УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ НАСЫЩЕННО-НЕНАСЫЩЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

М.Ф. Павлова, Е.В. Рунг

Аннотация

Построена и исследована неявная разностная схема для задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации при условии полупроницаемости на части границы. С помощью метода штрафа устанавливается существование решения разностной задачи. Исследование сходимости разностной схемы проводится при минимальных предположениях о гладкости исходных данных: доказывается сходимость кусочно-постоянных восполнений разностного решения к обобщенному решению рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: фильтрационная консолидация, разностные схемы, метод штрафа, сходимость разностной схемы.

1. Постановка задачи

Взаимосвязанный процесс деформирования пористой среды и фильтрации содержащейся в ней жидкости под действием внешних сил называется фильтрационной консолидацией. При этом говорят о насыщенной фильтрационной консолидации, если поры среды полностью заняты жидкостью, и о ненасыщенной фильтрационной консолидации – в противном случае. С помощью модели насыщенной фильтрационной консолидации могут быть описаны процессы осадки сооружений на насыщенных пластах, процессы деформирования пористого скелета и другие. Однако в приложениях часто возникают ситуации (например, задача о разгрузке пористого пласта), когда среда содержит зоны и полного, и неполного насыщения, которые могут изменяться с течением времени. Для описания этого процесса в работе [1] предложена математическая модель, названная насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидацией. Эта модель включает в себя суммарное уравнение движения (квазиравновесия) фаз

$$-\operatorname{div}\sigma^f + \nabla(p^+ - ms(p)p^-) = f(s(p)) \tag{1}$$

и уравнения совместного деформирования фаз

$$m\,\frac{\partial s(p)}{\partial t} + \operatorname{div} q + \eta_1 s(p)\,\frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Здесь σ^f – тензор эффективных напряжений, p – поровое давление, u – вектор макроперемещений частиц скелета, q – скорость фильтрации, m – пористость среды, $s(p)$ – насыщенность, вектор-функция $f(s(p))$ – плотность массовых сил, $p^+ = (|p| + p)/2$, $p^- = p^+ - p$.

Будем полагать, что скорость фильтрации q связана с p следующим законом

$$q = -b(s(p))(\nabla p - \rho g), \tag{3}$$

реологические соотношения, связывающие эффективные напряжения с деформациями скелета, – линейные:

$$\sigma^f = A\Lambda(u) + B\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{4}$$

Здесь функция $b(s(p))$ – относительная фазовая проницаемость среды, ρ – плотность жидкости, g – вектор силы тяжести, $\Lambda(u)$ и $\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ – тензор деформаций и тензор скоростей деформаций соответственно, A и B – линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве H_3 симметричных тензоров второго ранга.

Задачу (1)–(4) будем рассматривать в области Ω, имеющей форму прямоугольника $\Omega = \{(x_1, x_2) \in R^2 \ : \ -a \le x_1 \le a, \ -H \le x_2 \le 0\}$, $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{3} \Gamma_i$ – граница Ω, где

$$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : \ x_2 = 0, \quad a_1 <| x_1 |\le a\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : \ x_2 = 0, \quad 0 \le| x_1 |\le a_1 < a\},$$

Γ_1 – оставшаяся часть Γ, $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

Будем предполагать, что при $t \in (0, T]$ выполнены следующие краевые условия[1]:

$$u_i(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma_1; \tag{5}$$

$$\sigma^f_{12} = 0, \quad x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_2; \quad -\sigma^f_{22} + p^+ - ms(p)p^- = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_2, \\ F(t), & x \in \Gamma_3; \end{cases} \tag{6}$$

$$q_n(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad p(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma_3; \tag{7}$$

$$p(x,t)q_n(x,t) = 0, \quad p(x,t) \le 0, \quad q_n(x,t) \ge 0, \quad x \in \Gamma_2. \tag{8}$$

Здесь $q_n(x,t) = (q, n)$, где n – внешняя нормаль к границе Γ.

Начальные условия задаются в виде

$$u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \big(p(x,0)\big)^- = p_0^-(x). \tag{9}$$

Математическому исследованию задачи (1)–(9) посвящены работы [2, 3], где, в частности, рассмотрен вопрос существования обобщенного решения. Причем в работе [3] разрешимость задачи (1)–(9) доказана при более слабых, по сравнению с [2], ограничениях. Для пояснения рассмотрим, например, наиболее часто используемые в приложениях зависимости вида

$$s(p) = \begin{cases} (1-p)^{-\mu}, & p \le 0, \\ 1, & p > 0, \end{cases} \quad b(s) = s^\nu, \quad 0 \le s \le 1, \quad \mu \ge 0, \quad \nu > 0. \tag{10}$$

Результат работы [2] для зависимостей вида (10) справедлив при условии, что $\mu\nu \le 1$ (заметим, что наиболее популярный, по-видимому, случай, когда $\mu = 1$, $\nu = 3$, этим условием исключается). В [3] существование обобщенного решения для зависимостей вида (10) доказана для любых $\mu > 0$, $\nu > 0$. Поэтому в настоящей работе при построении разностной схемы будем использовать предложенное в работе [3] определение обобщенного решения задачи (1)–(9).

[1] Выбор вида области Ω и краевых условий обусловлен их целесообразностью с точки зрения приложений.

2. Обобщенная формулировка задачи

Доказательство разрешимости задачи (1)–(9) работах [2, 3] проводилось путем применения преобразования Кирхгофа, при этом от неизвестной функции $p(x,t)$ переходят к функции $w(x,t) = \vartheta(p(x,t))$, где

$$\vartheta(p) = \int_0^p b(s(\xi))\,d\xi. \tag{11}$$

В [3] было отмечено, что в условиях (10) при $\mu\nu > 1$ областью значений функции $\vartheta(p)$ является лишь часть числовой оси, а именно множество $(-\gamma, +\infty)$, здесь

$$\gamma = \int_{-\infty}^0 b(s(\xi))\,d\xi. \tag{12}$$

В теории фильтрации γ называют макроскопической капиллярной длиной. Из работы [4] следует, что γ, как правило, имеет конечное значение. При перечисленных выше условиях решение исходной задачи, переформулированное в терминах (u_1, u_2, w), очевидно, требует ограничения вида $w \geq -\gamma$. Чтобы избежать введения такого ограничения, в [3] вводится так называемая «доопределенная» задача.

С этой целью по известным $s(p)$, $b(s)$, $\vartheta(p)$ (см. (11)) строятся функции

$$\varphi(w) = \begin{cases} s(\vartheta^{-1}(w)), & w > -\gamma, \\ 0, & w \leq -\gamma, \end{cases} \quad \varphi_1(w) = \begin{cases} s(\vartheta^{-1}(w))(\vartheta^{-1}(w))^-, & w > -\gamma, \\ 0, & w \leq -\gamma. \end{cases} \tag{13}$$

При построении доопределенной задачи в уравнениях (1)–(9) $s(p)$ заменяется на $\varphi(w)$, $s(p)p^-$ – на $\varphi_1(w)$, $b(s(p))\nabla p$ – на ∇w.

Нетрудно видеть, что, если функции u_1, u_2, w являются решением доопределенной задачи и $w(x,t) \geq -\gamma$ для любых $(x,t) \in Q_T$, то u_1, u_2, $\vartheta^{-1}(w)$ – решение задачи (1)–(9).

В дальнейшем, следуя [3], будем предполагать, что для функций $s(p)$, $b(s)$ и операторов A, B выполнены следующие условия.

$\mathbf{A_1}$. Функция $s : \mathbb{R} \to (0,1]$ – неубывающая, непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция такая, что $s(p) = 1$ при любом $p \geq 0$.

$\mathbf{A_2}$. Функция $b : [0,1] \to [0,1]$ – неубывающая, непрерывная.

$\mathbf{A_3}$. Отображение $\vartheta : \mathbb{R} \to (-\gamma, +\infty)$, заданное формулой (11), взаимно-однозначно, где γ – параметр, определенный в (12).

$\mathbf{A_4}$. Существуют константы $\kappa > 0$, $C_\varphi > 0$ и $C_\vartheta > 0$ такие, что

$$\varphi'(\eta)\,\varphi^{2\kappa-1}(\eta) \leq C_\varphi \quad \forall\,\eta \in (-\gamma, 0), \tag{14}$$

$$|\varphi_1(\eta)| \leq C_\vartheta \quad \forall\,\eta \in (-\gamma, 0). \tag{15}$$

Заметим, что для функций вида (10) оценки (14), (15) при $\kappa > \nu/2$ справедливы для всех μ и ν, удовлетворяющих условию $(\mu\,\nu - 1) > 0$.

$\mathbf{A_5}$. A и B – линейные, симметричные, ограниченные и положительно определенные операторы, действующие в H_3.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения: $\overset{\circ}{V}$ – замыкание гладких функций, равных нулю на Γ_1, в норме пространства $W_2^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{V}_1$ – замыкание гладких функций, равных нулю на Γ_3, в норме того же пространства,

$$K = \left\{ w \in \overset{\circ}{V}_1 : \, w(x) \leq 0 \quad \text{п. в. на } \Gamma_2 \right\}.$$

Определение 1. Обобщенным решением доопределенной задачи назовем тройку функций (u_1, u_2, w), для которых справедливы следующие условия:

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}), \quad u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{п. в. на } \Omega, \quad i = 1,2,$$

$$w \in L_2(0,T;K), \quad w^-(x,0) = w_0^-(x) \quad \text{п. в. на } \Omega,$$

для любых функций $v_i \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V})$, $i = 1,2$, имеют место равенства

$$\int\limits_{Q_T} \left\{ \sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij}^f \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \left[w^+ - m\varphi_1(w)\right] \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - f_i(\varphi(w)) v_i \right\} dx\, dt =$$

$$= \delta_{i2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_3} F(x,t) v_i \, dx\, dt, \quad (16)$$

и для произвольной функции $z \in L_2(0,T;K)$, имеющей производную $\dfrac{\partial z}{\partial t} \in L_2(Q_T)$, и любой неотрицательной функции $\alpha(t) \in C^1([0,T])$ такой, что $\alpha(T) = 0$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q_T} \left\{ \eta_1 \varphi(w) \, \frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t} \, \alpha(t)\,(z - w) + \nabla w \cdot \nabla(\alpha(t)\,(z-w)) \right\} dx\, dt \, +$$

$$+ \; [m\partial_t \varphi(w), \, \alpha(t)(z-w)] \geq \int\limits_{Q_T} b(\varphi(w))\, \rho\, g_2 \, \frac{\partial(z-w)}{\partial x_2} \, dx\, dt. \quad (17)$$

В (17) полагается

$$[m\partial_t\varphi(w), \, \alpha(t)(z-w)] = \int\limits_{Q_T} m\Phi(w)\partial_t\alpha(t)\, dx\, dt - \int\limits_{Q_T} m\varphi(w)\partial_t(\alpha z)\, dx\, dt \, +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} m\Phi(-w_0^-))\alpha(0)\, dx - \int\limits_{\Omega} m\varphi(-w_0^-) z(x,0)\alpha(0)\, dx,$$

где $\Phi(\xi) = \int\limits_0^\xi \varphi'(\zeta)\zeta \, d\zeta$, $g_2 = (g, x_2)$.

3. Построение разностной схемы

На Ω построим равномерную сетку $\overline{\omega}$ с шагами $h_1 = 2a/N_1$ и $h_2 = H/N_2$ по x_1 и x_2 соответственно. Число N_1 выбирается таким образом, чтобы точки $x = (\pm a_1, 0)$ были из $\overline{\omega}$. Пусть $\gamma_i = \overline{\omega} \cap \Gamma_i$, $i = 1,2,3$, $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{3} \gamma_i$ – множество узлов сетки, принадлежащих Γ, $\omega = \overline{\omega} \setminus \gamma$. Через τ будем обозначать шаг по времени, $\omega_\tau = \{\tau, 2\tau, \ldots, T = M\tau\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{0, \tau, 2\tau, \ldots, T\}$.

Пусть V_h – пространство сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}$. Обозначим через $\overset{\circ}{V}_h$ множество сеточных функций из V_h, равных нулю на границе γ_1, через $\overset{\circ}{V}_{h1}$ множество сеточных функций из V_h, равных нулю на границе γ_3. Пусть

$$K_h = \{w \in \overset{\circ}{V}_{h1} \colon \; w(x) \leq 0 \;\; \text{п. в. на } \gamma_2\}.$$

Введем в рассмотрение вектор $r = (r_1, r_2)$, координаты которого могут принимать значения ± 1. Для сеточной функции y определим разностные отношения $\partial_{r_i} y$ по формуле

$$\partial_{r_i} y = \begin{cases} y_{x_i}, & r_i = +1, \\ y_{\overline{x}_i}, & r_i = -1. \end{cases}$$

Вектор $\nabla_r y = (\partial_{r_1} y, \partial_{r_2} y)$ является разностным аналогом градиента функции, а $\operatorname{div}_r v = \partial_{r_1} v_1 + \partial_{r_2} v_2$ – разностным аналогом дивергенции вектора $v = (v_1, v_2)$.

Для $x \in \overline{\omega}$ обозначим через $H_r(x)$ ячейку сетки $\overline{\omega}$, которая содержит все точки сетки, участвующие в записи оператора $\nabla_r y(x)$. Пусть ω_r – множество точек $x \in \overline{\omega}$, в которых определен оператор $\nabla_r y(x)$.

В пространстве V_h введем следующие нормы и скалярные произведения:

$$(y, v)_r = \sum_{x \in \omega_r} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad [y, v] = \frac{1}{4} \sum_r (y, v)_r, \tag{18}$$

$$\|y\| = [|y|^2, 1]^{1/2}, \quad \|y\|_+^2 = \frac{1}{4} \sum_r \sum_{i=1}^{2} (|\partial_{r_i} y|^2, 1)_r,$$

$$(y, v)_{r, \gamma_i} = \sum_{x \in \omega_r \cap \gamma_i} h_1 y(x) v(x), \quad [y, v]_{\gamma_i} = \frac{1}{2} \sum_r (y, v)_{r, \gamma_i}, \quad i = 2, 3.$$

Определим для сеточных функций кусочно-постоянные восполнения по x и t:

$$\Pi_r z(x) = \{z(x'),\ x' \in \omega_r :\ x \in H_r(x')\},$$

$$\Pi^+ \omega(t') = \{\omega(k\tau) :\ k\tau \le t' < (k+1)\tau\},$$

$$\Pi^- \omega(t') = \{\omega(k\tau) :\ (k-1)\tau \le t' < k\tau\}.$$

Используя введенные выше обозначения, легко можно видеть, что для любых сеточных функций y, $v \in V_h$ выполняется следующее равенство:

$$(y, v)_r = \int\limits_{\Omega} \Pi_r y \cdot \Pi_r v \, dx. \tag{19}$$

Определение 2. Тройку функции y_1, y_2, $w_{h\tau}$, определенных на $\overline{\omega} \times \overline{\omega}_\tau$, таких, что $y_i(t) \in \overset{\circ}{V}_h$, $i = 1, 2$, $w_{h\tau}(t) \in K_h$ для любого $t \in \overline{\omega}_\tau$, назовем решением неявной разностной схемы, если для любых $x \in \overline{\omega}$

$$y_i(x, 0) = y^0(x), \quad i = 1, 2, \quad (w_{h\tau}(x, 0))^- = w_{h\tau 0}^-(x),$$

для любых функций $v_i \in \overset{\circ}{V}_h$ имеют место равенства

$$\frac{1}{4} \sum_r \left(\sum_{j=1}^{2} \Big((A\Lambda_r(\widehat{y}))_{ij} + (B\Lambda_r(y_t))_{ij} \Big), \partial_{r_j} v_i \right)_r - \frac{1}{4} \sum_r \left(\widehat{w}_{h\tau}^+ - m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}), \partial_{r_i} v_i \right)_r =$$
$$= \Big[f_i(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})),\ v_i \Big] + \delta_{i2} \Big[F_{h\tau}(x, t),\ v_i \Big]_{\gamma_3} \quad \forall\, t \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}, \quad i = 1, 2, \tag{20}$$

и для любых функций $z \in K_h$ и $\forall\, t \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}$ выполняется неравенство

$$\frac{\eta_1}{4} \sum_r \Big(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) \operatorname{div}_r y_t,\ z - \widehat{w}_{h\tau} \Big)_r + \frac{1}{4} \sum_r \Big(\nabla_r \widehat{w}_{h\tau},\ \nabla_r (z - \widehat{w}_{h\tau}) \Big)_r +$$
$$+ m \left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau}, z - \widehat{w}_{h\tau} \right] \ge \frac{\rho g_2}{4} \sum_r \Big(b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})), \partial_{r_2}(z - \widehat{w}_{h\tau}) \Big)_r. \tag{21}$$

В (21) $y=(y_1,y_2)$, $\widehat{y}=y(t+\tau)$, $y_t=\dfrac{\widehat{y}-y}{\tau}$, $\Lambda_r(y)$ – разностная аппроксимация тензора деформаций с компонентами $(\Lambda_r(y))_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\partial_{r_j}y_i+\partial_{r_i}y_j\right)$, а y_i^0, $w^-_{h\tau 0}$, $F_{h\tau}$ – сеточные функции такие, что

$$\Pi_r y_i^0\to u_i^0,\quad \Pi_r w^-_{h\tau 0}\to w_0^- \quad \text{в}\ \ L_2(\Omega),\quad \Pi_r^+ F_{h\tau}\to F \quad \text{в}\ \ L_2(0,T;\Gamma_3). \tag{22}$$

4. Существование решения разностной схемы

Теорема 1. *Пусть операторы A и B, функции $s(p)$, $b(s)$, $\varphi(w)$ удовлетворяют условиям $\mathbf{A_1}$–$\mathbf{A_5}$, функции f_i, $i=1,2$, непрерывны на $[0,1]$. Тогда решение разностной схемы (20), (21) существует.*

Доказательство. При исследовании разрешимости будем использовать метод штрафа.

Тройку функции y_1^ε, y_2^ε, $w^\varepsilon_{h\tau}$, определенных на $\overline{\omega}\times\overline{\omega}_\tau$, таких, что $y_i^\varepsilon(t)\in\overset{\circ}{V}_h$, $i=1,2$, $w^\varepsilon_{h\tau}(t)\in K_h$ для любого $t\in\overline{\omega}_\tau$, назовем решением неявной разностной схемы со штрафом, если для любых $x\in\overline{\omega}$

$$y_i^\varepsilon(x,0)=y^0(x),\quad i=1,2,\quad (w^\varepsilon_{h\tau}(x,0))^-=w^-_{h\tau 0}(x),$$

и для всех $t\in\overline{\omega}_\tau\backslash\{T\}$ и для любых функций $v_i\in\overset{\circ}{V}_h$ и $z\in\overset{\circ}{V}_{1h}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_r\left(\sum_{j=1}^2\left((A\Lambda_r(\widehat{y}^\varepsilon))_{ij}+(B\Lambda_r(y_t^\varepsilon))_{ij}\right),\partial_{r_j}v_i\right)_r &-\\ -\frac{1}{4}\sum_r\left((\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^+-m\varphi_1(\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau}),\partial_{r_i}v_i\right)_r &=\\ =\left[f_{h\tau i}(\varphi(\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})),v_i\right]+\delta_{i2}\left[F_{h\tau}(x,t),v_i\right]_{\gamma_3},&\quad i=1,2,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\eta_1}{4}\sum_r\left(\varphi(\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})\mathrm{div}_r y_t^\varepsilon,z\right)_r+\frac{1}{4}\sum_r\left(\nabla_r\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau},\nabla_r z\right)_r+\frac{1}{\varepsilon}\left[(\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^+,z\right]_{\gamma_2}&+\\ +m\left[\frac{\varphi(\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})-\varphi(w^\varepsilon_{h\tau})}{\tau},z\right]=\frac{\rho g_2}{4}\sum_r\left(b(\varphi(\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})),\partial_{r_2}z\right)_r&.\end{aligned} \tag{24}$$

Убедимся сначала в разрешимости неявной разностной схемы со штрафом. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что задача (23), (24) при известном $(y_1^\varepsilon,\,y_2^\varepsilon,\,w^\varepsilon_{h\tau})$ разрешима относительно $(\widehat{y}_1^\varepsilon,\,\widehat{y}_2^\varepsilon,\,\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})$. Задача (23), (24) относительно $(\widehat{y}_1^\varepsilon,\,\widehat{y}_2^\varepsilon,\,\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})$ представляет собой систему нелинейных уравнений. Нетрудно доказать, используя топологическую лемму (см., например, [5, с. 66]), разрешимость этой системы и справедливость оценки вида

$$\sum_{i=1}^2\|\widehat{y}_i^\varepsilon\|_+^2+\|\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau}\|_+^2\le C, \tag{25}$$

где C – постоянная, не зависящая от ε.

Заметим, что основные моменты получения этой оценки фактически содержатся в доказательстве леммы 2.

Из (25) и теоремы Вейерштрасса о компактности ограниченной последовательности следует существование подпоследовательностей $\{\widehat{y}_1^\varepsilon\}$, $\{\widehat{y}_2^\varepsilon\}$, $\{\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\}$ таких, что

$$\widehat{y}_i^\varepsilon \to \widehat{y}_i \quad \text{в} \quad \overset{\circ}{V}_h, \quad i = 1, 2, \qquad \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon \to \widehat{w}_{h\tau} \quad \text{в} \quad K_h \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{26}$$

Докажем, что функции $\widehat{y}_1$, $\widehat{y}_2$, $\widehat{w}_{h\tau}$ являются решением разностной схемы (20), (21). Для этого в равенствах (23), (24) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. При этом учтем, что из сходимости последовательностей $\widehat{y}_i^\varepsilon$, $\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon$ и непрерывности операторов A и B следует, что $\Lambda_r(\widehat{y}^\varepsilon) \rightharpoonup \Lambda_r(\widehat{y})$, $A\Lambda_r(\widehat{y}^\varepsilon) \rightharpoonup A\Lambda_r(\widehat{y})$, $B\Lambda_r(\widehat{y}^\varepsilon) \rightharpoonup B\Lambda_r(\widehat{y})$ в $(V_h)^3$.

Учитывая очевидное неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+,\, z\right]_{\gamma_2} \le 0 \quad \forall\, z \in K_h,$$

перейдем к пределу в (23), (24), в результате получим соотношения (20) и неравенство

$$\frac{\eta_1}{4}\sum_r \left(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})\,\mathrm{div}_r\, y_t,\, z\right)_r + \frac{1}{4}\sum_r \left(\nabla_r \widehat{w}_{h\tau},\, \nabla_r z\right)_r \; + \\ + \; m\left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau},\, z\right] \ge \frac{\rho\, g_2}{4}\sum_r \left(b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})),\, \partial_{r_2} z\right)_r. \tag{27}$$

Выберем в равенстве (24) $z = \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon$ и перейдем затем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда с учетом неравенства

$$\left[(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+, \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\right]_{\gamma_2} \ge 0$$

получим

$$\frac{\eta_1}{4}\sum_r \left(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})\,\mathrm{div}_r\, y_t,\, \widehat{w}_{h\tau}\right)_r + \frac{1}{4}\sum_r \left(\nabla_r \widehat{w}_{h\tau},\, \nabla_r \widehat{w}_{h\tau}\right)_r \; + \\ + \; m\left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau},\, \widehat{w}_{h\tau}\right] \le \frac{\rho\, g_2}{4}\sum_r \left(b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})),\, \partial_{r_2} \widehat{w}_{h\tau}\right)_r. \tag{28}$$

Вычитая из неравенства (27) неравенство (28), приходим к (21). $\square$

Лемма 1. *Для решения неявной разностной схемы со штрафом* (23), (24) *справедливо неравенство*

$$\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(x,t) \ge -\gamma \quad \forall\, x \in \overline{\omega}, \quad \forall\, t \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}. \tag{29}$$

Доказательство. В равенстве (24) положим $z = (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-$. В результате получим

$$\frac{\eta_1}{4}\sum_r \big(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)\,\mathrm{div}_r\, y_t^\varepsilon, (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-\big)_r + \frac{1}{4}\sum_r \big(\nabla_r \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon, \nabla_r(\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-\big)_r \; + \\ + \; \frac{m}{\tau}\left[\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon), (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-\right] - \frac{m}{\tau}\left[\varphi(w_{h\tau}^\varepsilon), (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-\right] + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\left[(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+, (\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-\right]_{\gamma_2} = \frac{\rho g_2}{4}\sum_r \big(b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)), \partial_{r_2}(\gamma + \widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^-\big)_r. \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что согласно равенству (13) $\varphi(\zeta) = 0$ при $\zeta \le -\gamma$; $(\gamma + \zeta)^- = 0$ при $\zeta \ge -\gamma$, поэтому $\varphi(\zeta)\,(\gamma+\zeta)^- = 0$ и $\zeta^+(\gamma+\zeta)^- = 0$ при любых ζ. Кроме того, из условия $b(0) = 0$ следует, что $b(\varphi(\zeta)) \neq 0$ только тогда, когда $\zeta > -\gamma$. Поэтому первое, третье и пятое слагаемые в левой части равенства (30) и правая часть (30) равны нулю.

Преобразуем второе слагаемое в левой части (30) следующим образом:

$$\sum_r \left(\nabla_r \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau}, \nabla_r(\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^-\right)_r = \sum_r \left(\nabla_r(\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau}), \nabla_r(\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^-\right)_r =$$
$$= -\sum_r \left(\nabla_r(\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^-, \nabla_r(\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^-\right)_r = -\parallel (\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^- \parallel^2_+ . \quad (31)$$

Тогда равенство (30) запишется в виде

$$-\left\|(\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^-\right\|^2_+ - \frac{m}{\tau}\left[\varphi(w^\varepsilon_{h\tau}), (\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau})^-\right] = 0. \quad (32)$$

Левая часть равенства (32) не положительна, поэтому из (32) следует, что

$$(\gamma + \widehat{w}^\varepsilon_{h\tau}(x,t))^- = 0 \quad \forall\, x \in \overline{\omega}, \quad \forall\, t \in \omega_\tau.$$

□

Следствие 1. *Из леммы* 1 *и соотношения* (26) *очевидным образом вытекает справедливость для решения разностной схемы* (20), (21) *оценки вида*

$$\widehat{w}_{h\tau}(x,t) \geq -\gamma \quad \forall\, x \in \overline{\omega}, \quad \forall\, t \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}. \quad (33)$$

5. Априорные оценки

Лемма 2. *Для решения разностной схемы* (20), (21) *справедливы следующие априорные оценки:*

$$\|y_i(t')\|_+ \leq C, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \,\|(y_i)_t\|^2_+ \leq C, \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

$$[\Phi\ (w_{h\tau}(t')),\, 1] \leq C, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}_{h\tau}(t)\|^2_+ \leq C, \quad (35)$$

где C – постоянная, не зависящая от ε, τ, h_1, h_2.

Доказательство. Сначала докажем, что для разностной схемы со штрафом (23), (24) имеют место оценки вида

$$\|y^\varepsilon_i(t')\|_+ \leq \widetilde{C}, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \,\|(y^\varepsilon_i)_t\|^2_+ \leq \widetilde{C}, \quad i = 1, 2, \quad (36)$$

$$[\Phi\,(w^\varepsilon_{h\tau}(t'))\,,\, 1] \leq \widetilde{C}, \qquad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}^\varepsilon_{h\tau}(t)\|^2_+ \leq \widetilde{C}, \quad (37)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}^{\varepsilon+}_{h\tau}(t)\|_{\gamma_2} \leq \widetilde{C} \quad \forall\, t' \in \omega_\tau, \quad (38)$$

где $\widetilde{C}$ – константа, не зависящая от ε, τ, h_1, h_2.

Выберем в (23), (24) $v_i = (y_i^\varepsilon)_t$, $z = \widehat{w}_\tau^\varepsilon$, полученные равенства сложим, умножим затем на τ и просуммируем от 0 до $t'-\tau$, $t' \in \omega_\tau$. В результате будем иметь

$$\frac{\eta_1}{4}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\sum_r\big(\big(A\Lambda_r(\widehat{y}_i^\varepsilon)+B\Lambda_r(y_t^\varepsilon),\Lambda_r(y_t^\varepsilon)\big)_{H_3},1\big)_r+$$
$$+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\big(\|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\|_+^2+\frac{1}{\varepsilon}\big[\big(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\big)^+,\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\big]_{\gamma_2}\big)+m\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\big[\big(\varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)\big)_t,\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\big]=$$
$$=\eta_1\tau\sum_{t=0}^{t'-\tau}\left(\sum_{i=1}^{2}\big[f_i\left(\varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)\right),(y_i^\varepsilon)_t\big]+\big[F_{h\tau}(x,t),(y_2^\varepsilon)_t\big]_{\gamma_3}\right)+$$
$$+\frac{\eta_1\tau}{4}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\sum_r\big((\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)^+-m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)-\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon,\,\mathrm{div}_r\,(y^\varepsilon)_t\big)_r+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\sum_r\big(\rho g_2 b\big(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)\big),\partial_{r_2}\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\big)_r. \quad (39)$$

Равенство (39) преобразуем, используя легко проверяемое соотношение

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{4}\sum_r\left(\left(A\Lambda_r(\widehat{y}^\varepsilon),\Lambda_r(y^\varepsilon)_t\right)_{H_3},1\right)_r=\frac{1}{8}\sum_r\left(\left(A\Lambda_r\left(y^\varepsilon(t')\right),\Lambda_r\left(y^\varepsilon(t')\right)\right)_{H_3},1\right)_r-$$
$$-\frac{1}{8}\sum_r\Big(\big(A\Lambda_r(y^0),\Lambda_r(y^0)\big)_{H_3},1\Big)_r+\frac{\tau^2}{8}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\sum_r\left(\left(A\Lambda_r(y^\varepsilon)_t,\Lambda_r(y^\varepsilon)_t\right)_{H_3},1\right)_r,$$

положительную определенность операторов A и B, сеточный аналог неравенства Корна и неравенство вида (см. [6])

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)-\varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau},\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\right]\ge\left[\Phi\left(w_{h\tau}^\varepsilon(t')\right),1\right]-\left[\Phi\left(-w_{h\tau 0}^-(x)\right),1\right]. \quad (40)$$

Тогда из (39) с учетом равенства $\Phi(w_0)=\Phi(-w_0^-)$ следует, что

$$\eta_1 C_A\sum_{i=1}^{2}\|y_i^\varepsilon(t')\|_+^2+\eta_1 C_B\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\sum_{i=1}^{2}\|(y_i^\varepsilon)_t\|_+^2+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)\|_+^2+[\Phi(w_{h\tau}^\varepsilon(t')),1]+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\big(\widehat{w}_\tau^\varepsilon\big)^+\|_{\gamma_2}^2\le\big[\Phi(-w_{h\tau 0}^-),1\big]+\eta_1 C\sum_{i=1}^{2}\big\|y_i^0\big\|_+^2+|I|, \quad (41)$$

где I – правая часть равенства (39).

Слагаемое I оценим следующим образом:

$$\big|I\big|\le\sum_{t=0}^{t'-\tau}\left|\frac{\eta_1}{4}\sum_r\Big(\big(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\big)^+-m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)-\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon,\,\mathrm{div}_r\,(y^\varepsilon)_t\Big)_r\right|+$$
$$+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\left|\left\{\eta_1\sum_{i=1}^{2}\Big[f_i\left(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)\right),(y_i^\varepsilon)_t\Big]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\eta_1\left[F_{h\tau}(x,t),\frac{\widehat{y}_2^\varepsilon-y_2^\varepsilon}{\tau}\right]_{\gamma_3}+\frac{\rho g_2}{4}\sum_r\left(b\left(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)\right),\partial_{r_2}\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\right)_r\right\}\right|=I_1+I_2.$$

Из равенства $(\widehat{w}_{h\tau})^+ - m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}) - \varphi(\widehat{w}_{h\tau})\widehat{w}_{h\tau} = -m\varphi_1(\widehat{w}_{h\tau}) + \varphi(\widehat{w}_{h\tau})(\widehat{w}_{h\tau})^-$, ограниченности функций φ_1, φ, $\widehat{w}_{h\tau}$ и оценки (15) вытекает, что

$$I_1 \le (mC_\vartheta + \gamma)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{1}{4}\sum_r (|\mathrm{div}_r\,(y^\varepsilon)_t|, 1)_r \le \widetilde{\delta}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\sum_{i=1}^{2}\|(y_i)_t\|_+^2 + \frac{C}{\widetilde{\delta}}.$$

Используя условия на функции f_i и F_τ и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$I_2 \le \widetilde{\delta}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\left(\sum_{i=1}^{2}\|(y_i^\varepsilon)_t\|_+^2 + \|\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon\|_+^2\right) + \frac{C}{\widetilde{\delta}}\left(1 + \sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|F_{h\tau}(t)\|_{\gamma_3}^2\right).$$

Из (41), а также из полученных для I_1 и I_2 оценок следует справедливость (36)–(38).

В справедливости леммы 2 нетрудно убедиться теперь, совершив предельный переход по $\varepsilon \to 0$ в полученных оценках (36)–(38) при фиксированных h_1, h_2 и τ, учтя при этом предельные соотношения (26). □

Лемма 3. *Для решения разностной схемы* (20), (21) *справедливо следующее неравенство:*

$$\frac{1}{k}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\Big[\big(G(w_{h\tau}(t'+k\tau)) - G(w_{h\tau}(t'))\big)^2, 1\Big] \le C, \tag{42}$$

где

$$G(\zeta) = \varphi(\zeta)g(\zeta) - \int_0^\zeta \varphi(\xi)g'(\xi)\,d\xi - 1/2, \quad g(\zeta) = \begin{cases}\varphi^{2\kappa}(\zeta)(1+\varphi^{2\kappa}(\zeta))^{-1}, & \zeta < 0,\\ 1/2, & \zeta \ge 0,\end{cases}$$

C *– константа, не зависящая от* τ, h_1, h_2.

Доказательство. Сначала докажем, что для решения разностной схемы со штрафом справедлива оценка

$$I \equiv \frac{1}{k\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\Big[\big(G(w_{h\tau}^\varepsilon(t'+k\tau)) - G(w_{h\tau}^\varepsilon(t'))\big)^2, 1\Big] \le \widetilde{C}, \tag{43}$$

где $\widetilde{C}$ – константа, не зависящая от ε, τ, h_1, h_2. Имеем

$$I = \frac{\tau}{k}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\left[\frac{G(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon(t)) - G(w_{h\tau}^\varepsilon(t))}{\tau}, R_G(t')\right],$$

где $R_G(t') = G(w_{h\tau}^\varepsilon(t'+k\tau)) - G(w_{h\tau}^\varepsilon(t'))$. Заметим, что

$$\frac{G(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - G(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} = \frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon)g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)g(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} - \frac{1}{\tau}\int_{w_{h\tau}^\varepsilon}^{\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon}\varphi(\xi)g'(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau}g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) + \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)\frac{g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - g(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau} - \frac{1}{\tau}\int_{w_{h\tau}^\varepsilon}^{\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon}\varphi(\xi)g'(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau}g(\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon) - \int_{w_{h\tau}^\varepsilon}^{\widehat{w}_{h\tau}^\varepsilon}\frac{\varphi(\xi) - \varphi(w_{h\tau}^\varepsilon)}{\tau}g'(\xi)\,d\xi.$$

Поэтому

$$\left[\frac{G(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t) - G(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t))}{\tau},\, R_G(t')\right] = \left[\frac{\varphi(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - \varphi(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t))}{\tau},\, g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))R_G(t')\right] -$$

$$- \left[\int\limits_{w^{\varepsilon}_{h\tau}(t)}^{\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t))}{\tau} g'(\xi)\, d\xi,\, R_G(t')\right] \equiv I_1 + I_2. \quad (44)$$

Для оценки I_1 воспользуемся (24) с $z = g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))R_G(t')$. В результате получим

$$I_1 = \frac{1}{4m} \sum_r \left(-\eta_1 \varphi(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))\,\mathrm{div}_r\, (y^{\varepsilon}_t(t)),\, g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))R_G(t')\right)_r +$$

$$+ \frac{\rho g_2}{4} \sum_r \left(b\left(\varphi(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau})\right), \partial_{r_2}(g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))R_G(t'))\right)_r -$$

$$- \frac{1}{4m} \sum_r \left(\nabla_r \widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t), \nabla_r(g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))R_G(t'))\right)_r - \frac{1}{m\varepsilon}\left[(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))^+,\, g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))R_G(t')\right]_{\gamma_2}.$$

Используя ограниченность функций G, g и оценку (38), нетрудно показать, что

$$|I_1| \le C\left(\sum_{i=1}^{2} \|(y^{\varepsilon}_i)_t(t)\|^2_+ + \|\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)\|^2_+ + \frac{1}{\varepsilon}\, \|\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)\|^2_{\gamma_2} + 1\right). \quad (45)$$

Оценим I_2. Заметим, что φ, а следовательно, g – неубывающие функции, поэтому

$$|I_2| \le \left[\frac{\varphi(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau})(t) - \varphi(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t))}{\tau},\, \left(g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - g(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t))\right)|R_G(t')|\right] \equiv I_3.$$

Для оценки I_3 воспользуемся (24), выбрав $z = (g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - g(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t)))|R_G(t')|$. В результате будем иметь

$$I_3 = \frac{1}{4m} \sum_r \left(-\eta_1 \varphi(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))\,\mathrm{div}_r\, (y^{\varepsilon}_t(t)),\, (g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - g(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t)))|R_G(t')|\right)_r -$$

$$- \frac{1}{4m} \sum_r \left(\nabla_r \widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t),\, \nabla_r((g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - g(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t)))|R_G(t')|)\right)_r +$$

$$+ \frac{\rho g_2}{4} \sum_r \left(b\left(\varphi(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau})\right), \partial_{r_2}((g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - g(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t)))|R_G(t')|)\right)_r -$$

$$- \frac{1}{m\varepsilon}\left[(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))^+,\, (g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - g(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t)))|R_G(t')|\right]_{\gamma_2}. \quad (46)$$

Оценим последнее слагаемое правой части равенства (46). Пусть

$$I_4 = -\frac{1}{m\varepsilon}\left[(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))^+,\, \left(g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - g(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t))\right)|R_G(t')|\right]_{\gamma_2} =$$

$$= -\frac{1}{m\varepsilon} \sum_{i=1}^{3} \left[(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t))^+,\, \left(g(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(t)) - g(w^{\varepsilon}_{h\tau}(t))\right)\, |R_G(t')|\right]_{\gamma_2^i} = I_4^1 + I_4^2 + I_4^3,$$

где $\Gamma_2^1 = \{x \in \Gamma_2 : \widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(x) < 0\}$, $\Gamma_2^2 = \{x \in \Gamma_2 : \widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(x) \ge 0 \wedge w^{\varepsilon}_{h\tau}(x) \le 0\}$, а Γ_2^3 – оставшаяся часть границы Γ_2. Так как $\left(\widehat{w}^{\varepsilon}_{h\tau}(x)\right)^+ = 0$ при $x \in \Gamma_2^1$, то $I_4^1 = 0$.

Если $x \in \Gamma_2^2$, то в силу монотонного возрастания функции g разность $g(\widehat{w}_{h\tau}^{\varepsilon}(t)) - g(w_{h\tau}^{\varepsilon}(t)) \geq 0$, поэтому $I_4^2 \leq 0$. И наконец, если $x \in \Gamma_2^3$, то $\widehat{w}_{h\tau}^{\varepsilon}(x)$ и $w_{h\tau}^{\varepsilon}(x)$ неотрицательны. Так как $g(\zeta) = 1/2$ при $\zeta \geq 0$, то $g(\widehat{w}_{h\tau}^{\varepsilon}(t)) - g(w_{h\tau}^{\varepsilon}(t)) = 0$, следовательно, $I_4^3 = 0$. Поэтому $I_4 \leq 0$. Остальные слагаемые в правой части равенства (46) оценим, используя ограниченность $g(\zeta)$, $\varphi(w)$, $G(\zeta)$, $b(\varphi(w))$. В результате получим

$$|I_2| \leq C \left\{ \sum_{i=1}^{2} \|(y_i^{\varepsilon})_t\|_+^2 + \|\widehat{w}_{\tau}^{\varepsilon}(t)\|_+^2 + 1 \right\}. \tag{47}$$

Из соотношений (44), (45), (47) непосредственно следует справедливость (43). Учитывая предельные соотношения (26), в справедливости неравенства (42) нетрудно убедиться, совершая предельный переход в полученной оценке (43) по $\varepsilon \to 0$ при фиксированных h_1, h_2 и τ. □

6. Исследование сходимости

Лемма 4. *Пусть $y = (y_1, y_2)$, $w_{h\tau}$ – решения разностной схемы* (20), (21). *Тогда существуют функции*

$$u_i \in W_2^{(1)}(0,T;\overset{\circ}{V}), \quad w \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$$

и последовательности $\{\tau\}$, $\{h\}$ такие, что при τ, $h \to 0$

$$\Pi_r^{\pm} y_i \rightharpoonup u_i, \quad \Pi_r^{\pm}(y_i)_t \rightharpoonup \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \Pi_r^{\pm} w_{h\tau} \rightharpoonup w \quad \text{в} \;\; L_2(Q_T), \tag{48}$$

$$\Pi_r^{\pm}\partial_{r_i} w_{h\tau} \rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad \Pi_r^{\pm}\partial_{r_j} y_i \rightharpoonup \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \Pi_r^{\pm}\partial_{r_j}(y_i)_t \rightharpoonup \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} \quad \text{в} \;\; L_2(Q_T), \tag{49}$$

$$w(x,t) \geq -\gamma \quad \text{п.в. в} \quad Q_T, \tag{50}$$

$$\Pi_r^{\pm} w_{h\tau}^- \to w^-, \quad \varphi(\Pi_r^{\pm} w_{h\tau}) \to \varphi(w), \quad \varphi_1(\Pi_r^{\pm} w_{h\tau}) \to \varphi_1(w) \quad \text{п.в. в} \;\; Q_T, \tag{51}$$

$$\Pi_r^{\pm} w_{h\tau}^+ \rightharpoonup w^+, \quad \Pi_r^{\pm} w_{h\tau}^- \rightharpoonup w^- \quad \text{в} \;\; L_2(Q_T). \tag{52}$$

Доказательство. Справедливость утверждений (48), (49) следует из априорных оценок (34), (35) и слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивном банаховом пространстве. Докажем, что функция w, определенная в (48), удовлетворяет неравенству (50). Предположим обратное. Пусть $Q' = \{(x,t) \in Q_T : w(x,t) < -\gamma\}$ и $\operatorname{mes} Q' = \alpha_0 \neq 0$. Имеем

$$\gamma\alpha_0 < \int\limits_{Q'} (-w(x,t))\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} (-w(x,t)) h_{Q'}(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= \lim_{\tau,h_1,h_2 \to 0} \int\limits_{Q_T} (-\Pi_r^{\pm} w_{h\tau}) h_{Q'}(x,t)\,dx\,dt \leq \gamma\alpha_0,$$

где $h_{Q'}$ – характеристическая функция множества Q'. Полученное противоречие доказывает справедливость (50). Убедимся теперь в справедливости (51). Для этого заметим, что из ограниченности $G'(\xi)$ и (35) следует оценка

$$\sum_{t=0}^{T} \|G(w_{h\tau}(t))\|_+^2 \leq C. \tag{53}$$

Из неравенств (42), (53) и сеточного аналога теоремы компактности (см., например, [7, с. 219]) следует компактность подпоследовательности $\{G(\Pi_r^{\pm} w_{h\tau})\}$ в $L_2(Q_T)$, поэтому найдутся функция $\xi \in L_2(Q_T)$ и подпоследовательности шагов h_i и τ таких, что

$$G(\Pi_r^{\pm} w_{h\tau}) \to \xi \quad \text{почти всюду в } Q_T.$$

Поскольку функция G на множестве $[-\gamma, 0]$ взаимно-однозначна, непрерывна и имеет место условие (50), то

$$\Pi_r^{\pm}\big(-w_{h\tau}^{-}\big) \to G^{-1}(\xi) \quad \text{почти всюду в } Q_T.$$

Докажем, что $G^{-1}(\xi) = -w^{-}$. Для этого запишем, пользуясь монотонностью функции G, следующее неравенство:

$$\int\limits_{Q_T} (G(\Pi_r^{\pm} w_{h\tau}) - G(v))(\Pi_r^{\pm} w_{h\tau} - v)\, dx\, dt \geq 0.$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $h, \tau \to 0$. В результате получим

$$\int\limits_{Q_T} (\xi - G(v))(w - v)\, dx\, dt \geq 0.$$

Выбирая $v = w \pm \lambda v_1 \ \ \forall \lambda > 0, \ \forall v_1 \in L_2(Q_T)$, нетрудно доказать, что $\xi = G(w) = G(-w^{-})$. Из последнего равенства и (50) следует, что $\Pi_r^{\pm} w_{h\tau}^{-} \to w^{-}$ почти всюду в Q_T. Доказательство оставшихся утверждений аналогично [3]. □

Теорема 2. *Пусть операторы A и B, функции $s(p)$, $b(s), f(s(p))$ удовлетворяют условиям $\mathbf{A_1}$–$\mathbf{A_5}$. Кроме того, пусть выполнены* (22). *Тогда последовательность кусочно-постоянных восполнений решения разностной схемы* (20), (21), *заданная соотношениями* (48)–(52), *сходится к обобщенному решению доопределенной задачи* (16), (17).

Доказательство. Обоснуем сначала справедливость (17). Пусть $\widetilde{z}$ – произвольная функция из $C^{\infty}(Q_T)$, след которой на $\Gamma_2 \times [0, T]$ неположителен, z_h – снос функции $\widetilde{z}$ в точки сетки $\overline{\omega} \times \overline{\omega}_{\tau}$, α – неотрицательная функция такая, что $\alpha \in C^1(0, T)$ и $\alpha(T) = 0$. В (21) выберем $z = z_h + \widehat{w}_{h\tau}$, умножим полученное неравенство на $\alpha(t)$ и просуммируем по t от 0 до $T - \tau$, тогда

$$\eta_1 \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\tau}{4} \sum_r \left(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) \operatorname{div}_r (y)_t, z_h \alpha(t)\right)_r + \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\tau}{4} \left(\nabla_r \widehat{w}_{h\tau}, \nabla_r \big(z_h \alpha(t)\big)\right)_r + \\ + m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[(\varphi(w_{h\tau}))_t, z_h \alpha(t)\right] \geq \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\rho g_2 \tau}{4} \sum_r \left(b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})), \partial_{r_2}\big(z_h \alpha(t)\big)\right)_r. \quad (54)$$

Преобразуем третье слагаемое в левой части неравенства (54):

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\big(\varphi(w_{h\tau})\big)_t, z_h \alpha(t)\right] = -m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\varphi(\widehat{w}_{h\tau}), \big(z_h \alpha(t)\big)_t\right] - m \left[\varphi(-w_{h\tau 0}^{-}), z_h(x, 0)\alpha(0)\right].$$

Подставим полученные соотношения в (54) и запишем результат, используя равенство (19), в итоге будем иметь

$$\int\limits_{Q_T} \eta_1 \varphi\left(\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau}\right) \Pi_r^+ \operatorname{div}(y)_t\, \Pi_r^+\bigl(z_h\alpha(t)\bigr)\, dx\, dt + \int\limits_{Q_T} \Pi_r^+ \nabla_r \widehat{w}_{h\tau} \cdot \Pi_r^+ \nabla_r \bigl(z_h \alpha(t)\bigr)\, dx\, dt -$$

$$- m \int\limits_{Q_T} \varphi(\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau}) \cdot \Pi_r^+ \bigl(z_h\alpha(t)\bigr)_t\, dx\, dt - m \int\limits_{\Omega} \varphi(-\Pi_r^+ w_{h\tau 0}^-) \cdot \Pi_r^+ z_h(x,0)\alpha(0)\, dx \geq$$

$$\geq \rho\, g_2 \int\limits_{Q_T} b\left(\varphi(\Pi_r^+ \widehat{w}_{h\tau})\right) \Pi_r^+ \partial_{r_2}\bigl(z_h\alpha(t)\bigr)\, dx\, dt. \quad (55)$$

В (55) перейдем к пределу при $\tau, h \to 0$ (по поводу обоснования предельного перехода см. [3, лемма 5]). В результате получим неравенство

$$\int\limits_{Q_T} \left(\eta_1 \varphi(w)\, \frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t}\, \alpha(t)\widetilde{z} + \nabla w \cdot \nabla(\alpha(t)\widetilde{z}) - m\varphi(w) \frac{\partial(\alpha(t)\widetilde{z})}{\partial t} \right) dx\, dt -$$

$$- m \int\limits_{\Omega} \varphi(-w_0^-)\widetilde{z}(x,0)\alpha(0) dx\, dt \geq \int\limits_{Q_T} b(\varphi(w))\, \rho\, g_2\, \frac{\partial(\alpha(t)\widetilde{z})}{\partial x_2}\, dx\, dt, \quad (56)$$

справедливое для любой функции $\widetilde{z} \in C^\infty(Q_T)$, имеющей неположительный след на $\Gamma_2 \times [0, T]$. Очевидно, что (56) будет иметь место и для любой функции $z \in L_2(0, T; K)$ такой, что $\dfrac{\partial z}{\partial t} \in L_2(Q_T)$.

Аналогичным образом, повторяя рассуждения леммы 5 [3], из (56) нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{Q_T} \left(\eta_1 \varphi(w) \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} u) \alpha(t)(z - w^+) + \nabla w \cdot \nabla(\alpha(t)(z - w^+)) \right) dx\, dt -$$

$$- \int\limits_{Q_T} m\varphi(w) \frac{\partial(\alpha(t) z)}{\partial t}\, dx\, dt - m \int\limits_{\Omega} \varphi(-w_0^-) z(x,0)\alpha(0)\, dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{Q_T} b(\varphi(w)) \rho g_2 \frac{\partial(\alpha(t)(z - w^+))}{\partial x_2}\, dx\, dt, \quad (57)$$

Теперь в (21) выберем $z = -\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t)$, умножим полученное равенство на τ и просуммируем по t от 0 до $T - \tau$, в результате будем иметь

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \left\{ \frac{\eta_1 \tau}{4} \sum_r \bigl(\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) \operatorname{div}_r (y)_t, -\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t)\bigr)_r + \frac{1}{4} \sum_r \bigl(\nabla_r \widehat{w}_{h\tau}, \nabla_r\left(-\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t)\right)\bigr)_r \right\} +$$

$$+ m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\bigl(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})\bigr)_t, -\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t) \right] \leq$$

$$\leq \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\tau \rho g_2}{4} \sum_r \bigl(b(\varphi(\widehat{w}_{h\tau})), \partial_{r_2}\left(-\widehat{w}_{h\tau}^- \alpha(t)\right)\bigr)_r. \quad (58)$$

Используя (40) и формулу суммирования по частям, нетрудно показать, что

$$m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\frac{\varphi(\widehat{w}_{h\tau}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau}, -\alpha(t)\widehat{w}_{h\tau}^{-} \right] = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\frac{\varphi(-\widehat{w}_{h\tau}^{-}) - \varphi(w_{h\tau})}{\tau}, -\widehat{w}_{h\tau}^{-}\alpha(t) \right] \geq$$
$$\geq\ m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\frac{\Phi(-\widehat{w}_{h\tau}^{-}) - \Phi(w_{h\tau})}{\tau},\ \alpha(t) \right] = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[(\Phi(-w_{h\tau}^{-}))_t, \alpha(t) \right] =$$
$$= -m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[\Phi(-\widehat{w}_{h\tau}^{-}),\ (\alpha(t))_t \right] - m\ \left[\Phi(-w_{h\tau 0}^{-})),\ \alpha(0) \right].$$

Подставим полученную оценку в (58) и запишем результат, используя равенство (19)

$$\int\limits_{Q_T} \eta_1 \varphi(\Pi_r^{+} \widehat{w}_{h\tau})\, \Pi_r^{+}\, \mathrm{div}_r\, (y_{h\tau})_t \left(-\Pi_r^{+} \alpha(t) \widehat{w}_{h\tau}^{-} \right) dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_T} (\Pi_r^{+} \nabla_r w_{h\tau}^{-})^2\, \Pi_r^{+} \alpha(t)\, dx\, dt - m \int\limits_{Q_T} \Phi(-\Pi_r^{+} \widehat{w}_{h\tau}^{-})\, \Pi_r^{+} (\alpha(t))_t\, dx\, dt -$$
$$- m \int\limits_{\Omega} \Phi(-w_{h\tau 0}^{-}))\alpha(0)\, dx \leq \int\limits_{Q_T} b\left(\varphi(\Pi_r^{+} \widehat{w}_{h\tau}) \right) \rho g_2\, \Pi_r^{+} \partial_{r_2} (-\alpha(t) \widehat{w}_{h\tau}^{-})\, dx\, dt. \quad (59)$$

В (59) совершим предельный переход при $\tau,\, h \to 0$, учитывая соотношения (48)–(52) и свойство слабой полунепрерывности снизу нормы. В результате получим

$$\int\limits_{Q_T} \eta_1 \varphi(w) \frac{\partial(\mathrm{div}\, u)}{\partial t} (-w^{-}) \alpha(t)\, dx\, dt + \int\limits_{Q_T} \nabla w \cdot \nabla(-w^{-}) \alpha(t)\, dx\, dt -$$
$$- m \int\limits_{\Omega} \Phi(-w_0^{-}) \alpha(0)\, dx - m \int\limits_{Q_T} \Phi(-w^{-}) \partial_t(\alpha(t))\, dx\, dt \leq$$
$$\leq \int\limits_{Q_T} b(\varphi(w)) \rho g_2\, \frac{\partial(-w^{-}\alpha(t))}{\partial x_2}\, dx\, dt. \quad (60)$$

Вычитая из (57) неравенство (60), приходим к (17). Аналогичным образом легко можно доказать, что функции u_1, u_2, w, определенные соотношениями (48)–(52), удовлетворяют равенствам (16). □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00955, 12-01-97022).

Summary

M.F. Pavlova, E.V. Rung. A Study of an Implicit Difference Scheme for the Problem of Saturated-Unsaturated Filtration Consolidation.

An implicit difference scheme for the problem of saturated-unsaturated filtration consolidation under condition of semi-permeability on part of the boundary is constructed and investigated. Using the penalty method the existence of the solution to the difference problem is established. A study of the implicit convergence of the difference scheme is carried out under minimal propositions on the smoothness of the original conditions: the convergence of the piecewise-constant filling of the difference solution to the generalized solution of the problem under consideration is proved.

Key words: filtration consolidation, difference schemes, penalty method, convergence of difference scheme.

Литература

1. *Костерин А.В., Березинский Д.А.* Насыщенно-ненасыщенные состояния деформируемых поритых сред // Докл. РАН. – 1998. – Т. 356, № 3. – С. 343–345.

2. *Павлова М.Ф., Шемуранова Е.В.* О существовании слабого решения одной задачи ненасыщенной фильтрационной консолидации // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 10. – С. 58–68.

3. *Павлова М.Ф., Рунг Е.В.* О разрешимости задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 7. – С. 1005–1019.

4. *Morel-Seytoux H.J., Meyer P.D., Nachabe M., Touma J., van Genuchten M.T., Lenhard R.J.* Parameter equivalence for the Brooks–Corey and van Genuchten soil characteristics: Preserving the effective capillary drive // Water Resour. Res. – 1996. – V. 32, No 58. – P. 1251–1258.

5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

6. *Майорова М.Е., Павлова М.Ф.* О сходимости неявной разностной схемы для нелинейного уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 1. – С. 43–53.

7. *Карчевский М.М., Павлова М.Ф.* Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 228 с.

Поступила в редакцию
17.09.12

Павлова Мария Филипповна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Maria.Pavlova@ksu.ru*

Рунг Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *HelenRung@mail.ru*