УДК 519.853+519.68

ПРИМЕНЕНИЕ УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

А.А. Андрианова

Аннотация

Работа посвящена исследованию свойств и принципов построения удовлетворительной аппроксимации множества допустимых решений задачи условной оптимизации. Замена в ходе решения исходного допустимого множества на его удовлетворительную аппроксимацию позволяет построить конечные алгоритмы методов внутренней и внешней точек (методов штрафных функций или методов центров) с критерием остановки, гарантирующим выполнение заданной точности полученного решения. Доказаны необходимые и достаточные условия для построения внешней и внутренней удовлетворительных аппроксимаций допустимого множества. Сформулирован один из реализуемых способов задания множества, являющегося удовлетворительной аппроксимацией допустимого множества, которое можно использовать при построении алгоритмов, гарантирующих получение заданной точности за конечное число итераций.

Ключевые слова: методы последовательной безусловной минимизации, метод штрафных функций, метод центров, решение задачи оптимизации с заданной точностью, удовлетворительная аппроксимация допустимого множества, реализуемые критерии остановки.

Введение

Практическое применение методов непрерывной минимизации связано не столько с получением точного решения задачи, сколько с нахождением приближенного решения с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Поскольку большинство известных методов обеспечивает сходимость к точному решению задачи, остановку вычислений производят на основании критериев близости к оптимуму. Однако довольно часто эти критерии оказываются эвристическими и их применение может привести к выбору точки, далекой от точного решения. Поэтому актуальной задачей является разработка алгоритмов, которые имеют простые критерии проверки достижения заданной точности, гарантировано выполняющиеся после конечного числа итераций применяемого метода.

Один из подходов к разработке таких алгоритмов заключался в аппроксимации допустимого множества решений. Он был применен по отдельности в методах последовательной безусловной минимизации [1–3] – в методе штрафных функций [4, 5] и в методе центров (параметризации целевой функции) [6–8]. Данный подход заключался в замене исходного допустимого множества задачи на его аппроксимацию (вложенное или окаймляющее множество) и в решении построенной таким образом вспомогательной задачи одним из указанных выше методов. Способ получения аппроксимации в этом случае сильно зависел от применяемого метода оптимизации. Было доказано, что за конечное число итераций гарантируется получение точки из разности исходного допустимого множества и его аппроксимации, что является критерием остановки вычислений и гарантией заданной точности полученного решения.

В настоящей работе производится обобщение данного подхода путем введения понятия ε-удовлетворительной аппроксимации допустимого множества для задачи математического программирования, получения необходимых и достаточных условий задания таких множеств и формулировки обобщенной схемы применения аппроксимаций в методах последовательной безусловной минимизации (внутренней и внешней точки) с целью получения ε-решения задачи оптимизации за конечное число шагов. Вводные положения для случая применения метода внешней точки при таком подходе были рассмотрены в [9].

При построении практических алгоритмов на базе данной схемы предполагается использовать априорные знания о целевой функции и функциях-ограничениях задачи оптимизации – констант Липшица, сильной выпуклости, (ρ, β, λ)-аппроксимируемости или сильной квазивыпуклости. Такие константы нередко используются для оценки скорости сходимости того или иного метода оптимизации (см., например, в [1–3, 10]). Полученные таким образом оценки могут быть применены для формулировки критерия остановки вычислений. Обычно такие оценки существенно зависят от управляющих параметров применяемого метода оптимизации, что позволяет их использовать только непосредственно в алгоритмах на базе этого метода. Отличительной особенностью схем, предлагаемых в настоящей статье, является универсальный для методов последовательной безусловной минимизации способ применения априорно заданных констант для построения практических алгоритмов решения задач условной минимизации с гарантией достижения требуемого уровня точности.

1. Постановка задачи

Пусть решается следующая задача оптимизации:

$$\min\{f(x),\, x \in D\}, \tag{1}$$

где $D = \{x \in R_n : f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, целевая функция f и функции-ограничения f_i, $i = 1, \ldots, m$, определены и непрерывны в n-мерном евклидовом пространстве R_n и принадлежат классу функций, каждый локальный минимум которых является абсолютным, множество D регулярно по Слейтеру, то есть существует точка $y \in D$, для которой выполняются неравенства $f_i(y) < 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Пусть требуется найти решение задачи 1 с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Введем следующие обозначения:

$$f^* = \min\{f(x),\, x \in D\},$$

$$X^*_\varepsilon = \{x \in D : f(x) \le f^* + \varepsilon\}, \quad \overline{X}^*_\varepsilon = \{x \in R_n : |f(x) - f^*| \le \varepsilon\}.$$

Множество X^*_ε является множеством ε-решений задачи (1), а в множество $\overline{X}^*_\varepsilon$ входят и те точки, которые не являются допустимыми. Это множество принято называть множеством ε-псевдорешений задачи (1). Будем считать далее, что $f^* > -\infty$, минимум достигается и множество X^*_ε является ограниченным. Будем также полагать, что абсолютный минимум целевой функции достигается за пределами множества D, откуда, в частности, следует, что точка оптимума лежит на границе множества D. Случай принадлежности оптимума внутренности множества D рассматривался, например, для метода центров в [11]; при определенных условиях он может быть сведен к задаче минимизации специальным образом построенной вспомогательной функции.

Требуется получить точку z из множества X^*_ε либо из множества $\overline{X}^*_\varepsilon$.

2. Понятие ε-удовлетворительной внутренней аппроксимации допустимого множества

Определение 1. Внутренней аппроксимацией множества допустимых решений D задачи (1) назовем множество G_1 вида $\{x \in R_n : \varphi_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, r\}$, для которого выполняются условия $G_1 \ne \emptyset$ и $G_1 \subset D$. Здесь φ_i, $i = 1, \ldots, r$, – непрерывные в R_n функции, отличные от f_i, $i = 1, \ldots, m$, каждый локальный минимум которых является абсолютным.

Заменим исходную задачу (1) на следующую вспомогательную задачу

$$\min\{f(x),\, x \in G_1\}, \tag{2}$$

где G_1 – внутренняя аппроксимация множества D задачи (1). Для задачи (2) введем следующие обозначения для точки минимума и множества точек, которые входят в «полоску», образованную разностью исходного множества D и внутренней аппроксимации G_1:

$$x^*(G_1) = \mathrm{argmin}\{f(x),\, x \in G_1\},$$

$$Q_{\mathrm{in}}(G_1) = \{x \in D : f(x) \le f(x^*(G_1))\}.$$

Определение 2. Назовем ε-удовлетворительной внутренней аппроксимацией допустимого множества для задачи (1) внутреннюю аппроксимацию G_1 множества D, для которой $Q_{\mathrm{in}}(G_1) \subset X_\varepsilon^*$.

Следующая теорема определяет необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество G_1 являлось внутренней ε-удовлетворительной аппроксимацией множества D задачи (1).

Теорема 1. *Множество $G_1 \subset D$ является внутренней ε-удовлетворительной аппроксимацией множества D задачи* (1) *тогда и только тогда, когда $G_1 \cap X_\varepsilon^* \ne \emptyset$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G_1 является внутренней ε-удовлетворительной аппроксимацией множества D для задачи (1). Согласно определению 2 $Q_{\mathrm{in}}(G_1) \subset X_\varepsilon^*$. Для решения $x^*(G_1)$ вспомогательной задачи (2) справедливы включения $x^*(G_1) \in G_1$, $x^*(G_1) \in Q_{\mathrm{in}}(G_1)$. Отсюда, поскольку $Q_{\mathrm{in}}(G_1) \subset X_\varepsilon^*$, следует, что $x^*(G_1) \in G_1 \cap X_\varepsilon^*$, то есть $G_1 \cap X_\varepsilon^* \ne \emptyset$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть G_1 – некоторая внутренняя аппроксимация множества D и имеет место $G_1 \cap X_\varepsilon^* \ne \emptyset$. Зафиксируем произвольно точку $y \in G_1 \cap X_\varepsilon^*$. Так как $y \in G_1$, то $f(x^*(G_1)) \le f(y)$, поскольку $x^*(G_1)$ – решение задачи (2). С другой стороны, $y \in X_\varepsilon^*$, что означает продолжение последнего неравенства: $f(x^*(G_1)) \le f(y) \le f^* + \varepsilon$. Таким образом, для любого $x \in Q_{\mathrm{in}}(G_1)$ будет справедлива цепочка неравенств $f(x) \le f(x^*(G_1)) \le f^* + \varepsilon$, то есть $Q_{\mathrm{in}}(G_1) \subset X_\varepsilon^*$. □

Опишем общую схему использования ε-удовлетворительной внутренней аппроксимации при построении конечных алгоритмов решения задачи (1) с точностью $\varepsilon > 0$.

Пусть в качестве метода решения вспомогательной задачи (2) выбран некоторый метод внешней точки из класса методов последовательной безусловной минимизации (метод центров, метод штрафных функций или метод параметризации целевой функции). С помощью этих методов строится итерационная последовательность точек, не принадлежащих G_1, каждая из которых является точкой абсолютного минимума специальным образом построенной свертывающей функции, зависящей от целевой функции и функций-ограничений задачи (2).

Общая схема метода внешней точки с аппроксимацией допустимого множества.

Пусть выбраны множество G_1 – ε-удовлетворительная внутренняя аппроксимация множества D, а также метод внешней точки A со свертывающей функцией $F(x, f, \Psi(G_1), \eta)$, где $\Psi(G_1)$ – способ учета в свертывающей функции допустимого множества (обычно задается в виде функции-свертки ограничений), η – набор управляющих параметров метода внешней точки. Зададим способ выбора управляющих параметров B, зависящий от выбранного метода внешней точки A. Полагаем $k = 0$.

Если получена точка x_k $(k \geq 0)$, то получение точки x_{k+1} производится следующим образом.

1. По способу B определяется очередной набор управляющих параметров η_k.
2. Строится функция $F(x, f, \Psi(G_1), \eta_k)$, соответствующая методу A.
3. Выбирается $x_{k+1} \in \operatorname{Argmin}\{F(x, f, \Psi(G_1), \eta_k), x \in R_n\}$.
4. Если $x_{k+1} \in D$, то $x_{k+1} \in X_\varepsilon^*$. Останов. Задача (1) решена.
5. Полагается $k = k + 1$. Переход к шагу 1.

В качестве метода A может быть выбран метод штрафных функций, метод внешних центров или метод параметризации целевой функции. Каждый из указанных методов имеет несколько разных способов задания свертывающей функции $F(x, f, \Psi(G_1), \eta)$ и функции $\Psi(G_1)$ и соответствующих им правил выбора новых значений управляющих параметров η (см., например, в [1–3]). Приведем далее некоторые из них.

Метод штрафных функций. Управляющим параметром для метода штрафных функций является штрафной коэффициент $\alpha > 0$. Традиционный способ выбора значений параметров (способ B общей схемы) для метода штрафных функций заключается в следующем: $\alpha_{k+1} > \alpha_k$ $\forall k \geq 0$, $\alpha_k \to \infty$ при $k \to \infty$. В качестве свертывающих функций метода штрафных функций при способе учета ограничений $(\Psi(G_1))$ $\psi(x) = \max\{\varphi_i(x),\ i \in 1, \ldots, r\}$ можно использовать $(q \geq 1)$:

$$F_1^1(x) = f(x) + \alpha(\max\{0, \psi(x)\})^q,$$

$$F_2^1(x) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^{r} (\max\{0, \varphi_i(x)\})^q.$$

Метод параметризации целевой функции. Управляющий параметр данного метода β связан со значениями целевой функции в точках генерируемой последовательности. В большинстве методов параметризации целевой функции в качестве способа фиксации этого параметра (способ B общей схемы) используется правило $\beta_{k+1} = \beta_k + \min\{F(x, f, \Psi(G_1), \eta_k),\ x \in R_n\}$ при $\beta_0 \leq f^*$. Для ускорения процесса решения можно использовать еще один управляющий параметр $\alpha > 0$, аналогичный штрафному коэффициенту.

В качестве примеров свертывающих функций при способе учета ограничений $(\Psi(G_1))$ $\psi(x) = \max\{\varphi_i(x),\ i \in 1, \ldots, r\}$, которые используются в методе параметризации целевой функции, можно привести следующие $(q \geq 1)$:

$$F_1^2(x) = \max\{0, f(x) - \beta\} + \alpha \max(\{0, \psi(x)\})^q,$$

$$F_2^2(x) = \max\{0, f(x) - \beta\} + \alpha \sum_{i=1}^{r} (\max\{0, \varphi_i(x)\})^q.$$

Один из вариантов метода параметризации целевой функции давно имеет собственное название – метод центров и имеет следующую свертывающую функцию:

$$F^3(x) = \max\{f(x) - \beta, \alpha\psi(x)\}.$$

Докажем далее, что применение общей процедуры метода внешней точки с аппроксимацией допустимого множества позволит получить за конечное число итераций точку $z \in X_\varepsilon^*$.

Теорема 2. *Существует номер* $K \geq 0$*, для которого будут выполнены условия шага* 4 *общей схемы метода внешней точки с аппроксимацией допустимого множества. При этом* $x_{K+1} \in X_\varepsilon^*$.

Доказательство. Предположим, что для любого $k \geq 0$ условия шага 4 не выполняются. Исследуем свойства построенной по общей схеме последовательности точек $\{x_k\}$. Согласно известным свойствам методов внешней точки (см., например, [1, 2, 11, 14] для различных методов последовательной безусловной минимизации) эта последовательность будет удовлетворять следующим условиям.

1) $f(x_k) \leq f(x^*(G_1))$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, причем $f(x_k) \to f(x^*(G_1))$ при $k \to \infty$;

2) $\rho(x_k, G_1) \to 0$ при $k \to \infty$, где $\rho(x, G_1) = \min\{\|y - x\|, y \in G_1\}$ – расстояние от точки x до множества G_1.

В силу условия 2, непрерывности функций-ограничений φ_i, $i = 1, \ldots, r$, задачи (2) и условия Слейтера для множества D найдется номер $K \geq 0$ такой, что $x_K \in D$, то есть будет получено противоречие с тем предположением, что условия шага 4 общей схемы не выполняются. При этом в силу условия 1 будет справедливо неравенство $f(x_K) \leq f(x^*(G_1))$, то есть $x_K \in Q_{in}(G_1)$, что согласно определению ε-удовлетворительной внутренней аппроксимации означает, что $x_K \in X_\varepsilon^*$. □

3. Понятие ε-удовлетворительной внешней аппроксимации допустимого множества

Определение 3. Внешней аппроксимацией множества допустимых решений D задачи (1) назовем множество G_2 вида $\{x \in R_n : \varphi_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ldots, r\}$, для которого выполняется условие $D \subset G_2$. Здесь φ_i, $i = 1, \ldots, r$, – непрерывные в R_n функции, отличные от f_i, $i = 1, \ldots, m$, каждый локальный минимум которых является абсолютным.

Вместо исходной задачи (1) будем решать следующую вспомогательную задачу

$$\min\{f(x), \, x \in G_2\}, \tag{3}$$

где G_2 – внешняя аппроксимация множества D задачи (1). Введем следующие обозначения для точки минимума вспомогательной задачи (3) и множества ее ε-решений:

$$x^*(G_2) = \operatorname{argmin}\{f(x), \, x \in G_2\},$$

$$Q_{\text{out}}(G_2) = \{x \in G_2 : f(x) \leq f(x^*(G_2)) + \varepsilon\}.$$

Определение 4. Назовем ε-удовлетворительной внешней аппроксимацией допустимого множества для задачи (1) внешнюю аппроксимацию G_2, для которой $Q_{\text{out}}(G_2) \subset \overline{X}_\varepsilon^*$.

Следующая теорема определяет необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество G_2 являлось ε-удовлетворительной внешней аппроксимацией множества D задачи (1).

Теорема 3. *Внешняя аппроксимация допустимого множества задачи* (1) $G_2 = \{x \in R_n : \varphi_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ldots, r\}$ *является* ε*-удовлетворительной тогда и только тогда, когда* $Q_{\text{out}}(G_2) \cap X_\varepsilon^* \neq \emptyset$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G_2 – ε-удовлетворительная внешняя аппроксимация множества D для задачи (1). Согласно определению 4 $Q_{\text{out}}(G_2) \subset \overline{X}_\varepsilon^*$. Возьмем точку-оптимум задачи (1) $x^* \in \mathrm{Argmin}\{f(x),\, x \in D\}$. Очевидно, что $x^* \in X_\varepsilon^*$. Для решения $x^*(G_2)$ вспомогательной задачи (3) справедливо включение $x^*(G_2) \in Q_{\text{out}}(G_2)$, откуда следует, что $x^*(G_2) \in \overline{X}_\varepsilon^*$, так как G_2 – ε-удовлетворительная внешняя аппроксимация множества D. Согласно последнему включению справедливо неравенство $|f(x^*(G_2)) - f(x^*)| \le \varepsilon$, или $f(x^*) \le f(x^*(G_2)) + \varepsilon$. Поскольку $x^* \in G_2$, последнее неравенство означает, что $x^* \in Q_{\text{out}}(G_2)$. Таким образом, $x^* \in Q_{\text{out}}(G_2) \cap X_\varepsilon^*$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть G_2 – некоторая внешняя аппроксимация множества D и $Q_{\text{out}}(G_2) \cap X_\varepsilon^* \ne \emptyset$. Обозначим точку, входящую в это пересечение, через $\overline{x}$. Так как $\overline{x} \in X_\varepsilon^*$, имеет место неравенство $f(x^*) \le f(\overline{x})$, где $x^* \in \mathrm{Argmin}\{f(x),\, x \in D\}$. Поскольку, кроме того, $\overline{x} \in Q_{\text{out}}(G_2)$, получим, что

$$f(x^*) \le f(\overline{x}) \le f(x^*(G_2)) + \varepsilon. \tag{4}$$

Отсюда следует, что $x^* \in Q_{\text{out}}(G_2)$.

Зафиксируем произвольно точку $y \in Q_{\text{out}}(G_2)$. Для этой точки имеет место неравенство $f(x^*(G_2)) \le f(y) \le f(x^*(G_2)) + \varepsilon$, что согласно (4) делает справедливой следующую цепочку неравенств: $f(x^*) - \varepsilon \le f(x^*(G_2)) \le f(y) \le f(x^*(G_2)) + {}$ $+ \varepsilon \le f(x^*) + \varepsilon$, то есть $|f(y) - f(x^*)| \le \varepsilon$, или $y \in \overline{X}_\varepsilon^*$. В силу произвольности выбора точки $y \in Q_{\text{out}}(G_2)$, последнее включение означает, что $Q_{\text{out}}(G_2) \subset \overline{X}_\varepsilon^*$, то есть согласно определению 4 множество G_2 является ε-удовлетворительной внешней аппроксимацией множества D. □

Замечание 1. Заметим, что исходное множество D задачи (1) является ε-удовлетворительной внутренней аппроксимацией для множества G_2. Действительно, поскольку $Q_{\text{out}}(G_2)$ представляет собой по определению множество ε-решений для задачи (3), необходимое и достаточное условие из теоремы 1 в этом случае формулируется как $D \cap Q_{\text{out}}(G_2) \ne \emptyset$. Поскольку G_2 – ε-удовлетворительная внешняя аппроксимация множества D, то согласно теореме 3 $Q_{\text{out}}(G_2) \cap X_\varepsilon^* \ne \emptyset$. Отсюда с учетом $X_\varepsilon^* \subset D$, очевидно, $D \cap Q_{\text{out}}(G_2) \ne \emptyset$.

Сформулируем общую схему использования ε-удовлетворительной внешней аппроксимации при построении конечных алгоритмов решения задачи (1) с точностью $\varepsilon > 0$.

Пусть в качестве метода решения вспомогательной задачи (3) выбран некоторый метод внутренней точки из класса методов последовательной безусловной минимизации (метод центров, метод барьерных функции). С помощью этих методов строится итерационная последовательность точек, принадлежащих G_2, каждая из которых является точкой абсолютного минимума специальным образом построенной свертывающей функции, зависящей от целевой функции и функций-ограничений задачи (3).

Общая схема метода внутренней точки с аппроксимацией допустимого множества.

Пусть выбрано множество G_2 – ε-удовлетворительная внешняя аппроксимация множества D, а также метод внутренней точки A со свертывающей функцией $F(x, f, \Psi(G_2), \eta)$, где $\Psi(G_2)$ – способ учета в свертывающей функции допустимого множества, η – набор управляющих параметров метода внутренней точки. Зададим способ выбора управляющих параметров B, зависящий от выбранного метода A. Полагаем $k = 0$.

Если получена точка x_k $(k \geq 0)$, то получение точки x_{k+1} производится следующим образом.

1. По способу B определяется очередной набор управляющих параметров η_k.
2. Строится функция $F(x, f, \Psi(G_2), \eta_k)$, соответствующая методу A.
3. Выбирается $x_{k+1} \in \operatorname{Argmin}\{F(x, f, \Psi(G_2), \eta_k), x \in R_n\}$.
4. Если $x_{k+1} \notin D$, то $x_{k+1} \in \overline{X}_\varepsilon^*$. Останов.
5. Полагается $k = k + 1$. Переход к шагу 1.

Обоснование работы общей схемы методов внутренней точки с аппроксимацией множества допустимых решений основывается на свойствах, имеющих место для всех методов внутренней точки (см., например, [1–3, 12]). В качестве метода A могут быть использованы метод внутренних центров и метод барьерных функций, для каждого из которых существует несколько видов свертывающей функции $F(x, f, \Psi(G_2), \eta_k)$ с собственными способами задания управляющих параметров η (способ B общей схемы).

Теорема 4. *Существует номер $K \geq 0$, для которого будут выполнены условия шага* 4 *общей схемы метода внутренней точки с аппроксимацией допустимого множества. При этом x_K будет является ε-псевдорешением задачи* (1).

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, то есть для всех $k \geq 0$ условия шага 4 не выполняются. Исследуем свойства построенной по общей схеме последовательности точек $\{x_k\}$. Известно (см., например, [1–3, 12]), что любой из методов внутренней точки генерирует последовательность так, что $f(x_k) \geq f(x^*(G_2))$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, причем $f(x_k) \to f(x^*(G_2))$ при $k \to \infty$.

Так как абсолютный минимум f достигается за пределами множества D, $f^* > f(x^*(G_2))$. В силу непрерывности функции f и согласно условиям изменения последовательности $\{f(x_k)\}$ найдется номер $K \geq 0$ такой, что $f(x_K) < f^*$, что возможно только, если $x_K \notin D$, то есть будет получено противоречие со сделанным выше предположением.

При доказательстве теоремы 3 было показано, что $x^* \in Q_{\text{out}}(G_2)$, если G_2 – ε-удовлетворительная внешняя аппроксимация множества D. Отсюда следует, что для найденной точки x_K справедливо неравенство $f(x_K) \leq f(x^*) \leq f(x^*(G_2)) + \varepsilon$, то есть $x_K \in Q_{\text{out}}(G_2)$. Из определения 4 ε-удовлетворительной внешней аппроксимации следует, что тогда $x_K \in \overline{X}_\varepsilon^*$, то есть является ε-псевдорешением задачи (1). □

Замечание 2. В частных случаях использования некоторых видов свертывающей функции и ε-удовлетворительной аппроксимации можно получить и ε-решение задачи (1) как последнюю точку, принадлежащую множеству D [6]. Например, это справедливо для свертывающей функции метода центров, которая может использоваться в методе как внешних, так и внутренних центров ($\alpha > 0$, β – управляющие параметры метода):

$$F(x) = \max\{f(x) - \beta, \alpha\psi(x)\}.$$

Замечание 3. Использование общей схемы метода внутренней точки с аппроксимацией допустимого множества в случае, когда в качестве метода А используется метод барьерных функций, имеет отличие на шаге 3 общей схемы, что связано с отсутствием непрерывности барьерной функции на границе множества G_2. Тем не менее это не нарушает общности рассуждений при доказательстве теоремы 4. Модифицированный шаг 3 имеет вид:

$3'$. Выбирается $x_{k+1} \in \operatorname{Argmin}\{F(x, f, \Psi(G_2), \eta_k),\ x \in G_2\}$.

Виды свертывающих функций, которые можно использовать в данном случае, можно найти в [2, 3].

4. Об одном способе задания ε-удовлетворительной аппроксимации допустимого множества

Самым простым видом множества, которое можно использовать в качестве аппроксимации допустимого множества задачи (1), является

$$G(p) = \{x \in R_n : f_i(x) + p \leq 0, \ i = 1, \dots, m\}. \tag{5}$$

При $p > 0$ множество $G(p)$ при условии непустоты будет внутренней аппроксимацией множества D, а при $p < 0$ – внешней аппроксимацией. Очевидно, что случай $p = 0$ рассматривать не надо, так как $G(0) = D$. Выбор значения параметра аппроксимации p должен обеспечивать согласованность с желаемым уровнем точности $\varepsilon > 0$. Следующая теорема указывают такой способ фиксации параметра p.

Теорема 5. *Для того чтобы множество* (5) *являлось* ε*-удовлетворительной внутренней аппроксимацией множества* D*, необходимо и достаточно, чтобы* $0 < p < -\min\{g(x), \ x \in X_\varepsilon^*\}$*, где* $g(x) = \max\{f_i(x), \ i = 1, \dots, m\}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $G(p)$ – ε-удовлетворительная внутренняя аппроксимация множества D. Тогда по теореме 1 $G(p) \cap X_\varepsilon^* \neq \emptyset$. Зафиксируем точку $\overline{x}$ из этого пересечения. Поскольку $\overline{x} \in G(p)$, то $g(\overline{x}) + p \leq 0$. Так как $\overline{x} \in X_\varepsilon^*$, то $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \leq g(\overline{x})$. Следовательно, $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} + p \leq g(\overline{x}) + p \leq 0$, или $0 < p < -\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $0 < p < -\min\{g(x), \ x \in X_\varepsilon^*\}$. Обозначим $y = \mathrm{argmin}\{g(x), \ x \in X_\varepsilon^*\}$ (это возможно, поскольку X_ε^* – замкнутое ограниченное множество). Для этой точки справедливо $g(y) + p \leq g(y) - \min\{g(x), \ x \in X_\varepsilon^*\} = 0$. Таким образом, $y \in G(p)$. Следовательно, $y \in G(p) \cap X_\varepsilon^*$, а значит, в силу теоремы 1 $G(p)$ – ε-удовлетворительная внутренняя аппроксимация множества D. □

Для практического определения значения параметра p должна быть известна оценка сверху величины $\min\{g(x), \ x \in X_\varepsilon^*\}$. Такие оценки можно получить при наложении дополнительных условий на целевую функцию и функции-ограничения задачи (1). Перечислим некоторые известные способы получения таких оценок.

1. Пусть целевая функция f выпукла и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, функция g, задающая ограничения, является сильно выпуклой с постоянной сильной выпуклости $\mu > 0$, $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$. Тогда $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \leq -\mu\varepsilon^2/L^2$ (см. [7]).

Отсюда следует, что $G(p)$ является ε-удовлетворительной внутренней аппроксимацией множества D, если выполняется неравенство

$$0 < p \leq \mu\varepsilon^2/L^2.$$

2. Пусть целевая функция f выпукла и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, функция g, задающая ограничения, является равномерно выпуклой с неубывающим модулем выпуклости $\psi(t)$ $(0 < t < \infty)$, $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$. Тогда $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \leq -\psi(\varepsilon/L)$.

Следовательно, чтобы $G(p)$ являлось ε-удовлетворительной внутренней аппроксимацией множества D, требуется, чтобы

$$0 < p \leq \psi(\varepsilon/L).$$

3. Пусть целевая функция f выпукла и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, функция g, задающая ограничения, является (ρ, β, λ)-аппроксимируемой (см. [13]), $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$. Тогда $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \leq -\beta\varepsilon/L$.

Следовательно, чтобы $G(p)$ являлось ε-удовлетворительной внутренней аппроксимацией множества D, требуется, чтобы

$$0 < p \le \beta\varepsilon/L.$$

Обоснуем получение такой оценки для более общего случая.

Лемма 1. *Пусть функция f является явно квазивыпуклой и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, функция g является сильно квазивыпуклой с постоянной $\kappa > 0$, $\min\{g(x),\, x \in X^*_\varepsilon\} \ne \min\{g(x),\, x \in R_n\}$. Тогда*

$$\min\{g(x),\, x \in X^*_\varepsilon\} \le -\frac{\kappa\varepsilon^2}{4L^2}. \tag{6}$$

Доказательство. Зафиксируем две точки из множества X^*_ε: $x^* = \operatorname{argmin}\{f(x),\, x \in D\}$ и $y = \operatorname{argmin}\{g(x),\, x \in X^*_\varepsilon\}$. Известно (см. [14]), что для любого $x \in X^*_\varepsilon$ справедливо неравенство $\|x - y\|^2 \le \frac{4}{\kappa}(g(x) - g(y))$, в том числе и для $x^* \in X^*_\varepsilon$. Так как точка минимума задачи (1) лежит на границе множества D, то $g(x^*) = 0$. Следовательно,

$$\|x^* - y\|^2 \le -\frac{4}{\kappa} g(y) = -\frac{4}{\kappa}\min\{g(x),\, x \in X^*_\varepsilon\}. \tag{7}$$

Поскольку минимум функции g на множестве X^*_ε не совпадает с абсолютным минимумом этой функции, он достигается на границе множества X^*_ε, то есть $f(y) = f^* + \varepsilon$ (см. [7]). Отсюда и из условия Липшица следует, что $\|x^* - y\| \ge \varepsilon/L$, что вместе с (7) приводит к неравенству $\min\{g(x),\, x \in X^*_\varepsilon\} \le -\kappa\varepsilon^2/4L^2$. □

Таким образом, при выполнении условий леммы 1 множество $G(p)$ будет являться ε-удовлетворительной внутренней аппроксимацией допустимого множества D, если

$$0 < p \le \frac{\kappa\varepsilon^2}{4L^2}.$$

Согласно замечанию 1 для множества D и его ε-удовлетворительной внешней аппроксимации G справедливо утверждение о том, что D является ε-удовлетворительной внутренней аппроксимацией для G. Поэтому для множеств вида (5) в случае их использования для построения ε-удовлетворительной внешней аппроксимации имеют место следующие оценки.

1. Пусть целевая функция f выпукла и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, функция g, задающая ограничения, является сильно выпуклой с постоянной сильной выпуклости $\mu > 0$, $\min\{g(x),\, x \in X^*_\varepsilon\} \ne \min\{g(x),\, x \in R_n\}$. Тогда $G(p)$ является ε-удовлетворительной внешней аппроксимацией множества D, если

$$-\mu\varepsilon^2/L^2 \le p < 0.$$

2. Пусть целевая функция f выпукла и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, функция g, задающая ограничения, является равномерно выпуклой с неубывающим модулем выпуклости $\psi(t)$ $(0 < t < \infty)$, $\min\{g(x),\, x \in X^*_\varepsilon\} \ne \min\{g(x),\, x \in R_n\}$. Тогда $G(p)$ является ε-удовлетворительной внешней аппроксимацией множества D, если

$$-\psi(\varepsilon/L) \le p < 0.$$

3. Пусть целевая функция f выпукла и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, функция g является (ρ, β, λ)-аппроксимируемой, $\min\{g(x),\, x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x),\, x \in R_n\}$. В этом случае $G(p)$ является ε-удовлетворительной внешней аппроксимацией множества D, если

$$-\beta\varepsilon/L \leq p < 0.$$

4. Пусть функция f является явно квазивыпуклой и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, функция g является сильно квазивыпуклой с постоянной $\kappa > 0$, $\min\{g(x),\, x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x),\, x \in R_n\}$. Тогда $G(p)$ является ε-удовлетворительной внешней аппроксимацией множества D, если

$$-\frac{\kappa\varepsilon^2}{4L^2} \leq p < 0.$$

5. Описание вычислительных экспериментов

Экспериментальное исследование предложенного в статье подхода позволяет говорить о его эффективности. Проведенные вычислительные эксперименты для метода центров и метода штрафных функций подтверждают факт получения решения с заданной точностью $\varepsilon > 0$ по функционалу за конечное число процессов минимизации свертывающих функций, используемых в методах последовательной безусловной минимизации.

Для иллюстрации сказанного приведем результаты решения известной задачи Розена – Сузуки (см. [1]). Данная задача имеет «овражный» характер, поэтому особенно интересна для исследований.

Задача Розена – Сузуки. Пусть $x \in R_4$, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. Требуется минимизировать функцию

$$f(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_3^2 + \xi_4^2 - 5\xi_1 - 5\xi_2 - 31\xi_3 + 4\xi_4$$

при ограничениях

$$f_1(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 - 8 \leq 0,$$

$$f_2(x) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\xi_4^2 - \xi_1 + \xi_4 - 10 \leq 0,$$

$$f_3(x) = 2\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\xi_1 - \xi_2 - 5 \leq 0.$$

В качестве контрольного значения оптимума целевой функции принимаем $f^* = -44.866164$ (с точностью 10^{-7}).

Далее приводятся результаты решения этой задачи с помощью нескольких алгоритмов в методе центров, которые относятся к методу как внешних, так и внутренних точек. Свертывающая функция, построенная на k-й итерации метода, имела вид:

$$F_k(x) = \max\{f(x) - f(x_k), \alpha_k g(x)\}$$

где $g(x) = \max\{f_i(x),\, i = 1, \ldots, m\}$, $\alpha_k > 0$ – аналог штрафного коэффициента. Данная функция может использоваться как для метода внешних точек (в случаях, когда $x_0 \notin D$ и $f(x_0) \leq f^*$), так и для метода внутренних точек (в случае, когда $x_0 \in D$). Эксперимент проводился с помощью «классических» реализаций метода внутренних и внешних центров с эвристическими критериями остановки вычислений $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \varepsilon$, $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon$, а также их модификаций на основании схем, предложенных в настоящей статье. Так как функции-ограничения задачи Розена – Сузуки являются сильно выпуклыми, применяемая в экспериментах аппроксимация допустимого множества имела вид (5) при $0 < p \leq \mu\varepsilon^2/L^2$

Табл. 1

Результаты экспериментов

Алгоритм	Количество итераций	Достигнутое значение	Погрешность
Метод внутренних центров [12]	27	−44.806136	0.060028
Метод внешних центров [11]	17	−44.867226	0.001062
Метод внутренних центров с аппроксимацией допустимого множества	11	−44.865591	0.000573
Метод внешних центров с аппроксимацией допустимого множества	8	−44.866134	0.000030

(внутренняя аппроксимация) и $-\mu\varepsilon^2/L^2 \le p < 0$ (внешняя аппроксимация). Для получения оценки параметра сильной выпуклости μ использовалась процедура оценки с помощью собственных чисел гессианов функций-ограничений. В качестве константы Липшица использовалась ее выборочная оценка.

Процессы минимизации двух свертывающих функций, построенных для решения одной и той же задачи, занимают примерно равное время, поэтому в качестве критерия сравнения алгоритмов используется не время работы алгоритма, а проведенное количество процессов построения и минимизации свертывающей функции до выполнения условий критерия остановки вычислений и получения решения заданной точности.

Табл. 1 содержит результаты решения задачи Розена – Сузуки различными алгоритмами. Все вычисления проводились при $\varepsilon = 10^{-3}$. Для каждого алгоритма представлены проведенное количество итераций (процессов минимизации свертывающих функций), достигнутое значение целевой функции и погрешность полученного решения по сравнению с контрольным значением.

Как видно из таблицы, при использовании «классических» алгоритмов с эвристическими критериями процесс вычислений останавливался, хотя заданная точность не была достигнута. Применение же алгоритмов с аппроксимацией допустимого множества позволило получить решения заданной точности. Следует отметить также, что количество выполненных процессов минимизации свертывающей функции в модификациях с аппроксимацией множества меньше, чем при применении «классических» методов решения задачи. Эти выводы подтверждаются и другими проведенными нами вычислительными экспериментами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-97022, 12-01-31515).

Summary

A.A. Andrianova. Application of a Satisfactory Approximation of an Admissible Set for Solving Optimization Problems.

This work deals with the properties and construction principles of a satisfactory approximation of a set of admissible solutions for a conditional optimization problem. The replacement of an initial admissible set by its satisfactory approximation allows one to construct finite algorithms for the methods of internal and external points (methods of penalty functions or methods of centers) with the stopping criterion which ensures the required accuracy of the solution. Necessary and sufficient conditions for producing external and internal satisfactory approximations of an admissible set are proved. One of the feasible ways for setting a satisfactory approximation of an admissible set is formulated. This way can be used for the development of algorithms that ensure the required accuracy in a finite number of iterations.

Key words: methods of sequential unconstrained minimization, penalty function method, method of centers, solution of an optimization problem with a given accuracy, satisfactory approximation of an admissible set, feasible stopping criteria.

Литература

1. *Гроссман К., Каплан А.А.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимищации. – Новосибирск: Наука, 1981. – 183 с.
2. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* К вопросу о систематизации численных методов нелинейного программирования. – М.: ВЦ АН СССР, 1988. – 66 с.
3. *Жадан В.Г.* Численные методы линейного и нелинейного программирования. Вспомогательные функции в условной минимизации. – М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 2002. – 160 с.
4. *Заботин Я.И., Фукин И.А.* Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 12. – С. 49–54.
5. *Заботин Я.И., Фукин И.А.* Алгоритмы в методе штрафов с аппроксимацией допустимого множества // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 1. – С. 36–47.
6. *Заботин Я.И., Андрианова А.А.* Алгоритмы в методе центров с аппроксимацией допустимого множества // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 12. – С. 41–45.
7. *Андрианова А.А., Заботин Я.И.* Управление процессом минимизации в параметризованном методе центров // Изв. вузов. Матем. – 2002. – № 12. – С. 3–10.
8. *Андрианова А.А.* Параметризация метода центров для минимизации явно квазивыпуклых функций // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2006. – Вып. 26.– С. 3–12.
9. *Андрианова А.А.* Принципы построения аппроксимации допустимого множества при решении задач условной оптимизации с заданной точностью // Труды XV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 2. Математическое программирование. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 35–38.
10. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.
11. *Заботин Я.И., Даньшин И.Н.* Алгоритмы с комбинированием, параметризацией и двусторонним приближением в методе центров // Изв. вузов. Матем. – 1998. – № 12. – С. 40–48.
12. *Заботин Я.И.* Минимаксный метод решения задачи математического программирования // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С. 36–43.
13. *Фукин И.А.* ρ-аппроксимируемость выпуклых функций // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. конф., Екатеринбург, 2–6 февр. 2004 г. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. – С. 306–307.
14. *Кораблев А.И.* О релаксационных методах минимизации псевдовыпуклых функций // Исследование по прикладной математике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – С. 3–8.

Поступила в редакцию
07.06.12

Андрианова Анастасия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Anastasiya.Andrianova@ksu.ru*