

УДК 517.5

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОНСТАНТЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ И МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРАНИЦЫ

Д.А. Абрамов

Аннотация

В статье рассмотрена задача приближенного вычисления коэффициента жесткости кручения для односвязных областей. Сформулирован подход к определению функции расстояния, предложен численный метод вычисления момента инерции относительно границы. При помощи численного эксперимента была улучшена оценка для константы эквивалентности коэффициента жесткости кручения и момента инерции относительно границы.

Ключевые слова: жесткость кручения, момент инерции относительно границы, метод сопряженных градиентов, задача Дирихле.

Введение

Исследование задачи жесткости кручения упругих стержней имеет более чем двухсотлетнюю историю. Особый интерес для изучения представляет введенная Ш. Кулоном [1] безразмерная величина, называемая коэффициентом жесткости кручения и зависящая только от геометрической формы Ω поперечного сечения и размеров упругого стержня. Исследованию данной величины посвящено большое количество работ (см., например, [2–4]). В классическом труде Сен-Венана [4] коэффициент жесткости кручения стержня с односвязным поперечным сечением определяется следующим образом:

$$P(\Omega) = 2 \iint_{\Omega} v \, dx \, dy,$$

где $v = v(x, y)$ – решение (называемое функцией напряжений) однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta v = -2$ с краевым условием $v|_{\partial\Omega} = 0$.

Поскольку задача нахождения v решена только для узкоспециальных классов областей, важной проблемой, возникшей в работах Коши и Сен-Венана, является проблема нахождения геометрического функционала, эквивалентного коэффициенту жесткости кручения стержня с односвязным поперечным сечением.

В работе [5] предложено следующее решение данной задачи: в качестве параметра, эквивалентного $P(\Omega)$, введен функционал $I(\partial\Omega)$, называемый *моментом инерции области Ω относительно границы (евклидовым моментом инерции)*:

$$I(\partial\Omega) = \iint_{\Omega} \text{dist}^2(x, y) \, dx \, dy,$$

где $\text{dist}(x, y)$ – расстояние от точки $(x, y) \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω . Эквивалентность понимается в обычном смысле: существуют константы $\lambda > \mu > 0$ такие, что

$$\mu I(\partial\Omega) \leq P(\Omega) \leq \lambda I(\partial\Omega) \quad (1)$$

для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Для некоторого класса областей \mathbb{A} введем точную константу эквивалентности, заданную выражением

$$\lambda(\mathbb{A}) = \sup_{\Omega \in \mathbb{A}} \frac{P(\Omega)}{I(\partial\Omega)}.$$

Тогда в соотношении (1) $\lambda \equiv \lambda(\mathbb{A})$, если \mathbb{A} – класс односвязных областей.

Известно [5], что $\lambda \leq 64$, однако эта оценка является неточной. Л.В. Ковалевым было показано¹, что $\lambda > 4$; впоследствии в [6] приведена оценка $\lambda > 4.08$, которая справедлива для некоторых типов секторов. Легко видеть, что данная оценка может быть улучшена снизу, если найдется так называемая «экстремальная» область $\tilde{\Omega}$, для которой отношение $P(\tilde{\Omega})/I(\partial\tilde{\Omega})$ будет превосходить 4.08. Однако функции напряжений и расстояния нельзя записать в явном виде для произвольной области, что сильно усложняет поиск.

Целью настоящей работы является уточнение оценки константы λ , а именно разработка программного комплекса для приближенного вычисления отношения $P(\Omega)/I(\partial\Omega)$ произвольной области Ω и поиск экстремальной области среди всевозможных односвязных областей. Для удобства разобьем задачу на три этапа: вычисление функции напряжений, нахождение функции расстояния и вычисление функционалов $P(\Omega)$ и $I(\partial\Omega)$.

1. Вычисление функции напряжений

Для решения задачи Дирихле воспользуемся методом конечных элементов. Исходную область разбиваем на множество треугольных элементов. После разбиения область представляет собой объединение из M треугольников, имеющих в совокупности n вершин. Эти вершины будем считать узлами разбиения. Далее, следуя [7], на каждом треугольном элементе A_m , $m = 1, \dots, M$ с номерами вершин $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ искомое решение аппроксимируем кусочно-линейной функцией $\varphi^{(m)}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ определяются из системы $\varphi^{(m)}(X_s, Y_s) = \Phi_s$, $s = i, j, k$, то есть в узлах (X_s, Y_s) треугольника функция принимает неизвестные пока значения Φ_s функции напряжений. Решив полученную систему, запишем аппроксимирующую функцию в более удобном виде:

$$\varphi^{(m)} = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k,$$

$$N_s = (a_s + b_s x + c_s y) / 2|A_m|, \quad s = i, j, k, \quad (2)$$

где $|A_m|$ – площадь треугольного элемента A_m , а коэффициенты определяются координатами его вершин:

$$\begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{cases} \quad \begin{cases} a_i = X_k Y_i - X_i Y_k, \\ b_i = Y_k - Y_i, \\ c_i = X_i - X_k; \end{cases} \quad \begin{cases} a_i = X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_i = Y_i - Y_j, \\ c_i = X_j - X_i. \end{cases} \quad (3)$$

В вариационной формулировке решение задачи Дирихле для уравнения $\Delta\varphi = -2$ с граничным условием $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ сводится к отысканию минимума функционала

$$\chi(\varphi) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 - 2\varphi \right] dx dy. \quad (4)$$

¹Л.В. Ковалёв. Личная переписка с Ф.Г. Авхадиевым.

Поскольку аппроксимирующая функция φ является непрерывной, интеграл в (4) можно разбить на сумму интегралов по треугольным элементам A_m , $m = 1, \dots, M$, в каждом из которых функция $\varphi^{(m)} = \varphi|_{A_m}$ непрерывна. Обозначим $g^{(m)} = \nabla\varphi^{(m)}$ и перепишем (4) в матричном виде:

$$\chi(\varphi) = \sum_{m=1}^M \chi^{(m)}(\varphi^{(m)}) = \sum_{m=1}^M \iint_{A_m} \left[\frac{1}{2} g^{(m)T} g^{(m)} - 2\varphi^{(m)} \right] dx dy. \quad (5)$$

Учитывая (3), градиент $g^{(m)}$ перепишем в виде:

$$g^{(m)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & \frac{\partial N_i^{(m)}}{\partial x} & [0] & \frac{\partial N_j^{(m)}}{\partial x} & [0] & \frac{\partial N_k^{(m)}}{\partial x} & [0] \\ [0] & \frac{\partial N_i^{(m)}}{\partial y} & [0] & \frac{\partial N_j^{(m)}}{\partial y} & [0] & \frac{\partial N_k^{(m)}}{\partial y} & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ \Phi_i \\ [0] \\ \Phi_j \\ [0] \\ \Phi_k \\ [0] \end{bmatrix} = D^{(m)} \Phi^{(m)},$$

где элементы матрицы $D^{(m)} = (d_{pq}^{(m)})_{p,q=1}^{2,n}$ и вектора $\Phi^{(m)} = (\varphi_q^{(m)})_{q=1}^n$ удовлетворяют условиям: $d_{pq}^{(m)} = \varphi_q^{(m)} = 0$, $q \notin \{i, j, k\}$, $1 \leq q \leq n$, $p = 1, 2$. Из (2) следует

$$D^{(m)} = \frac{1}{2|A_m|} \begin{bmatrix} [0] & b_i^{(m)} & [0] & b_j^{(m)} & [0] & b_k^{(m)} & [0] \\ [0] & c_i^{(m)} & [0] & c_j^{(m)} & [0] & c_k^{(m)} & [0] \end{bmatrix}.$$

Решая задачу минимизации функционала (5) на каждом конечном элементе, получим следующую систему линейных уравнений относительно вектора неизвестных $\Phi^{(m)}$:

$$\sum_{m=1}^M \iint_{A_m} D^{(m)T} D^{(m)} \Phi^{(m)} dx dy = 2 \sum_{m=1}^M \iint_{A_m} N^{(m)T} dx dy. \quad (6)$$

Правую часть (6) можно упростить, используя выражение для вычисления интеграла

$$\iint_{A_m} N_i^a N_j^b N_k^c dx dy = \frac{2a!b!c!}{(a+b+c+2)!} |A_m|, \quad a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (7)$$

приведенное в [8]. Учитывая, что подынтегральное выражение в правой части (6) не зависит от переменных интегрирования, получим систему уравнений:

$$\sum_{m=1}^M D^{(m)T} D^{(m)} \Phi^{(m)} = \frac{2}{3} \sum_{m=1}^M e^{(m)}, \quad (8)$$

где $e^{(m)} = (e_q^{(m)})_{q=1}^n$ – вектор, элементы которого задаются условием:

$$e_q^{(m)} = \begin{cases} 1, & q \in \{i, j, k\}, \\ 0, & q \notin \{i, j, k\}. \end{cases}$$

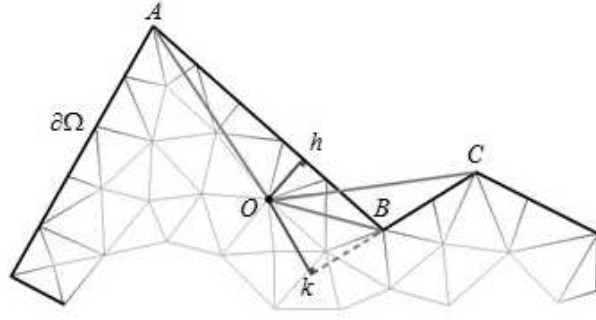


Рис. 1. Вычисление расстояния

Так как матрица системы (8) сильно разрежена и имеет большую размерность, для ее решения используем метод сопряженных градиентов, впервые приведенный в оригинальной работе Хестенса и Штифеля [9]. Ниже представлен алгоритм данного метода решения СЛАУ вида $Ax = b$, размерности $n \times n$, с относительной погрешностью ε . Алгоритм оптимизирован для программной реализации.

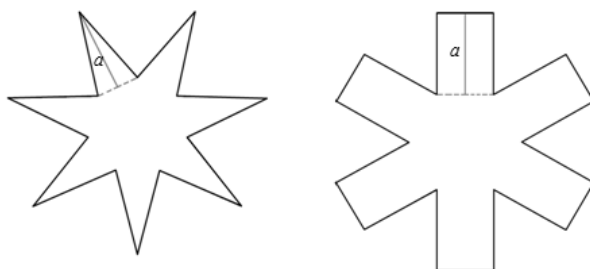
1. Инициализация: $k = 0$, $\rho_1 = \|\mathbf{b}\|_2 = \sum_{i=1}^n |b_i|^2$, $\rho_2 = 1$, $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{b}$.
2. $\mathbf{p} = \mathbf{r} + (\rho_1/\rho_2)\mathbf{p}$.
3. $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{p}$.
4. $\alpha = \rho_1/(\mathbf{p}, \mathbf{w})$.
5. $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{p}$.
6. $\mathbf{r} = \mathbf{r} - \alpha\mathbf{w}$.
7. $\rho_2 = \rho_1$, $\rho_1 = \|\mathbf{r}\|_2^2$.
8. Если $\sqrt{\rho_1} > \varepsilon\|\mathbf{b}\|_2$, то возврат к 1.. Иначе \mathbf{x} – искомое решение.

2. Вычисление расстояния

По аналогии с функцией напряжений, функцию расстояния будем аппроксимировать кусочно-линейной функцией $\delta = \sum_{m=1}^M \delta^{(m)} = \sum_{m=1}^M N^{(m)}E$ на множестве из M треугольных элементов. Вектор $E^T = (\text{dist}^2(X_1, Y_1), \dots, \text{dist}^2(X_n, Y_n))$ представляет собой квадраты расстояний от вершин (X_i, Y_i) треугольных элементов области Ω до границы.

Рассмотрим процесс вычисления расстояния от некоторой внутренней точки $O(X, Y)$ до границы $\partial\Omega$ (см. рис. 1). Каждый сегмент границы вместе с точкой O образует треугольник, следовательно, $\text{dist}(X, Y) = \min_i \delta_i$, где δ_i – расстояние в i -м треугольнике; минимум берется по всем треугольникам. Если углы при основании треугольника острые (как в $\triangle AOB$), то расстояние δ_i равняется высоте Oh . Иначе ($\triangle BOC$) $\delta_i = \min(OB, OC)$ (хотя сторона OC не является расстоянием, так как пересекает границу, она никогда не будет учитываться, поскольку всегда существует высота, меньшая OC). Таким образом, для некоторого треугольника с длинами сторон α , β , γ (сторона длины γ является сегментом границы) квадрат расстояния до границы задается следующим образом:

$$\delta_i^2 = \begin{cases} \alpha^2 - (\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2)/4\gamma^2, & \alpha^2 + \gamma^2 > \beta^2 \text{ и } \beta^2 + \gamma^2 > \alpha^2, \\ \min(\alpha^2, \beta^2), & \alpha^2 + \gamma^2 \leq \beta^2 \text{ или } \beta^2 + \gamma^2 \leq \alpha^2. \end{cases}$$

Рис. 2. Классы областей ST и SN

3. Вычисление жесткости кручения и момента инерции относительно границы

Искомые функции напряжений и расстояния мы аппроксимировали кусочно-линейными функциями φ и δ , имеющими вид:

$$\nu = \sum_{m=1}^M \nu^{(m)} = \sum_{m=1}^M N^{(m)} V,$$

где V – вектор значений функции в узлах разбиения области Ω . Вычислим интеграл ν :

$$\iint_{\Omega} \nu \, dx \, dy = \sum_{m=1}^M \iint_{A_m} \nu^{(m)} \, dx \, dy = \sum_{m=1}^M \iint_{A_m} N^{(m)} V \, dx \, dy = \sum_{m=1}^M V^T \iint_{A_m} N^{(m)T} \, dx \, dy.$$

Используя формулу (7), получим выражение для вычисления интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nu \, dx \, dy &= \sum_{m=1}^M V^T \iint_{A_m} N^{(m)T} \, dx \, dy = \\ &= \sum_{m=1}^M V^T e^{(m)} |A_m|/3 = \sum_{m=1}^M (V_i + V_j + V_k) |A_m|/3. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, жесткость кручения и, момент инерции относительно границы можно вычислить с учетом (9):

$$P(\Omega) = 2 \sum_{m=1}^M (\Phi_i + \Phi_j + \Phi_k) |A_m|/3, \quad (10)$$

$$I(\partial\Omega) = \sum_{m=1}^M (E_i + E_j + E_k) |A_m|/3. \quad (11)$$

Используя формулы (10), (11), можно приближенно вычислить функционалы $P(\Omega)$ и $I(\partial\Omega)$ для односвязной области Ω , граница которой представляет собой произвольный многоугольник.

4. Результаты численного анализа

Для оценки константы λ был разработан программный комплекс, предназначенный для вычисления функционалов $P(\Omega)$ и $I(\partial\Omega)$ от односвязной области Ω ,

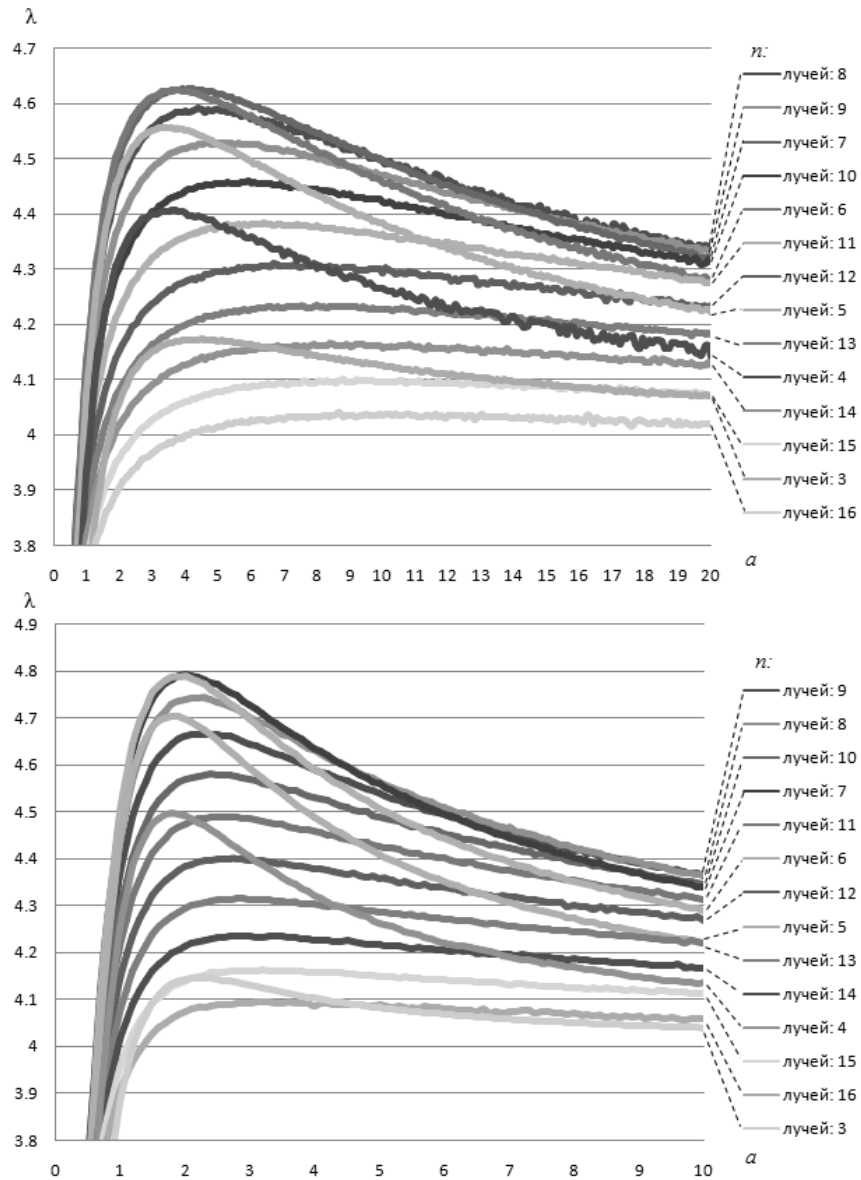


Рис. 3. Классы областей $ST(n, a)$ (вверху) и $SN(n, a)$ (внизу)

представляющей собой произвольный многоугольник. Все основные расчеты проведены при разбиении области, содержащем порядка 10^5 узлов. Погрешность приближенного вычисления была оценена на областях, для которых искомые функционалы имеют аналитическое решение (см. [2, 3]). Расхождение между численным и точным решением варьируется в пределах от 0.0004% до 1.1%.

Целью численного анализа было нахождение экстремальных областей, для которых значение λ существенно бы превышало 4.08. В связи с этим интересными оказались следующие классы областей. Обозначим через $ST(n, a)$ класс звездообразных областей с n лучами и отношением высоты луча к его основанию, равному a ; также введем класс «снежинок» $SN(n, a)$ с аналогичными параметрами (см. рис. 2).

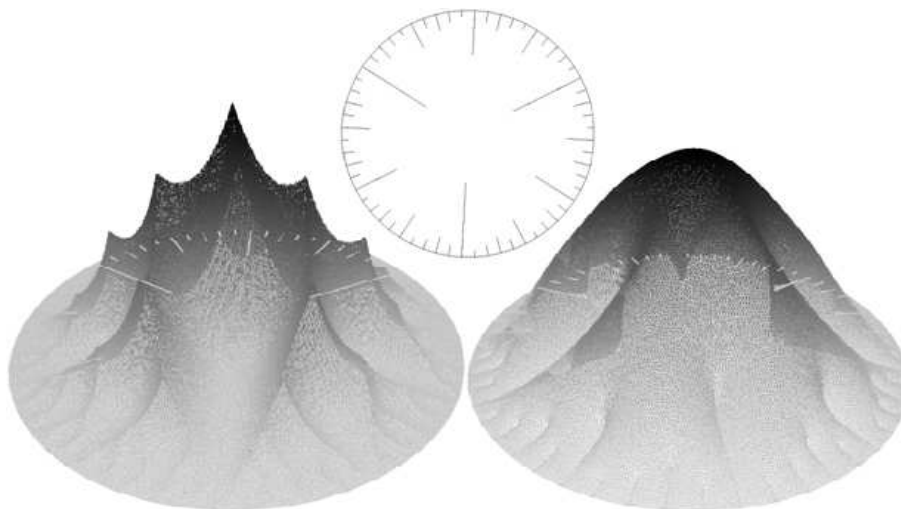


Рис. 4. Вверху: область Ω_3 . Внизу: результаты моделирования функции расстояния (слева) и функции напряжений (справа) для Ω_3

Результаты численных расчетов, представленные на рис. 3, позволяют сделать следующие выводы:

1. В классе ST найдется область Ω_1 ($n = 7$, $a \approx 3.9$) такая, что $P(\Omega_1) \approx 4.64I(\partial\Omega_1)$ и выполняется следующее неравенство:

$$\lambda \geq \lambda(ST) \geq 4.64.$$

2. В классе SN найдется область Ω_2 ($n = 7$, $a \approx 2$) такая, что $P(\Omega_2) \approx 4.8I(\partial\Omega_2)$ и выполняется следующее неравенство:

$$\lambda \geq \lambda(SN) \geq 4.8.$$

Далее был исследован класс областей, производных от SN , имеющих вид многогранника с разрезами различных соотношений. На рис. 4 приведена область Ω_3 , а также результаты приближенного вычисления функций расстояния и напряжений для этой области, представленные в виде трехмерных поверхностей. Высота каждой точки поверхности определяется значением соответствующей функции.

Для области Ω_3 верно приближенное неравенство $P(\Omega_3) \approx 6I(\partial\Omega_3)$. Следовательно, в классе односвязных областей константа эквивалентности $\lambda \geq 6$.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Ф.Г. Авхадиеву за предложенную задачу и ценные замечания, а также доктору физико-математических наук, профессору А.Б. Мазо за предоставленную программу триангуляции области.

Summary

D.A. Abramov. Lower Estimates for the Equivalence Constant of the Torsional Rigidity and the Moment of Inertia about a Boundary.

In this paper, we consider the problem of approximate computation of the torsional rigidity coefficient for simply-connected domains. An approach to the distance function determination is defined; a numerical method for calculating the moment of inertia about a boundary

is proposed. Using a numerical experiment, the estimate for the equivalence constant of the torsional rigidity coefficient and the moment of inertia about a boundary is improved.

Key words: torsional rigidity, moment of inertia about a boundary, conjugate gradients method, Dirichlet problem.

Литература

1. *Coulomb C.A.* Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion, et sur l'élasticité de fils de métal // Mem. de l'Acad. de Sci. – 1784. – P. 229–269.
2. *Полюга Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
3. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 688 с.
4. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 519 с.
5. *Авхадиев Ф.Г.* Решение обобщенной задачи Сен-Венана // Матем. сб. – 1998. – № 12. – С. 3–12.
6. *Гиниятова Д.Х., Салахудинов Р.Г.* Евклидовый момент инерции и модифицированная жесткость кручения // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во. – 2007. – Т. 35. – С. 74–75.
7. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
8. *Eisenberg M.A., Malvern L.E.* On finite element integration in natural co-ordinates // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1973. – V. 7, No 4. – P. 574–575.
9. *Hestenes M.R., Stiefel E.* Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1952. – V. 49, No 6. – P. 409–436.

Поступила в редакцию
15.04.11

Абрамов Денис Александрович – аспирант кафедры теории функций и приближений Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: quaerix@gmail.com