УДК 517.929

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯРКОСТИ СВЕТА В СЛУЧАЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ ОБЛАКОВ

Н.П. Евлампиев, В.С. Мокейчев, И.Е. Филиппов

Аннотация

В статье обобщается модель В.А. Амбарцумяна о поглощении света в межзвёздном пространстве на случай, когда имеется n типов поглощающих облаков, равномерно распределенных в экваториальной плоскости Галактики и имеющих различные оптические прозрачности. При этом число облаков, обладающих заданной прозрачностью и расположенных в заданном направлении экваториальной плоскости до расстояния s от наблюдателя, является случайной функцией и при каждом фиксированном s имеет распределение Пуассона.

Ключевые слова: модель В.А. Амбарцумяна, поглощение света в межзвёздном пространстве, дифференциальное q-разностное уравнение.

В 1944 г. В.А. Амбарцумян, рассматривая задачу о поглощение света в межзвёздном пространстве [1], доказал, что плотность распределения $y(x)$ полной яркости источника является решением задачи

$$y'(x) + y(x) = y(x/q), \quad x > 0, \tag{1}$$

$$y(x) \geq 0, \quad \int\limits_0^{+\infty} y(x)\,dx = 1, \tag{2}$$

где $q \in (0,\ 1)$ – постоянная, характеризующая прозрачность поглощающих облаков. Г.И. Русаков [2] в 1949 г. выписал решение уравнения (1) в виде функционального ряда

$$g(x) = C(\exp(-x) + \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-x/q^i)/(q^i(1-q^{-1})\cdots(1-q^{-i}))^{-1}). \tag{3}$$

Однако вопрос о выполнении условий (2) остался открытым. Обоснование того, что решение уравнения (1), предложенное Г.И. Русаковым, является решением задачи (1), (2), приведено в [3]. В [4] решена более общая задача

$$y'(x) + by(x) = ay(x/q), \quad x > 0, \tag{4}$$

$$y(x) \geq 0, \quad \int\limits_0^{+\infty} y(x)\,dx = 1, \tag{5}$$

где a, b – вещественные постоянные.

Нами обобщается модель В.А. Амбарцумяна на случай n типов поглощающих облаков, равномерно распределенных в экваториальной плоскости Галактики и имеющих оптические прозрачности $q_1, \ldots, q_n$, $q_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $m(s) = (m_1(s), \ldots, m_n(s))$, где $m_k(s)$ – число облаков, обладающих прозрачностью q_k, расположенных в заданном направлении экваториальной плоскости до расстояния s от наблюдателя. Случайная функция $m_k(s)$ при каждом фиксированном s имеет распределение Пуассона

$$P(m_k(s) = i) = (\nu_k s)^i \exp(-\nu_k s)/i!, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где ν_k характеризует среднее число облаков прозрачности q_k в единице объема, P – символ вероятности.

Облака, обладающие прозрачностью q_k, ослабляют свет звезды, находящейся на расстоянии s, в $q_k^{m_k(s)}$ раз, поэтому суммарное действие всех облаков вызывает ослабление света в $q^{m(s)} \equiv q_1^{m_1(s)} \cdots q_n^{m_n(s)}$ раз. Тогда полная яркость I в данном направлении будет равна

$$I = \int_0^\infty q^{m(s)} \eta \, ds,$$

где η характеризует энергию излучения источника.

Обозначим через F функцию распределения вероятностей этой яркости, то есть $F(x) = P(I < x)$, через $H_k(s)$ – событие, заключающееся в том, что случайный вектор $m(s)$ примет значение $k = (k_1, \ldots, k_n) \in Z_+^n$.

Как обычно, через $Z_1^n(Z_+^n)$ обозначаем множество n-мерных векторов с целочисленными координатами (неотрицательными, целочисленными координатами).

Если $k = (k_1, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, то полагаем $|k| = |k_1| + \cdots + |k_n|$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – малая величина. Используя теорему умножения для независимых событий, в силу (6) получим

$$P(H_0(\varepsilon)) = \prod_{i=1}^n P(m_i(\varepsilon) = 0) = \prod_{i=1}^n (1 - \nu_i \varepsilon) + o(\varepsilon),$$

$$P(H_k(\varepsilon)) = \nu_i \varepsilon \prod_{i \neq j}^n (1 - \nu_i \varepsilon) + o(\varepsilon), \quad |k| = 1 \quad (k_j = 1, \ k_i = 0, \ i \neq j),$$

$$P(H_k(\varepsilon)) = o(\varepsilon), \quad |k| \geq 2.$$

Применяя формулу полной вероятности и пренебрегая членами $o(\varepsilon)$, получим

$$\begin{aligned} F(x) &= P(H_0(\varepsilon))P(I < x | H_0(\varepsilon)) + \sum_{|k|=1} P(H_k(\varepsilon))P(I < x | H_k(\varepsilon)) = \\ &= (1 - (\nu_1 + \cdots + \nu_n)\varepsilon) P\left(\left(\int_0^\varepsilon q^{m(s)} \eta \, ds + \int_\varepsilon^\infty q^{m(s)} \eta \, ds \right) < x | H_0(\varepsilon) \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \nu_j \, \varepsilon P \left(\left(\int_0^\varepsilon q^{m(s)} \eta \, ds + \int_\varepsilon^\infty q^{m(s)} \eta \, ds \right) < x |_{m_i(\varepsilon)=0, i \neq j}^{m_j(\varepsilon)=1} \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 - \nu\varepsilon) P \left(\int_\varepsilon^\infty q^{m(s)-m(\varepsilon)} \eta \, ds < x - \varepsilon\eta \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \nu_j \, \varepsilon P \left(q_j \int_\varepsilon^\infty q^{m(s)-m(\epsilon)} < x - \varepsilon \Theta_j \eta \right), \end{aligned} \tag{7}$$

где
$$\nu = \nu_1 + \dots + \nu_n, \quad 0 < \Theta_j < 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

В силу равномерности распределения поглощающих облаков
$$P\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} q^{m(s)-m(\varepsilon)} \eta \, ds < x\right) = P\left(\int\limits_{0}^{\infty} q^{m(s)} \eta \, ds < x\right).$$

Отсюда и из (7) следует, что
$$F(x) = (1 - \nu\varepsilon)F(x - \varepsilon\eta) + \sum_{j=1}^{n} \nu_j \varepsilon F((x - \varepsilon\Theta_j\eta)/q_j).$$

Предполагая F достаточно гладкой и пренебрегая членами $o(\varepsilon)$, последнее уравнение запишем в виде
$$F(x) = (1 - \nu\varepsilon)F(x) - \varepsilon\eta F'(x) + \sum_{j=1}^{n} \nu_j \varepsilon F(x/q_j).$$

Поэтому
$$(\eta/\nu)F' + F(x) = \sum_{j=1}^{n} (\nu_j/\nu) F(x/q_j). \tag{8}$$

Сделав замену переменной $t = \nu x/\eta$ и продифференцировав (8), окончательно получим
$$y' + y(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k y(t/q_k), \quad t > 0, \tag{9}$$

где $y(t) = F'(t)$ – плотность распределения яркости, числа b_k удовлетворяют соотношениям
$$b_k > 0, \ k = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{k=1}^{n} b_k q_k = 1.$$

Легко видеть, что уравнение В.А. Амбарцумяна (1) получается из (9) в случае $n = 1$.

Пусть λ_k составляют геометрическую прогрессию: $\lambda_k = \lambda^k, \ k = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим уравнение
$$y' + ay(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j y(\lambda^j t), \quad t > 0, \tag{10}$$

где $a \geq 0$, $\lambda_j > 1$, $b_j \in R$.

Уравнение (10) имеет решение
$$y(t) = C \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \exp(-a\lambda^k t), \quad t > 0, \tag{11}$$

где C – произвольная постоянная, коэффициенты β_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям
$$\beta_0 = 1, \quad \beta_m = (a(1 - \lambda^m))^{-1} \sum_{k=1}^{n} b_k \beta_{m-k} \quad (\beta_r = 0, r < 0). \tag{12}$$

Очевидно, что решение Г.И. Русакова (3) получается из (11).

Summary

N.P. Evlampiev, V.S. Mokeichev, I.E. Philippov. Density of Distribution of Light Intensity in the Case of Absorbing Clouds.

In this article we consider a generalization of the Ambartsumyan's model on the absorption of light in the interstellar space for the case when there are n types of absorbing clouds uniformly distributed in the equatorial plane of the Galaxy and having different optical transparencies. It is also supposed that the number of clouds having a preassigned transparency and located in a preassigned direction of the equatorial plane to the distance s from an observer is a random function and for every fixed s has Poisson distribution.

Key words: Ambartsumyan's model, absorption of light in interstellar space, q-difference differential equation.

Литература

1. *Амбарцумян В.А.* Научные труды: в 3 т. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1960. – Т. 1. – 430 с.
2. *Русаков Г.И.* Флуктуации яркости Млечного пути // Учен. зап. Ленингр. ун-та. Сер. матем. наук. – 1949. – Вып. 18 – С. 53–79.
3. *Евлампиев Н.П., Филиппов И.Е.* Нахождение функции распределения поглощения света в межзвёздном пространстве // Тез. докл. Десятого чехослов.-сов. совещ. «Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики». – Стара-Тура, 1988. – С. 51.
4. *Мокейчев В.С., Евлампиев Н.П.* О решении на полуоси дифференциально-разностного уравнения // Изв. вузов. Матем. – 1991. – № 4. – С. 44–47.

Поступила в редакцию
22.06.12

Евлампиев Николай Петрович – директор ООО «Интек плюс», г. Казань.

Мокейчев Валерий Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Valery.Mokeychev@ksu.ru*

Филиппов Игорь Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.