УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 154, кн. 4 Физико-математические науки *2012*

УДК 519.63

ДВУХСЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ НА СЕТКЕ ШИШКИНА

С.В. Тиховская

Аннотация

Рассмотрено линейное эллиптическое уравнение с регулярным и параболическими пограничными слоями. Для его решения использована схема направленных разностей на сетке Шишкина, обладающая свойством сходимости, равномерной по малому параметру. Исследован вопрос уменьшения необходимого количества арифметических действий для реализации разностной схемы на основе двухсеточного метода. Исследован метод Ричардсона для повышения точности разностной схемы. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, сингулярное возмущение, сетка Шишкина, разностная схема, итерационный метод, двухсеточный метод, экстраполяция Ричардсона.

Введение

Известно, что в случае линейной эллиптической задачи с пограничными слоями равномерная сходимость разностных схем может быть обеспечена сгущением сетки в пограничных слоях [1]. Разностная схема является пятиточечной и представляет собой систему линейных уравнений, которая обычно решается на основе итераций.

Количество итераций можно уменьшить, применяя двухсеточный метод, когда краевая задача предварительно решается на более редкой вспомогательной сетке с последующей интерполяцией найденного решения на исходную сетку. Найденное на основе интерполяции сеточное решение далее принимается за начальное приближение для итераций на исходной сетке, что и приводит к уменьшению числа арифметических действий.

В работе исследован двухсеточный метод решения эллиптического уравнения с пограничными слоями на сетке Шишкина [2, 3]. При использовании двухсеточного метода решение разностной схемы известно на двух сетках, поэтому можно применить экстраполяцию Ричардсона для повышения точности разностной схемы.

1. Двухсеточный метод

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x - c(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ &u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\Gamma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, a, c, f, g – достаточно гладкие функции,

$$a(x) \geqslant \alpha, \quad c(x,y) \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Известно [2], что при выполнении условий (2) решение задачи (1) является равномерно ограниченным и имеет регулярный пограничный слой у границы $x = 0$ и параболические пограничные слои у границ $y = 0$, $y = 1$.

Зададим в области $\overline{\Omega}$ кусочно-равномерную сетку [2]:

$$\Omega_{N,\sigma_N} = \{(x_i, y_j),\ i, j = 0, 1, \ldots, N,\ h_i = x_i - x_{i-1},\ \tau_j = y_j - y_{j-1}\},$$

где

$$h_i = \frac{2\sigma_x}{N}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \frac{N}{2}; \quad h_i = \frac{2(1-\sigma_x)}{N}, \quad \frac{N}{2} < i \leqslant N,$$

$$\tau_j = \frac{4\sigma_y}{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant \frac{N}{4}, \quad \frac{3N}{4} < j \leqslant N; \quad \tau_j = \frac{2(1-2\sigma_y)}{N}, \quad \frac{N}{4} < j \leqslant \frac{3N}{4}, \tag{3}$$

$$\sigma_x = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}, \quad \sigma_y = \min\left\{\frac{1}{4}, 2\sqrt{\varepsilon}\ln N\right\}.$$

На заданной сетке Ω_{N,σ_N} выпишем схему с направленными разностями:

$$\frac{2\varepsilon}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{u^N_{i+1,j} - u^N_{i,j}}{h_{i+1}} - \frac{u^N_{i,j} - u^N_{i-1,j}}{h_i}\right) +$$
$$+ \frac{2\varepsilon}{\tau_j + \tau_{j+1}}\left(\frac{u^N_{i,j+1} - u^N_{i,j}}{\tau_{j+1}} - \frac{u^N_{i,j} - u^N_{i,j-1}}{\tau_j}\right) +$$
$$+ a(x_i)\frac{u^N_{i+1,j} - u^N_{i,j}}{h_{i+1}} - c(x_i, y_j)u^N_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega_{N,\sigma_N}, \tag{4}$$
$$u^N_{i,j} = g(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_{N,\sigma_N} = \Gamma \cap \Omega_{N,\sigma_N}.$$

Определим норму непрерывной функции z и норму сеточной функции z^N соответственно:

$$\|z\| = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |z(x,y)|, \quad \|z^N\|_N = \max_{i,j} |z^N_{i,j}|.$$

Пусть $[u]_{\Omega_{N,\sigma_N}}$ – проекция функции непрерывного аргумента $u(x, y)$ на сетку Ω_{N,σ_N}.

Отметим, что матрица схемы (4) является M-матрицей. В соответствии с [2, 4]

$$\|u^N - [u]_{\Omega_{N,\sigma_N}}\|_N \leqslant C_1\Delta_N, \quad \Delta_N = \ln N/N, \tag{5}$$

где под C_i понимаем положительные постоянные, не зависящие от ε и N.

Разностную схему (4) запишем в общем виде

$$L^N u^N = f^N. \tag{6}$$

Схему (4) можно разрешить на основе итераций

$$u^{(m+1)} = G(u^{(m)}), \tag{7}$$

где $u^{(0)}$ задано. Матрица системы (6) является M-матрицей, что обеспечивает сходимость многих итерационных методов [5, 6]. Пусть для решения системы (6) применяется сходящийся итерационный метод и справедлива оценка сходимости итераций

$$\|u^{(m+1)} - u^N\|_N \leqslant q_N\|u^{(m)} - u^N\|_N, \quad q_N < 1. \tag{8}$$

Чтобы итерационная погрешность не доминировала над погрешностью разностной схемы, итерации необходимо продолжать, пока не выполнится условие

$$\|u^{(m)} - u^N\|_N \leqslant \Delta_N. \tag{9}$$

Пусть

$$\delta_N = \|u^{(0)} - u^N\|_N,$$

тогда, учитывая (8), несложно заключить, что для выполнения (9) потребуется

$$M_N \approx d\, N^2 \log_{q_N}(\Delta_N/\delta_N) \tag{10}$$

арифметических действий в предположении, что для реализации одной итерации необходимо выполнить dN^2 арифметических действий (пропорциональное числу неизвестных).

Теперь рассмотрим двухсеточный метод для нахождения решения разностной схемы (4). Введём сетку Ω_{n,σ_N} такую же по структуре, как Ω_{N,σ_N}, только с намного меньшим количеством узлов $n:\ n \ll N$. Предварительно с использованием итерационного метода (7) решаем задачу (1) на сетке Ω_{n,σ_N}. Итерации на сетке Ω_{n,σ_N} продолжаем, пока не выполнится условие

$$\|u^{(m_n)} - u^n\|_n \leqslant \Delta_n, \tag{11}$$

где m_n – необходимое количество итераций.

Далее необходимо найденное сеточное решение $u^{(m_n)}$ интерполировать на узлы исходной сетки Ω_{N,σ_N}. При этом точность интерполяционной формулы должна быть не ниже точности используемой разностной схемы.

Пусть $I(v^n, x, y)$ – интерполянт сеточной функции v^n в области $\overline{\Omega}$ и справедлива оценка погрешности

$$\|I([u]_{\Omega_{n,\sigma_N}}, x, y) - u\| \leqslant C_2 \Delta_{\text{int},n}, \tag{12}$$

где $u(x,y)$ – решение задачи (1), причем $\Delta_{\text{int},n} \leqslant \Delta_n$.

Интерполянт $I(v^n, x, y)$ должен быть устойчивым к возмущению интерполируемой сеточной функции v^n:

$$\|I(v^n, x, y) - I(\tilde{v}^n, x, y)\| \leqslant C_3 \|v^n - \tilde{v}^n\|_n. \tag{13}$$

Определившись с формулой интерполяции, можно найденное сеточное решение $u^{(m_n)}$ интерполировать на узлы исходной сетки Ω_{N,σ_N}. Пусть

$$u_n^I = [I(u^{(m_n)}, x, y)]_{\Omega_{N,\sigma_N}}.$$

Покажем, что для некоторой постоянной C_4 имеет место оценка

$$\|u_n^I - u^N\|_N \leqslant C_4 \Delta_n.$$

С учетом неравенств (5), (11)–(13) имеем

$$\begin{aligned}\|u_n^I - u^N\|_N \leqslant \|I(u^{(m_n)}, x, y) - I(u^n, x, y)\| + \|I(u^n, x, y) - I([u]_{\Omega_{n,\sigma_N}}, x, y)\| +\\ + \|[I([u]_{\Omega_{n,\sigma_N}}, x, y)]_{\Omega_{N,\sigma_N}} - [u]_{\Omega_{N,\sigma_N}}\|_N + \|[u]_{\Omega_{N,\sigma_N}} - u^N\|_N \leqslant\\ \leqslant C_3\Delta_n + C_3 C_1 \Delta_n + C_2 \Delta_{int,n} + C_1 \Delta_N \leqslant C_4 \Delta_n.\end{aligned}$$

Итак, с помощью решения задачи (1) на вспомогательной сетке Ω_{n,σ_N} получено приближение к решению схемы (4) с точностью $O(\Delta_n)$. Используя это приближение как начальную итерацию в методе (7), уменьшаем количество итераций на исходной сетке Ω_{N,σ_N}. Вычислим необходимое количество арифметических действий двухсеточного метода:

$$M_{nN} \approx d\,n^2 \log_{q_n} \frac{\Delta_n}{\delta_n} + d\,N^2 \log_{q_N} \frac{\Delta_N}{\Delta_n} + J_n, \tag{14}$$

где J_n – количество арифметических действий, необходимых для интерполяции.

Сравнивая (10), (14), оценим выигрыш по количеству арифметических операций при использовании двухсеточного метода:

$$M_N - M_{nN} \geqslant d(N^2 - n^2) \log_{q_n} \left(\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) - J_n.$$

2. Экстраполяция Ричардсона

Исследуем экстраполяцию Ричардсона для повышения точности разностной схемы при использовании двухсеточного метода. Метод экстраполяции Ричардсона для сингулярно возмущенных эллиптических задач исследовался, например, в работах [3, 7]. Рассмотрим случай, когда вспомогательная сетка Шишкина имеет вид (3) и содержит в k раз меньше по каждому направлению сеточных интервалов, чем исходная сетка, где $k > 1$ – целое число.

Решение u^N схемы с направленными разностями (4) вычисляется на сетке Ω_{N,σ_N}. Для повышения точности будем также использовать решение этой схемы на сетке Ω_{n,σ_N}, которая содержит n сеточных интервалов и имеет те же параметры σ_x, σ_y, что и сетка Ω_{N,σ_N}. Эти сетки вложены так, что $\Omega_{n,\sigma_N} = \{(X_l, Y_m)\} \subset \subset \Omega_{N,\sigma_N} = \{(x_i, y_j)\}$. Очевидно, что сетку Ω_{N,σ_N} можно получить из Ω_{n,σ_N} делением каждой ячейки на k равных частей по каждому направлению.

Обозначим решение схемы (4) на Ω_{n,σ_N} через u^n, пусть

$$k_n = -\frac{n}{N-n} = -\frac{1}{k-1}, \quad k_N = \frac{N}{N-n} = \frac{k}{k-1}.$$

В соответствии с методом экстраполяции Ричардсона зададим функцию u^{nN} на сетке Ω_{N,σ_N}, приближающую решение $u(x,y)$ с более высоким порядком точности, чем u^N. Для этого сначала в узлах вспомогательной сетки Ω_{n,σ_N} определим сеточную функцию u^{nN} следующим образом:

$$u^{nN}(X_l, Y_m) = k_n u^n(X_l, Y_m) + k_N u^N(X_l, Y_m), \quad (X_l, Y_m) \in \Omega_{n,\sigma_N}.$$

В узлах исходной сетки Ω_{N,σ_N}, не совпадающих с узлами сетки Ω_{n,σ_N}, зададим сеточную функцию $u^{nN}(x_i, y_j)$, используя интерполяцию. Тогда для каждого узла $(x_i, y_j) \in \Omega_{N,\sigma_N}$, принадлежащего некоторой ячейке $S_{l,m} = [X_{l-1}, X_{l+1}] \times \times [Y_{m-1}, Y_{m+1}]$, определим

$$u^{nN}(x_i, y_j) = I([u^{nN}]_{\Omega_{n,\sigma_N}}, x_i, y_j), \tag{15}$$

где интерполяционную формулу для ячейки $S_{l,m}$ зададим следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} I([u^{nN}]_{\Omega_{n,\sigma_N}}, x_i, y_j) = \frac{u_\Phi^{nN}(x_i, Y_m) - u_\Phi^{nN}(x_i, Y_{m-1})}{Y_{m+1} - Y_m}(y_j - Y_m) + \\ + \frac{u_\Phi^{nN}(x_i, Y_{m+1}) - 2u_\Phi^{nN}(x_i, Y_m) + u_\Phi^{nN}(x_i, Y_{m-1})}{\Theta_{m+1} - 2\Theta_m + \Theta_{m-1}} \Big(\Theta(y_j) - \Theta(Y_m) - \\ - \frac{\Theta(Y_m) - \Theta(Y_{m-1})}{Y_{m+1} - Y_m}(y_j - Y_m)\Big) + u_\Phi^{nN}(x_i, Y_m), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$u_{\Phi}^{nN}(x_i, y_j) = u^{nN}(X_l, y_j) + \frac{u^{nN}(X_l, y_j) - u^{nN}(X_{l-1}, y_j)}{X_{l+1} - X_l}(x_i - X_l) +$$
$$+ \frac{u^{nN}(X_{l+1}, y_j) - 2u^{nN}(X_l, y_j) + u^{nN}(X_{l-1}, y_j)}{\Phi_{l+1} - 2\Phi_l + \Phi_{l-1}}\Big(\Phi(x_i) - \Phi(X_l) -$$
$$- \frac{\Phi(X_l) - \Phi(X_{l-1})}{X_{l+1} - X_l}(x_i - X_l)\Big).$$

Интерполяция (16) является точной на функциях $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ и будет квадратической при задании $\Phi(x) = x^2$, $\Theta(y) = y^2$. Функции $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ можно выбирать в соответствии с пограничными слоями задачи (1).

3. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + u_x - u = f(x, y), \quad u(x, y) = g(x, y), \tag{17}$$

где f, g соответствуют решению

$$u(x, y) = e^{-x/\varepsilon} + e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}} + \cos(\pi x).$$

Решение задачи (17) находим на основе схемы (4). Начальное приближение для используемых итерационных методов задаем следующим образом:

$$u^{(0)}(x_i, y_j) = \begin{cases} 0, & (x_i, y_j) \in \Omega_{N,\sigma_N} \setminus \Gamma_{N,\sigma_N}, \\ g(x_i, y_j), & (x_i, y_j) \in \Gamma_{N,\sigma_N}. \end{cases}$$

Итерационный метод (7) на сетке Ω_{N,σ_N} завершаем, если выполнено условие

$$\max_{i,j} |L_{i,j}^N u^{(m_N)}| \leqslant \alpha \Delta_N,$$

тогда будет выполнена оценка $\|u^{(m_N)} - u^N\|_N \leqslant \Delta_N$.

Использование формул линейной и квадратической интерполяций сеточной функции u^{nN} с сетки Ω_{n,σ_N} на исходную сетку Ω_{N,σ_N} приводило к тому, что погрешность метода Ричардсона становилась значительно выше, чем в узлах вспомогательной сетки Ω_{n,σ_N}, поэтому функции Φ, Θ были заданы следующим образом:

$$\Phi(x) = x^2, \quad \Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}.$$

Исследуем реализацию схемы (4) на основе явного метода Зейделя [6].

Пятиточечную схему (6) можно представить как

$$a_{i,j}u_{i-1,j}^N + b_{i,j}u_{i,j-1}^N + c_{i,j}u_{i+1,j}^N + d_{i,j}u_{i,j+1}^N - e_{i,j}u_{i,j}^N = f_{i,j}^N, \quad 0 < i, j < N.$$

Тогда векторно-матричная запись метода Зейделя будет иметь вид

$$u^{(m)} = D^{-1}\left(f + Lu^{(m)} + Uu^{(m-1)}\right),$$

где

$$(Lv)_{i,j} = a_{i,j}v_{i-1,j} + b_{i,j}v_{i,j-1}, \quad (Dv)_{i,j} = e_{i,j}v_{i,j}, \quad (Uv)_{i,j} = c_{i,j}v_{i+1,j} + d_{i,j}v_{i,j+1}.$$

Табл. 1

Количество итераций односеточного и двухсеточного методов Зейделя, $\varepsilon = 10^{-4}$

n	N						
	8	16	32	64	128	256	512
4	39(11)	118(11)	335(10)	970(10)	2936(10)	9331(9)	30847(9)
8		110(37)	320(33)	940(30)	2869(28)	9164(27)	30393(26)
16			292(104)	882(91)	2738(82)	8845(75)	29540(69)
32				789(291)	2525(252)	8305(223)	28087(202)
64					2218(845)	7502(731)	25883(646)
128						6537(2592)	23009(2255)
256							21191(8357)
	43	123	347	1002	3045	9694	32068

Табл. 2

Норма погрешности односеточного метода Зейделя и двухсеточного метода Зейделя с экстраполяцией Ричардсона, $\varepsilon = 10^{-4}$

n	N						
	8	16	32	64	128	256	512
4	$2.67e{-1}$	$2.40e{-1}$	$2.57e{-1}$	$3.15e{-1}$	$3.66e{-1}$	$4.09e{-1}$	$4.47e{-1}$
8		$7.43e{-2}$	$9.43e{-2}$	$1.28e{-1}$	$1.60e{-1}$	$1.94e{-1}$	$2.26e{-1}$
16			$3.03e{-2}$	$3.74e{-2}$	$4.80e{-2}$	$6.05e{-2}$	$7.48e{-2}$
32				$9.82e{-3}$	$1.15e{-2}$	$1.38e{-2}$	$1.73e{-2}$
64					$3.58e{-3}$	$2.84e{-3}$	$3.28e{-3}$
128						$1.15e{-3}$	$8.83e{-4}$
256							$3.74e{-4}$
	$2.30e{-1}$	$1.37e{-1}$	$7.23e{-2}$	$3.70e{-2}$	$2.21e{-2}$	$1.39e{-2}$	$8.20e{-3}$

Результаты численных экспериментов для метода Зейделя при $\varepsilon = 10^{-4}$ приведены в табл. 1 и 2.

В табл. 1 при различных значениях N и n указано количество итераций двухсеточного метода на исходной сетке Ω_{N,σ_N}, при этом в скобках приведено количество итераций на более редкой вспомогательной сетке Ω_{n,σ_N}. В нижней строке указано число итераций односеточного метода при различных N.

В табл. 2 при различных значениях N и n приведена норма погрешности двухсеточного метода с экстраполяцией Ричардсона (15). В нижней строке для сравнения приведена норма погрешности односеточного метода в зависимости от N. Из таблицы следует, что экстраполяция Ричардсона (15) повышает точность схемы до порядка $O(\ln^2 N/N^2)$.

Помимо метода Зейделя в качестве итерационного метода использовался метод последовательной верхней релаксации [6]

$$u^{(m)} = \omega D^{-1}\left(f + Lu^{(m)} + Uu^{(m-1)}\right) + (1-\omega)u^{(m-1)},$$

где ω – итерационный параметр, а также метод Писмана–Речфорда (продольно-поперечных прогонок) [6]

$$u^{(m-1/2)} = u^{(m-1)} + \tau\left(A_1 u^{(m-1/2)} + A_2 u^{(m-1)} - f\right),$$

$$u^{(m)} = u^{(m-1/2)} + \tau\left(A_1 u^{(m-1/2)} + A_2 u^{(m)} - f\right),$$

где τ – итерационный параметр,

Табл. 3

Сравнение количества итераций, $\varepsilon = 10^{-4}$

Метод	N					
	8	16	32	64	128	256
Зейделя	39(11) 43	110(37) 123	292(104) 347	789(291) 1002	2218(845) 3045	6537(2592) 9694
верхней релаксации	32(7) 35	92(30) 103	245(87) 291	663(244) 841	1862(709) 2553	5471(2174) 8123
Писмана – Речфорда	11(2) 12	26(13) 30	57(31) 68	122(70) 152	258(155) 333	559(340) 744

$$(A_1 v)_{i,j} = a_{i,j} v_{i-1,j} - e'_{i,j} v_{i,j} + c_{i,j} v_{i+1,j},$$
$$(A_2 v)_{i,j} = b_{i,j} v_{i,j-1} - e''_{i,j} v_{i,j} + d_{i,j} v_{i,j+1}.$$

Здесь $e_{i,j} = e'_{i,j} + e''_{i,j}$, $e'_{i,j}$ соответствует аппроксимации производных по направлению x, а $e''_{i,j}$ – по направлению y.

В табл. 3 для $\varepsilon = 10^{-4}$ проведено сравнение исследуемых итерационных методов. Двухсеточный метод используем в случае $n = N/2$. Для метода последовательной верхней релаксации итерационный параметр $\omega = 2/(1+\sqrt{0.7})$, для метода Писмана – Речфорда итерационный параметр $\tau = 8/N$.

Применение методов последовательной верхней релаксации и Писмана – Речфорда привело к уменьшению количества итераций по сравнению с методом Зейделя. Повышение точности на основе экстраполяции Ричардсона не зависит от конкретного итерационного метода.

Итак, применение двухсеточного метода приводит к выигрышу в количестве арифметических действий, а использование экстраполяции Ричардсона повышает точность разностной схемы на порядок.

Автор благодарит профессора А.И. Задорина за полезные обсуждения при подготовке настоящей работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00875).

Summary

S.V. Tikhovskaya. A Two-Grid Method for an Elliptic Equation with Boundary Layers on a Shishkin Mesh.

In this article, we consider a linear elliptic equation with regular and parabolic boundary layers. To solve this equation, we used an upwind difference scheme on a Shishkin mesh, possessing the property of the uniform convergence with respect to a small parameter. We investigated the problem of decreasing the required number of arithmetic operations for implementation of the difference scheme on the basis of a two-grid method, and studied the Richardson method aimed at improving the accuracy of this scheme. Here, we present results of some numerical experiments.

Key words: elliptic equation, singular perturbation, Shishkin mesh, difference scheme, iterative method, two-grid method, Richardson extrapolation.

Литература

1. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. – Singapore: World Scientific, 1996. – 163 p.

2. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992. – 232 с.

3. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. – Boca Raton: Chapman& Hall/CRC, 2009. – 408 p.

4. *Roos H.G., Stynes M., Tobiska L.* Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.

5. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

6. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ, 2001. – 318 с.

7. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* A Higher-Order Richardson Method for a Quasilinear Singularly Perturbed Elliptic Reaction-Diffusion Equation // Differ. Equat. – 2005. – V. 41, No 7 – P. 1030–1039.

8. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Интерполяция функций с погранслойными составляющими и ее применение в двухсеточном методе // Сиб. электр. матем. изв. – 2011. – Т. 8. – С. 247–267.

Поступила в редакцию
01.10.12

Тиховская Светлана Валерьевна – аспирант Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

E-mail: *s.tihovskaya@yandex.ru*