УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 154, кн. 1 Физико-математические науки *2012*

УДК 519.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА РЕШЕНИЕ

Л.Л. Глазырина, М.Ф. Павлова

Аннотация

Рассматриваемая задача теории совместного движения поверхностных и подземных вод относится к классу задач с двойным вырождением. Характерной особенностью ее является наличие нелокального краевого условия на разрезе области. С помощью методов полудискретизации и штрафа доказывается теорема существования первой краевой задачи для вариационного неравенства при неоднородном ограничении.

Ключевые слова: двойное вырождение, нелокальные краевые условия, метод полудискретизации, метод штрафа, обобщенное решение.

1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область пространства R^2, Γ – граница Ω, Π – разрез, проведенный в Ω, разбивающий ее на две связные подобласти, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Pi_T = \Pi \times (0,T)$. Обозначим через V, $V(0,T)$, $W(0,T)$ банаховы пространства функций, полученных замыканием $C^\infty(\Omega)$, $C^\infty(0,T;C^\infty(\Omega))$ в следующих нормах:

$$\|u\|_V = \|u\|_{W^1_{p_1}(\Omega)} + \|u\|_{W^1_{p_2}(\Pi)}, \quad \|u\|_{V(0,T)} = \|u\|_{L_{p_1}(0,T;W^1_{p_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_{p_2}(0,T;W^1_{p_2}(\Pi))},$$

$$\|u\|_{W(0,T)} = \|u\|_{V(0,T)} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))},$$

через $\overset{\circ}{V}$, $\overset{\circ}{V}(0,T)$, $\overset{\circ}{W}(0,T)$ – замыкания $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ в нормах пространств V, $V(0,T)$, $W(0,T)$.

Рассматривается следующая задача: найти функцию

$$u \in K = \left\{ v \in \overset{\circ}{W}(0,T) : \ v(x,t) \ge g(x,t) \ \text{ п.в. в } \ Q_T \text{ и на } \Pi_T \right\}$$

такую, что

$$\int_0^T \langle J(u), \cdot \rangle_* \, dt \in (\overset{\circ}{V}(0,T))^*, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega \quad \text{и} \quad \text{на} \quad \Pi, \tag{2}$$

и для любой $v \in K$ справедливо вариационное неравенство

$$\int_0^T \{\langle J(u), u-v\rangle_* + \langle Lu, u-v\rangle + \langle L_\Pi u, u-v\rangle_\Pi\}\, dt \ \le \\ \le \ \int_0^T \{\langle f_1, u-v\rangle + \langle f_2, u-v\rangle_\Pi\}\, dt. \tag{3}$$

Здесь $J(z(t))$ – функционал, значение которого при $t \in (0,T)$ на элементах $v \in \overset{\circ}{V}$ определяется по правилу

$$\langle J(z(t)), v\rangle_* = \frac{d}{dt}\bigg(\int\limits_\Omega \varphi_1(z(t))v(x)\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(z(t))v(s)\,ds\bigg), \tag{4}$$

$\langle F, v\rangle_*$ ($\langle F, v\rangle$, $\langle F, v\rangle_\Pi$) – значение функционала F из $(\overset{\circ}{V})^*$ ($W^{-1}_{p'_1}(\Omega)$, $W^{-1}_{p'_2}(\Pi)$) на элементе v из $\overset{\circ}{V}$ ($\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)$) соответственно, операторы

$$Lu = -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_i(x,u)\,k_i(x,\nabla u)\big), \quad L_\Pi u = -\frac{\partial}{\partial s}\left(a_\Pi(x,u)k_\Pi\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right),$$

действуют из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)$ в $W^{-1}_{p'_1}(\Omega)$ и из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)$ в $W^{-1}_{p'_2}(\Pi)$, $\dfrac{\partial}{\partial s}$ – производная по направлению s. Как обычно, p_i, p'_i – сопряженные числа, удовлетворяющие равенству $\dfrac{1}{p_i} + \dfrac{1}{p'_i} = 1$.

Задача (1)–(3) возникает (см., например, [1]) при математическом описании процесса совместного движения поверхностных и подземных вод. В этом случае Ω – область, в которой рассматривается процесс фильтрации подземных вод, разрез Π соответствует руслу реки или канала, искомая функция u определяет высоту свободной поверхности воды над непроницаемым основанием.

Будем предполагать, что $\varphi_i(\xi)$, $i = 1, 2$, – абсолютно непрерывные, возрастающие функции, $\varphi_i(0) = 0$, удовлетворяющие при любом $\xi \in R^1$ неравенствам

$$b_{0i} \mid \xi \mid^{\alpha_i} - b_{1i} \le \Phi_i(\xi) \equiv \int\limits_0^\xi \varphi'_i(t)t\,dt \le b_{2i} \mid \xi \mid^{\alpha_i} + b_{3i}, \quad \alpha_i > 1, \tag{5}$$

$$\mid \varphi_i(\xi) \mid \le \ b_{4i} \mid \xi \mid^{\alpha_i - 1} + b_{5i}, \tag{6}$$

$$(\varphi'_i(\xi)\xi)' \ \ge \ 0, \tag{7}$$

где

$$b_{0i} > 0, \quad b_{1i} \ge 0, \quad b_{2i} > 0, \quad b_{3i} \ge 0, \quad b_{4i} > 0, \quad b_{5i} \ge 0, \quad i = 1, 2.$$

Предполагаем также, что функции $a_i(x,\xi_0)$, $k_i(x,\xi)$, $a_\Pi(x,\xi_0)$, $k_\Pi(x,\xi)$ непрерывны по ξ_0 и ξ, измеримы по x и удовлетворяют при любых $x \in \Omega$, $\xi_0 \in R^1$, ξ^1, ξ^2, $\xi \in R^2$ условиям

$$0 < \beta_{01} \le a_i(x,\xi_0) \le \beta_{11}, \quad 0 < \beta_{02} \le a_\Pi(x,\xi_0) \le \beta_{12}, \tag{8}$$

$$\mid k_i(x,\xi) \mid \le M_{01}\sum_{j=1}^{2} \mid \xi_j \mid^{p_1 - 1} + M_{11}, \quad M_{01} > 0, \quad M_{11} \ge 0, \quad p_1 > 1, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_j(x,\xi_0)k_j(x,\xi)\xi_j \ge M_{21}\sum_{j=1}^{2} \mid \xi_j \mid^{p_1} - M_{31}, \quad M_{21} > 0, \quad M_{31} \ge 0, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_j(x,\xi_0)(k_j(x,\xi^1) - k_j(x,\xi^2))(\xi^1_j - \xi^2_j) \ge 0, \tag{11}$$

$$\mid k_\Pi(\xi_0) \mid \le M_{02} \mid \xi_0 \mid^{p_2 - 1} + M_{12}, \quad M_{02} > 0, \quad M_{12} \ge 0, \quad p_2 > 1, \tag{12}$$

$$a_\Pi(x,\xi_0)k_\Pi(\xi_0)\xi_0 \geq M_{22} \mid \xi_0 \mid^{p_2} - M_{32}, \quad M_{22} > 0, \quad M_{32} \geq 0, \tag{13}$$

$$(k_\Pi(\xi^1) - k_\Pi(\xi^2))(\xi^1 - \xi^2) \geq 0 \quad \forall \xi^1,\, \xi^2 \in R^1. \tag{14}$$

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в работе [2], где доказано существование решения задачи (1)–(3) в случае однородного ограничения.

2. Теорема существования

Теорема 1. *Пусть функции* φ_i, a_i, k_i $(i = 1,2)$, a_Π, k_Π *удовлетворяют условиям* (5)–(14), *кроме того*

$$g \in W(0,T), \quad g|_{\Gamma\times[0,T]} \leq 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(g)}{\partial t} \in L_{p_1'}(Q_T), \quad \frac{\partial \varphi_2(g)}{\partial t} \in L_{p_2'}(\Pi_T), \tag{16}$$

$$Lg \in L_{q'}(Q_T), \quad L_\Pi g \in L_{q'}(\Pi_T), \quad q \leq p = \min\{p_1, p_2\}. \tag{17}$$

Тогда при любых

$$f_1 \in L_{p'}(Q_T), \quad f_2 \in L_{p'}(\Pi_T), \tag{18}$$

$$u_0 \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega) \text{ } \textit{такой, что } u_0(x) \geq g(x,0) \text{ } \textit{п.в. в } \Omega \textit{ и на } \Pi, \tag{19}$$

решение задачи (1)–(3) *существует.*

Доказательство теоремы проводится с помощью методов штрафа и дискретизации по переменной t.

Пусть $\overline{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau,\ k = 0,\dots,N,\ \tau N = T\}$, $\omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus \{T\}$. Операторы штрафа определим с помощью следующей функции β:

$$\beta v = -|v^-|^{q-2}v^-, \ \ v^- = (|v| - v)/2.$$

Определение 1. Функцию $y(t) \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ $\forall t \in \overline{\omega}_\tau$ назовем решением полудискретной задачи, если

$$y(0) = u_0(x) \ \text{ п.в. в } \Omega \text{ и на } \Pi, \tag{20}$$

и для произвольной функции $v \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int\limits_\Omega \varphi_{1t}\big((y(t) - g_\tau(t))^+ + g_\tau(t)\big)v\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_{2t}\big((y(t) - g_\tau(t))^+ + g_\tau(t)\big)v\,ds +$$
$$+ \ \langle L^g \widehat{y}(t), v\rangle + \langle L^g_\Pi \widehat{y}, v\rangle_\Pi + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(\widehat{y}(t) - \widehat{g}_\tau(t)), v\rangle +$$
$$+ \ \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(\widehat{y}(t) - \widehat{g}_\tau(t)), v\rangle_\Pi = \langle f_{1\tau}, v\rangle + \langle f_{2\tau}, v\rangle_\Pi \quad \forall t \in \omega_\tau. \tag{21}$$

Здесь $\langle f_{1\tau}, v\rangle = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle f_1(\xi), v\rangle\,d\xi$, $\langle f_{2\tau}, v\rangle_\Pi = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle f_2(\xi), v\rangle_\Pi\,d\xi$, $\varepsilon > 0$ – параметр штрафа, $g_\tau(x,t) = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} g(x,\xi)\,d\xi$, операторы L^g и L^g_Π определены следующими равенствами

$$L^g y = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_i(x,(y-g_\tau)^+ + g_\tau)\,k_i(x,\nabla y)\Big),$$

$$L_\Pi^g y = -\frac{\partial}{\partial s}\left(a_\Pi(x, (y-g_\tau)^+ + g_\tau) k_\Pi\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right).$$

Разрешимость задачи (20)–(21) нетрудно доказать, используя метод Галеркина.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (15)–(19), *тогда для решения задачи* (20)–(21) *справедливы следующие априорные оценки*[1]

$$\|((y-g_\tau)^+ + g_\tau)(t')\|_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + \|((y-g_\tau)^+ + g_\tau)(t')\|_{L_{\alpha_2}(\Pi)} \le c \quad \forall t' \in \overline{\omega}_\tau, \qquad (22)$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau \Bigg[\|\widehat{y}(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + \|\widehat{y}(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} \Bigg] \le c \quad \forall t' \in \omega_\tau, \qquad (23)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{q'}} \sum_{t=0}^{t'} \tau \Bigg[\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)} + \|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)} \Bigg] \le c \quad \forall t' \in \omega_\tau. \qquad (24)$$

Доказательство. Из включения $\widehat{y}-\widehat{g}_\tau \in V$ и условий $\widehat{y} \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$, $g|_{\Gamma\times[0,T]} \le 0$ следует, что функция $(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-$ принадлежит $\overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$. Это позволяет выбрать в равенстве (21) $v = \tau\widehat{y} - \dfrac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-$, где $q \le p = \min\{p_1, p_2\}$. Полученное после этой подстановки равенство просуммируем по t от 0 до $t'-\tau$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \Bigg\{ \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau)\widehat{y}\,dx - \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}} \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau)(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\,dx \Bigg\} + \\
&\quad + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle L^g\widehat{y}, \widehat{y}\rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle L_\Pi^g\widehat{y}, \widehat{y}\rangle_\Pi + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \beta(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)\widehat{y}\,dx - \\
&- \frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \beta(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\,dx = \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle f_{1\tau}, \widehat{y}\rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle f_{2\tau}, \widehat{y}\rangle_\Pi + \\
&\quad + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle L^g\widehat{y}, (\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\rangle - \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle L_\Pi^g\widehat{y}, (\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\rangle_\Pi - \\
&\quad - \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle f_{1\tau}, (\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\rangle - \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle f_{2\tau}, (\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\rangle_\Pi, \qquad (25)
\end{aligned}$$

где для краткости обозначено $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \Pi$,

Воспользовавшись очевидным равенством

$$\xi = (\xi-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau - (\xi-\widehat{g}_\tau)^- \quad \forall \xi \in R^1,$$

представим первое слагаемое в левой части равенства (25) в виде

$$\begin{aligned}
I = \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \Bigg\{ &\int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau)\widehat{y}\,dx - \\
&- \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}} \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau)(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\,dx \Bigg\} = I_1 - I_2,
\end{aligned}$$

[1]Здесь и в дальнейшем через c обозначаются независимые от τ и ε постоянные.

где

$$I_1 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \frac{\varphi_i((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau) - \varphi_i((y-g_\tau)^+ + g_\tau)}{\tau} ((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau)\, dx$$

$$I_2 = (1+\frac{1}{\varepsilon^{q'-1}}) \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \frac{\varphi_i((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau) - \varphi_i((y-g_\tau)^+ + g_\tau)}{\tau} (\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\, dx.$$

Используя (5) и неравенство (см. [3])

$$(\varphi_i(\xi) - \varphi_i(\eta))\xi \geq \Phi_i(\xi) - \Phi_i(\eta) \quad \forall \xi, \eta \in R^1, \tag{26}$$

для I_1 нетрудно получить оценку вида:

$$I_1 \geq \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \left(\Phi_i((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau) - \Phi_i((y-g_\tau)^+ + g_\tau))\right)\, dx \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{2} \Big(b_{0i} \|((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau)(t')\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega i)} - b_{2i}\|u_0(x)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega i)} - (b_{1i}+b_{3i})\,\mathrm{mes}\,\Omega_i \Big). \tag{27}$$

Для оценки I_2 используем неравенство вида

$$\begin{aligned}\big(\varphi_i((\xi-g_1)^+ + g_1) - \varphi_i((\xi-g_2)^+ + g_2)\big)\big(-(\xi-g_1)^-\big) \ \geq \\ \geq\ (\varphi_i(g_1) - \varphi_i(g_2))\big(-(\xi-g_1)^-\big) \quad \forall \xi,\, \eta,\, g_1,\, g_2 \in R^1,\end{aligned} \tag{28}$$

справедливость которого вытекает из следующих легко проверяемых соотношений:

$$\varphi_i\left((\xi-g_1)^+ + g_1\right)\left(-(\xi-g_1)^-\right) = \varphi_i(g_1)\left(-(\xi-g_1)^-\right),$$

$$\varphi_i\big((\xi-g_2)^+ + g_2\big) \geq \varphi_i(g_2).$$

Используя неравенство Гельдера и ε-неравенство[2], нетрудно доказать, что

$$\begin{aligned}I_2 \leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon^{q'-1}}\right) \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \varphi_{it}(g_\tau)(\widehat{y}-\widehat{g})^-\, dx \leq \frac{2}{\sigma^{q'}} \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\varphi_{it}(g_\tau)\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega_i)} + \\ +\ \frac{\sigma^q}{q}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\right) \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \,\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)} + c.\end{aligned} \tag{29}$$

Из (28), (29) следует оценка

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \frac{\varphi_i((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau) - \varphi_i((y-g_\tau)^+ + g_\tau)}{\tau} \widehat{y}\, dx \ \geq \\ \geq\ \sum_{i=1}^{2} \Big(b_{0i} \|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau)(t')\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} -\ b_{2i}\|u_0(x)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} - \\ -\ \frac{2}{\sigma^{q'}} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \,\|\varphi_{it}(g_\tau)\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega_i)} - \frac{\sigma^q}{q}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\Big) \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \,\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)} \Big) - c.\end{aligned} \tag{30}$$

[2]Малый параметр в ε-неравенстве здесь и в дальнейшем будем обозначать через σ.

Из (10), (13) имеем

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle L^g \widehat{y}(t), \widehat{y}(t) \rangle \;\geq\; M_{21} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \|y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} - c, \tag{31}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \langle L^g_\Pi \widehat{y}(t), \widehat{y}(t) \rangle_\Pi \;\geq\; M_{22} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \|y(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} - c. \tag{32}$$

Слагаемые, содержащие оператор штрафа β, оценим, воспользовавшись определением этого оператора, следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{2} \Bigg(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \beta(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau) \widehat{y} \, dx - \frac{1}{\varepsilon^{q'}} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \beta(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^- \, dx \Bigg) \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{2} \Bigg(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)} - \frac{1}{\varepsilon^{q'}} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)} -$$
$$- \frac{1}{\sigma^{q'} q'} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega_i)} - \frac{\sigma^q}{q \varepsilon^{q'}} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \, \|(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega_i)} \Bigg). \tag{33}$$

Третье слагаемое в правой части равенства (25) представим в виде

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}} \langle L^g \widehat{y}, (\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^- \rangle = \sum_{t=0}^{t'-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}} (Y_1 + Y_2),$$

где

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} a_i((\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau) \big(k_i(x, \nabla \widehat{y}) - k_i(x, \nabla \widehat{g}_\tau))\big) \frac{\partial}{\partial x_i} \big(-(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^- \big) \, dx,$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} a_i((\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^+ + \widehat{g}_\tau) k_i(x, \nabla \widehat{g}_\tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \big(-(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^- \big) \, dx.$$

Известно, что (см., например, [4, с. 81])

$$\frac{\partial (\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^-}{\partial x_i} = - \frac{\partial (\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad \Omega^-(t) = \{x \in \Omega : \; \widehat{y}(x,t) \, < \, \widehat{g}_\tau(x,t)\},$$

$$\frac{\partial (\widehat{y^-} - \widehat{g}_\tau)^-}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в} \; \Omega^+(t) = \{x \in \Omega : \; \widehat{y}(x,t) \, \geq \, \widehat{g}_\tau(x,t)\}.$$

Учитывая также, что

$$a_i((\widehat{y}(x) - \widehat{g}_\tau(x))^+ + \widehat{g}_\tau(x)) = a_i(\widehat{g}_\tau(x)) \quad \forall x \in \Omega^-(t),$$

нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_-} a_i(\widehat{g}_\tau) \left(k_i(x, \nabla \widehat{y}) - k_i(x, \nabla \widehat{g}_\tau)) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \big(-(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^- \big) \, dx \geq 0, \tag{34}$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_-} a_i(\widehat{g}_\tau) k_i(x, \nabla \widehat{g}_\tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \big(-(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^- \big) \, dx = \langle L^g \widehat{g}_\tau, (\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^- \rangle. \tag{35}$$

Используя неравенства Гельдера, Фридрихса и ε-неравенство, оценим (35) и оставшиеся слагаемые в правой части (25):

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{1\tau}(t),\widehat{y}\rangle \le \frac{1}{p_1'\sigma^{p_1'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{1\tau}(t)\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega)}+\frac{c\sigma^{p_1}}{p_1}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{y}\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}, \tag{36}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle f_{1\tau}(t),-(\widehat{y}-\widehat{g})^-\rangle \le$$

$$\le \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{1\tau}(t)\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)}+\frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega)}, \tag{37}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{2\tau}(t),\widehat{y}\rangle_\Pi \le \frac{1}{p_2'\sigma^{p_2'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}(t)\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}+\frac{c\sigma^{p_2}}{p_2}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{y}\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}, \tag{38}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle f_{2\tau}(t),-(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\rangle_\Pi \le$$

$$\le \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}(t)\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)}+\frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Pi)}, \tag{39}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle L^g\widehat{y},(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\rangle \le \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|L^g\widehat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)}+$$

$$+\frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega)}, \tag{40}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon^{q'-1}}\langle L^g_\Pi\widehat{y},(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\rangle_\Pi \le \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|L^g_\Pi\widehat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)}+$$

$$+\frac{\sigma^q}{q\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Pi)}. \tag{41}$$

Подставляя (30)–(33), (36)–(41) в (25), будем иметь

$$b_{01}\,\|((\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^++\widehat{g}_\tau)(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)}+b_{02}\,\|(\widehat{y}+\widehat{g}_\tau)^++\widehat{g})(t')\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+$$

$$+\left(M_{21}-\frac{c\sigma^{p_1}}{p_1}\right)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{y}(t)\,\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}+\left(M_{22}-\frac{c\sigma^{p_2}}{p_2}\right)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{y}(t)\,\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}+$$

$$+\left\{\frac{1}{\varepsilon}(1-\frac{\varepsilon\,\sigma^q}{q})+\frac{1}{q\varepsilon^{q'}}(q-5\sigma^q)\right\}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Omega)}+$$

$$+\left\{\frac{1}{\varepsilon}(1-\frac{\varepsilon\,\sigma^q}{q})+\frac{1}{q\varepsilon^{q'}}(q-5\sigma^q)\right\}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\|^q_{L_q(\Pi)}\le$$

$$\le b_{21}\|u_0(x)\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)}+b_{22}\|u_0(x)\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+\frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|L^g\widehat{g}_\tau\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)}+$$

$$+\ \frac{1}{q'\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|L_\Pi^g\widehat{g}_\tau\|_{L_{q'}(\Pi)}^{q'}+\left(\frac{1}{\sigma^{q'}}+\frac{c}{\sigma^{q'}}\right)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{1\tau}\|_{L_{q'}(\Omega)}^{q'}+$$

$$+\ \left(\frac{1}{\sigma^{q'}}+\frac{c}{\sigma^{q'}}\right)\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}\|_{L_{q'}(\Pi)}^{q'}+\frac{1}{\sigma^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{g}_\tau\|_{L_{q'}(\Omega)}^{q'}+\frac{1}{\sigma^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{g}_\tau\|_{L_{q'}(\Pi)}^{q'}+$$

$$+\ \frac{2}{\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\varphi_{1t}(g_\tau)\|_{L_{q'}(\Omega)}^{q'}+\frac{2}{\sigma^{q'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\varphi_{2t}(g_\tau)\|_{L_{q'}(\Pi)}^{q'}. \quad (42)$$

Параметр σ выберем так, чтобы выражения, стоящие в круглых скобках в соотношении (42) были положительны. В силу условий (15)–(19) правая часть (42) ограничена. Следовательно, оценки (22)–(24) имеют место. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда для решения задачи* (20)–(21) *справедливы априорные оценки*

$$\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Omega_i}\big(\varphi_i(\xi(t+k\tau))-\varphi_i(\xi(t))\big)\big(\xi(t+k\tau)-\xi(t)\big)\,dx\le ck\tau,\quad k=1,2,\dots,N, \quad (43)$$

где $i=1,2,\ \xi(t)=((y-g_\tau)^++g_\tau)(t)$.

Доказательство. Имеем

$$I\ \equiv\ \frac{1}{\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_\Omega\big(\varphi_1(\xi(t'+k\tau))-\varphi_1(\xi(t'))\big)\big(\xi(t'+k\tau)-\xi(t')\big)\,dx\ +$$

$$+\ \frac{1}{\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_\Pi\big(\varphi_2(\xi(t'+k\tau))-\varphi_2(\xi(t'))\big)\big(\xi(t'+k\tau)-\xi(t')\big)\,ds\ =$$

$$=\ \sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_\Omega\sum_{j=1}^{k}\big(\varphi_1(\xi(t'+j\tau))\big)_{\bar t}\big(\xi(t'+k\tau)-\xi(t')\big)\,dx\ +$$

$$+\ \sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_\Pi\sum_{j=1}^{k}\big(\varphi_2(\xi(t'+j\tau))\big)_{\bar t}\big(\xi(t'+k\tau)-\xi(t')\big)\,ds.$$

Воспользовавшись равенством (21), получим

$$I=\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\sum_{j=1}^{k}\Big\{-\langle L^g y(t'+j\tau),\xi(t'+k\tau)-\xi(t')\rangle-\langle L_\Pi^g y(t'+j\tau),\xi(t'+k\tau)-\xi(t')\rangle_\Pi\ -$$

$$-\ \frac{1}{\varepsilon}\langle\beta(y-g_\tau)(t'+j\tau),\xi(t'+k\tau)-\xi(t)\rangle-\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta(y-g_\tau)(t'+j\tau),\xi(t'+k\tau)\ -$$

$$-\ \xi(t')\rangle_\Pi+\langle f_{1\tau},\xi(t'+k\tau)-\xi(t')\rangle+\langle f_{2\tau},\xi(t'+k\tau)-\xi(t')\rangle_\Pi\Big\}. \quad (44)$$

Докажем, что правая часть в (44) ограничена величиной kc. Обозначая $t'_j=t'+$ $+\,j\tau$, $t'_k=t'+k\tau$, оценим, например, следующее слагаемое

$$I_1\equiv\frac{1}{\varepsilon}\Big|\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{j=1}^{k}\tau\langle\beta((y-g_\tau)(t'_j)),\,\xi(t'_k)-\xi(t')\rangle\Big|\ \le$$

$$\le\ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{j=1}^{k}\tau\|\beta((y-g_\tau)(t'_j))\|_{W_{p'_1}^{-1}(\Omega)}^{p'_1}\left\{\|\xi(t'_k)\|_{\overset{\circ}{W}{}_{p_1}^{1}(\Omega)}^{p_1}\ +\ \|\xi(t')\|_{\overset{\circ}{W}{}_{p_1}^{1}(\Omega)}^{p_1}\right\}\ \le$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\beta((y-g_\tau)(t'_j))\|^{p'_1}_{W^{-1}_{p'_1}(\Omega)}\right)^{1/p'_1}\times$$

$$\times\left\{\left(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\xi(t'_k)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p_1}(\Omega)}\right)^{1/p_1}+\left(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\xi(t')\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p_1}(\Omega)}\right)^{1/p_1}\right\}.$$

Заметим, что из оценки (24) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\,\|\beta((y-g_\tau)(t'_j))\|^{p'_1}_{W^{-1}_{p'_1}(\Omega)}\right)^{1/p'_1}\leq kc.$$

Из последнего неравенства и (23) имеем $I \leq kc$. Остальные слагаемые в правой части (44) оцениваются аналогично. Возрастание функций φ_i, $i = 1, 2$, и (44) обеспечивают справедливость (43). Лемма доказана. □

Обозначим через $\Pi^{\pm}z(t)$ и $\Lambda z(t)$ кусочно-постоянные и кусочно-линейное восполнения по t функции $z(t)$, определенной на $\overline{\Omega}\times\overline{\omega}_\tau$. Из оценок (22), (23) вытекает, что последовательности $\{\Pi^{\pm}y(t)\}$ и $\{\Lambda y(t)\}$ равномерно ограничены по τ и ε в $\overset{\circ}{V}(0,T)$, последовательность $\{\Pi^{\pm}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t)\}$ – в $L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))$, а последовательности следов этих функций на Π равномерно ограничены в $L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))$. Поэтому найдутся функции u и ζ из $\overset{\circ}{V}(0,T)$ и подпоследовательности последовательностей $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$ (в дальнейшем за выбранными последовательностями сохраним обозначения самих последовательностей) такие, что

$$\Pi^{\pm}y(t),\ \Lambda y(t)\rightharpoonup\ u\ \text{ в }\ \overset{\circ}{V}(0,T)\,, \tag{45}$$

$$\Pi^{\pm}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t)\rightharpoonup\ \zeta\ \ *\text{-слабо в }\ L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))\,, \tag{46}$$

$$\Pi^{\pm}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t),\ \rightharpoonup\ \zeta\ \ *\text{-слабо в }\ L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))\,. \tag{47}$$

Из оценки (24) и леммы 2 следует существование подпоследовательностей $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$, для которых при τ, $\varepsilon\to 0$ справедливы предельные соотношения

$$\Pi^{\pm}(y-g_\tau)^{-}(t)\ \rightharpoonup\ 0\ \text{ в }\ L_q(Q_T), \tag{48}$$

$$\Pi^{\pm}(y-g_\tau)^{-}(t)\ \rightharpoonup\ 0\ \text{ в }\ L_q(\Pi_T), \tag{49}$$

$$\Pi^{\pm}\varphi_1((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t))\ \rightharpoonup\ \zeta_1\ \text{ в }\ L_1(Q_T), \tag{50}$$

$$\Pi^{\pm}\varphi_2((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t))\ \rightharpoonup\ \zeta_2\ \text{ в }\ L_1(\Pi_T), \tag{51}$$

$$\Pi^{+}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)(t)\ \rightarrow\ \zeta\ \ \text{п.в. в }\ Q_T\ \text{ и на }\Pi_T. \tag{52}$$

Из очевидного равенства

$$\Pi^{\pm}((y-g_\tau)^{+}+g_\tau)-\Pi^{\pm}(y-g_\tau)^{-}=\Pi^{\pm}y, \tag{53}$$

предельных соотношений (45)–(49), (52) и единственности слабого предела следует, что $\zeta = u$ почти всюду в Q_T и на Π_T. Используя равенство (53), соотношения (50)–(52), непрерывность функций φ_1, φ_2, нетрудно показать, что $\zeta_1 = \varphi_1(u)$, $\zeta_2 = \varphi_2(u)$. Кроме того, из (48), (49) вытекает, что $u \geq g$ почти всюду в Q_T и на Π, следовательно, $u \in K$. И, наконец, условия (9), (12) и оценка (23) обеспечивают существование подпоследовательностей $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$ таких, что

$$\Pi^{\pm}k_i(x,\nabla y)\ \rightharpoonup\ \overline{K}_i\ \text{ в }\ L_{p'_1}(Q_T), \tag{54}$$

$$\Pi^{\pm}k_\Pi\Big(\frac{\partial y(t)}{\partial s}\Big)\ \rightharpoonup\ \overline{K_\Pi}\ \text{ в }\ L_{p'_2}(\Pi_T) \tag{55}$$

при $\tau, \varepsilon \to 0$. Докажем далее, что предельная функция u является решением задачи (1)–(3).

Пусть $G_\tau(((y-g_\tau)^+ + g_\tau)(t))$ – линейный функционал, значение которого на элементе $v \in \overset{\circ}{V}$ определяется формулой

$$\langle G_\tau(\xi(t), v\rangle_* = \int\limits_\Omega \varphi_{1t}(\xi(x,t))v(x)\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_{2t}(\xi(s,t))v(s)\,ds.$$

Напомним, что для сокращения записи используется обозначение $\xi = (y-g_\tau)^+ + g_\tau$. Покажем, что последовательность функционалов $\Pi^+ G_\tau((y-g_\tau)^+ + g_\tau)$ ограничена равномерно по τ и ε в пространстве $(\overset{\circ}{V}(0,T))^*$. Имеем

$$\|\,\Pi^+ G_\tau(\xi)\,\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*} = \sup_{v\in\overset{\circ}{V}(0,T)} \left\{ \frac{\left| \int\limits_0^T \langle\, \Pi^+\varphi_{1t}(\xi)\,,\, v\rangle\,dt + \int\limits_0^T \langle\, \Pi^+\varphi_{2t}(\xi)\,,\, v\rangle_\Pi\,dt \right|}{\|v\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} + \|v\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))}} \right\}.$$

Учитывая, что $y(t)$ является решением задачи (20)–(21), и полагая $y(t) = y(T)$ для любого $t \ge T$, запишем равенство

$$\left| \int\limits_0^T \langle\, \Pi^+\varphi_{1t}(\xi)\,,\, v_\tau\rangle\,dt + \int\limits_0^T \langle\, \Pi^+\varphi_{2t}(\xi)\,,\, v_\tau\rangle_\Pi\,dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \Big\{ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,\widehat{\xi})k_i(x,\nabla\widehat{y})\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_\Pi a_\Pi(s,\widehat{\xi})k_\Pi\left(\frac{\partial \widehat{y}}{\partial s}\right)\frac{\partial v_\tau}{\partial s}\,ds + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega \beta(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)\,v_\tau\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Pi \beta(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)\,v_\tau\,ds - \langle\, f_{1\tau},\, v_\tau\,\rangle - \langle\, f_{2\tau},\, v_\tau\,\rangle_\Pi \Big\} \right|,$$

где $v_\tau = \dfrac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} v(x,t)\,dt$. Каждое слагаемое правой части оценим сверху, используя неравенства Гельдера и условия (8), (9), (12); в результате получим

$$\left| \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,\widehat{\xi})k_i(x,\nabla\widehat{y})\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}\,dx \right| + \left| \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int\limits_\Pi a_\Pi(s,\widehat{\xi})k_\Pi\left(\frac{\partial \widehat{y}}{\partial s}\right)\frac{\partial v_\tau}{\partial s}\,ds \right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^2 \beta_{1i}\Big\{ c + M_{0i}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau\,\|\,\widehat{y}(t)\,\|^{p_i}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_i}(\Omega_i)} \right)^{1/p_i'} \Big\} \|v\|_{L_{p_i}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_i}(\Omega_i))},$$

$$\left| \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int\limits_{\Omega_i} \beta(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)\,v_\tau\,dx \right| \le \left(\frac{1}{\varepsilon^{q'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau\,\|(\widehat{y}-\widehat{g}_\tau)^-\,\|^q_{L_q(\Omega_i)} \right)^{1/q'} \|v\|_{L_{p_i}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1{}_{p_i}(\Omega_i))},$$

$$\left| \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau\langle\, f_{1\tau},\, v_\tau\,\rangle_i \right| \le \|\, f_1\,\|_{L_{p'}(Q_T)}\|v\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))},$$

$$\Big|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\langle\, f_{2\tau},\, v_\tau\,\rangle_\Pi\,\Big|\;\le\;\|\,f_2\,\|_{L_{p'}(\Pi_T)}\|v\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Omega))}.$$

Из полученных неравенств и оценок (23), (24) следует, что

$$\|\,\Pi^+G_\tau(\xi)\,\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*}\le c. \tag{56}$$

Поэтому найдутся элемент G и последовательности $\{\tau\}$ и $\{\varepsilon\}$ такие, что

$$\Pi^+G_\tau(y)\;\rightharpoonup\;G\quad(\overset{\circ}{V}\,(0,T))^*\quad\text{при }\tau,\,\varepsilon\to 0. \tag{57}$$

Выясним структуру предельного элемента G. Используя формулу суммирования по частям и учитывая, что $(u_0(x)-g(0))^+ + g(0) = u_0(x)$, имеем

$$\int\limits_0^T\langle\Pi^+G_\tau(\xi),\eta\rangle_*\,\Pi^+z_\tau\,dt=\int\limits_0^T\Big\{\int\limits_\Omega\Pi^+\varphi_{1t}(\xi)\,\eta\,dx+\int\limits_\Pi\Pi^+\varphi_{2t}(\xi)\,\eta\,ds\Big\}\,\Pi^+z_\tau\,dt\;=$$

$$=\int\limits_0^T\Big\{-\int\limits_\Omega\Pi^+\varphi_1(\xi)\,\eta\,dx-\int\limits_\Pi\Pi^+\varphi_2(\xi)\,\eta\,ds\Big\}\,\Pi^+z_{\tau\bar t}\,dt\;-$$

$$-\int\limits_\Omega\varphi_1(u_0(x))\,\eta\,z_\tau(0)\,dx-\int\limits_\Pi\varphi_2(u_0(s))\,\eta\,z_\tau(0)\,ds,$$

где $\eta\in\overset{\circ}{V}$, $z_\tau(t)$ – сеточная функция, полученная сносом в точки сетки $\overline{\omega}_\tau$ значений функции $z(t)\in C^\infty(0,T)$, $z(T)=0$. Учитывая (50)–(52) и (57), в последнем равенстве перейдем к пределу при $\tau,\,\varepsilon\to 0$. В результате будем иметь

$$\int\limits_0^T\langle G,\eta\rangle_* z(t)\,dt=-\int\limits_0^T\Big\{\int\limits_\Omega\varphi_1(u)\eta(x)\,dx+\int\limits_\Pi\varphi_2(u)\eta(s)ds\Big\}\frac{dz}{dt}\,dt\;-$$

$$-\int\limits_\Omega\varphi_1(u_0(x))\eta(x)z(0)\,dx-\int\limits_\Pi\varphi_2(u_0(s))\eta(s)z(0)\,ds. \tag{58}$$

Выбирая в (58) $z\in C_0^\infty(0,T)$, получим равенство

$$\int\limits_0^T\langle G,\eta\rangle_* z(t)\,dt=-\int\limits_0^T\Big\{\int\limits_\Omega\varphi_1(u)\eta(x)\,dx+\int\limits_\Pi\varphi_2(u)\eta(s)\,ds\Big\}\frac{dz}{dt}\,dt. \tag{59}$$

Из (59) следует, что функция $\langle G,\eta\rangle_*$ является обобщенной производной функции Ψ,

$$\Psi(t)=\int\limits_\Omega\varphi_1(u(x,t))\eta(x)\,dx+\int\limits_\Pi\varphi_2(u(s,t))\eta(s)\,ds.$$

По определению функционала J (см. (4))

$$\langle J(u),\eta\rangle_*=\frac{d\Psi(t)}{dt},$$

поэтому

$$\langle G,\eta\rangle_*=\langle J(u),\eta\rangle_*\quad\forall\eta\in\overset{\circ}{V}\,. \tag{60}$$

Докажем, что $u(x,0) = u_0(x)$. Для этого в (60) выберем $z \in C^\infty(0,T)$, $z(T) = 0$. Сравнивая полученное равенство с (58), будем иметь

$$\int\limits_\Omega \big(\varphi_1(u(x,0)) - \varphi_1(u_0(x))\big)\eta(x)\,dx + \int\limits_\Pi \big(\varphi_2(u(s,0)) - \varphi_2(u_0(s))\big)\eta(s)\,ds = 0.$$

Из последнего равенства в силу произвольности $\eta(x)$ и взаимнооднозначности функций $\varphi_i(u)$ следует $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π.

Теперь докажем, что функция u удовлетворяет неравенству (3). Пусть z – произвольная функция из $C_0^\infty(Q_T)$ такая, что $z(x,t) \geq g(x,t)$ почти всюду в Q_T. Выберем в (21) $v = \widehat{y} - \widehat{z_\tau}$, где z_τ – функция, определенная на $\overline{\Omega} \times \overline{\omega}_\tau$ и совпадающая на этом множестве с $z(x,t)$. Полученное равенство, используя кусочно-постоянные восполнения, запишем для произвольного $t \in [0,T]$. Интегрируя результат по отрезку $[0,t_1]$, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{t_1} \Bigg\{ \int\limits_\Omega \Pi^+\varphi_{1t}(\xi)\,\Pi^+(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)\,dx + \int\limits_\Pi \Pi^+\varphi_{2t}(\xi)\,\Pi^+(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)\,ds + \\
&\qquad + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi^+a_i(x,\widehat{\xi}\,)\,\Pi^+k_i(x,\nabla\widehat{y}\,)\,\Pi^+\frac{\partial(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)}{\partial x_i}\,dx + \\
&\qquad + \int\limits_\Pi \Pi^+a_\Pi(s,\widehat{\xi}\,)\,\Pi^+k_\Pi\left(\frac{\partial\widehat{y}}{\partial s}\right)\Pi^+\frac{\partial(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)}{\partial s}\,ds + \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}\langle\Pi^+\beta(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau),\,\Pi^+(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle\Pi^+\beta(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau),\,\Pi^+(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)\rangle_\Pi \Bigg\}\,dt = \\
&\qquad = \int\limits_0^{t_1} \Big\{ \langle\Pi^+f_{1\tau}, \Pi^+(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)\rangle + \langle\Pi^+f_{2\tau}, \Pi^+(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)\rangle_\Pi \Big\}\,dt. \qquad (61)
\end{aligned}$$

Первые два слагаемые в левой части оценим, используя неравенство (26) и оценку (24):

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Omega_i} \Pi^+\varphi_{it}(\xi)\,\Pi^+\widehat{y}\,dx\,dt \geq \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(\Pi^+\widehat{\xi}\,)\,dx\,dt - \\
&\qquad - \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(\xi(0))\,dx - \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Omega_i} \Pi^+\varphi_{it}(g_\tau)\Pi^+(\widehat{y} - \widehat{g}_\tau)^- \geq \\
&\qquad \geq \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(\Lambda\,\xi(t_1))\,dx - \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(u_0(x))\,dx - c\varepsilon^{q'}, \quad i = 1,2. \qquad (62)
\end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись условиями (11), (14), будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi^+a_i(x,\widehat{\xi}\,)\,\Pi^+k_i(x,\nabla\widehat{y})\,\Pi^+\frac{\partial(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)}{\partial x_i}\,dx\,dt \geq \\
&\qquad \geq \int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Pi^+a_i(x,\widehat{\xi}\,)\,\Pi^+k_i(x,\nabla\widehat{z}_\tau)\,\Pi^+\frac{\partial(\widehat{y} - \widehat{z}_\tau)}{\partial x_i}\,dx\,dt, \qquad (63)
\end{aligned}$$

$$\int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi^+ a_\Pi(s,\widehat{\xi})\,\Pi^+ k_\Pi\left(\frac{\partial\widehat{y}}{\partial s}\right)\Pi^+\,\frac{\partial(\widehat{y}-\widehat{z}_\tau)}{\partial s}\,ds\,dt \ \geq$$

$$\geq \int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi^+ a_\Pi(s,\widehat{\xi})\,\Pi^+ k_\Pi\left(\frac{\partial\widehat{z}_\tau}{\partial s}\right)\Pi^+\,\frac{\partial(\widehat{y}-\widehat{z}_\tau)}{\partial s}\,ds\,dt. \quad (64)$$

Используя монотонность функции β, равенство $\beta(\widehat{z}_\tau-\widehat{g}_\tau)=0$, вытекающее из условия $z\geq g$, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1}\big\{\langle\Pi^+\beta(\widehat{y}-\widehat{g_\tau}),\Pi^+(\widehat{y}-\widehat{z}_\tau)\rangle + \langle\Pi^+\beta(\widehat{y}-\widehat{g_\tau}),\Pi^+(\widehat{y}-\widehat{z}_\tau)\rangle_\Pi\big\}\,dt\geq 0. \quad (65)$$

Подставляя (62)–(65) в (61), получим

$$\int_\Omega(\Phi_1(\Lambda\xi(t_1))-\Phi_1(u_0(x)))\,dx+\int_\Pi(\Phi_2(\Lambda y(t_1))-\Phi_2(u_0(x)))\,ds\ +$$

$$+\int_0^{t_1}\int_\Omega\sum_{i=1}^2\Pi^+ a_i(x,\widehat{\xi})\,\Pi^+ k_i(x,\nabla\widehat{z}_\tau)\,\Pi^+\,\frac{\partial(\widehat{y}-\widehat{z}_\tau)}{\partial x_i}\,dx\ +$$

$$+\int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi^+ a_\Pi(s,\widehat{\xi})\,\Pi^+ k_\Pi\left(\frac{\partial\widehat{z}_\tau}{\partial s}\right)\Pi^+\,\frac{\partial(\widehat{y}-\widehat{z}_\tau)}{\partial s}\,ds\,dt\ -$$

$$-\int_0^{t_1}\int_\Omega\Pi^+\varphi_{1t}(\widehat{\xi})\,\Pi^+\widehat{z}_\tau\,dx\,dt-\int_0^{t_1}\int_\Pi\Pi^+\varphi_{2t}(\widehat{\xi})\,\Pi^+\widehat{z}_\tau\,ds\,dt\ \leq$$

$$\leq\int_0^{t_1}\langle\Pi^+ f_{1\tau},\Pi^+(\widehat{y}-\widehat{z}_\tau)\rangle\,dt+\int_0^{t_1}\langle\Pi^+ f_{2\tau},\Pi^+(\widehat{y}-\widehat{z}_\tau)\rangle_\Pi\,dt+c\varepsilon^{q'}.$$

В результате предельного перехода в последнем неравенстве при $\tau,\varepsilon\to 0$ будем иметь

$$I(t_1)\ \equiv\int_0^{t_1}\bigg\{\langle f_1,u-z\rangle+\langle f_2,u-z\rangle_\Pi+\langle J(u),z\rangle_*\ -$$

$$-\int_\Omega\sum_{i=1}^2 a_i(x,u)k_i(x,\nabla z)\,\frac{\partial(u-z)}{\partial x_i}\,dx-\int_\Pi a_\Pi(s,u)\,k_\Pi\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial(u-z)}{\partial s}\,ds\bigg\}\,dt\ \geq$$

$$\geq\ \varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int_\Omega\Phi_1(\Lambda\xi(t_1))\,dx-\int_\Omega\Phi_1(u_0(x))\,dx\ +$$

$$+\ \varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int_\Pi\Phi_2(\Lambda\xi(t_1))\,ds-\int_\Pi\Phi_2(u_0(s))\,ds. \quad (66)$$

Очевидно (66) будет справедливым и для любой функции z из $\overset{\circ}{V}(0,T)$. Неравенство (66) умножим на $1/\lambda$ $(\lambda>0)$, проинтегрируем по t_1 от $T-\lambda$ до T.

В результате получим

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T} I(t_1)\,dt_1 \ge \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\Bigg\{\varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int\limits_{\Omega}\Phi_1(\Lambda\xi(t_1))\,dx + \\ + \varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int\limits_{\Pi}\Phi_2(\Lambda\xi(t_1))\,ds\Bigg\}dt_1 - \int\limits_{\Omega}\Phi_1(u_0(x))\,dx - \int\limits_{\Pi}\Phi_2(u_0(s))\,ds. \quad (67)$$

Из слабой полунепрерывности снизу функционалов $\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(\xi)\,dx\,dt$ следует, что

$$\int\limits_{T-\lambda}^{T}\varliminf_{\varepsilon,\tau\to 0}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(\Lambda\,\xi(t_1))\,dx\,dt_1 \ge \int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u(t))\,dx\,dt. \quad (68)$$

Применяя (68) и равенство

$$\int\limits_{0}^{T}\langle J(v(t)),v(t)\rangle_*\,dt = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{2}\Bigg\{\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(v(t))\,dx\,dt - \int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(v(0))\,dx\Bigg\},$$

справедливость которого была доказана, используя идеи работы [5], преобразуем (67) следующим образом:

$$\int\limits_{0}^{T}\Bigg\{\langle J(u),u-z\rangle_* + \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}a_i(x,u)k_i(x,\nabla z)\,\frac{\partial(u-z)}{\partial x_i}\,dx + \\ + \int\limits_{\Pi}a_\Pi(s,u)k_\Pi\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial(u-z)}{\partial s}\,ds\Bigg\}dt \le \int\limits_{0}^{T}\big\{\langle f_1,u-z\rangle + \langle f_2,u-z\rangle_\Pi\big\}\,dt. \quad (69)$$

Эквивалентность (69) и (3) устанавливается стандартным образом. Теорема доказана.

Summary

L.L. Glazyrina, M.F. Pavlova. On the Solvability of the Problem of the Coupled Movement of Underground and Surface Waters with Nonhomogeneous Bounds to the Solution.

We consider the problem that belongs to the class of problems with double degeneration. The main characteristic of this problem is a nonlocal boundary condition on the slit of the domain. By using the semidiscretization and penalty methods the theorem of the solvability of the first boundary condition problem for the corresponding variational inequality with nonhomogeneous bounds to the solution is proved.

Key words: double degeneration, nonlocal boundary conditions, semidiscretization method, penalty method, generalized solution.

Литература

1. *Антонцев С.Н., Мейрманов А.М.* Математические модели совместного движения поверхностных и подземных вод. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1979. – 80 с.

2. *Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.* О разрешимости одного нелинейного эволюционного неравенства теории совместного движения поверхностных и подземных вод // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 4. – С. 20–31.

3. *Павлова М.Ф.* Исследование уравнений нестационарной нелинейной фильтрации // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 8. – С. 1436–1446.

4. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Квазилинейные эллиптические уравнения. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

5. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equation // Math. Z. – 1983. – Bd. 183, H. 8. – S. 311–341.

Поступила в редакцию
20.11.11

Глазырина Людмила Леонидовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *glazyrina-ludmila@yandex.ru*

Павлова Мария Филипповна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Maria.Pavlova@ksu.ru*