УДК 519.63+517.977.58

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ, ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ

Д.Г. Залялов, А.В. Лапин

Аннотация

Рассмотрена задача оптимального управления правой частью линейного эллиптического уравнения при наличии поточечных ограничений на функцию управления и нелокального ограничения на функцию состояния системы. Построены сеточная аппроксимация задачи, доказано существование единственного приближенного решения и сходимость к точному при измельчении сетки. Изучена сходимость двух классов итерационных методов решения полученной сеточной задачи оптимизации. Проведено сравнение численных результатов, полученных разными методами, проанализирована зависимость скорости сходимости от шага сетки и параметра регуляризующего слагаемого в целевом функционале.

Ключевые слова: линейное эллиптическое уравнение, оптимальное управление, конечно-разностная аппроксимация, итерационные методы.

Введение

Задачи оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных при наличии ограничений на состояние системы, представляют собой весьма сложный объект численного анализа.

Известны два основных подхода при решении указанных задач оптимального управления. В первом из них для дифференциальной задачи строится функция Лагранжа и затем находятся ее стационарные точки. Основная трудность в этом случае связана с отсутствием какой-либо гладкости множителей Лагранжа, которые являются лишь мерами. В связи с этим используются методы регуляризации дифференциальных задач (регуляризации типа Моро – Иосиды или Лаврентьева), затем регуляризованные задачи аппроксимируются конечномерными задачами и решаются каким-либо из известных методов (см. статьи [1–7] и библиографию в них). Второй подход к решению задач оптимального управления, в том числе с ограничениями на состояние, состоит в первоначальной аппроксимации дифференциальной задачи с использованием, как правило, сеточных методов, и в дальнейшем решении дискретной задачи оптимизации с ограничениями-равенствами и ограничениями-неравенствами. Несмотря на «классический» характер таких задач (см. монографии [8–10]), проблемы построения эффективных итерационных методов их решения продолжают оставаться актуальными [11], поскольку в большинстве случаев эти задачи характеризуются очень высокой размерностью и плохой обусловленностью.

Настоящая статья является продолжением исследований в области построения и теоретического и численного анализа итерационных методов решения сеточных задач оптимального управления с ограничениями на функции управления и состояния (см. [12–14]).

Рассматривается следующая задача оптимального управления. В качестве задачи состояния выступает однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$:

$$-\Delta y = u, \quad x \in \Omega, \quad y(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1}$$

Здесь u – функция управления, решение y – состояние системы. Множества ограничений на функции управления и состояния задаются формулами

$$U_{ad} = \{u \in L_2(\Omega) : |u(x)| \leqslant 1 \ \forall x \in \Omega\}, \quad Y_{ad} = \left\{ y \in H_0^1(\Omega) : \int\limits_\Omega y(x)\,dx \leqslant 1 \right\},$$

а целевой функционал имеет вид

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (y - y_d)^2\,dx + \frac{r}{2}\int\limits_\Omega u^2\,dx, \quad r = \mathrm{const} > 0, \quad y_d \in L_2(\Omega).$$

Рассматриваемая задача оптимального управления аппроксимирована конечно-разностной задачей на равномерной сетке в случае квадратной области Ω. Изучена однозначная разрешимость исходной и сеточной задач, сходимость приближенных решений к точному. Наряду с исходной дискретной задачей оптимального управления рассмотрена регуляризованная задача. Получена оценка нормы разности решений исходной и регуляризованной задач.

Для обеих конечномерных задач построены итерационные методы решения, доказана их сходимость. Проведены численные эксперименты, направленные на сравнение скорости сходимости предложенных итерационных методов, в том числе при уменьшении шага сетки, и параметра r.

1. Аппроксимация задачи оптимального управления

Обобщенная постановка задачи состояния (1) формулируется в виде интегрального тождества

$$y \in H_0^1(\Omega) : \quad \int\limits_\Omega \nabla y \cdot \nabla z\,dx = \int\limits_\Omega uz\,dx \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

Оно имеет единственное решение $y \in H_0^1(\Omega)$ при любой правой части $u \in L_2(\Omega)$, при этом справедливо неравенство устойчивости

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k\|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad k = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Задача оптимального управления*

$$\begin{gathered} \textit{найти} \min_{(y,u)\in K} J(y,u), \\ K = \{(y,u) : y \in Y_{ad},\ u \in U_{ad}, \ \ \textit{выполнено } (2)\}, \end{gathered} \tag{4}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Множества U_{ad} и Y_{ad} выпуклы и замкнуты, при этом U_{ad} ограничено. Отсюда, а также из линейности уравнения состояния (2) и неравенства устойчивости (3) следует выпуклость, замкнутость и ограниченность множества K. Функционал J – непрерывный и строго выпуклый в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Из приведенных свойств K и J следует существование единственного решения задачи (4). □

Пусть $\Omega = (0,1)\times(0,1)$. Построим конечно-разностную аппроксимацию задачи (4) на равномерной сетке $\omega_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh),\ i,j = 0,1,\ldots,n{+}1;\ (n{+}1)h = 1\}$, считая, что функции u и y_d непрерывны. Будем обозначать через v_{ij} узловые параметры сеточной функции v_h, то есть $v_{ij} = v_h(ih, jh)$.

Конечно-разностные аппроксимации задачи состояния (2), множеств ограничений на сеточные функции управления u_h и состояния y_h и целевого функционала имеют соответственно вид:

$$\begin{cases} \dfrac{-y_{i-1j} + 2y_{ij} - y_{i+1j}}{h^2} + \dfrac{-y_{ij-1} + 2y_{ij} - y_{ij+1}}{h^2} = u_{ij}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n, \\ y_{0j} = y_{j0} = y_{jn+1} = y_{n+1j} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$U^h_{ad} = \{u_h :\, |u_{ij}| \leqslant 1,\ i,j = 1,2,\ldots,n\}, \quad Y^h_{ad} = \{y_h :\, h^2 \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij} \leqslant 1\}.$$

$$J_h(y_h, u_h) = \frac{h^2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(y_{ij} - y_{d,ij})^2 + \frac{rh^2}{2}\sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}^2.$$

В результате получаем конечномерную задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} \text{найти} \min_{(y_h,u_h)\in K_h} J_h(y_h, u_h), \\ K_h = \{(y_h, u_h) :\ y_h \in Y^h_{ad}, u_h \in U^h_{ad},\ \text{выполнено уравнение (5)}\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Аналогично лемме 1 легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Задача* (6) *имеет единственное решение.*

Проведем исследование сходимости последовательности решений задачи (6) при $h \to 0$ к решению задачи (4). С этой целью прежде всего запишем конечно-разностную задачу (6) в виде задачи для сеточных функций из конечномерного подпространства пространства $H^1_0(\Omega)\times L_2(\Omega)$.

Пусть каждая ячейка $[x_1, x_1{+}h]\times[x_2, x_2{+}h]$ сетки ω_h разбита на два треугольника диагональю, параллельной биссектрисе положительного квадранта. Множество полученных треугольников e_i образует триангуляцию T_h замыкания области Ω. Обозначим через $V_h = \{y_h \in C(\bar\Omega)\cap H^1_0(\Omega) :\ y_h(x)$ линейна на каждом $e_i \in T_h\} \subset H^1_0(\Omega)$ пространство конечных элементов.

Пусть далее $\delta(x) = [x_1 - h/2, x_1 + h/2]\times[x_2 - h/2, x_2 + h/2]$ для $x \in \omega_h$ и $W_h \subset L_2(\Omega)$ – это пространство кусочно-постоянных функций, постоянных на $\delta(x)$ и продолженных нулем на $\Omega \setminus \bigcup\limits_{x\in\omega} \delta(x)$.

Ясно, что функции $y_h \in V_h$ и $\widetilde{y}_h \in W_h$ однозначно определяются своими узловыми значениями $\{y_{ij}\}$ в узлах сетки ω_h, поэтому между y_h и $\widetilde{y}_h$ существует взаимно-однозначное соответствие. Кроме того, справедливо неравенство:

$$\|y_h - \widetilde{y}_h\|_{L_2} \leqslant ch\|y_h\|_{H^1}. \tag{7}$$

Используя введенные обозначения, сеточную задачу состояния перепишем в виде

$$\int_\Omega \nabla y_h\cdot\nabla z_h\,dx = \int_\Omega \widetilde{u}_h\widetilde{z}_h\,dx \quad \forall\, z_h \in V_h, \tag{8}$$

а сеточную задачу оптимального управления (6) в следующем виде:

$$\begin{gathered} \text{найти} \min_{(y_h,\widetilde{u}_h)\in K_h}\{J_h(y_h, u_h) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y_h - y_{dh})^2\,dx + \frac{r}{2}\int_\Omega \widetilde{u}_h^2\,dx\}, \\ K_h = \{(y_h, \widetilde{u}_h) :\ y_h \in Y^h_{ad}, \widetilde{u}_h \in U^h_{ad}\ \text{и выполнено уравнение (8)}\}. \end{gathered} \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть* $(y_h, \widetilde{u}_h) \in K_h$ *и последовательность* $\{(y_h, \widetilde{u}_h)\}$ *слабо в* $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ *сходится к* (y, u). *Тогда* $(y, u) \in K$.

Доказательство. Возьмем функцию $z \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ и обозначим через z_h и $\widetilde{z}_h$ ее V_h- и W_h-интерполянты (сеточные функции из соответствующих пространств, совпадающие с $z(x)$ в узлах сетки ω_h). Тогда последовательность $\{z_h\}$ сходится сильно в H^1 к z, а последовательность $\{\widetilde{z}_h\}$ сходится к z сильно в L_2. Переходя к пределу при $h \to 0$ в интегральном тождестве

$$\int\limits_{\Omega} \nabla y_h \cdot \nabla z_h \, dx = \int\limits_{\Omega} \widetilde{u}_h \widetilde{z}_h \, dx, \quad \forall\, z_h \in V_h,$$

получим (2). Поскольку пространство $C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ плотно в $H_0^1(\Omega)$, то пара (y, u) удовлетворяет уравнению состояния (2).

Множества $Y_{ad} \subset H_0^1(\Omega)$ и $U_{ad} \subset L_2(\Omega)$ выпуклы и замкнуты, следовательно, слабо замкнуты, поэтому $y \in Y_{ad}$, $u \in U_{ad}$. В итоге $(y, u) \in K$. □

Лемма 4. *Для любой пары функций* $(y, u) \in K$ *найдется последовательность* $\{(y_h, \widetilde{u}_h)\}$ *функций из* K_h, *которая сильно в* $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ *сходится к* (y, u).

Доказательство. Пусть $(y, u) \in K$, в частности $\int\limits_{\Omega} y(x)\, dx \leqslant 1$. Поскольку последовательность $(y_\eta, u_\eta) = \eta(y, u)$ принадлежит K и сильно в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ сходится к (y, u) при $\eta \to 1 - 0$, то можно доказывать утверждение леммы для пары $(y, u) \in K$ такой, что $\int\limits_{\Omega} y(x)\, dx \leqslant \eta < 1$.

Определим $\widetilde{u}_h \in W_h$ равенством $\widetilde{u}_h = h^{-2} \int\limits_{\delta(x)} u(t)\, dt$ на ячейке $\delta(x)$ и пусть y_h – решение уравнения состояния (8) с правой частью $\widetilde{u}_h$. Тогда $\widetilde{u}_h \in U_{ad}^h$, последовательность $\widetilde{u}_h$ сильно в $L_2(\Omega)$ сходится к u и последовательность y_h сильно в $H^1(\Omega)$ сходится к y при $h \to 0$. Из последнего утверждения вытекает, что $\int\limits_{\Omega} y_h\, dx \to \int\limits_{\Omega} y\, dx \leqslant \eta < 1$, поэтому, начиная с некоторого $h(\eta)$, функции $y_h \in Y_{ad}^h$. Таким образом, начиная с $h \leqslant h(\eta)$, последовательность $(y_h, \widetilde{u}_h)$ принадлежит K_h и сильно в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ сходится к (y, u). □

Теорема 1. *Последовательность решений* $\{(y_h, \widetilde{u}_h)\}$ *сеточных задач оптимального управления* (9) *сильно в* $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ *сходится к решению* (y, u) *задачи оптимального управления* (4).

Доказательство. Из (8) и ограниченности $\|\widetilde{u}_h\|_{L_2}$ следует ограниченность $\|y_h\|_{H^1}$. Отсюда и из неравенства (7) следует существование подпоследовательности (сохраним за ней обозначение $(y_h, \widetilde{u}_h)$) и пары $(y, u) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ таких, что

$y_h \to y$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$ при $h \to 0$,

$\widetilde{y}_h \to y$ сильно в $L_2(\Omega)$, $\widetilde{u}_h \to u$ слабо в $L_2(\Omega)$ при $h \to 0$.

В силу леммы 3 предельная пара (y, u) принадлежит K, а согласно лемме 4 для любой пары функций $(z, v) \in K$ существует последовательность $(z_h, \widetilde{v}_h)$ из K_h, сильно в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ сходящаяся к (z, v). Поэтому

$$J(y, u) \leqslant \liminf_{h \to 0} J_h(y_h, \widetilde{u}_h) \leqslant \lim_{h \to 0} J_h(z_h, \widetilde{v}_h) = J(z, v). \tag{10}$$

Итак, пара (y, u) является решением задачи (4). В силу единственности решения и вся последовательность $\{(y_h, \widetilde{u}_h)\}$ слабо в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ сходится к (y, u).

Докажем ее сильную сходимость. Для этого возьмем в цепочке неравенств (10) последовательность $(z_h, \widetilde{v}_h)$ из K_h, сильно в $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ сходящуюся к (y, u), откуда получим, что последовательность $J_h(y_h, \widetilde{u}_h)$ стремится при $h \to 0$ к $J(y, u)$. Поскольку $y_h \to y$, $y_{dh} \to y_d$ сильно в $L_2(\Omega)$, то $\int\limits_\Omega (y_h - y_{dh})^2\,dx \to \int\limits_\Omega (y - y_d)^2\,dx$, поэтому и $\int\limits_\Omega \widetilde{u}_h^2 dx \to \int\limits_\Omega u^2\,dx$ при $h\, to 0$. Вместе со слабой сходимостью в $L_2(\Omega)$ последовательности $\{\widetilde{u}_h\}$ к u это влечет ее сильную сходимость. Осталось доказать сильную сходимость в $H_0^1(\Omega)$ последовательности решений $\{y_h\}$ уравнения состояния (8) к y. Пусть z_h сильно в $H_0^1(\Omega)$ стремятся к y. Тогда, используя уравнения состояния (8), получим

$$\int\limits_\Omega \nabla(y_h - z_h) \cdot \nabla(y_h - z_h)\,dx = \int\limits_\Omega \widetilde{u}_h(\widetilde{y}_h - \widetilde{z}_h)\,dx - \int\limits_\Omega \nabla z_h \cdot \nabla(y_h - z_h)\,dx.$$

Левая часть этого равенства стремится к нулю, поэтому $\|y_h - z_h\|_{H^1} \to 0$, откуда следует сильная сходимость $\{y_h\}$ к y в $H_0^1(\Omega)$. □

2. Конечномерные седловые задачи

Пусть множество внутренних узлов x_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, сетки ω_h каким-либо образом упорядочено. Поставим во взаимно-однозначное соответствие сеточным функциям векторы из $\mathbb{R}^N$, $N = n^2$, их узловых параметров с координатами, соответствующими выбранному упорядочению узлов. Далее $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ – это евклидова норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

Система линейных уравнений (5) может быть записана в виде $Ly = u$ с симметричной и положительно определенной матрицей L – матрицей сеточного оператора Лапласа при нулевых граничных условиях Дирихле. Отметим, что минимальное собственное число L равно $\mu_{\min} = \dfrac{8}{h^2}\sin^2\dfrac{\pi h}{2}$ и ограничено снизу константой, не зависящей от h.

Множества ограничений в сеточной задаче принимают вид:

$$U_{ad} = \{u \in \mathbb{R}^N : |u_i| \leqslant 1 \ \ \forall i\}, \quad Y_{ad} = \{y \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N h^2 y_i \leqslant 1 \ \forall i\},$$

а целевая функция после деления на h^2 равна $\dfrac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \dfrac{r}{2}\|u\|^2$. Пусть $\varphi(u) = I_{U_{ad}}(u)$ и $\theta(y) = I_{Y_{ad}}(y)$ – индикаторные функции множеств U_{ad} и Y_{ad}. В итоге сеточная задача оптимального управления (6) преобразуется к виду

$$\min_{Ly=u}\left\{J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2 + \varphi(u) + \theta(y)\right\}. \tag{11}$$

Определим функцию Лагранжа для задачи (11) равенством

$$\mathcal{L}(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2 + \varphi(u) + \theta(y) - (Ly - u, \lambda). \tag{12}$$

Седловая точка функции Лагранжа является решением (см., например, [16]) следующей системы, дающей условия оптимальности первого порядка:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & -L \\ 0 & rE & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\theta(y) \\ \partial\varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Лемма 5. *Задача* (13) *имеет решение* (y, u, λ), *при этом пара* (y, u) *определяется однозначно и совпадает с решением задачи* (11).

Доказательство. Введем следующие обозначения: $x = (y, u)$, $\psi(x) = (\theta(y), \varphi(u))$,

$$C = \begin{pmatrix} -L & E \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & rE \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Матрица A положительно определена, в то время как матрица C имеет полный ранг. Кроме того, пара векторов $(y, u) = (0, 0)$ является внутренней точкой множества $Y_{ad} \times U_{ad}$ и удовлетворяет уравнению $Ly = u$. Перечисленные свойства обеспечивают справедливость сформулированного результата (см. [13, гл. 5]). $\square$

Пусть теперь индикаторная функция $\theta(y) = I_{Y_{ad}}(y)$ множества Y_{ad} аппроксимирована дифференцируемой функцией

$$\theta_\varepsilon(y) = \frac{1}{2\,\varepsilon}\left(\Big(\sum_{i=1}^{N} h^2 y_i - 1\Big)^+\right)^2.$$

Рассмотрим наряду с седловой задачей (13) следующую регуляризованную задачу:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & -L \\ 0 & rE & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\varepsilon \\ u_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla\theta_\varepsilon(y_\varepsilon) \\ \partial\varphi(u_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Здесь градиент $\nabla\theta_\varepsilon(y)$ функции $\theta(y)$ – вектор с постоянными координатами, равными $\dfrac{1}{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^{N} h^2 y_i - 1\Big)^+$.

Аналогично лемме 5 нетрудно доказать, что задача (15) имеет решение $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ с единственными компонентами y_ε и u_ε. Более того, λ_ε также определяется однозначно из равенства $\lambda_\varepsilon = L^{-1}(y_\varepsilon - y_d + \nabla\theta_\varepsilon(y_\varepsilon))$.

Оценку близости решений исходной и регуляризованной задач дает следующая

Лемма 6. *Пусть* $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ *– решение регуляризованной задачи* (15), (y, u, λ) *– решение исходной седловой задачи* (13), $\gamma_y \in \partial\theta(y)$ *– соответствующий этому решению однозначно определяемый вектор из множества* $\partial\theta(y)$, *то есть* $\gamma_y = y_d - y + L\lambda$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|y_\varepsilon - y\| + r\,\|u_\varepsilon - u\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\gamma_y\|^2. \tag{16}$$

Доказательство. Будем использовать введенные ранее обозначения для векторов и матриц A и C (см. (14)) и пусть, кроме того, $\psi_\varepsilon(x) = (\theta_\varepsilon(y), \varphi(u))$. Используя эти обозначения и вычитая (13) из (15), получим

$$\begin{pmatrix} A & -C^T \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\varepsilon - x \\ \lambda_\varepsilon - \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\psi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \partial\psi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \ni 0.$$

Умножая теперь скалярно соотношения этой системы соответственно на $x_\varepsilon - x$ и $\lambda - \lambda_\varepsilon$ и складывая, приходим к равенству

$$\|y_\varepsilon - y\|^2 + r\,\|u_\varepsilon - u\|^2 + (\nabla\theta_\varepsilon(y_\varepsilon) - \partial\theta(y), y_\varepsilon - y) + (\partial\varphi(u_\varepsilon) - \partial\varphi(u), u_\varepsilon - u) = 0.$$

Из монотонности оператора $\partial\varphi$ следует $(\partial\varphi(u_\varepsilon) - \partial\varphi(u), u_\varepsilon - u) \geqslant 0$. В силу выпуклости θ_ε справедливо неравенство $(\nabla\theta_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon - y) \geqslant \theta_\varepsilon(y_\varepsilon) - \theta_\varepsilon(y) = \theta_\varepsilon(y_\varepsilon)$. В результате получим

$$\|y_\varepsilon - y\|^2 + r\,\|u_\varepsilon - u\|^2 + \theta_\varepsilon(y_\varepsilon) \leqslant (\gamma_y, y_\varepsilon - y), \quad \gamma_y \in \partial\theta(y). \tag{17}$$

Множество ограничений Y_{ad} – это полупространство, граница которого – плоскость $S = \{y : \sum_{i=1}^N h^2 y_i = 1\}$. Вектор $\gamma_y = 0$, если y принадлежит внутренности Y_{ad}, он ортогонален плоскости S и направлен в сторону возрастания $\sum_{i=1}^N h^2 y_i$, если $y \in S$. Поэтому $(\gamma_y, y_\varepsilon - y) > 0$ только в том случае, когда $y_\varepsilon \notin Y_{ad}$. Далее считаем, что y_ε – такой вектор. Обозначим через P_S оператор ортогонального проектирования на плоскость S, тогда

$$\begin{aligned}(\gamma_y, y_\varepsilon - y) &= (\gamma_y, y_\varepsilon - y - P_S(y_\varepsilon - y)) = (\gamma_y, y_\varepsilon - P_S(y_\varepsilon)) = \|\gamma_y\|\|y_\varepsilon - P_S(y_\varepsilon)\| = \\ &= \|\gamma_y\|\big(\sum_{i=1}^N h^2 y_i - 1\big)^+ \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\gamma_y\|^2 + \frac{1}{2\,\varepsilon}\big(\big(\sum_{i=1}^N h^2 y_i - 1\big)^+\big)^2 = \frac{\varepsilon}{2}\|\gamma_y\|^2 + \theta_\varepsilon(y).\end{aligned} \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует оценка (16). □

Замечание 1. a) Если решение седловой задачи (y, u, λ) – единственное, то $\gamma_y \in \partial\theta(y)$ – также единственный вектор, определенный равенством $\gamma_y = y_d - y + L\lambda$.

b) Для оценки близости точного и регуляризованного решений можно использовать в (16) вектор $\gamma_y = y_d - y + L\lambda$ с вычисленными приближениями к y и λ.

c) Величина $\|\gamma_y\|$ в оценке (16) зависит от количества точек сетки, в которых ограничения на вектор состояния y активны, а также от того, насколько эти ограничения «жесткие».

Пусть теперь индикаторная функция φ множества ограничений U_{ad} также заменена регуляризованной функцией

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon}\|(u+1)^-\|^2 + \frac{1}{2\,\varepsilon}\|(u-1)^+\|^2$$

где v^- и v^+ – векторы с координатами u_i^- и v_i^+ соответственно. Рассмотрим полностью регуляризованный вариант задачи:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & -L \\ 0 & rE & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\varepsilon \\ u_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla\theta_\varepsilon(y_\varepsilon) \\ \nabla\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Она имеет единственное решение $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$.

Лемма 7. *Пусть $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ – решение регуляризованной задачи* (19), (y, u, λ) *– решение исходной седловой задачи* (13). *Пусть $\gamma_y \in \partial\theta(y)$ и $\gamma_u \in \partial\varphi(u)$ – соответствующие этому решению однозначно определяемые векторы* *из множеств* $\partial\theta(y)$ *и* $\partial\varphi(u)$, *то есть* $\gamma_y = y_d - y + L\lambda$, $\gamma_u = -ru - \lambda$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|y_\varepsilon - y\| + r\,\|u_\varepsilon - u\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(\|\gamma_y\|^2 + \|\gamma_u\|^2). \tag{20}$$

Доказательство. Почти дословно повторяя доказательство леммы 6, получаем неравенство (аналог (17)):

$$\|y_\varepsilon - y\|^2 + r\,\|u_\varepsilon - u\|^2 + \theta_\varepsilon(y_\varepsilon) + \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant (\gamma_y, y_\varepsilon - y) + (\gamma_u, u_\varepsilon - u),$$

где $\gamma_y \in \partial\theta(y)$, $\gamma_u \in \partial\varphi(u)$. Оценка $(\gamma_y, y_\varepsilon - y) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\|\gamma_y\|^2 + \theta_\varepsilon(y)$ получена выше. Далее,

$$(\gamma_u, u_\varepsilon - u) \leqslant \sum_{i\in I}\gamma_{ui}(u_{\varepsilon i} + 1) + \sum_{i\in J}\gamma_{ui}(u_{\varepsilon i} - 1) = (\gamma_u^-, (u_\varepsilon + 1)^-) + (\gamma_u^+, (u_\varepsilon - 1)^+),$$

где $I = \{i : u_{\varepsilon i} < -1; \text{и } \gamma_{ui} < 0\}$ и $J = \{i : u_{\varepsilon i} > 1 \text{ и } \gamma_{ui} > 0\}$. Отсюда

$$\begin{aligned}(\gamma_u, u_\varepsilon - u) &\leqslant (\gamma_u^-, (u_\varepsilon + 1)^-) + (\gamma_u^+, (u_\varepsilon - 1)^+) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2\,\varepsilon}(\|(u_\varepsilon + 1)^-\|^2 + \|(u_\varepsilon - 1)^+\|^2) + \frac{\varepsilon}{2}(\|\gamma_u^-\|^2 + \|\gamma_u^+\|^2) = \\ &= \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\|\gamma_u\|^2.\end{aligned} \tag{21}$$

Объединяя полученные оценки, приходим к (20). □

3. Итерационные методы решения седловых задач

3.1. Градиентный метод решения регуляризованной задачи (15)**.** Разрешив третье уравнение в системе (15) относительно y_ε и затем первое уравнение относительно λ_ε, получим включение для вектора u_ε (в дальнейшем опускаем индекс ε у вектора u_ε):

$$ru + L^{-2}u + L^{-1}\nabla\theta_\varepsilon(L^{-1}u) + \partial\varphi(u) \ni L^{-1}y_d. \tag{22}$$

Применим для решения (22) одношаговый итерационный метод

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + P_\varepsilon u^k + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni L^{-1}y_d, \tag{23}$$

где $P_\varepsilon = rE + L^{-2} + L^{-1}\nabla\theta_\varepsilon \circ L^{-1}$.

Алгоритм реализации метода (23) состоит из следующих шагов.

1. Для известного вектора управления u^k находим решение уравнения состояния $Ly^k = u^k$;

2. Находим сопряженное состояние $\lambda^k = L^{-1}(y^k - y_d + \nabla\theta_\varepsilon(y^k))$.

3. Находим новое приближение к вектору управления, решив включение с диагональным максимально монотонным оператором $E + \tau\partial\varphi$:

$$u^{k+1} + \tau\partial\varphi(u^{k+1}) \ni (1 + \tau r)u^k - \tau\lambda^k.$$

При исследовании сходимости и скорости сходимости метода (23) будем использовать следующий результат.

Утверждение 1 [12, Теорема 4]. *Пусть Q – монотонный (в общем случае многозначный) оператор, а оператор P удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned}&(P(u)-P(v),u-v)\geqslant\alpha\|u-v\|_B^2,\\&(P(u)-P(v),w)\leqslant\beta^{1/2}\,(P(u)-P(v),u-v)^{1/2}\|w\|_B,\end{aligned}\tag{24}$$

где B – симметричная и положительно определенная матрица. Тогда итерации стационарного одношагового метода

$$\frac{1}{\tau}B(u^{k+1}-u^k)+P(u^k)+Q(u^{k+1})\ni 0$$

сходятся к решению включения $P(u)+Q(u)\ni 0$ при $\tau\in(0,2/\beta)$ и любом начальном приближении u^0. Для оптимального параметра $\tau=1/\beta$ справедлива оценка

$$\|u^{k+1}-u\|_B\leqslant\rho^{1/2}\|u^k-u\|_B,\quad \rho=1-\alpha/\beta.\tag{25}$$

Теорема 2. *Итерационный метод* (23) *сходится при*

$$0<\tau<\frac{2\varepsilon}{\mu_{\min}^{-2}+\varepsilon(r+\mu_{\min}^{-2})},$$

где $\mu_{\min}$ – минимальное собственное число сеточного оператора Лапласа. При

$$\tau=\frac{\varepsilon}{\mu_{\min}^{-2}+\varepsilon(r+\mu_{\min}^{-2})}$$

скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|u^{k+1}-u\|\leqslant\rho^{1/2}\|u^k-u\|,\quad \rho=1-\frac{r\,\varepsilon}{\mu_{\min}^{-2}+\varepsilon(r+\mu_{\min}^{-2})}.$$

Доказательство. Используем утверждение 1 с единичной матрицей B. Достаточно получить оценки вида (27) для оператора $P_\varepsilon=P_1+P_{2\,\varepsilon}$, где

$$P_1=L^{-2}+rE,\quad P_{2\,\varepsilon}=L^{-1}\,\nabla\theta_\varepsilon\circ L^{-1}.$$

Для P_1 справедливы оценки $rE\leqslant P_1\leqslant(r+\mu_{\min}^{-2})E$. Далее, оператор $P_{2\,\varepsilon}$ – монотонный:

$$(P_{2\,\varepsilon}(u)-P_{2\,\varepsilon}(v),u-v)=(\nabla\theta_\varepsilon(L^{-1}u)-\nabla\theta_\varepsilon(L^{-1}v),\quad L^{-1}u-L^{-1}v)\geqslant 0.$$

Для вывода второй оценки для $P_{2\,\varepsilon}$ докажем одно вспомогательное неравенство для вектора $\nabla\theta_\varepsilon(y)$. Напомним, что $\nabla\theta_\varepsilon(y)$ – это вектор с постоянными координатами, равными $\dfrac{1}{\varepsilon}wide\widetilde{y}^+$, $\widetilde{y}=\sum\limits_{i=1}^N h^2y_i-1$. Поэтому

$$(\nabla\theta_\varepsilon(y)-\nabla\theta_\varepsilon(z),y-z)=\frac{1}{\varepsilon}(\widetilde{y}^+-\widetilde{z}^+)\sum_{i=1}^N(y_i-z_i)=\frac{1}{h^2\varepsilon}(\widetilde{y}^+-\widetilde{z}^+)(\widetilde{y}-\widetilde{z})\ \geqslant$$

$$\geqslant\ \frac{1}{h^2\varepsilon}(\widetilde{y}^+-\widetilde{z}^+)^2$$

и как следствие

$$(\nabla\theta_\varepsilon(y) - \nabla\theta_\varepsilon(z), x) = \frac{1}{\varepsilon}(\widetilde{y}^+ - \widetilde{z}^+)\sum_{i=1}^{N} x_i \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\nabla\theta_\varepsilon(y) - \nabla\theta_\varepsilon(z), y-z)^{1/2} h \sum_{i=1}^{N}|x_i| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\nabla\theta_\varepsilon(y) - \nabla\theta_\varepsilon(z), y-z)^{1/2}\|x\|. \quad (26)$$

В силу неравенства (26) справедлива следующая оценка для $P_{2\,\varepsilon}$:

$$(P_{2\,\varepsilon}(u) - P_{2\,\varepsilon}(v), w) \leqslant \frac{1}{\mu_{\min}\sqrt{\varepsilon}}\,(P_{2\,\varepsilon}(u) - P_{2\,\varepsilon}(v), u-v)^{1/2}\big\|w\big\|,$$

Объединяя оценки для P_1 и $P_{2\,\varepsilon}$, получим

$$\begin{aligned} &(P_\varepsilon(u) - P_\varepsilon(v), u-v) \geqslant r\big\|u-v\big\|^2, \\ &(P_\varepsilon(u) - P_\varepsilon(v), w) \leqslant \beta^{1/2}\,(P_\varepsilon(u) - P_\varepsilon(v), u-v)^{1/2}\big\|w\big\|, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\beta = \mu_{\min}^{-2} + r + \mu_{\min}^{-2}\varepsilon^{-1}$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться утверждением 1. □

3.2. Предобусловленный метод Узавы для исходной задачи. Исключив векторы y и u в системе (13), получим уравнение для λ

$$P(\lambda) \equiv L(E+\partial\theta)^{-1}(L\lambda + y_d) - (rE+\partial\varphi)^{-1}(-\lambda) = 0. \quad (28)$$

Применим для решения (28) итерационный метод

$$L^2\,\frac{\lambda^{k+1}-\lambda^k}{\tau} + P(\lambda^k) = 0, \quad (29)$$

являющийся предобусловленным методом Узавы для отыскания седловой точки функции Лагранжа (12). При реализации этого метода выполняются следующие шаги.

1. Для известного вектора λ^k находим y^k и u^k, решив включения с диагональными максимально монотонными операторами

$$(E+\partial\theta)y^k \ni L\lambda^k + y_d \ \text{ и } \ (r\,E+\partial\varphi)u^k \ni -\lambda^k.$$

2. Вычисляем $p^k = L^{-1}u^k$.
3. Решаем уравнение

$$L\frac{\lambda^{k+1}-\lambda^k}{\tau} = -y^k + p^k.$$

Теорема 3. *Итерационный метод* (29) *сходится при условии*

$$0 < \tau < \frac{2r}{r+\mu_{\min}^{-2}}. \quad (30)$$

Доказательство. Согласно [13] итерационный метод (29) сходится, если выполнено неравенство

$$L^2 > \frac{\tau}{2}CA^{-1}C^T, \quad (31)$$

где A и C – матрицы, определенные в (14). Поскольку

$$CA^{-1}C^T = L^2 + r^{-1}E \leqslant (1 + r^{-1}\mu_{\min}^{-2})L^2,$$

условие (31) выполнено при $\tau < \dfrac{2r}{r + \mu_{\min}^{-2}}$. □

Рассмотрим теперь метод Узавы для полностью регуляризованной задачи (19) и получим оценку скорости сходимости и теоретически оптимальный итерационный параметр τ.

Исключив векторы y и u в системе (19), для нахождения λ получим уравнение

$$P_\varepsilon(\lambda) \equiv L(E + \nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(L\lambda + y_d) - (rE + \nabla\varphi_\varepsilon)^{-1}(-\lambda) = 0. \tag{32}$$

Применим для решения (32) итерационный метод

$$L^2\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} + P_\varepsilon(\lambda^k) = 0. \tag{33}$$

Теорема 4. *Итерационный метод* (29) *сходится при условии*

$$0 < \tau < \frac{2r}{r + \mu_{\min}^{-2}}. \tag{34}$$

При

$$\tau = \frac{r}{r + \mu_{\min}^{-2}}$$

скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|u^{k+1} - u\| \leqslant \rho^{1/2}\|u^k - u\|, \quad \rho = 1 - \frac{r\,\varepsilon}{(1+\varepsilon)(r + \mu_{\min}^{-2})}.$$

Доказательство. В очередной раз используем утверждение 1, полагая $B = L^2$, $P = P_{1\varepsilon} + P_{2\varepsilon}$, $P_{1\varepsilon}(\lambda) = L(E+\nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(L\lambda+y_d)$, $P_{2\varepsilon}(\lambda) = -(rE+\nabla\varphi_\varepsilon)^{-1}(-\lambda)$.

Непосредственные вычисления дают равенство

$$(E + \nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(y)_i = y_i - \frac{1}{1+\varepsilon}\widetilde{y}^+ \quad \forall\, i,$$

из которого следует неравенство

$$\begin{aligned}((E + \nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(y) - (E + \nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(z), y - z) &= \\ = \|y - z\|^2 - \frac{1}{1+\varepsilon}(\widetilde{y}^+ - \widetilde{z}^+, y - z) &\geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|y - z\|^2.\end{aligned}$$

Это неравенство влечет равномерную монотонность оператора $P_{1\varepsilon}$:

$$(P_{1\varepsilon}(\lambda) - P_{1\varepsilon}(\mu), \lambda - \mu) \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|L(\lambda - \mu)\|^2 \quad \forall\, \lambda,\, \mu.$$

Оператор $P_{2\varepsilon}$ также монотонный:

$$(P_{2\varepsilon}(\lambda) - P_{2\varepsilon}(\mu), \lambda - \mu) = (-(rE+\nabla\varphi_\varepsilon)^{-1}(-\lambda) + (rE+\nabla\varphi_\varepsilon)^{-1}(-\mu), \lambda - \mu) \geqslant 0 \quad \forall\, \lambda,\, \mu.$$

Далее, из неравенств

$$\|(E + \nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(y) - (E + \nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(z)\| \leqslant ((E + \nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(y) - (E + \nabla\theta_\varepsilon)^{-1}(z), y - z)^{1/2},$$

$$\|(rE+\nabla\varphi_\varepsilon)^{-1}(y)-(rE+\nabla\varphi_\varepsilon)^{-1}(z)\| \leqslant \frac{1}{r}((rE+\nabla\varphi_\varepsilon)^{-1}(y)-(rE+\nabla\varphi_\varepsilon)^{-1}(z), y-z)^{1/2}$$

следуют оценки сверху для операторов $P_{1\varepsilon}$ и $P_{2\varepsilon}$:

$$(P_{1\varepsilon}(\lambda) - P_{1\varepsilon}(\mu), \zeta) \geqslant (P_{1\varepsilon}(\lambda) - P_{1\varepsilon}(\mu), \lambda - \mu)^{1/2} \|L\zeta\| \quad \forall\, \lambda,\, \mu,\, \zeta.$$

$$(P_{2\varepsilon}(\lambda) - P_{2\varepsilon}(\mu), \zeta) \leqslant \frac{1}{r^{1/2}}(P_{2\varepsilon}(\lambda) - P_{2\varepsilon}(\mu), \lambda - \mu)^{1/2}\|\zeta\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{r^{1/2}\mu_{\min}}(P_{2\varepsilon}(\lambda) - P_{2\varepsilon}(\mu), \lambda - \mu)^{1/2}\|L\zeta\| \quad \forall\, \lambda,\, \mu,\, \zeta.$$

Объединяя оценки для $P_{1\,\varepsilon}$ и $P_{2\,\varepsilon}$, получим

$$(P_\varepsilon(u) - P_\varepsilon(v), u - v) \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\big\|u - v\big\|^2,$$
$$(P_\varepsilon(u) - P_\varepsilon(v), w) \leqslant \beta^{1/2}\,(P_\varepsilon(u) - P_\varepsilon(v), u - v)^{1/2}\big\|w\big\|,$$

где $\beta = 1 + \dfrac{1}{r^{1/2}\mu_{\min}}$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться утверждением 1. □

Как видно из оценок теорем 2 и 4, градиентный метод и метод Узавы для регуляризованных задач сравнимы по скорости сходимости (асимптотически по ε они имеют одинаковую скорость сходимости). При этом в методе Узавы допустимый интервал для итерационного параметра не зависит от ε, более того, теоретически оптимальный параметр

$$\tau = \frac{r}{r + \mu_{\min}^{-2}}$$

также не зависит от ε. Поэтому формальный переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ дает теоретически «оптимальный» итерационный параметр в методе Узавы для исходной (нерегуляризованной) задачи. Численные эксперименты показывают, что численно оптимальный параметр τ близок к указанному значению.

3.3. Контроль точности и критерии остановки. Для контроля точности итераций мы используем оценку нормы вектора невязки, определение которого в случае решения включения с многозначным оператором, дано ниже.

При решении системы

$$Ax - C^T\lambda + \partial\psi(x) \ni f, \quad Cx = 0$$

каким-либо итерационным методом, мы находим не только приближение (x^k, λ^k) к точному решению (x, λ), но и единственный вектор $\gamma^k \in \partial\psi(x^k)$. Определим компоненты вектора невязки равенствами

$$r_x^k = f - Ax^k - \gamma^k + C^T\lambda^k, \quad r_\lambda^k = Cx^k. \tag{35}$$

Тогда вектор погрешности $(x - x^k, \lambda - \lambda^k)^T$ удовлетворяет системе включений

$$\begin{pmatrix} A & -C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x^k \\ \lambda - \lambda^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\psi(x) - \gamma^k \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} r_x^k \\ r_\lambda^k \end{pmatrix}.$$

Умножив скалярно эту систему на вектор $(x - x^k, \lambda - \lambda^k)^T$ и воспользовавшись неравенством $(\partial\psi(x) - \partial\psi(x^k), x - x^k) \geqslant 0$, получим

$$(A(x - x^k), x - x^k) \leqslant (r_x^k, x - x^k) + (r_\lambda^k, \lambda - \lambda^k).$$

Пусть $(Ax,x) \geqslant m\,\|x\|^2$, тогда

$$m\|x-x^k\|^2 \leqslant \|r_x^k\|\|x-x^k\| + \|r_\lambda^k\|\,\|\lambda-\lambda^k\|,$$

или

$$\|x-x^k\| \leqslant c_1\|r_x^k\| + c_2\|\lambda-\lambda^k\|^{1/2}\|r_\lambda^k\|^{1/2} \quad \forall\, k \tag{36}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от номера итерации k. Так как $\|\lambda-\lambda^k\| \to 0$ при $k\to\infty$, то $\|\lambda-\lambda^k\| \leqslant \mathrm{const}$, и неравенство (36) дает информацию о погрешности $\|x-x^k\|$ через оценку норм компонент невязки $\|r_x^k\|$ и $\|r_\lambda^k\|$.

Пусть тройка векторов (y^k,u^k,λ^k) – это k-я итерация градиентного метода (23). При реализации этого метода векторы u^k и λ^k – решения сеточного уравнения состояния и сеточного сопряженного уравнения соответственно – находятся точно (или по крайней мере с очень высокой точностью). Поэтому контролем точности итераций выступает норма вектора невязки во включении для определения приближения к вектору управления u: $\delta_u^k = ru^k + \lambda^k + \gamma_u^k$, где $\gamma_u^k \in \partial\varphi(u^k)$ – вектор, определенный на предыдущем итерационном шаге:

$$\frac{u^k-u^{k-1}}{\tau} + ru^{k-1} + \lambda^{k-1} + \gamma_u^k = 0, \quad \gamma_u^k \in \partial\varphi(u^k).$$

Несложные вычисления дают следующее выражение для невязки:

$$\delta_u^k = \Big(r - \frac{1}{\tau}\Big)(u^k-u^{k-1}) + \lambda^k - \lambda^{k-1}.$$

В качестве нормы берем в дальнейшем сеточный аналог L_2-нормы:

$$\|\delta_u^k\|_{L_2} = \Big(\sum_{i=1}^{N} h^2(\delta_{ui}^k)^2\Big)^{1/2}.$$

Отметим, что малость нормы вектора невязки характеризует близость итерации метода (23) к решению регуляризованной задачи (15), которое, в свою очередь, может достаточно существенно отличаться от решения исходной задачи (13) (см. оценку (16)).

Пусть теперь тройка векторов (y^k,u^k,λ^k) есть k-я итерация метода (29). При реализации этого метода решения двух включений на первом шаге описанного выше алгоритма находятся точно. Поэтому в качестве контроля точности итераций берется L_2-норма вектора невязки $\delta_\lambda^k = Ly^k - u^k$.

4. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты были проведены для задачи с функцией наблюдения $y_d = 10(\sin\pi x_1 + \sin\pi x_2)$ и для разных весовых параметров r в целевой функции. Критерием остановки итераций были условия $\|\delta_u^k\|_{L_2}^2 < 10^{-5}$ и $\|\delta_\lambda^k\|_{L_2}^2 < 10^{-5}$ для методов (23) и (29) соответственно.

В качестве начальных приближений в обоих методах выбирались нулевые векторы. Кроме того, были реализованы варианты итерационных методов, названные двухсеточными. Именно, вначале проводились вычисления на сетке, в два раза более крупной, чем исходная. Затем полученные результаты интерполировались на мелкую сетку и принимались в качестве начальных приближений. Этот прием позволил ускорить вычисления. Как показали численные эксперименты, использование последовательности трех и более сгущающихся сеток не приводят к заметному ускорению сходимости.

Табл. 1

Градиентный метод для регуляризованной задачи, $r = 0.005$, $\varepsilon = 0.02$

n	Решение на одной сетке число итераций, время	Двухсеточный метод число итераций, время
60	946, 00:00:31	1902, 00:00:26
100	950, 00:02:31	1890, 00:01:49
200	951, 00:22:28	1858, 00:13:48

Табл. 2

Метод Узавы, $r = 0.005$

n	Решение на одной сетке число итераций, время	Двухсеточный метод число итераций, время
60	540, 00:00:09	815, 00:00:07
100	901, 00:00:34	1339, 00:00:31
200	1868, 00:04:42	2748, 00:03:56

Табл. 3

Градиентный метод для регуляризованной задачи, $r = 0.01$, $\varepsilon = 0.02$

n	Решение на одной сетке число итераций, время	Двухсеточный метод число итераций, время
60	901, 00:00:30	1851, 00:00:27
100	901, 00:02:27	1829, 00:01:49
200	904, 00:20:46	1801, 00:13:15

Табл. 4

Метод Узавы, $r = 0.01$

n	Решение на одной сетке число итераций, время	Двухсеточный метод число итераций, время
60	955, 00:00:12	1415, 00:00:09
100	1615, 00:00:59	2369, 00:00:42
200	3411, 00:08:14	4973, 00:05:28

Табл. 5

Градиентный метод для регуляризованной задачи, $r = 0.015$, $\varepsilon = 0.02$

n	Решение на одной сетке число итераций, время	Двухсеточный метод число итераций, время
60	868, 00:00:32	1811, 00:00:28
100	867, 00:02:31	1789, 00:01:48
200	869, 00:20:18	1761, 00:12:59

Табл. 6

Метод Узавы, $r = 0.015$

n	Решение на одной сетке число итераций, время	Двухсеточный метод число итераций, время
60	1373, 00:00:17	2009, 00:00:10
100	2328, 00:01:25	3395, 00:00:49
200	4947, 00:11:31	7187, 00:06:59

Результаты вычислений с использованием градиентного метода приведены для регуляризованной задачи с параметром регуляризации $\varepsilon = 0.02$. Выбор меньшего параметра регуляризации приводил к существенному увеличению числа итераций и времени вычислений для достижения заданной точности.

Во всех тестовых расчетах метод Узавы оказался более эффективным, чем градиентный метод для регуляризованной задачи. Результаты расчетов приведены в табл. 1–6, в которых указаны общее количество итераций и время вычислений в формате чч:мм:сс, n – число точек сетки в одном направлении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00629).

Summary

D.G. Zalyalov, A.V. Lapin. Numerical Solution of an Optimal Control Problem Governed by a Linear Elliptic Equation with Non-Local State Constraints.

An elliptic optimal control problem with distributed control, pointwise control constraints and non-local state constraints has been considered. A mesh approximation of the problem has been constructed. The existence and uniqueness of the approximate solution have been established, and the convergence of the approximate solution to the exact one has been proved. The convergence of the two classes of iterative methods of solving the constructed mesh optimal control problem has been studied. The results of the numerical experiments have been compared. The dependence of the convergence rate upon the mesh size and the regularization parameter in the objective functional has been analyzed.

Key words: linear elliptic equation, optimal control, finite difference approximation, iterative method.

Литература

1. *Bergounioux M., Haddou V., Hintermuller M., Kunisch K.* A comparison of a Moreau-Yosida-based active set strategy and interior point methods for constrained optimal control problems // SIAM J. Optim. – 2000. – V. 11, No 2. – P. 495–521.
2. *Bergounioux M., Kunisch K.* Primal-dual active set strategy for state-constrained optimal control problems // Comput. Optim. Appl. – 2002. – V. 22, No 2. – P. 193–224.
3. *Troltzsch F., Pufert U., Weiser M.* The convergence of an interior point method for an elliptic control problem with mixed control-state constraints // Comput. Optim. Appl. – 2008. – V. 39, No 2. – P. 183–218.
4. *Troltzsch F., Yousept I.* A regularization method for the numerical solution of elliptic boundary control problems with pointwise state constraints // Comput. Optim. Appl. – 2009. – V. 42, No 1. – P. 43–66.
5. *Hintermuller M., Hinze M.* Moreau-Yosida regularization in state constrained elliptic control problems: error estimates and parameter adjustment // SIAM J. Numer. Anal. – 2009. – V. 47, No 3. – P. 1666–1683.
6. *Graser C., Kornhuber R.* Nonsmooth Newton methods for set-valued saddle point problems // SIAM J. Numer. Anal. – 2009. – V. 47, No 2. – P. 1251–1273.
7. *Hinze M., Schiela A.* Discretization of interior point methods for state constrained elliptic optimal control problems: Optimal error estimates and parameter adjustment // Comput. Optim. Appl. – 2011. – V. 48, No 3. – P. 581–600.
8. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
9. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.

10. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М: Наука, 1988. – 549 с.

11. *Biegler L.T., Ghattas O., Heinkenschloss M., van Bloemen Waanders B. (eds.)* Large-scale PDE-constrained optimization. – Berlin: Springer-Verlag, 2003. – 350 p.

12. *Laitinen E., Lapin A., Lapin S.* On the iterative solution of finite-dimensional inclusions with applications to optimal control problems // Comp. Methods Appl. Math. – 2010. – V. 10, No 3. – P. 283–301.

13. *Lapin A.* Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. – 2010. – V. 31, No 4. – P. 309–322.

14. *Лапин А.В., Хасанов М.Г.* Решение задачи оптимального управления правой частью эллиптического уравнения при наличии ограничений на состояние // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 4. – С. 56–67.

15. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

16. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 399 с.

Поступила в редакцию
15.05.12

Залялов Динар Гумарович – аспирант кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *dinar1988@mail.ru*

Лапин Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Alexandr.Lapin@ksu.ru*