УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 154, кн. 3 Физико-математические науки *2012*

УДК 517.544

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ С ЯДРОМ Т. КАРЛЕМАНА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Ф.Н. Гарифьянов, Д.Б. Кац

Аннотация

В работе получено решение полиэлементного линейного функционального уравнения для голоморфной в квадрате неизвестной функции путем его сведения к интегральному уравнению с ядром Карлемана. Это уравнение связано с проблемой определения целой функции экспоненциального роста по заданному линейному соотношению между моментами этой функции и коэффициентами разложения в степенной ряд ее преобразования Бореля.

Ключевые слова: задача Карлемана, целые функции экспоненциального типа, проблема моментов.

1. Разностное (функциональное) уравнение

Рассмотрим единичный квадрат

$$R := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{1}{2} \right\}.$$

Обозначим $I = \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $l_1 = -\dfrac{i}{2} + I$, $l_{k+1} = i^k l_1$, $k = 1,2,3$, $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{4} l_k$. Основная цель настоящей работы – исследовать девятиэлементное разностное (функциональное) уравнение

$$\mathfrak{V} f(z) := f(z) + \sum_{j=1}^{8} f(\sigma_j(z)) = g(z), \quad z \in R. \tag{1}$$

Пусть выполнены следующие предположения.

1. Заданная функция $g(z)$ голоморфна в R, а ее граничные значения удовлетворяют условию Гельдера: $g^+ \in H_\mu(\partial R)$, $\mu \in (0,1]$.

2. Функции σ_j – это преобразования (сдвиги) двякопериодической группы с периодами 1 и i, отличные от тождественного преобразования, такие, что $\overline{R} \cap \sigma_j(\overline{R}) \neq \emptyset$;

3. Искомая функция $f(z)$ голоморфна в $D := \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}$, исчезает на бесконечности и имеет граничные значения $f^{\pm}(t)$ на Γ, удовлетворяющие условию Гельдера.

Ясно, что $\mathfrak{V}$ – линейный разностный оператор с постоянными коэффициентами, коммутирующий с дифференцированием. Тем не менее к нему неприменимы обычные методы исследования. Это связано с тем, что множество голоморфности этого оператора распадается на 2 связные компоненты: квадрат R и его внешность. Другими словами, соотношение (1), вообще говоря, не выполняется в области, содержащей замыкание R. Это же справедливо и для однородного уравнения

$$\mathfrak{V} f(z) = 0. \tag{2}$$

Уравнения такого вида рассматривались, например, в книге [1]. Очевидно, что уравнению (2) удовлетворяет и любая производная f, причем система $\{f^{(j)}(z)\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, линейно независима. Для гарантии конечности числа решений дополнительно потребуем, чтобы граничные значения $f^{\pm}(t)$ имели в концах Γ, самое бо́льшее, логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B. Впервые подобный подход и его приложения к проблеме моментов были предложены в работах [2, 3].

2. Интегральное уравнение

Будем искать решение уравнения (1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - z}, \quad z \notin \Gamma, \tag{3}$$

с неизвестной гельдеровской плотностью. Тогда из (1) получаем

$$\mathfrak{A}\varphi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} A(z,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = g(z), \quad z \in R,$$

где

$$A(z,\tau) := \frac{1}{\tau - z} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{\tau - \sigma_j(z)}. \tag{4}$$

Ядро (4) называется ядром Т. Карлемана для двоякопериодической группы. Впервые интегральные операторы с ядрами подобной структуры предложил использовать Т. Карлеман на международном математическом конгрессе в Цюрихе в 1932 г. для регуляризации частного случая задачи, носящей его имя (см. [4]). Однако исследование полученного уравнения Фредгольма Т. Карлеман не провел даже в предложенном им самим случае, когда R – фундаментальный многоугольник фуксовой группы. В дальнейшем целый ряд исследователей с большим или меньшим успехом попытались ликвидировать этот пробел (см., например, [5, 7]). Ценность идеи Т. Карлемана состояла в том, что в его ядре, в отличие от квазиавтоморфного аналога ядра Коши, содержалось лишь конечное число слагаемых. Не вдаваясь в подробности большого числа исследований по этой тематике, отметим следующие три обстоятельства.

1. Задача Карлемана в случае, когда R – фундаментальный многоугольник фуксовой группы, полностью исследована другим методом – сведением к задаче Римана на римановой поверхности [6, 8].

2. В настоящей статье вместо границы параллелограмма периодов рассматривается лишь ее «половина» Γ, то есть интеграл типа Коши (3) является голоморфной, а не кусочно-голоморфной функцией.

3. Впервые классическое ядро Т. Карлемана используется не для исследования краевых задач со сдвигом, а для получения результатов в теории целых функций экспоненциального типа.

Заметим, что в работе [3] использовались ядра, содержащие меньшее число слагаемых, чем ядро (4). В частности, они не содержали в качестве одного из слагаемых ядра Коши.

Теперь вернемся к исследованию уравнения (1). Возьмем точку $t \in \Gamma$ и пусть $z \to t$ из R. Тогда с учетом формулы Ю.В. Сохоцкого-Племеля имеем:

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} A(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = g^{+}(t), \quad t \in \Gamma. \tag{5}$$

Пусть теперь $z \to \alpha(t) \in \partial R \setminus \overline{\Gamma}$. Здесь $\alpha(t) = \{t + i^k,\ t \in l_k\}$ – сдвиг Карлемана, изменяющий ориентацию ∂R и удовлетворяющий условию $\alpha(\alpha(t)) = t$. Он индуцирован порождающими преобразованиями соответствующей двоякопериодической группы и обратными к ним. Поэтому мы получаем

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} A(\alpha(t), \tau)\varphi(\tau)\, d\tau = g^+(\alpha(t)), \quad t \in \Gamma. \tag{6}$$

Вычитая из равенства (5) равенство (6), получаем интегральное уравнение

$$\mathfrak{K}\varphi(t) := \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} K(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau = g^+(t) - g^+(\alpha(t)), \quad t \in \Gamma, \tag{7}$$

с ядром

$$K(t, \tau) := A(t, \tau) - A(\alpha(t), \tau). \tag{8}$$

Уравнение (7) является уравнением Фредгольма 2-го рода, так как ядро (8) ограничено (конкретные оценки см. ниже в доказательстве леммы 1). Рассмотрим вначале соответствующее однородное уравнение

$$\mathfrak{K}\varphi = 0. \tag{9}$$

Лемма 1. *Фундаментальная система решений* (*ф.с.р.*) *уравнения* (9) *содержит не более одной функции.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда ф.с.р. содержит функцию φ со свойством

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(\tau)\, d\tau = 0. \tag{10}$$

Считаем оператор $\mathfrak{K}$ определенным на банаховом пространстве $C(\overline{\Gamma})$ с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(t)| : t \in \overline{\Gamma}\}$. Без ограничения общности предполагаем, что этот максимум достигается на l_1. Положим $u = \tau - t$. Тогда

$$K(t, \tau) = \frac{1}{u + i} + \frac{1}{u + 1 + i} + \frac{1}{u - 1 + i} + \frac{1}{u - 2i} + \frac{1}{u + 1 - 2i} + \frac{1}{u - 1 - 2i}.$$

В силу условия (10) ядро (8) можно заменить разностью $K_1(t, \tau) = K(t, \tau) - K(t, 0)$. Оценим сверху величины

$$b_j(t) = \left| \int\limits_{l_j} K_1(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau \right|.$$

Ясно, что

$$K_1(t, \tau)\tau^{-1} = \frac{1}{(u + i)(t - i)} + \frac{1}{(u + 1 + i)(t - 1 - i)} + \frac{1}{(u - 1 + i)(t + 1 - i)} -$$
$$- \frac{1}{(u - 2i)(t + 2i)} - \frac{1}{(u - 1 - 2i)(t + 1 + 2i)} - \frac{1}{(u + 1 - 2i)(t - 1 + 2i)},$$

причем $|\tau| \le \sqrt{2}/2$. Оценим первое слагаемое этой суммы. Если t и τ лежат на l_1, то мнимые части членов разности $u = \tau - t$ равны между собою, то есть u на отрезке l_1 – вещественное число и минимум модуля $u+i$ составляет 1. Минимум модуля $t-i$ на этом отрезке равен $3/2$. Таким образом,

$$\left|\frac{1}{(u+i)(t-i)}\right| < \frac{2}{3}.$$

Умножив на τ, получим

$$\left|\frac{\tau}{(u+i)(t-i)}\right| < \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}.$$

Эта оценка сохраняет силу и в том случае, когда t лежит на отрезках l_k, $k = 2,3,4$. Аналогично проводится оценка остальных пяти слагаемых. Из этих оценок получаем $|K_1(t,\tau)| < 3$. Отсюда $b_j(t) \le 1.5\|\varphi\|$, $j = 1,2,3,4$. Поскольку $6 < 2\pi$, то отсюда $\|\varphi\| = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Лемма 2. *Фундаментальная система решений уравнения* (9) *содержит единственную функцию* φ_0, *удовлетворяющую условиям*

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi_0(\tau)\,d\tau = 1, \quad \varphi_0(i\tau) = -i\varphi_0(\tau). \tag{11}$$

Фундаментальная система решений союзного уравнения

$$\mathfrak{K}'\varphi = 0 \tag{12}$$

состоит только из постоянной. Неоднородное уравнение (7) *безусловно разрешимо.*

Доказательство. Ядро (4) кососимметрично, то есть

$$\mathfrak{K}'\psi = \psi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A(t,\tau) - A(t,\alpha(\tau)))\psi(\tau)\,d\tau = 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A(t,\tau) - A(t,\alpha(\tau)))\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A(t,\tau)\,d\tau = 1,$$

откуда следует второе утверждение леммы, то есть ф.с.р. однородного уравнения (9) содержит единственную функцию φ_0. Заменим в соотношении (9) τ и t на $-\tau$ и $-t$ соответственно. Тогда функция $\varphi_0(-t)$ также удовлетворяет (3) Значит, функция $\varphi_0(t)$ либо четна, либо нечетна. Но первое невозможно, поскольку из четности следует (10), и в силу леммы 1 получаем $\varphi_0(t) \equiv 0$. Поскольку $\varphi_0(it)$ также удовлетворяет (3), нечетная функция $\varphi_0(t)$ удовлетворяет второму из условий (11). Разрешимость неоднородного уравнения (7) следует из альтернатив Фредгольма, так как

$$\int\limits_{\Gamma}(g^+(t) - g^+(\alpha(t)))\,dt = \int\limits_{\partial R} g^+(t)\,dt = 0,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Получим дополнительную информацию о свойствах φ_0. Поскольку $\mathfrak{K}\varphi_0 = 0$, то $(\mathfrak{A}\varphi_0)^+(t) = (\mathfrak{A}\varphi_0)^+(\alpha(t))$, и силу теории краевой задачи Карлемана со сдвигом α для прямоугольника [9] имеем $\mathfrak{A}\varphi_0 = c$, а в силу нечетности φ_0 эта постоянная равна нулю.

Покажем теперь, что функция φ_0 не может обращаться в нуль во всех концах (узлах) Γ. Другими словами, единственное нетривиальное решение однородного уравнения (2)

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_0(\tau)\,d\tau}{\tau - z} \tag{13}$$

хотя бы на одном конце Γ имеет логарифмическую особенность. Предположим противное. В силу свойств ядра (8) решение $\varphi_0 \in C^\infty(\overline{\Gamma})$. Возьмем уравнение $\mathfrak{A}\varphi_0(z) = 0$ и продифференцируем его. Затем воспользуемся тем свойством ядра (4), что $\partial A/\partial z = -\partial A/\partial\tau$ и проинтегрируем по частям, тогда $\mathfrak{A}\varphi_0'(z) = 0$, следовательно, $\mathfrak{T}\varphi_0'(t) = 0$. Функция $\varphi_0'(t)$ четна, и по лемме 1 имеем $\varphi_0'(t) \equiv 0$. Итак, функция $\varphi_0'(t)$ может быть лишь кусочно-постоянной, а это противоречит нашему предположению.

Осуществим теперь обратный переход от неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода (7) к исходному разностному уравнению (1). Заметим, что безусловная разрешимость уравнения (7) вовсе не означает безусловной разрешимости уравнения (1). Действительно, (7) эквивалентно уравнению $\mathfrak{A}^+(t) - -\mathfrak{A}^+(\alpha(t)) = g^+(t) - g^+(\alpha(t))$, то есть $\mathfrak{A}^+(t) = g^+(t) + C$. Осталось выяснить, когда $C = 0$. Для этого равенство

$$\frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} A(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = g^+(t) + C$$

умножим на $\varphi_0(t)$ и проинтегрируем по Γ, воспользовавшись кососимметричностью ядра. В результате получим

$$C = \int\limits_{\Gamma}\varphi_0(t)\varphi(t)\,dt - \int\limits_{\Gamma}\varphi_0(t)g^+(t)\,dt$$

Теорема 1. *Однородное функциональное уравнение $\mathfrak{V}f = 0$ имеет в классе B единственное нетривиальное решение* (13)*. Неоднородное уравнение* (1) *разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi_0(t)g^+(t)\,dt = \int\limits_{\Gamma}\varphi_0(t)\varphi(t)\,dt. \tag{14}$$

Здесь φ_0 – функция из леммы 2, а φ_0 – решение неоднородного уравнения Фредгольма (7)*.*

Замечание 1. При нечетном свободном члене уравнение (1) всегда разрешимо, поскольку условие разрешимости (14) выполняется автоматически (интеграл по Γ от нечетной функции равен нулю).

Замечание 2. Разностное уравнение $(\mathfrak{V}f)(z) = 1,\ z \in R$, неразрешимо в классе B. По заданной функции $g(z)$ всегда можно подобрать постоянную c такую, что уравнение $(\mathfrak{V}f)(z) = g(z) + c,\ z \in R$, будет разрешимо в этом классе.

3. Неклассическая проблема моментов

Рассмотрим приложение полученных результатов к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). Функция $f(z) \in B$ является нижней функцией, ассоциированной по Борелю с ц.ф.э.т. $F(z)$ (верхней функцией), см. [10]. Введем прежде всего ц.ф.э.т.

$$F_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi_0(\tau)\exp(\tau z)\,d\tau, \quad F_0(iz) = F_0(z), \tag{15}$$

сопряженную по Борелю с нижней функцией (13). Ее индикаторной диаграммой (совпадающей с сопряженной индикаторной диаграммой) будет квадрат R.

Замечание 3. Выясним, когда нижняя функция $f \in B$ имеет своей сопряженной индикаторной диаграммой некоторое «меньшее» выпуклое множество $R_1 \subset R$. Тогда функция аналитически продолжима из R в некоторую окрестность бесконечно удаленной точки и $g(\infty) = 0$, то есть она сама является нижней функцией. При сделанных предположениях разностное уравнение (1) выполняется и в окрестности бесконечно удаленной точки. Применяя преобразование Бореля, получим $F(\lambda)H(\lambda) = G(\lambda)$, где $G(\lambda)$ – верхняя функция, ассоциированная по Борелю с g, а $H(\lambda) = 1 + \sum\limits_{j=0}^{8}\exp(-\lambda\sigma_j(0))$ – характеристический квазиполином. Частное $G(\lambda)/H(\lambda)$ должно быть целой функцией, и ее нижняя функция $f(z)$ принадлежит классу B. Этот случай не очень интересен, поскольку речь идет о «переопределенной» классической постановке. Ясно, что для функции (13) вышеизложенное не выполняется, поскольку в противном случае $G \equiv 0$ и $f_0 \equiv 0$, что приводит к противоречию.

Итак, ц.ф.э.т. (15) имеет кусочно-тригонометрический индикатор

$$h_0(\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta), \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad h_0\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = h_0(\theta),$$

и тип $\sigma_0 = \sqrt{2}/2$.

Теорема 2. *Ц.ф.э.т.* (15) *имеет вполне регулярный рост (в.р.р.).*

Доказательство. Дважды проинтегрировав по частям интеграл (15), получим

$$-2\pi i F_0(z) = z^{-1}\exp(z\tau)\varphi_0(\tau)|_\Gamma - z^{-2}\exp(z\tau)\varphi_0'(\tau)|_\Gamma + z^{-2}\int\limits_\Gamma \exp(z\tau)\varphi_0''(\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Возьмем лучи $\arg z = \frac{\pi}{4}(2k-1)$, $k = 1,2,3,4,$ – направления наибольшего роста, на которых значения индикатора равны типу. Поскольку

$$\int\limits_\Gamma |\varphi_0^{(k)}(\tau)|\,|d\tau| < \infty$$

для любого k, то при $\varphi_0(t_1) \neq 0$ (здесь t_1 – вершина квадрата) асимптотическое поведение ц.ф.э.т. (15) на направлениях наибольшего роста полностью определяется первым приращением в правой части (16), то есть она имеет в.р.р. на этих лучах. Пусть $\varphi_0(t_1) = 0$. Еще раз возьмем интеграл в правой части (16) по частям. Совершенно аналогично получим, что функция (15) может не иметь в.р.р. на этих лучах только в случае $\varphi_0'(t_1) = 0$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что если в.р.р. не имеет места на этих лучах, то $\varphi_0^{(k)}(t_1) = 0$, $k = 1,2,\ldots$. Тогда в силу определения функции $\varphi_0(t)$ и структуры ядра (8) выполнены условия теоремы Принсгейма [11, с. 102], то есть в некоторой окрестности вершин квадрата t_k, $k = 1,2,3,4$, получим

$\varphi_0 \equiv 0$. Но тогда $F_0 \equiv 0$ (см. замечание 3). Осталось заключить, что функция (15) имеет в.р.р. на направлениях наибольшего роста. Тогда она имеет в.р.р. внутри каждой из координатных четвертей, где у нее тригонометрический индикатор [12, с. 186], что завершает доказательство. □

Следствие 1. *Множество корней ц.ф.э.т.* (15) *имеет нулевую плотность внутри каждой из координатных четвертей* (*см.* [12, *с.* 202]).

Пусть $g(iz) = -ig(z)$. Тогда $f(iz) = -if(z)$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} f(z) = g(z) - f(z+1) - f(z+1-i) - f(z+1+i) + f(1-z) + \\ + \ f(1+i-z) + f(1-i-z) + if(1-iz) - f(1+iz), \quad z \in R. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(z) = g(z) + 2\int\limits_0^\infty F(x)e^{-x}((1+2\cos x)\operatorname{sh} xz - \sin xz)\,dx,$$

и отсюда

$$f^{(4n+3)}(0) = g^{(4n+3)}(0) + 4\int\limits_0^\infty F(x)x^{4n+3}e^{-x}(1+\cos x)\,dx. \tag{17}$$

Замечание 4. Тем же самым приемом, что в [13, с. 115], можно показать, что

$$\int\limits_0^\infty F(x)x^{4n+1}e^{-x}\cos x\,dx = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

(см. по этому поводу также [3]).

Равенства (17) можно рассматривать как интерполяционную задачу, связывающую коэффициенты Маклорена нижней функции и моменты Стильтьеса верхней функции относительно веса $(1+\cos x)\exp(-x)$.

Пусть необходимо найти функцию $f \in B$ такую, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n z^{4n+3}$$

в окрестности нуля и

$$\frac{4}{(4n+3)!}\int\limits_0^\infty F(x)e^{-x}(1+\cos x)x^{4n+3}\,dx - f_n = g_n, \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{18}$$

где g_n – заданные числа, а $F(z)$ – преобразование Бореля функции f.

Теорема 3. *Если* $g_n \equiv 0$, *то задача* (18) *имеет единственное нетривиальное решение. Если функция*

$$g(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{g_n z^{4n+6}}{(4n+6)!}$$

голоморфна в квадрате R *и непрерывна в его замыкании* (*например, если радиус сходимости этого ряда больше* $\sqrt{2}/2$), *то задача* (18) *безусловно разрешима.*

В заключение отметим, что для функции $f \in B$ интеграл $\int\limits_{\partial R} |f^{-}(t)|^2\,|dt|$ сходится. В силу обобщения известной теоремы Пэли – Винера [12, с. 502–503] справедливо представление

$$f(z) = \sum_{j=1}^{4} \exp{(t_j z)} g_j(-iz \exp i\theta_j),$$

где $g_j(z)$ – целые функции, интегрируемые с квадратом на вещественной оси, а $\theta_j = \dfrac{\pi}{2}(j-1)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-97008-р-Поволжье-а и 12-01-00636-а).

Summary

F.N. Garifyanov, D.B. Kats. On an Equation with Carleman Kernel and Its Application to the Moment Problem.

We solve a poly-element linear functional equation for an unknown function holomorphic in a square by its reduction to an integral equation with Carleman kernel. This equation is connected with the problem of determining an entire function of exponential growth by a given linear relationship between the weighted moments of this function and the serial expansion coefficients of its Borel transform at the center of the square.

Key words: Carleman problem, entire functions of exponential type, moment problem.

Литература

1. *Напалков В.В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
2. *Гарифьянов Ф.Н.* Проблема обращения особого интеграла и разностных уравнений для функций, аналитических вне квадрата // Изв. вузов Матем. – 1993. – № 7. – С. 7–16.
3. *Гарифьянов Ф.Н.* Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, № 5. – С. 674–679.
4. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhardlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses, Zürich. – 1932. – Bd. 1. – S. 138–151.
5. *Показеев В.И.* Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1964. – Т. 123, кн. 9. – С. 40–57.
6. *Чибрикова Л.И.* Граничные значения теории аналитических функций на римановых поверхностях // Матем. анализ. Итоги науки и техн. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1980. – Т. 18. – С. 3–66.
7. *Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н.* К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана // Изв. вузов. Матем. – 1983. – № 4. – С. 43–51.
8. *Зверович Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Усп. матем. наук. – 1971. – Т. 26, № 1. – С. 113–179.
9. *Чибрикова Л.И.* О краевых задачах для прямоугольника // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1964. – Т. 123, кн. 9. – С. 15–39.
10. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. – М.: Наука, 1967. – 240 с.

11. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 267 с.

12. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

13. *Титчмарш Е.* Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 463 с.

Поступила в редакцию
13.04.12

Гарифьянов Фархат Нургаязович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: *f.garifyanov@mail.ru*

Кац Давид Борисович – магистрант кафедры математического анализа Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *random000@rambler.ru*