилиндрическую трубку (см., например, [1]). В брюшной полости она достаточно хорошо иммобилизована близлежащими органами. Проксимальный конец ее неподвижно прикреплен к желудку, дистальный – к слепой кишке. Внутриполостное давление в состоянии покоя равно 10–20 мм вод. ст. и соответствует базальному.

Стенка кишки является полиморфным гетерогенным биокomпозитом, заключенным в податливую матрицу гликопротеидов [2]. Опорную строму нервно-мышечного комплекса и железистых компонент ткани формируют гофрированные в плоскости коллагеновые, эластические и аргирофильные волокна. Дискретно расположенные соединительно-тканые фибриллы определенным образом скреплены в местах пересечения «анастомотическими связями», что создает архитектуру аналогично крупно- и мелко-петливой сети ортогонального плетения. Многообразие форм двигательной активности обусловлено работой наружного продольного (*m. longitudinalis*) и внутреннего циркулярного мышечных (*m. circularis*) слоев. При этом расположение сократительных волокон в *m. longitudinalis* – истинно осевое, а в *m. circularis* – строго круговое.

Многокомпонентность, конструктивная анизотропия и отсутствие слоистой двумерной структуры являются одной из причин сложности механического моделирования объекта, записи для него определяющей системы уравнений состояния и равновесия. Однако такие специфические особенности, как тонкостенность, большая деформативность, слабая сопротивляемость изгибу и практическая неспособность воспринимать сжимающие тангенциальные усилия, делают возможным использование модели мягкой безмоментной оболочки [3]. Более того, основываясь на данных о строении, целесообразно моделировать тонкую кишку в рамках

особого класса сетчатых оболочек, образованных двумя семействами взаимно пересекающихся армирующих нитей [4], в данном случае – составленных из мышечных волокон, заключенных в футляр соединительнотканых фибрилл.

Считается, что оболочка является осесимметричной. Предполагается, что функция, определяющая в продольных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения (то есть функция, задающая физическое соотношение), имеет степенной рост. Ограничений на рост функции, определяющей в циркулярных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, не накладывается. Приведена обобщенная постановка задачи в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным [5] оператором. Необходимость привлечения аппарата вариационных неравенств вызвана тем, что при математическом описании задачи надо использовать ограничение на перемещения, естественно возникающее при рассмотрении осесимметричной оболочки, означающее отсутствие ее самопересечения. Исследована разрешимость вариационного неравенства. С этой целью установлены свойства операторов, входящих в вариационное неравенство: псевдомонотонность и коэрцитивность. Это дало возможность для исследования его разрешимости использовать известные результаты теории монотонных операторов.

1. Постановка задачи

Анатомическую поверхность кишки отождествим с гладкой срединной поверхностью, определяющей ее положение в пространстве. Рассмотрим мягкую сетчатую биологическую оболочку, представляющую из себя в недеформированном состоянии цилиндр заданного радиуса r_0 длины l (см. рис. 1).

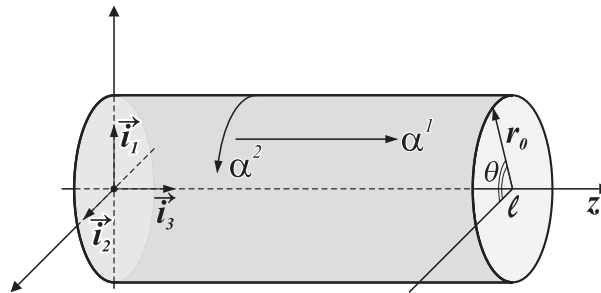


Рис. 1. Недеформированная оболочка

Предполагается, что вектора плотностей поверхностных и массовых сил лежат в радиальной (проходящей через ось симметрии) плоскости, и перемещение точек оболочки происходит также в радиальной плоскости. Рассматриваемая нами биологическая оболочка является мягкой цилиндрической ортотропной осесимметричной оболочкой, образованной двумя семействами гладкомышечных волокон ортогонального типа плетения и представляющей из себя в недеформированном состоянии круговой цилиндр радиуса r_0 и длины l . Рассматриваемый сегмент оболочки остается симметричным относительно горизонтальной оси и в деформированных конфигурациях. В исходном расправленном состоянии оболочка удерживается внутренним избыточным давлением интенсивности $\bar{q}$. Поверхностная нагрузка предполагается следящей, то есть направлена по нормали к поверхности оболочки. Торцы оболочки полагаем жестко закрепленными по контуру.

Для описания положения равновесия биологической оболочки используется криволинейная ортогональная лагранжева система координат (α^1, α^2) , ориентированная в соответствии с расположением циркулярных и продольных нитей несущего каркаса биологической ткани и отнесенная к линиям кривизны оболочки

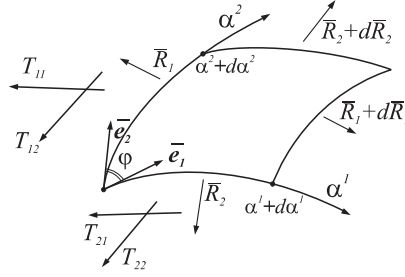


Рис. 2

в ее недеформированном положении, $0 \leq \alpha^1 \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha^2 \leq l$. Положение произвольной точки на поверхности оболочки зададим радиус-вектором $\bar{r} = \bar{r}(\alpha^1, \alpha^2)$, где кривые $\alpha^1 = \text{const}$ и $\alpha^2 = \text{const}$ образуют систему параметрических линий. Предполагается, что на поверхности линии не касаются друг друга. Геометрия оболочки определяется фундаментальным метрическим тензором поверхности, ковариантные компоненты g_{ij} которого вычисляются по формулам $g_{ij} = (\bar{r}_i, \bar{r}_j)$, векторы $\bar{r}_i = \partial \bar{r} / \partial \alpha^i = \sqrt{g_{ii}} \bar{e}_i$ – касательные к линиям $\alpha^i = \text{const}$, образующие ковариантный локальный базис, $\bar{e}_i$ – единичные вектора, касательные к линиям $\alpha^i = \text{const}$, $i = 1, 2$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$. Величину $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ называют дискриминантом метрического тензора. Поскольку рассматриваемая оболочка ортотропна и подвергается только осесимметричному деформированию, ее профиль полностью определяет геометрию поверхности и в параметрическом виде задается уравнениями

$$x_1 = s + y(\alpha^1, \alpha^2), \quad x_2 = r_0 + w(\alpha^1, \alpha^2), \quad (1)$$

где (y, w) – вектор перемещений, а равенства $x_1 = s$, $x_2 = r_0$ определяют недеформированное состояние оболочки.

Итак, рассмотрим мягкую оболочку, находящуюся в равновесии под действием некоторой заданной системы распределенных нагрузок. Под действием указанных нагрузок в оболочке возникают мембранные усилия. Отнесем поверхность оболочки к произвольной лагранжевой системе криволинейных координат α^1, α^2 , выделим на ней бесконечно малый элемент двумя парами сечений $\alpha^1, \alpha^1 + d\alpha^1$ и $\alpha^2, \alpha^2 + d\alpha^2$ (см. рис. 2). Площади недеформированного и деформированного элементов вычисляются с помощью дискриминанта метрического тензора следующим образом: $\sqrt{g} d\alpha^1 d\alpha^2$ и $\sqrt{g} d\alpha^1 d\alpha^2$. (Здесь и далее верхним ноликом помечены величины, относящиеся к раскройной (недеформированной) форме.) Тогда поверхностные и массовые силы, действующие на выделенный элемент, будут равны соответственно $\bar{Q} = \bar{q} \sqrt{g} d\alpha^1 d\alpha^2$ и $\bar{F} = \gamma_0 \bar{\mu} \sqrt{g} d\alpha^1 d\alpha^2$, где $\bar{\mu}$ – вектор, характеризующий плотность массовых сил; γ_0 – плотность недеформированного материала оболочки, то есть масса единицы площади недеформированной оболочки.

Наряду с указанными активными силами на гранях выделенного элемента действуют погонные усилия: на площадках $\alpha^1 = \text{const}$ и $\alpha^2 = \text{const}$ действуют силы

$$\bar{R}_1 = -(T_{11}^A \bar{e}_1 + T_{12}^A \bar{e}_2) \sqrt{g_{22}} d\alpha^2 \quad \text{и} \quad \bar{R}_2 = -(T_{21}^A \bar{e}_1 + T_{22}^A \bar{e}_2) \sqrt{g_{11}} d\alpha^1,$$

где T_{ij}^A – физические компоненты тензора полных мембранных усилий в деформированном состоянии, который является симметричным.

На противоположных гранях векторы действующих внутренних сил равны

$$-\left(\bar{R}_1 + \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \alpha^1} d\alpha^1\right) \quad \text{и} \quad -\left(\bar{R}_2 + \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \alpha^2} d\alpha^2\right).$$

Равенство нулю главного вектора приводит к следующему уравнению равновесия элемента оболочки

$$-\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \alpha^1} d\alpha^1 - \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 + \bar{Q} + \bar{F} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) в развернутом виде примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^1} \left[(T_{11}^d \bar{e}_1 + T_{12}^d \bar{e}_2) \sqrt{g_{22}} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left[(T_{21}^d \bar{e}_1 + T_{22}^d \bar{e}_2) \sqrt{g_{11}} \right] + \bar{q} \sqrt{g} + \gamma_0 \bar{\mu} \sqrt{\dot{g}} = 0. \quad (3)$$

Известно, что в любой точке недеформированной поверхности можно указать два взаимно ортогональных направления, называемых главными, которые и после деформации остаются ортогональными. В случае, когда координатные линии на поверхности совпадают с главными направлениями $T_{12}^d = T_{21}^d = 0$, $g_{12} = g_{21} = 0$, обозначим $T_{11}^d = T_1^d$, $T_{22}^d = T_2^d$. Тогда уравнение (3) запишется как

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^1} (T_1^d \sqrt{g_{22}} \bar{e}_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} (T_2^d \sqrt{g_{11}} \bar{e}_2) + \bar{q} \sqrt{g_{11} g_{22}} + \gamma_0 \bar{\mu} \sqrt{\dot{g}} = 0, \quad (4)$$

Кроме того, $\sqrt{\dot{g}} = 1$, так как $\dot{g}_{11} = \left| \dot{\bar{r}}_1 \right|^2 = 1$, $\dot{g}_{22} = \left| \dot{\bar{r}}_2 \right|^2 = 1$, а значит, $\dot{g} = 1$.

Следуя [6, с. 56], обозначим через λ_i , $i = 1, 2$, степени удлинений вдоль волокон сетки, они вычисляются по формулам $\lambda_i = |\bar{r}_i| = \sqrt{g_{ii} / \dot{g}_{ii}} = \sqrt{g_{ii}}$.

Биологическая оболочка испытывает осесимметричные деформации. Так как рассматриваемая оболочка ортотропна и подвергается только осесимметричному деформированию, ее профиль полностью определяет геометрию поверхности. Деформацию оболочки будем рассматривать относительно эйлеровой системы координат, в качестве которой удобно использовать цилиндрическую систему координат (ρ, θ, z) , связанную с параметрами профиля следующими соотношениями: $\rho = x_2(\alpha^1, \alpha^2)$, $\theta = \theta(\alpha^1, \alpha^2)$, $z = x_1(\alpha^1, \alpha^2)$. Связь этой системы координат с введенной ранее лагранжевой системой задается очевидными соотношениями $\alpha^1 = s$, $\alpha^2 = r_0 \theta$. Уравнение равновесия (4) с учетом введенных обозначений можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(T_1^d \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \right) + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T_2^d \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right) + \bar{q} \sqrt{g_{11} g_{22}} + \gamma_0 \bar{\mu} \sqrt{\dot{g}} = 0. \quad (5)$$

Перепишем векторное уравнение (5) в виде системы скалярных уравнений. Для этого установим взаимосвязь между цилиндрической и декартовой системами координат. Пусть орты $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\chi}$ и $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$, $\bar{i}_3$ образуют правую тройку цилиндрической и декартовой систем координат соответственно, так что

$$\bar{\xi} = \bar{i}_1 \cos \theta + \bar{i}_2 \sin \theta, \quad \bar{\eta} = -\bar{i}_1 \sin \theta + \bar{i}_2 \cos \theta, \quad \bar{\chi} = \bar{i}_3.$$

Заметим при этом, что

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \theta} = \bar{\eta}, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} = -\bar{\xi}, \quad \bar{r} = \bar{i}_1 \rho \cos \theta + \bar{i}_2 \rho \sin \theta + \bar{i}_3 z = \rho \bar{\xi} + z \bar{\chi}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \frac{\partial x_2}{\partial s} \bar{\xi} + \frac{\partial x_1}{\partial s} \bar{\chi} = \frac{\partial w}{\partial s} \bar{\xi} + \frac{\partial(s+y)}{\partial s} \bar{\chi} = \frac{\partial w}{\partial s} \bar{\xi} + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s}\right) \bar{\chi}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = \rho \bar{\eta} = x_2 \bar{\eta}.$$

Выведем формулы для вычисления компонент метрического тензора поверхности, которая покрыта сетью параметрических линий $\alpha^1 = \text{const}$ и $\alpha^2 = \text{const}$. Имеем

$$\bar{r}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha^1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}, \quad \bar{r}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta},$$

а значит,

$$g_{11} = |\bar{r}_1|^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2, \quad g_{22} = |\bar{r}_2|^2 = \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^2 = \left(\frac{r_0 + w}{r_0} \right)^2.$$

С учетом этих выражений степени удлинений поверхности в направлении параметрических линий $\alpha^1 = \text{const}$ и $\alpha^2 = \text{const}$ запишутся в виде

$$\lambda_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{r_0 + w}{r_0}. \quad (6)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(T_1^\alpha \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(T_1^\alpha \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \bar{\xi} + \frac{\partial}{\partial s} \left(T_1^\alpha \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) \bar{\chi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(T_1^\alpha \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) \bar{\xi} + \frac{\partial}{\partial s} \left(T_1^\alpha \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} \right) \bar{\chi}. \end{aligned}$$

Так как рассматриваются только осесимметричные деформации, компоненты тензора мембранных усилий и метрического тензора поверхности не зависят от угла θ , а значит,

$$\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T_2^\alpha \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r_0^2} T_2^\alpha \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \rho \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} = -\frac{T_2^\alpha \lambda_1}{r_0} \bar{\xi}.$$

Для нахождения проекции вектора нормального давления $\bar{q}$ на направления векторов цилиндрической системы координат, разложим его по локальному базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ поверхности: $\bar{q} = q_1 \bar{e}_1 + q_2 \bar{e}_2 + q_3 \bar{e}_3$. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \frac{\bar{r}_1}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \bar{\xi} + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right) \bar{\chi} \right) = \bar{\xi} \sin \varphi + \bar{\chi} \cos \varphi, \\ \bar{e}_2 &= \frac{\bar{r}_2}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_0} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = \bar{\eta}, \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = -\bar{\xi} \cos \varphi + \bar{\chi} \sin \varphi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\partial w}{\partial s} \bigg/ \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial s}, \\ \cos \varphi &= \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right) \bigg/ \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial x_1}{\partial s}. \end{aligned}$$

Поскольку вектор $\bar{q}$ направлен по нормали к поверхности оболочки, а вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ лежат в касательной плоскости, то $q_1 = q_2 = 0$.

Таким образом,

$$\bar{q} = q_3 \bar{e}_3 = -q_3 \bar{\xi} \cos \varphi + q_3 \bar{\chi} \sin \varphi = -q_3 \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} \bar{\xi} + q_3 \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial s} \bar{\chi},$$

где q_3 — интенсивность нормальной нагрузки, действующей на единицу площади деформированной поверхности.

Если теперь векторное уравнение (5) спроектировать на направления векторов $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\chi}$, то получим два скалярных уравнения для проекций на оси $\bar{\xi}$ и $\bar{\chi}$ (проекции на ось $\bar{\eta}$ обеих частей уравнения (5) равны нулю):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(T_1^A \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) + \frac{q_3}{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} &= -f_1(s), \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(T_1^A \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) - \frac{q_3}{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial x_1}{\partial s} - \frac{1}{r_0} T_2^A \lambda_1 &= -f_2(s), \end{aligned}$$

где f_1 и f_2 – проекции на оси $\bar{\xi}$ и $\bar{\chi}$ вектора $-\gamma_0 \bar{\mu}$. Эти уравнения могут быть преобразованы путем замены усилий T_1^A и T_2^A , отнесенных к единице длины деформированного состояния оболочки, на усилия T_1 и T_2 , отнесенные к единице длины недеформированного состояния: $T_1 = \lambda_2 T_1^A$ и $T_2 = \lambda_1 T_2^A$. Тогда векторное уравнение (5) принимает вид системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T_1}{\lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) + q_3 \lambda_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} &= -f_1(s), \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T_1}{\lambda_1} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) - q_3 \lambda_2 \frac{\partial x_1}{\partial s} - \frac{1}{r_0} T_2 &= -f_2(s). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1), (6) получаем уравнения равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T_1}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) + q_3 \left(1 + \frac{w}{r_0} \right) \frac{\partial w}{\partial s} &= f_1(s), \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T_1}{\lambda_1} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - q_3 \left(1 + \frac{w}{r_0} \right) \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \frac{1}{r_0} T_2 &= f_2(s). \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения (7) равновесия мягкой биологической оболочки получены в предположении, что инерционные силы отсутствуют. Это предположение для изучаемого класса задач о деформации биологических оболочек выглядит достаточно естественным, ибо, как правило, в моделируемых объектах, в частности в тонкой кишке, инерционные силы несоизмеримо малы по сравнению с остальными силами, действующими на оболочку. При указанном предположении система уравнений (7) для определения вектора перемещений y , w деформированной оболочки приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T_1}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) + q \left(1 + \frac{w}{r_0} \right) \frac{\partial w}{\partial s} &= -f_1(s), \quad 0 < s < l, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T_1}{\lambda_1} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - q \left(1 + \frac{w}{r_0} \right) \left(1 + \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \frac{1}{r_0} T_2 &= -f_2(s), \quad 0 < s < l. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $q = q_3$ – интенсивность нормального давления.

Поскольку края оболочки закреплены, уравнения (8) дополняются граничными условиями

$$y(0) = w(0) = 0, \quad y(l) = w(l) = 0. \tag{9}$$

Кроме того, решение должно удовлетворять условию

$$w(s) + r_0 \geq 0, \quad 0 < s < l, \tag{10}$$

означающему недопущение самопересечения оболочки.

2. Обобщенная постановка задачи

Вариационная постановка задачи (8), (9) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} (\tilde{u}', v') ds + q \int_0^l [\tilde{u}'_1 v_2 + u_2 v'_1] ds + \\ & + \frac{q}{r_0} \int_0^l \left[\frac{1}{2} u_2^2 v'_1 + \tilde{u}'_1 u_2 v_2 \right] ds + \frac{1}{r_0} \int_0^l T_2(\lambda_2(u)) v_2 ds = \int_0^l (\bar{f}, v) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь v – произвольная бесконечно дифференцируемая, финитная на $[0, l]$ функция, $\tilde{u}(s) = (u_1(s) + s, u_2(s))$, $\lambda_1(u) = |\tilde{u}'(s)|$, $\lambda_2(u) = 1 + u_2(s)/r_0$, $u_1 = y$, $u_2 = w$.

Граничные условия (9) приобретут вид $u(0) = (0, 0)$, $u(l) = (0, 0)$.

Кроме того, решение должно удовлетворять условию $u_2(s) + r_0 \geq 0$, которое означает недопущение самопересечения оболочки.

Приведем обобщенную постановку задачи (8)–(10). Относительно функций T_1 и T_2 считаем, что

$$T_i(\xi) = 0, \quad \xi \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad (\text{оболочка не воспринимает сжимающих усилий}), \quad (12)$$

$$T_i, \quad i = 1, 2, \quad - \text{непрерывные, неубывающие}, \quad (13)$$

T_1 имеет на бесконечности степенной рост порядка $p - 1 > 0$, то есть существуют положительные k_0 , k_1 , такие, что

$$k_0(\xi - 1)^{p-1} \leq T_1(\xi) \leq k_1 \xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi \geq 1. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение пространство $V = \left[\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l) \right]^2$ с нормой

$$\|u\| = \left[\int_0^l |u'|^p ds \right]^{1/p},$$

а также множество $K = \{u \in V : r_0 + u_2 \geq 0\}$. Очевидно, что множество K выпукло и замкнуто. Сопряженным к V является пространство $V^* = \left[\overset{\circ}{W}_{p^*}^{(-1)}(0, l) \right]^2$, $p^* = p/(p - 1)$.

Обозначим интегралы в левой части интегрального тождества (11) через $\Psi_{1u}(v)$, $\Psi_{2u}(v)$, $\Psi_{3u}(v)$, $\Psi_{4u}(v)$, где u , v – произвольные функции из V . Введем вектор $\hat{u} = (s, 0)$. Тогда $\tilde{u} = u + \hat{u}$, $\|\tilde{u}\| \leq \|u\| + 1$. Имеем в силу (14)

$$\begin{aligned} |\Psi_{1u}(v)| &= \left| \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} (\tilde{u}', v') ds \right| = \left| \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} (u' + \hat{u}', v') ds \right| \leq \\ &\leq k_1 \int_0^l |u' + \hat{u}'|^{p-1} |v'| ds \leq k_1 \|\tilde{u}\|^{p-1} \|v\| \leq k_1 (\|u\| + 1)^{p-1} \|v\|. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее,

$$|\Psi_{2u}(v)| = q \left| \int_0^l [\tilde{u}'_1 v_2 + u_2 v'_1] ds \right| \leq c_1 q (\|u\| + 1) \|v\|, \quad c_1 > 0. \quad (16)$$

В силу вложения $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$ в $C[0, l]$ имеем

$$\begin{aligned} |\Psi_{3u}(v)| &= \frac{q}{r_0} \left| \int_0^l \left[\frac{1}{2} u_2^2 v_1' + \tilde{u}_1' u_2 v_2 \right] ds \right| \leq \\ &\leq \frac{q}{r_0} \max_{s \in [0, l]} |u_2(s)| \int_0^l \left| \frac{1}{2} u_2 v_1' + \tilde{u}_1' v_2 \right| ds \leq c_2 q \|u\| (\|u\| + 1) \|v\|, \quad c_2 > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из непрерывности T_2 и вложения $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$ в $C[0, l]$ следует, что

$$|\Psi_{4u}(v)| = \frac{1}{r_0} \left| \int_0^l T_2(\lambda_2(u)) v_2 ds \right| \leq c_{3u} \|v\|, \quad c_{3u} > 0. \quad (18)$$

Итак, функционалы Ψ_{1u} , Ψ_{2u} , Ψ_{3u} , $F_{\Psi u}$ ограничены на V , кроме того, они, очевидно, являются линейными, следовательно, определены операторы A , B , D , $H : V \rightarrow V^*$ и элемент $f \in V^*$, порождаемые формами

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &= \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} (\tilde{u}', v') ds, \quad \langle Bu, v \rangle = \int_0^l [\tilde{u}_1' v_2 + u_2 v_1'] ds, \\ \langle Du, v \rangle &= \frac{1}{r_0} \int_0^l T_2(\lambda_2(u)) v_2 ds, \quad \langle Hu, v \rangle = \frac{1}{r_0} \int_0^l \left[\frac{1}{2} u_2^2 v_1' + \tilde{u}_1' u_2 v_2 \right] ds, \\ \langle f, v \rangle &= \int_0^l (\bar{f}, v) ds, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – отношение двойственности между V и V^* .

Таким образом, под обобщенным решением осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения, закрепленной по краям, находящейся под воздействием массовых сил, постоянной следящей поверхностной нагрузки, будем понимать функцию $u \in K$, удовлетворяющую следующему вариационному неравенству:

$$\langle (A + D)u, v - u \rangle \geq \langle f - q(B + H)u, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (19)$$

3. Свойства операторов и существование решения

Установим некоторые свойства операторов, которые потребуются нам в дальнейшем при исследовании разрешимости задачи (19) и алгоритма ее решения.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (12)–(14). Тогда оператор A является непрерывным, монотонным и ограниченным u , следовательно, псевдомонотонным и коэрцитивным, причем

$$\langle Au, u \rangle \geq k_0 \|u\|^p - c_4 \|u\|^{p-1} - c_5 \quad \forall u \in V. \quad (20)$$

где $c_4 = [k_0 p + ((p-1)k_0 + k_1)2^{p-1}] l^{1/p}$, $c_5 = [((p-1)k_0 + k_1)2^{p-1}] l + k_0 l$.

Доказательство. Для произвольных u и v имеем

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} [(1 + u'_1)(u'_1 - v'_1) + u'_2(u'_2 - v'_2)] ds - \\
&\quad - \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)} [(1 + v'_1)(u'_1 - v'_1) + v'_2(u'_2 - v'_2)] ds = \\
&= \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} [(1 + u'_1)((u'_1 + 1) - (v'_1 + 1)) + u'_2(u'_2 - v'_2)] ds - \\
&\quad - \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)} [(1 + v'_1)((u'_1 + 1) - (v'_1 + 1)) + v'_2(u'_2 - v'_2)] ds = \\
&= \int_0^l \left(\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} \tilde{u}' - \frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)} \tilde{v}', \tilde{u}' - \tilde{v}' \right) ds = \\
&= \int_0^l \left(\frac{T_1(|\tilde{u}'|)}{|\tilde{u}'|} |\tilde{u}'|^2 - \frac{T_1(|\tilde{u}'|)}{|\tilde{u}'|} (\tilde{u}', \tilde{v}') - \frac{T_1(|\tilde{v}'|)}{|\tilde{v}'|} (\tilde{v}', \tilde{u}') + \frac{T_1(|\tilde{v}'|)}{|\tilde{v}'|} |\tilde{v}'|^2 \right) ds \geq \\
&\geq \int_0^l \left(\frac{T_1(|\tilde{u}'|)}{|\tilde{u}'|} |\tilde{u}'|^2 - \frac{T_1(|\tilde{u}'|)}{|\tilde{u}'|} |\tilde{u}'| |\tilde{v}'| - \frac{T_1(|\tilde{v}'|)}{|\tilde{v}'|} |\tilde{v}'| |\tilde{u}'| + \frac{T_1(|\tilde{v}'|)}{|\tilde{v}'|} |\tilde{v}'|^2 \right) ds = \\
&= \int_0^l \left[\frac{T_1(|\tilde{u}'|)}{|\tilde{u}'|} |\tilde{u}'| - \frac{T_1(|\tilde{v}'|)}{|\tilde{v}'|} |\tilde{v}'| \right] [|\tilde{u}'| - |\tilde{v}'|] ds \geq 0
\end{aligned}$$

в силу монотонного возрастания T_1 , то есть оператор A является монотонным.

Ограниченность оператора A непосредственно следует из (15).

Далее, обозначим $\Omega_1^+ = \{s \in (0, l) : \lambda_1(u) \geq 1\}$, $\Omega_1^- = (0, l) \setminus \Omega_1^+$. Поскольку $T_1(\lambda_1(u)) = 0$ на $\Omega_1^-(0, l)$, то с учетом (14) и неравенства $x^\alpha \geq y^\alpha + \alpha y^{\alpha-1}(x - y)$, справедливого для всех $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\alpha > 1$, имеем

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle &= \int_{\Omega_1^+} \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} [(1 + u'_1)u'_1 + (u'_2)^2] ds = \int_{\Omega_1^+} T_1(\lambda_1(u)) \lambda_1(u) ds - \\
&\quad - \int_{\Omega_1^+} \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} (1 + u'_1) ds \geq k_0 \int_{\Omega_1^+} (\lambda_1(u) - 1)^{p-1} \lambda_1(u) ds - \int_{\Omega_1^+} T_1(\lambda_1(u)) ds \geq \\
&\geq k_0 \int_{\Omega_1^+} (\lambda_1(u) - 1)^p ds - k_1 \int_{\Omega_1^+} \lambda_1^{p-1}(u) ds \geq k_0 \int_{\Omega_1^+} \lambda_1^p(u) ds - \\
&\quad - ((p-1)k_0 + k_1) \int_{\Omega_1^+} \lambda_1^{p-1}(u) ds \geq k_0 \int_0^l \lambda_1^p(u) ds - k_0 \int_{\Omega_1^-} \lambda_1^p(u) ds -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -((p-1)k_0 + k_1) \int_0^l \lambda_1^{p-1}(u) ds \geq k_0 \int_0^l \lambda_1^p(u) ds - \int_{\Omega_1^-} ds - \\
& -((p-1)k_0 + k_1) \int_0^l \lambda_1^{p-1}(u) ds \geq k_0 \int_0^l \lambda_1^p(u) ds - k_0 l - ((p-1)k_0 + k_1) \int_0^l \lambda_1^{p-1}(u) ds,
\end{aligned}$$

ибо $\lambda_1(u) \leq 1$ на Ω_1^- .

Для любых векторов x, y , любого $\alpha > 1$ имеет место неравенство

$$|x|^\alpha - |y|^\alpha \geq \alpha |y|^{\alpha-2}(y, x - y),$$

применяя которое для векторов $x = u' + \hat{u}'$, $y = u'$, получим, что

$$\begin{aligned}
\lambda_1^p(u) &= |u' + \hat{u}'|^p \geq |u'|^p - p|u'|^{p-2}(u', \hat{u}') \geq \\
&\geq |u'|^p - p|u'|^{p-2}|u'| |\hat{u}'| = |u'|^p - p|u'|^{p-1}.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\lambda_1^{p-1}(u) = |u' + \hat{u}'|^{p-1} \leq (|u'| + |\hat{u}'|)^{p-1} = (|u'| + 1)^{p-1} \leq 2^{p-1} (|u'|^{p-1} + 1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle &\geq k_0 \int_0^l |u'|^p ds - [k_0 p + ((p-1)k_0 + k_1)2^{p-1}] \int_0^l |u'|^{p-1} ds - k_0 l - \\
&- [((p-1)k_0 + k_1)2^{p-1}] l \geq k_0 \|u\|^p - [k_0 p + ((p-1)k_0 + k_1)2^{p-1}] l^{1/p} \|u\|^{p-1} - \\
&- [((p-1)k_0 + k_1)2^{p-1}] l - k_0 l = k_0 \|u\|^p - c_4 \|u\|^{p-1} - c_5,
\end{aligned}$$

то есть неравенство (20) выполнено.

Определим теперь на $Y = [L_p(0, l)]^2$ оператор h по формуле

$$h(\xi) = \frac{T_1(|\tilde{\xi}|)}{|\tilde{\xi}|} \tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi} = (\xi_1 + 1, \xi_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in Y.$$

Из условий (13), (14) вытекает, что h является оператором Немыцкого (см., например, [7, с. 213]). В силу (14)

$$\int_0^l |h(\xi)|^{p^*} ds \leq k_1^{p^*} \int_0^l |\tilde{\xi}|^p ds \leq k_1^{p^*} [1 + \|\xi\|_Y]^p < +\infty,$$

то есть h действует из $[L_p(0, l)]^2$ в $[L_{p^*}(0, l)]^2 = Y^*$.

Для любых u, w из V имеем

$$\begin{aligned}
|\langle Au, w \rangle| &= \left| \int_0^l \left(\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} \tilde{u}', w' \right) ds \right| \leq \\
&\leq \left[\int_0^l \left| \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)} \tilde{u}' \right|^{p^*} ds \right]^{1/p^*} \|w\| = \|h(\xi)\|_{Y^*} \|w\|, \quad \xi = u'.
\end{aligned}$$

Поэтому для любых u, v из V

$$\|Au - Av\|_{V^*} = \sup_{w \neq 0} \frac{|\langle Au - Av, w \rangle|}{\|w\|} \leq \|h(\xi) - h(\eta)\|_{Y^*}, \quad \xi = u', \quad \eta = v'.$$

Но тогда непрерывность оператора A следует из непрерывности оператора Немыцкого h (см. [7, теорема 19.2, с. 213]). $\square$

Лемма 2. Пусть выполнено условие (13). Тогда если $u^{(n)} \rightharpoonup u$ в V при $n \rightarrow \infty$, то $Du^{(n)} \rightarrow Du$ в V^* при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $u^{(n)} \rightharpoonup u$ в V при $n \rightarrow +\infty$. В силу компактного вложения $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$ в $C[0, l]$ имеем, что $u_2^{(n)} \rightarrow u_2$ в $C[0, l]$ при $n \rightarrow +\infty$. Для любого $w \in V$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \langle Du^{(n)} - Du, w \rangle \right| &= \frac{1}{r_0} \left| \int_0^l \left[T_2 \left(\frac{u_2^{(n)} + r_0}{r_0} \right) - T_2 \left(\frac{u_2 + r_0}{r_0} \right) \right] w_2 ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{r_0} \max_{0 \leq s \leq l} |w_2(s)| \int_0^l \left| T_2 \left(\frac{u_2^{(n)} + r_0}{r_0} \right) - T_2 \left(\frac{u_2 + r_0}{r_0} \right) \right| ds \leq \\ &\leq \frac{l^{1/p^*}}{r_0} \|w\| \int_0^l \left| T_2 \left(\frac{u_2^{(n)} + r_0}{r_0} \right) - T_2 \left(\frac{u_2 + r_0}{r_0} \right) \right| ds, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|Du^{(n)} - Du\|_{V^*} = \sup_{w \neq 0} \frac{|\langle Du^{(n)} - Du, w \rangle|}{\|w\|} \leq \frac{l^{1/p^*}}{r_0} \int_0^l \left| T_2 \left(\frac{u_2^{(n)} + r_0}{r_0} \right) - T_2 \left(\frac{u_2 + r_0}{r_0} \right) \right| ds,$$

откуда вследствие непрерывности T_2 и сильной сходимости $u_2^{(n)}$ к u_2 в $C[0, l]$ при $n \rightarrow +\infty$ и вытекает требуемое. $\square$

Лемма 3. Пусть выполнены условия (12), (13). Тогда оператор D является монотонным и ограниченным и, следовательно, псевдомонотонным, кроме того

$$\langle Du, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in V. \quad (21)$$

Доказательство. Для произвольных u и v из V имеем

$$\begin{aligned} \langle Du - Dv, u - v \rangle &= \int_0^l [T_2(\lambda_2(u)) - T_2(\lambda_2(v))] \frac{u_2 - v_2}{r_0} ds = \\ &= \int_0^l [T_2(\lambda_2(u)) - T_2(\lambda_2(v))] \frac{u_2 + r_0 - (v_2 + r_0)}{r_0} ds = \\ &= \int_0^l \left(T_2 \left(\frac{u_2 + r_0}{r_0} \right) - T_2 \left(\frac{v_2 + r_0}{r_0} \right) \right) \frac{u_2 + r_0 - (v_2 + r_0)}{r_0} ds, \end{aligned}$$

откуда в силу неубывания T_2 получаем монотонность D .

Ограниченность оператора D непосредственно следует из (18).

Далее, обозначим $\Omega_2^+ = \{s \in (0, l) : \lambda_2(u) \geq 1\}$, $\Omega_2^- = (0, l) \setminus \Omega_2^+$. Поскольку $T_1(\lambda_2(u)) = 0$ на $\Omega_2^-(0, l)$, то

$$\langle Du, u \rangle = \frac{1}{r_0} \int_{\Omega_2^+} T_2(\lambda_2(u)) u_2 ds = \int_{\Omega_2^+} T_2(\lambda_2(u)) (\lambda_2(u) - 1) ds \geq 0,$$

ибо $\lambda_2(u) - 1 \geq 0$ на Ω_2^+ , а T_2 всюду неотрицательна. $\square$

Лемма 4. Оператор B — липшиц-непрерывный с постоянной $c_7 = 2l^{2/p^*}$.

Доказательство. Для произвольных u, v и w из V имеем

$$\begin{aligned} |\langle Bu - Bv, w \rangle| &= \left| \int_0^l [(\tilde{u}'_1 - \tilde{v}'_1) w_2 + (u_2 - v_2) w'_1] ds \right| = \\ &= \left| \int_0^l [(u'_1 - v'_1) w_2 + (u_2 - v_2) w'_1] ds \right| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq s \leq l} |w_2(s)| \int_0^l |u'_1 - v'_1| ds + \max_{0 \leq s \leq l} |u_2(s) - v_2(s)| \int_0^l |w'_1| ds \leq \\ &\leq \int_0^l |w'_2| ds \int_0^l |u'_1 - v'_1| ds + \int_0^l |u'_2 - v'_2| ds \int_0^l |w'_1| ds \leq \\ &\leq \int_0^l [|u'_1 - v'_1| + |u'_2 - v'_2|] ds \int_0^l [|w'_2| + |w'_1|] ds \leq 2l^{2/p^*} \|u - v\| \|w\|, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|Bu - Bv\|_{V^*} = \sup_{w \neq 0} \frac{|\langle Bu - Bv, w \rangle|}{\|w\|} \leq 2l^{2/p^*} \|u - v\| = c_7 \|u - v\|.$$

$\square$

Лемма 5. Пусть $u^{(n)} \rightharpoonup u$, $v^{(n)} \rightharpoonup v$ в V при $n \rightarrow +\infty$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Bu^{(n)}, v^{(n)} \rangle = \langle Bu, v \rangle, \quad (22)$$

кроме того, оператор B является псевдомонотонным.

Доказательство. Пусть $u^{(n)} \rightharpoonup u$, $v^{(n)} \rightharpoonup v$ в V при $n \rightarrow +\infty$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \langle Bu^{(n)}, v^{(n)} \rangle - \langle Bu, v \rangle \right| = \\ &= \left| \int_0^l \left\{ \left[(u_1^{(n)})' + 1 \right] v_2^{(n)} + u_2^{(n)} (v_1^{(n)})' - [u_1' + 1] v_2 - u_2 v_1' \right\} ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^l \left\{ \left[(u_1^{(n)})' + 1 \right] v_2^{(n)} + u_2^{(n)} (v_1^{(n)})' - \left[(u_1^{(n)})' + 1 \right] v_2 - u_2 (v_1^{(n)})' \right\} ds \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_0^l \left\{ \left[\left(u_1^{(n)} \right)' + 1 \right] v_2 + u_2 \left(v_1^{(n)} \right)' - \left[u_1' + 1 \right] v_2 - u_2 v_1' \right\} ds \right| \leq \\
& \leq \int_0^l \left| \left(u_1^{(n)} \right)' + 1 \right| \left| v_2^{(n)} - v_2 \right| ds + \int_0^l \left| \left(v_1^{(n)} \right)' \right| \left| u_2^{(n)} - u_2 \right| ds + \\
& + \left| \int_0^l \left\{ \left[\left(u_1^{(n)} \right)' - u_1' \right] v_2 + \left[\left(v_1^{(n)} \right)' - v_1' \right] u_2 \right\} ds \right|.
\end{aligned}$$

В силу компактного вложения $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$ в $L_p(0, l)$ имеем, что $v_2^{(n)} \rightarrow v_2$, $u_2^{(n)} \rightarrow u_2$ в $L_p(0, l)$ при $n \rightarrow +\infty$, кроме того, последовательности $\left\{ \left(u_1^{(n)} \right)' + 1 \right\}_{n=1}^{+\infty}$, $\left\{ \left(v_1^{(n)} \right)' \right\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничены в $L_p(0, l)$ в силу слабой сходимости последовательностей $\left\{ u_1^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty}$, $\left\{ v_1^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ в $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$. Отсюда вытекает сходимость при $n \rightarrow +\infty$ первых двух интегралов к нулю в правой части последнего неравенства.

Сходимость при $n \rightarrow +\infty$ к нулю третьего интеграла есть следствие слабой сходимости в $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$ последовательностей $\left\{ u_1^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty}$, $\left\{ v_1^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ к u_1 и v_1 соответственно.

В силу (22) из того, что $u^{(n)} \rightharpoonup u$ в V при $n \rightarrow \infty$ и $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \langle Bu^{(n)}, u^{(n)} - u \rangle \leq 0$, следует неравенство $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle Bu^{(n)}, u^{(n)} - v \rangle \geq \langle Bu, u - v \rangle$ для всех $v \in V$. Кроме того, (16) означает ограниченность B .

Таким образом, B – псевдомонотонный оператор. $\square$

Лемма 6. Пусть $u^{(n)} \rightharpoonup u$, $v^{(n)} \rightharpoonup v$ в V при $n \rightarrow +\infty$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Hu^{(n)}, v^{(n)} \rangle = \langle Hu, v \rangle, \quad (23)$$

кроме того, оператор H является псевдомонотонным.

Доказательство. Пусть $u^{(n)} \rightharpoonup u$, $v^{(n)} \rightharpoonup v$ в V при $n \rightarrow +\infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \langle Hu^{(n)}, v^{(n)} \rangle - \langle Hu, v \rangle \right| = \\
& = \frac{1}{r_0} \left| \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left(u_2^{(n)} \right)^2 \left(v_1^{(n)} \right)' + \left[\left(u_1^{(n)} \right)' + 1 \right] u_2^{(n)} v_2^{(n)} - \frac{1}{2} u_2^2 v_1' - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left[u_1' + 1 \right] u_2 v_2 \right\} ds \right| \leq \frac{1}{2r_0} \int_0^l \left| \left(u_2^{(n)} \right)^2 - u_2^2 \right| \left| \left(v_1^{(n)} \right)' \right| ds + \\
& + \frac{1}{2r_0} \left| \int_0^l \left[\left(v_1^{(n)} \right)' - v_1' \right] u_2^2 ds \right| + \frac{1}{r_0} \int_0^l \left| \left(u_1^{(n)} \right)' + 1 \right| \left| u_2^{(n)} v_2^{(n)} - u_2 v_2 \right| ds + \\
& + \frac{1}{r_0} \left| \int_0^l \left[\left(u_1^{(n)} \right)' - u_1' \right] u_2 v_2 ds \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2r_0} \max_{0 \leq s \leq l} |u_2^{(n)}(s) + u_2(s)| \int_0^l |u_2^{(n)} - u_2| |(v_1^{(n)})'| ds + \frac{1}{2r_0} \left| \int_0^l [(v_1^{(n)})' - v_1'] u_2^2 ds \right| + \\
&\quad + \frac{1}{r_0} \max_{0 \leq s \leq l} |v_2^{(n)}(s)| \int_0^l |u_2^{(n)} - u_2| |(u_1^{(n)})' + 1| ds + \\
&\quad + \frac{1}{r_0} \max_{0 \leq s \leq l} |u_2(s)| \int_0^l |v_2^{(n)} - v_2| |(u_1^{(n)})' + 1| ds + \frac{1}{r_0} \left| \int_0^l [(u_1^{(n)})' - u_1'] u_2 v_2 ds \right|.
\end{aligned}$$

В силу компактного вложения $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$ в $L_p(0, l)$ имеем, что $v_2^{(n)} \rightarrow v_2$, $u_2^{(n)} \rightarrow u_2$ в $L_p(0, l)$ при $n \rightarrow +\infty$, кроме того, последовательности $\left\{ (u_1^{(n)})' + 1 \right\}_{n=1}^{+\infty}$, $\left\{ (v_1^{(n)})' \right\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничены в $L_p(0, l)$ в силу слабой сходимости последовательностей $\left\{ u_1^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty}$, $\left\{ v_1^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ в $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$. Отсюда вытекает сходимость при $n \rightarrow +\infty$ первого, третьего и четвертого интегралов к нулю в правой части последнего неравенства.

Сходимость при $n \rightarrow +\infty$ к нулю второго и пятого интегралов есть следствие слабой сходимости в $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(0, l)$ последовательностей $\left\{ u_1^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty}$, $\left\{ v_1^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ к u_1 и v_1 соответственно и того, что $u_2^2 \in L_{p^*}(0, l)$, $u_2 v_2 \in L_{p^*}(0, l)$. В силу (23) из того, что $u^{(n)} \rightharpoonup u$ в V при $n \rightarrow +\infty$ и $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \langle H u^{(n)}, u^{(n)} - u \rangle \leq 0$, следует неравенство $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle H u^{(n)}, u^{(n)} - v \rangle \geq \langle H u, u - v \rangle$ для всех $v \in V$. Кроме того, (17) означает ограниченность H , следовательно, H – псевдомонотонный оператор. Лемма доказана. $\square$

Перейдем к исследованию разрешимости задачи (19). Рассмотрим предварительно задачу поиска элемента $u \in K$, являющегося решением вариационного неравенства

$$\langle T u, v - u \rangle + q_0 \langle Q u, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K, \quad (24)$$

где q_0 – заданное число, K – непустое, замкнутое, выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства V , оператор $T: V \rightarrow V^*$ является псевдомонотонным и коэрцитивным, то есть

$$\langle T v, v - v_0 \rangle \geq \rho(\|v\|) \|v\| \quad \forall v \in V, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \rho(\xi) = +\infty, \quad (25)$$

v_0 – фиксированный элемент из V , оператор $Q: V \rightarrow V^*$ является псевдомонотонным, $f \in V^*$ – заданный элемент.

Лемма 7. Для любого $\delta > 0$ существуют такие числа $q_\delta > 0$, $r_0 > 0$ и элемент $v_0 \in K_0 = \{v \in K : \|v\| \leq r_0\}$, что при выполнении условий

$$\|f\|_{V^*} \leq \delta, \quad |q| < q_\delta \quad (26)$$

имеет место неравенство

$$\langle T v, v - v_0 \rangle + q \langle Q v, v - v_0 \rangle \geq \langle f, v - v_0 \rangle \quad \forall v \in S_0, \quad (27)$$

где $S_0 = \{v \in K : \|v\| = r_0\}$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ – произвольное число, $\|f\|_{V^*} \leq \delta > 0$. Поскольку множество K не пусто, то существует $v_* \in K$, при этом для $r_* > \|v_*\|$ множество K_{r_*} также не пусто. Зафиксируем некоторый элемент $v_0 \in K_{r_0}$. Из коэрцитивности оператора T следует существование таких $r_0 > r_*$, $M_0 > 0$, что при $\|v\| \geq r_0$ выполнено неравенство

$$\langle Tv, v - v_0 \rangle - \langle f, v - v_0 \rangle \geq \rho(\|v\|)\|v\| - \delta\|v - v_0\| \geq [\rho(\|v\|) - \delta]\|v\| - \delta\|v_0\| \geq M_0. \quad (28)$$

Поскольку Q – псевдомонотонный оператор, он ограничен, а значит, найдется такое $q_\delta > 0$, что при $\|v\| \leq r_0$ и $|q| < q_\delta$ выполнено неравенство

$$|\langle qQv, v - v_0 \rangle| \leq |q| \|Qv\|_{V^*} \|v - v_0\| \leq M_0/2. \quad (29)$$

Из (28) и (29) получаем, что при выполнении условий (26) имеет место неравенство (27)

$$\langle Tv, v - v_0 \rangle + q \langle Qv, v - v_0 \rangle - \langle f, v - v_0 \rangle \geq M_0 - M_0/2 = M_0/2 > 0 \quad \forall v \in S_0.$$

□

Нам потребуется следующий результат (см. теоремы 8.1 и 8.2 [5, с. 258, 262]).

Теорема 1. Если K – непустое, замкнутое, выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства V , $P: V \rightarrow V^*$ – псевдомонотонный оператор, то при любом $f \in V^*$ задача поиска такого элемента $u \in K$, что

$$\langle Pu, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K, \quad (30)$$

имеет решение при выполнении хотя бы одного из условий: i) P – коэрцитивный оператор; ii) K – ограниченное множество.

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (12)–(14). Тогда

- 1) если $p > 3$, то неравенство (19) имеет решение при любом q_0 ;
- 2) если $p = 3$, то неравенство (19) имеет решение при всех q_0 , удовлетворяющих условию $|q_0| < q_1 = k_0/c_2$;
- 3) если $1 < p < 3$, то для любого $\delta > 0$ найдется $q_\delta > 0$, такое, что задача (19) имеет решение при условиях $\|f\|_{V^*} \leq \delta$, $|q_0| < q_\delta$.

Доказательство. Обозначим $T = A + D$, $Q = B + H$. В силу неравенств (20), (21) имеем для $v_0 = 0 \in K$:

$$\langle Tu, u \rangle \geq k_0\|u\|^p - c_4\|u\|^{p-1} - c_5 \quad \forall u \in V. \quad (31)$$

Согласно леммам 1 и 3 оператор T является ограниченным, монотонным, в силу лемм 5 и 6 оператор Q является псевдомонотонным, кроме того, из (16), (17) вытекает, что для любых $u, v \in V$

$$|\langle Qu, v \rangle| \leq c_1 (\|u\| + 1) \|v\| + c_2 \|u\| (\|u\| + 1) \|v\| = [c_1 + c_2 \|u\|] [\|u\| + 1] \|v\|.$$

При этом

$$\langle Tu + q_0 Qu, u \rangle \geq k_0\|u\|^p - c_4\|u\|^{p-1} - |q_0|c_2\|u\|^3 - |q_0|(c_1 + c_2) - |q_0|c_1\|u\| - c_5,$$

то есть оператор $P = T + q_0 Q$ является коэрцитивным в условиях пунктов 1) и 2) настоящей теоремы.

Из монотонности оператора T и псевдомонотонности Q следует псевдомонотонность оператора P (см. замечание 2.2.12 [5, с. 201]).

Таким образом, существование решения задачи (19) в случаях 1) и 2) следует из условия i) теоремы 1.

Рассмотрим теперь случай, когда $1 < p < 3$. Определим, так же как и в теореме 1, для $r > 0$ множество $K_r = \{u \in K : \|u\|_V \leq r\}$, являющееся выпуклым, замкнутым и ограниченным. Из условия ii) теоремы 1 следует, что задача нахождения такой функции $u_r \in K_r$, что

$$\langle (T + q_0 Q)u_r, v - u_r \rangle \geq \langle f, v - u_r \rangle \quad \forall v \in K_r, \quad (32)$$

имеет решение. По лемме 7 для константы δ из утверждения 3) настоящей теоремы выберем такие величины $q_\delta > 0$, $r > 0$ и элемент $v_0 \in M_r$, при которых выполнено неравенство (26). Тогда если $\|u_r\| = r$, то выполнено неравенство

$$\langle (T + q_0 Q)u_r, u_r - v_0 \rangle > \langle f, u_r - v_0 \rangle, \quad v_0 \in K_r,$$

противоречащее условию (32). Следовательно, выполнено неравенство $\|u_r\| < r$.

Покажем, что u_r будет решением задачи (19). Действительно, если $v \in K$, то найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$, при котором $v_\varepsilon = (1 - \varepsilon)u_r + \varepsilon v \in K_r$. Используя в неравенстве (32) в качестве v функцию v_ε , получим

$$\varepsilon \langle (T + q_0 Q)u_r, v - u_r \rangle \geq \varepsilon \langle f, v - u_r \rangle \quad \forall v \in K,$$

и следовательно,

$$\langle (T + q_0 Q)u_r, v - u_r \rangle \geq \langle f, v - u_r \rangle \quad \forall v \in K.$$

Теорема доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00667, 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31515).

Summary

G.R. Abdysheva, I.B. Badriev, V.V. Banderov, O.A. Zadvornov, R.R. Tagirov. Mathematical Modeling of the Equilibrium Problem for a Soft Biological Shell. I. Generalized Statement.

A mathematical model of the equilibrium problem for a soft biological shell (small intestine) is constructed. The biological shell is modeled by a soft network shell formed by two families of mutually intersecting reinforcing filaments in the longitudinal and radial directions. A generalized formulation of the problem as a variational inequality with pseudomonotone operators is given. The solvability of the variational inequality is examined.

Key words: soft biological shell, mathematical model, variational inequality, iterative method.

Литература

1. Мифтахов Р.Н. Численное моделирование моторики тонкой кишки // Современные проблемы биомеханики. – 1989. – Вып. 5. – С. 147–183.
2. Гистология / Под ред. В.Г. Алексеева, Ю.Н. Афанасьева, Н.А. Юриной. – М.: Медицина, 1983. – 692 с.

3. *Мифтахов Р.Н.* Приложение теории мягких оболочек в задачах биомеханики полых органов // Биомеханика: проблемы и исследования. – Рига: Зинатне, 1988. – С. 57–64.
4. *Ильгамов М.А., Мифтахов Р.Н.* Моделирование ритмической сегментации тонкой кишки // Медицинская биомеханика: Тр. Междунар. конф. – Рига, 1986. – С. 164–177.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
6. *Ридель В.В., Гулин Б.В.* Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 206 с.
7. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию
12.08.12

Абдюшева Гузель Равиловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Guzel.Abdusheva@ksu.ru*

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Idar.Badriev@ksu.ru*

Бандеров Виктор Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры анализа данных и исследования операций Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Victor.Banderov@ksu.ru*

Задворнов Олег Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Oleg.Zadvornov@ksu.ru*

Тагиров Равиль Рафгатович – старший преподаватель кафедры системного анализа и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Ravil.Tagirov@ksu.ru*