УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 153, кн. 4 Физико-математические науки *2011*

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ И ОЦЕНКА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ ТОНКОСТЕННАЯ КОНСТРУКЦИЯ – ГРУНТ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЕГРАДАЦИИ ГРУНТА

Р.А. Каюмов, Ф.Р. Шакирзянов

Аннотация

Предлагается методика оценки несущей способности системы тонкостенная конструкция – грунт с учетом деформаций ползучести и деградации прочностных характеристик грунта в процессе экскавации. Оценка предельной нагрузки проводится на основе кинематической и статической теорем теории предельного равновесия. Предельное состояние системы оценивается с учетом изменения напряженно-деформированного состояния при постепенной выемке грунта из котлована. В качестве примера решена задача оценки несущей способности системы грунт – шпунтовая стенка.

Ключевые слова: ползучесть, механика грунтов, метод конечных элементов, деградация, предельная нагрузка.

Введение

Массивы грунтов формируются в различных геолого-географических условиях, постоянно испытывают воздействие природных и техногенных процессов. Это порождает огромное многообразие их строения и состояния. В отличие от конструкционных материалов, состав которых подбирается технологами так, чтобы обеспечить необходимые свойства, грунты каждой строительной площадки отличаются своеобразием состава и свойств, что требует в каждом конкретном случае их изучения [1].

Грунты не только обладают особыми свойствами, но и постоянно испытывают различного рода воздействия, изменяющие их состояние и механические характеристики. Строительство новых зданий рядом с существующими, ведение подземных работ, реконструкция сооружений и т. п. приводят к дополнительным воздействиям на грунты, на которых стоят уже построенные сооружения.

В настоящей работе предлагается методика оценки предельного состояния грунта с учетом изменения его свойств и напряженно-деформированного состояния системы «тонкостенная конструкция – грунт» с течением времени в результате постепенной выемки грунта (экскавации). При этом учитывается деградация сцепления C и угла внутреннего трения φ в зависимости от интенсивности накопленных деформаций ползучести. Прочность грунта оценивается с учетом условия, которое является аппроксимацией критерия Кулона – Мора поверхностью второго порядка.

Оценка предельной нагрузки проводится на основе кинематической и статической теорем теории предельного равновесия.

В качестве примера рассмотрена задача оценки предельного состояния несущей способности грунта при наличии процесса выборки грунта из котлована в виде параллелепипеда, укрепленного железобетонной стенкой.

1. Основные соотношения

В настоящей работе принимается, что деформация грунта состоит из упругой части $\{\varepsilon^e\}$ и деформации ползучести $\{\varepsilon^c\}$ (здесь и далее используются векторные обозначения). Связь напряжений $\{\sigma\}$ и упругой части деформаций принимается линейной:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^c\}), \tag{1}$$

где D – матрица упругих характеристик.

Ползучесть учитывается на основе теории упрочнения [2] в виде соотношения:

$$\{\dot{\varepsilon}^c\} = \frac{\sigma_i^n}{1 + B\varepsilon_i^c}[H]\{\sigma\}, \tag{2}$$

где $\{\dot{\varepsilon}^c\} = \{\dot{\varepsilon}_{11}^c, \dot{\varepsilon}_{22}^c, ...\}^T$, $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, ...\}^T$ – векторы, составленные из компонент тензора скорости деформаций ползучести и тензора напряжений; точка над идентификатором означает дифференцирование по времени t, индекс “T” означает операцию транспонирования; σ_i – интенсивность напряжений, B – параметр упрочнения, ε_i^c – интенсивность деформаций ползучести, $[H]$ – матрица коэффициентов вязкости:

$$H = \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

η и μ – реологические коэффициенты.

Условие потери несущей способности грунта по критерию Кулона – Мора определяется соотношением:

$$\tau_n = C - \sigma_n \mathrm{tg}\,\varphi, \tag{3}$$

где τ_n – касательное напряжение, C – сцепление, φ – угол внутреннего трения, σ_n – нормальное напряжение. Это условие можно приближенно записать в более удобной форме, предложенной Друккером и Прагером [3, 4]:

$$F = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - K = 0, \tag{4}$$

где инварианты тензора напряжений J_1, J_2 имеют вид

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2,$$

α и K – постоянные, зависящие от сцепления и внутреннего трения грунта. Они связаны с величинами C, φ соотношениями

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)}, \quad K = \frac{6C\cos\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)}.$$

Геометрическая интерпретация соотношения (4) заключается в том, что ребристая поверхность, определяемая критерием Кулона – Мора (3), описывается гладкой поверхностью.

Под деградацией грунта будем понимать изменение его прочностных характеристик (угла внутреннего трения и сцепления) во времени. Например, в результате анализа данных испытаний по определению физико-механических свойств глинистых грунтов в условиях пространственного напряженного состояния [5] выявлено, что при длительном нагружении в течение 80 сут происходит снижение угла внутреннего трения φ на 16%, а удельное сцепление грунта C уменьшается на 6%. Это связано с влиянием на них деформаций ползучести. Исходя из этого, приняты следующие аппроксимации φ и C функциями, зависящими от интенсивности деформаций ползучести ε_i^c:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{1 + \varphi_1 \varepsilon_i^c}{1 + \varphi_2 \varepsilon_i^c}, \quad C = C_0 \frac{1 + C_1 \varepsilon_i^c}{1 + C_2 \varepsilon_i^c}. \tag{5}$$

где коэффициенты φ_0, φ_1, φ_2, C_1, C_2, C_3, определяющие изменение прочностных характеристик во времени, получены по результатам работы [5] методом минимизации квадратичной невязки расчетных и экспериментальных данных.

Вариационное уравнение принципа возможных перемещений имеет вид

$$\iiint\limits_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\}\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} \{q\}^T \{\delta u\}\, d\Omega + \iint\limits_{S} \{P\}^T \{\delta u\}\, dS, \tag{6}$$

где Ω – объем, занимаемый телом, S – его граница, на которой заданы поверхностные нагрузки, $\{q\}$ и $\{P\}$ – компоненты объемных и поверхностных сил.

Для анализа процесса деформирования конструкции во времени применим метод Эйлера, записав (1), (2), (6) в приращениях. С учетом (2)–(5) из (6) получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}^T [D] \{\delta\varepsilon\}, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} \{\Delta q^{(k+1)}\}^T \{\delta u\}\, d\Omega + \\ + \iint\limits_{S} \{\Delta P^{(k+1)}\}^T \{\delta u\} + \iiint\limits_{\Omega} \frac{\sigma_i^n \Delta t}{1 + C_c \varepsilon_i^c} \{\sigma^{(k+1)}\}^T [H][D] \{\delta\varepsilon\}\, d\Omega. \tag{7}$$

Здесь

$$\{u^{(k+1)}\} = \{u^{(k)}\} + \{\Delta u^{(k+1)}\}, \quad \{\varepsilon^{(k+1)}\} = \{\varepsilon^{(k)}\} + \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\},$$

k – номер шага приращения по времени.

2. Оценка несущей способности грунта по теории предельного равновесия

Максимальную нагрузку q_*, которую может выдержать система «тонкостенная конструкция – грунт», будем искать на основе теории предельного равновесия. В настоящей работе задача решается методом вариации упругих характеристик [7–9], которая позволяет получать нижнюю и верхнюю оценки предельной нагрузки без привлечения сложного математического аппарата.

Пусть уравнение поверхности текучести имеет вид

$$f(\{\sigma\}) = 1. \tag{8}$$

Из принципа максимума Мизеса (см., например, [6]) вытекает закон пластического течения

$$d\{\varepsilon^p\} = d\mu \frac{\partial f(\{\sigma\})}{\partial\{\sigma\}}. \tag{9}$$

Здесь $d\mu$ – вектор, коллинеарный нормали к поверхности текучести (8).

Для решения задачи о предельном состоянии преобразуем уравнение (4) к более удобному матричному виду

$$(\{\sigma\} - \{s\})^T [A] (\{\sigma\} - \{s\}) = 1, \tag{10}$$

где

$$[A] = \frac{1}{k_f} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{12} & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix},$$

$s = \{s_1\ s_1\ s_1\ 0\ 0\ 0\}^T$ – вектор, определяемый координатами центра эллипсоида в пространстве напряжений,

$$k_f = \frac{a_{11}(8a_{12}\sigma_c\sigma_p + a_{11}(3\sigma_c^2 - 2\sigma_c\sigma_p + 3\sigma_p^2))}{4(a_{11} + 2a_{12})}, \quad s_1 = \frac{a_{11}(-\sigma_c + \sigma_p)}{2(a_{11} + 2a_{12})},$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -0.5, a_{44} = 3,$$

σ_p и σ_c – пределы прочности на растяжение и сжатие.

Начнем с задачи оценки коэффициента предельной нагрузки снизу. Согласно статической теореме для оценки снизу необходимо найти напряжения $\{\sigma_-\}$, которые должны удовлетворять уравнениям равновесия и не выходить за пределы поверхности текучести. В теории предельного равновесия статическая теорема может быть записана в виде:

$$\int\limits_{\Omega} \{\sigma_-\}^T \{\xi^+\}\, d\Omega \le \int\limits_{\Omega} \{q_*\}^T \{\dot{u}^+{}_*\}\, d\Omega + \int\limits_{S} \{P_*\}^T \{\dot{u}^+\}\, dS,$$

где $\{\sigma_-\}$ – статическое допустимое поле напряжений, $\{q_*\}, \{P_*\}$ – компоненты объемных и поверхностных предельных нагрузок, $\{\dot{u}^+\}, \{\xi^+\}$ – кинематически возможные поля скоростей перемещений и скоростей пластических деформаций.

Запишем уравнение равновесия в операторной форме:

$$L(\{\sigma\}) = \{Q^*\}, \tag{11}$$

где нагрузка $\{Q^*\}$ имеет вид:

$$\{Q^*\} = \{Q_c\} + \{Q_o\}\theta.$$

Здесь $\{Q_c\}$ – постоянная нагрузка (например, удельный вес), $\{Q_0\}$ – внешняя нормированная нагрузка.

Сведем задачу к случаю равнопрочного материала, вводя обозначение [8, 9]:

$$\{\tau_0\} = \frac{\{\sigma\} - \{s\}}{\theta}.$$

Тогда уравнение (11) примет вид:

$$L(\{\tau_0\}) = \frac{\{q_c\}}{\theta} + \{q_0\} - \frac{L(\{s\})}{\theta}. \tag{12}$$

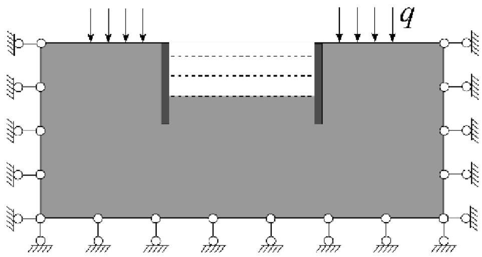

Рис. 1. Расчетная схема

Так как напряжения не должны выходить за пределы поверхности текучести, можно допустить лишь то, что в некоторой точке напряжения выйдут на поверхность текучести. В этом случае нижняя граница коэффициента предельной нагрузки будет определяться соотношением [7–9]:

$$\theta_- \cdot \max_x \sqrt{f(\{\tau_0\})} = 1. \tag{13}$$

Таким образом, задача оценки коэффициента предельной нагрузки снизу θ_- сводится к системе нелинейных уравнений (12), (13) относительно перемещений. Решать уравнения удобно методом простых итераций.

Если матрица $[A]$ является неособенной, из соотношений (9), (10) можно получить выражение

$$\{\sigma_+\} = \frac{[A]^{-1}}{\sqrt{\{\xi\}^T[A]^{-1}\{\xi\}}}\{\xi\} + \{s\}, \tag{14}$$

где $\{\sigma_+\}$ – вектор напряжений, удовлетворяющих соотношению (10).

Однако матрица $[A]$ является особенной. Поэтому при вычислении $[A]^{-1}$ в уравнении (14) воспользуемся тем, что при оценке предельной нагрузки снизу можно использовать любые поверхности, вложенные в исходную. Поэтому в вычислительном эксперименте было принято, что $a_{12} = -0.45$.

Согласно [7–9], результаты, полученные при определении нижней границы, можно использовать для отыскания верхней границы θ_+. В соответствии с кинематической теоремой получено, что верхняя граница коэффициента предельной нагрузки θ_+ вычисляется как отношение работы пластических деформаций W к работе внешних сил U:

$$\theta_+ = \frac{W}{U} = \frac{\int\limits_\Omega \{\sigma_+\}^T\{\varepsilon^+\}\,d\Omega - \int\limits_\Omega \{q_c\}^T\{u^+\}\,d\Omega}{\int\limits_S \{q_0\}^T\{u^+\}\,dS},$$

где $\{\sigma_+\}$ определяется соотношениями (14).

3. Модельная задача

В качестве модельной рассматривается задача о постепенной выемке грунта из котлована (рис. 1), ограниченного по краям подземными железобетонными стенами [10]. Кроме собственного веса грунта и собственного веса железобетонной стенки, на грунт справа и слева от котлована действует распределенная нагрузка q от находящихся рядом зданий.

Учитываемые в расчете физико-механические характеристики грунта и железобетона приводятся в табл. 1. В ней введены следующие обозначения: E – модуль

Табл. 1

Механические характеристики

Вид материала	Глина	Железобетон
E, МПа	13	39.2
μ	0.42	0.2
γ_c, кг/м^3	1959	2000
c, КПа	48	–
φ, гр	16	–
σ^p, МПа	–	2.0
σ^c, МПа	–	3.0

упругости, μ – коэффициент Пуассона, γ_c – собственный объемный вес, σ^p, σ^c – пределы прочности на растяжение и сжатие.

Решение задачи определения НДС объекта проводилось методом конечных элементов с использованием трехмерного восьмиузлового изопараметрического конечного элемента [11]. Было принято, что на нижней границе грунта отсутствуют вертикальные перемещения, а на боковых границах – горизонтальные перемещения (рис. 1).

Расчетная область представляет собой трехмерный массив размерами $15 \times 15 \times \times 5$ м, а стенка имеет размеры $0.3 \times 6 \times 5$ м. Поскольку задача является модельной, то в работе рассмотрено только плоское НДС.

Расчет проводился в несколько этапов. Вначале прикладывалась нагрузка q от собственного веса грунта и шпунта, а также внешняя нагрузка от находящихся рядом зданий. После относительной стабилизации решения начиналось моделирование процесса постепенной выемки грунта. На каждом отрезке времени определялся коэффициент предельной нагрузки.

При численном анализе были проведены исследования предложенного метода с точки зрения сходимости по количеству элементов, шагов по времени и итераций при вычислении коэффициента предельной нагрузки θ. Оптимальным считались такие значения этих параметров, при которых дальнейшее их удвоение приводило к изменению НДС, θ_-, θ_+ не более чем на 1%. Некоторые рекомендации по выбору параметров итерационного процесса вычисления предельной нагрузки можно найти в работах [7–9].

Расчеты проводились при следующих исходных данных: $\varphi_0 = 0.4363$, $\varphi_1 = = 1.0 \cdot 10^3$, $\varphi_2 = 1.4283$, $C_0 = 67.47 \cdot 10^3$, $C_1 = 1.0 \cdot 10^3$, $C_2 = 1.269 \cdot 10^3$, $B = = 1.0 \cdot 10^3$, $\eta = 5.0 \cdot 10^11$, $\mu = 7.0 \cdot 10^11$, $n = 1.1$, $q_0 = 7.0 \cdot 10^5$, $q_c = 2.0 \cdot 10^3$. Оценка предельного равновесного состояния была проведена для нескольких вариантов, в которых изменялась конечная глубина котлована. Некоторые результаты расчета представлены на рис. 2. По оси абсцисс отложено время (в сутках), а по оси ординат – коэффициент предельной нагрузки (фактически коэффициент запаса). Полученные линии h_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, показывают изменение коэффициента запаса при разных конечных значениях глубин выемки котлована ($h_1 = 1$ м, $h_2 = 2$ м, $h_3 = 3$ м, $h_4 = 4$ м, $h_5 = 5$ м).

На рис. 3 представлено векторное поле перемещений на последнем этапе выемки грунта, полученное по модели вязко-упругого тела. Видно, что оно существенно отличается от поля, изображенного на рис. 4 и полученного в результате расчета объекта по теории предельного равновесия для момента потери его несущей способности. В правом нижнем углу на рис. 4 в увеличенном масштабе представлена наиболее интересная область деформированного состояния объекта в момент потери несущей способности, в которой поле перемещений имеет вихреобразную форму.

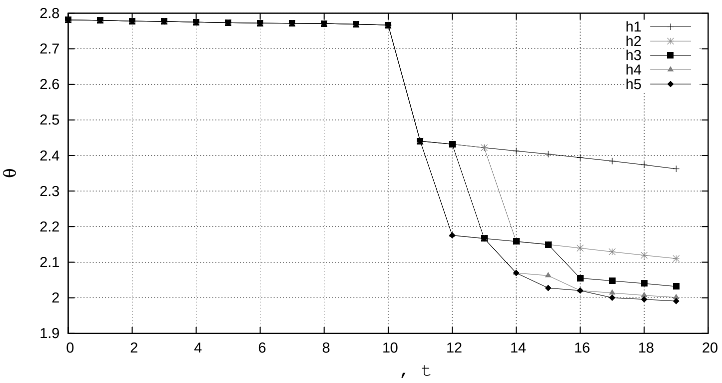

Рис. 2. Коэффициент предельной нагрузки θ

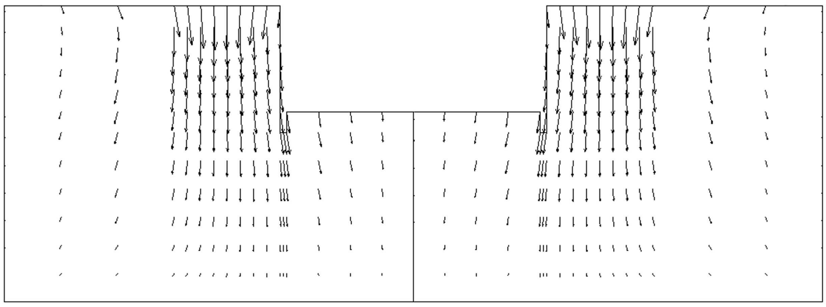

Рис. 3. Поле перемещений по модели вязко-упругого тела

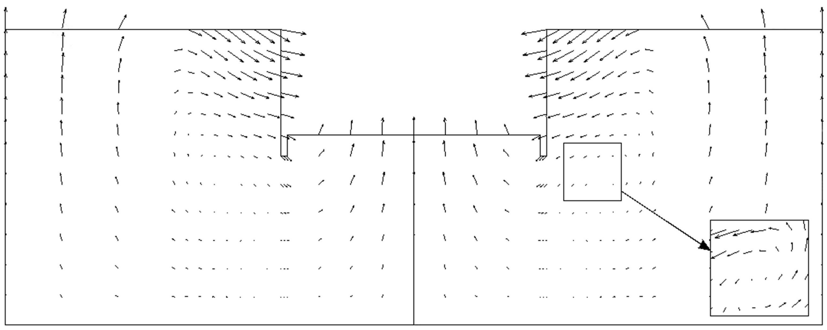

Рис. 4. Поле скоростей для предельного состояния

4. Выводы

Анализ результатов расчета НДС объекта по предложенной модели для процесса постепенной выемки грунта из котлована с учетом ползучести и деградации грунта позволяет сделать следующие выводы.

1. На начальном этапе (до выемки грунта) деградация мала, так как мало изменение НДС. Выемка грунта ведет не только к понижению несущей способности грунта к моменту окончания экскавации (рис. 2), но и к существенному уменьшению предельной нагрузки с течением времени (около 5% за каждые 10 дней).

2. Как и ожидалось, ползучесть грунта приводит к значительному изменению НДС объекта после выемки грунта и существенно увеличивает перемещения точек объекта исследования.

3. К моменту потери несущей способности сооружения поля перемещений могут существенно перестроиться (рис. 3, 4).

Summary

R.A. Kayumov, F.R. Shakirzyanov. Behavior Simulation and Bearing Capacity Estimation of a Thin-Walled Structure-Soil System with Account of Soil Creep and Degradation.

This paper proposes a method for calculating the bearing capacity of a thin-walled structure-soil system taking into account the creep and degradation of the soil strength characteristics in the process of excavation. Evaluation of the limit load is based on the kinematic and static theorems of the limit equilibrium theory. The limit state of the system is determined with consideration for the change in the stress-strain state during the gradual excavation of the pit. As an example, the problem of estimating the bearing capacity of a sheet pilling-soil system is solved.

Key words: creep, soil mechanics, finite element method, degradation, limit load.

Литература

1. *Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В. и др.* Механика грунтов, основания и фундаменты. – М.: АСВ, 2005. – 528 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз., 1962. – 456 с.
3. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Q. Appl. Math. – 1952. – V. 10. – P. 157–165.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
5. *Мирсаяпов И.Т., Королева И.В.* Физико-механические свойства глинистых грунтов в условиях пространственного напряженного состояния // Изв. Казан. гос. архитект.-строит. ун-та. – Казань: КГАСУ, 2010. – № 1(13). – С. 170–175.
6. *Терегулов И.Г., Каюмов Р.А., Сибгатуллин Э.С.* Расчет конструкции по теории предельного равновесия. – Казань: Фэн, 2003. – 180 с.
7. *Каюмов Р.А.* Метод вариации упругих характеристик в задаче о предельной нагрузке // Прикл. механика и техн. физика. – 1990. – № 3. – С. 134–139.
8. *Каюмов Р.А.* Об одном методе двусторонней оценки предельной нагрузки // Проблемы прочности. – 1992. – № 1. – С. 51–55.
9. *Каюмов Р.А.* Об оценке несущей способности конструкции при произвольных условиях текучести // Прикл. механика и техн. физика. – 1993. – № 1. – С. 115–120.
10. *Каюмов Р.А., Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р.* Исследование взаимодействия железобетонной тонкостенной конструкции с грунтовым массивом в условиях ползучести // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: Тр. Второй Междунар. конф. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – С. 198–200.
11. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.

Поступила в редакцию
25.05.11

Каюмов Рашит Абдухакович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов и основ теории упругости Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

E-mail: *kayumov@rambler.ru*

Шакирзянов Фарид Рашитович – аспирант кафедры сопротивления материалов и основ теории упругости Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

E-mail: *faritbox@mail.ru*