УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 154, кн. 1 Физико-математические науки *2012*

УДК 517.538.52+517.444

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ В $L_p(\mathbb{R})$

А.В. Каюмова

Аннотация

В работе исследована сходимость рядов из простых дробей в пространстве $L_p(R)$. В частности, получены необходимые и достаточные условия сходимости в пространстве $L_p(R)$ рядов с членами вида $\dfrac{p_k}{t-z_k}$, где $\{p_k\}$ – последовательность положительных чисел.

Ключевые слова: простые дроби, неравенство Харди.

Введение

Выражение вида $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t-z_k}$, где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – комплексные числа, называется наипростейшей дробью степени n. Наипростейшие дроби привлекают внимание многих исследователей, и исследованию их свойств посвящено большое количество научных статей (см., например, [1–6]). В [1] рассматривалась задача нахождения необходимого и достаточного условия сходимости рядов наипростейших дробей $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t-z_k}$ в $L_p(\mathbb{R})$, $p>1$ и была доказана следующая

Теорема А. *Пусть $p>1$, $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ для любого $k\in\mathbb{N}$. Если выполнено условие $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}}<+\infty$, то ряд $\displaystyle g_\infty(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t-z_k}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$. Обратно, если этот ряд сходится в $L_p(\mathbb{R})$, последовательность $|y_k|$ упорядочена по возрастанию и $|z_k|\le C|y_k|$ для всех k, то $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}}<+\infty$.*

Заметим, что из теоремы А напрямую не следует аналогичный результат для рядов простых дробей вида $\displaystyle g(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{t-z_k}$, где $p_1,\ p_2,\ldots$ — положительные числа. Используя метод, разработанный в [1], в настоящей статье доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $p>1$, $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $p_k>0$ для любого $k\in\mathbb{N}$, тогда*

1) *если последовательность $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена сверху некоторым положительным числом M и выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{kp_k}{y_k}\right|^{p-1}<+\infty, \tag{1}$$

то ряд

$$g(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{t-z_k}, \tag{2}$$

сходится в $L_p(\mathbb{R})$;

2) *если ряд* (2) *сходится в* $L_p(\mathbb{R})$, *последовательность* $|y_k|$ *упорядочена по возрастанию и* $|z_k| \leq C|y_k|$ *для некоторого фиксированного* $C > 1$, *а числа* p_k *монотонно убывают к некоторому числу* $K > 0$, *то выполнено условие* (1).

Доказательство. В [2] показано, что сходимости рядов

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{t - z_k} \text{ и } \Im g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k |y_k|}{(t - x_k)^2 + y_k^2}$$

в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равносильны (z_k и p_k удовлетворяют условиям теоремы 1). Значит, вместо сходимости ряда $g(t)$ в $L_p(\mathbb{R})$ можно доказывать сходимость ряда $\Im g(t)$ в этом же пространстве. Без ограничения общности будем считать, что $y_k > 0$ для всех k .

Обозначим

$$Q_k = \frac{p_k y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2}.$$

Докажем первую часть теоремы 1. Заметим, что если в условии (1) упорядочить последовательность $\{p_k/y_k\}$ по убыванию, то сходимость ряда (1) сохранится. Поэтому будем предполагать, что последовательность $\{p_k/y_k\}$ упорядочена по убыванию.

Теперь покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

Пусть сначала $p \in (1, 2)$.

Так как $(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ при a, $b > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} Q_k \right)^p dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} Q_j \left(\sum_{k=1}^{n} Q_k \right)^{p-1} dt \leq I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} Q_j \left(\sum_{k=1}^{j} Q_k \right)^{p-1} dt, \tag{3}$$

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} Q_j \left(\sum_{k=j+1}^{n} Q_k \right)^{p-1} dt. \tag{4}$$

Применяя неравенство Гельдера для оценки интеграла (3), имеем

$$I_1 = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_j \left(\sum_{k=1}^{j} Q_k \right)^{p-1} dt \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_j^\alpha dt \right)^{1/\alpha} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{j} Q_k \right)^{(p-1)\beta} dt \right)^{1/\beta}$$

В последнем выражении положим $\alpha = 1/(2 - p)$, $\beta = 1/(p - 1)$ и заметим, что

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_j^\alpha \, dt \right)^{1/\alpha} = p_j y_j^{(1-\alpha)/\alpha} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + s^2} \right)^\alpha ds \right)^{1/\alpha} =$$

$$= p_j y_j^{(1-\alpha)/\alpha} \left(\sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha)} \right)^{1/\alpha} = p_j y_j^{(1-\alpha)/\alpha} \gamma_\alpha,$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера. После подстановки, учитывая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_k\,dt = \pi p_k,$$

имеем

$$I_1 \le \pi^{p-1}\gamma_{\frac{1}{2-p}} \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{y_j^{p-1}} \left(\sum_{k=1}^{j} p_k\right)^{p-1} \le \pi^{p-1}\gamma_{\frac{1}{2-p}} M^{p-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j j^{p-1}}{y_j^{p-1}} =$$

$$= \pi^{p-1}\gamma_{\frac{1}{2-p}} M^{p} \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{M} \left(\frac{j}{y_j}\right)^{p-1} \le \pi^{p-1}\gamma_{\frac{1}{2-p}} M \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j j}{y_j}\right)^{p-1}$$

Последнее неравенство справедливо, так как $p_j/M \le 1$ и $(p-1) \in (0,1)$. Далее мы будем использовать неравенство Копсона (теорема 344 из [7]): если $a_n \ge 0$, $0 < s \le 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} a_j\right)^{s} > s^s \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n)^s.$$

Применим это неравенство при $s = p-1$ и $a_j = p_j/y_j$, тогда

$$I_1 \le \pi^{p-1}\gamma_{\frac{1}{2-p}} M \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j j}{y_j}\right)^{p-1} < \pi^{p-1}\gamma_{\frac{1}{2-p}} M (p-1)^{(1-p)} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{p_k}{y_k}\right)^{p-1}. \qquad (5)$$

Оценим интеграл (4)

$$I_2 \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} Q_j \left(\sum_{k=j+1}^{n} Q_k\right)^{p-1} dt \le \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_j \left(\sum_{k=j+1}^{n} \frac{p_k}{y_k}\right)^{p-1} dt =$$

$$= \pi \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\sum_{k=j+1}^{n} \frac{p_k}{y_k}\right)^{p-1} \le M\pi \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j+1}^{n} \frac{p_k}{y_k}\right)^{p-1}.$$

Отсюда вместе с (5) получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} Q_k\right)^{p} dt \le C(p,M) \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{p_k}{y_k}\right)^{p-1},$$

где $C(p,M)$ – константа, зависящая только от p и M.

Если ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=j}^{\infty} \frac{p_k}{y_k}\right)^{p-1}$ сходится, то из последнего неравенства получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для любых $n > m > N$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=m}^{n} Q_k\right)^{p} dt < \varepsilon.$$

А это означает, что последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k$ фундаментальна в $L_p(\mathbb{R})$, тогда в силу полноты $L_p(\mathbb{R})$ последовательность S_n сходится, и следовательно, в $L_p(\mathbb{R})$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$. И первая часть теоремы при $p \in (1,2)$ будет доказана.

Докажем поэтому сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=j}^{\infty}\dfrac{p_k}{y_k}\right)^{p-1}$.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty}\frac{p_k}{y_k}\right)^{p-1} \le \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=2^s j}^{2^{s+1}j}\frac{p_k}{y_k}\right)^{p-1} \le$$

(так как в силу условия 2) доказываемой теоремы последовательность $\{p_k/y_k\}$ монотонно убывает)

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=2^s j}^{2^{s+1}j}\frac{p_{2^s j}}{y_{2^s j}}\right)^{p-1} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^s j p_{2^s j}}{y_{2^s j}}\right)^{p-1} \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{2^s j p_{2^s j}}{y_{2^s j}}\right)^{p-1}.$$

Последний ряд разобьем по четным и нечетным j на два ряда. Так как последовательность $\{p_k/y_k\}$ монотонна, то эти два ряда будут сравнимы, то есть они будут сходиться или расходиться одновременно. Ряд по нечетным j совпадает с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{kp_k}{y_k}\right)^{p-1}$, который по условию (1) сходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=j}^{n}\dfrac{p_k}{y_k}\right)^{p-1}$ также сходится.

Пусть теперь $p \ge 2$. Покажем, что последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k$ фундаментальна в $L_p(\mathbb{R})$ (тогда, как и в предыдущем случае, можно сделать вывод о сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$).

По аналогии с [1] (см. леммы 1 и 2), можно проверить, что для любого $p \ge 2$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} Q_k\right|^p dt \le C(p,M)\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{kp_k}{y_k}\right|^{p-1}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|S_m - S_n\|_p^p = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=m}^{n} Q_k\right)^p dt \le C(p,M)\sum_{k=m}^{n}\left|\frac{kp_k}{y_k}\right|^{p-1}.$$

И так как выполнено условие (1), то из последнего неравенства следует, что последовательность S_n фундаментальна в $L_p(\mathbb{R})$. Первая часть теоремы полностью доказана.

Докажем обратное утверждение. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ сходится в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. Покажем сходимость ряда (1) при $p > 1$.

По условию $|z_k| \le C|y_k|$ для некоторого фиксированного $C > 1$ отсюда следует, что $(t-x_k)^2 + y_k^2 \le 2^2(t^2 + x_k^2) + 2^2 y_k^2 \le 4(t^2 + C^2 y_k) \le 4C^2(t^2 + y_k^2)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Так как последовательность p_k монотонно убывает к числу K, а последовательность y_k упорядочена по возрастанию, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} Q_k \right)^p dt \ge \frac{1}{(2C)^{2p}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^p dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{(2C)^{2p}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j y_j}{t^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \ \ge$$

$$\ge \ \frac{1}{(2C)^{2p}} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-y_j}^{y_j} \frac{p_j y_j}{t^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \ \ge$$

$$\ge \ \frac{1}{(2C)^{2p}} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-y_j}^{y_j} \frac{p_j y_j}{y_j^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{p_k y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \ \ge$$

$$\ge \ \frac{1}{(2C)^{2p}} \sum_{j=1}^{\infty} 2y_j \frac{p_j}{2y_j} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{p_k y_k}{y_k^2 + y_k^2} \right)^{p-1} = \frac{2^{1-3p}}{C^{2p}} \sum_{j=1}^{\infty} p_j \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{p_k}{y_k} \right)^{p-1} \ \ge$$

$$\ge \ \frac{2^{1-3p} K}{C^{2p}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{2j} \frac{p_{2j}}{y_{2j}} \right)^{p-1} \ge \frac{2^{1-3p} K}{C^{2p}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j p_{2j}}{y_{2j}} \right)^{p-1}.$$

Отсюда и из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ в $L_p(\mathbb{R})$ делаем вывод о том, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2j p_{2j}}{y_{2j}} \right)^{p-1}$$

сходится. Поэтому в силу монотонности последовательности $\{p_k/y_k\}$ должен сходиться и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j p_j}{y_j} \right)^{p-1}.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Summary

A.V. Kayumova. The Convergence of Series of Simple Fractions in $L_p(\mathbb{R})$.

The convergence of series of simple fractions in $L_p(\mathbb{R})$ has been investigated. In particular, necessary and sufficient conditions for the convergence of series with coefficients $\dfrac{p_k}{t - z_k}$, where p_k is a sequence of positive numbers, in $L_p(\mathbb{R})$ have been obtained.

Key words: simple fractions, Hardy's inequality.

Литература

1. *Каюмов И.Р.* Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. – 2011. – Т. 202, № 10. – С. 87–98.
2. *Протасов В.Ю.* Приближение наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем. – 2009. – Т. 73, № 2. – С. 123–140.
3. *Данченко В.И.* О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. – 2010. – Т. 201, № 7. – С. 53–66.
4. *Бородин П.А.* Приближение наипростейшими дробями на полуоси // Матем. сб. – 2009. – Т. 200, № 8. – С. 25–44.
5. *Каюмов И.Р.* Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92, № 1. – С. 149–152.
6. *Каюмов И.Р.* Интегральные оценки наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 4. – P. 33–45.
7. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

Поступила в редакцию
16.01.12

Каюмова Анна Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *anvas@inbox.ru*