

УДК 532.5.031-533.692-533.694.2

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ

*Р.Ф. Марданов*

### Аннотация

Изложен приближенный метод проектирования трехэлементного крылового профиля по заданному на его поверхности распределению скорости как функции дуговой абсциссы. Сутью метода является сведение трехсвязной области течения к односвязной, расположенной на многолистной римановой поверхности, путем введения между элементами крылового профиля каналов отбора и выдува потока, асимптотически стремящихся к кольцевым. Приведен пример проекторочного расчета.

**Ключевые слова:** обратная краевая задача аэрогидродинамики, трехэлементный крыловой профиль, закрылок, предкрылок.

### Введение

Проектирование крылового профиля, состоящего из нескольких элементов, является актуальной задачей, так как такое сечение имеют крылья с предкрылками и закрылками многих современных самолетов дозвуковой авиации. Однако большинство научно-исследовательских работ в этой области касается случая двухэлементных крыловых профилей. Решение задачи, когда число элементов больше двух, представляет большую сложность ввиду громоздкости математического аппарата решения краевых задач в многосвязных областях.

Одним из наиболее эффективных подходов к решению задач проектирования крыловых профилей основан на теории обратных краевых задач аэрогидродинамики (ОКЗА). В монографии [1] приведены решения ряда задач для случая одноэлементного крылового профиля. В работе [2] изложен метод проектирования профиля крыла экраноплана, основанный на введении фиктивного потока идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ) под экраном. В работе [3] получено полное решение ОКЗА для двухэлементного крылового профиля с использованием аппарата эллиптических функций.

Решения задач проектирования двух- и трехэлементного крылового профиля, основанные на отображении области в плоскости комплексного потенциала на плоскость с разрезами вдоль дуг окружности единичного радиуса, приведены в [4, 5]. Другой метод решения ОКЗА для трехэлементного крылового профиля, сводящий решение задачи к нахождению искомой функции в верхней полуплоскости канонической плоскости путем вычисления интеграла типа Коши по вещественной оси, предложен в работе [6]. Однако в этих работах авторы ограничились лишь изложением теоретических выкладок, результаты численных расчетов не приведены.

В настоящей работе использован подход, позволяющий свести краевую задачу в многосвязной области к задаче в односвязной области, расположенной на многолистной римановой поверхности. Для этого в промежутках между элементами профиля вводятся каналы отбора и выдува потока, асимптотически стремящиеся

к кольцевым, уходящим на второй лист римановой поверхности. Потребовав, помимо условий разрешимости ОКЗА [1], выполнения дополнительных условий, налагаемых на форму и положение каналов, удается получить течение в односвязной области (внешности профиля с каналами отбора и выдува), практически совпадающее с течением в многосвязной области (внешности многоэлементного профиля) всюду, за исключением некоторой окрестности каналов между элементами профиля. Оговоримся, что область применения предлагаемого приближенного метода имеет ограничения. Достоверные численные результаты удается получить в случае, когда пространство между элементами профиля представляет из себя канал постоянной ширины, близкий по форме к кольцевому сектору.

Эффективность используемого подхода была проиллюстрирована в ряде работ. В [7, 8] разработаны приближенные методы решения обратной и обратной смешанной краевых задач для профиля крыла экраноплана. Случай проектирования многоэлементного крылового профиля рассмотрен в [9]. В этих работах распределение скорости по поверхности крылового профиля задавалось как функция параметра в канонической области.

Более важным с практической точки зрения является задание распределения скорости как функции дуговой абсциссы контура. В этом случае еще до решения задачи можно вычислить коэффициент сопротивления и приближенно коэффициент подъемной силы, проверить удовлетворение задаваемого распределения скорости критерию безотрывности обтекания. Однако метод решения при этом значительно усложняется. В [10] разработан приближенный метод проектирования двухэлементного крылового профиля по распределению скорости, заданному как функция дуговой абсциссы. Приведены примеры как тестовых, так и проектных расчетов. Сравнение результатов тестовых расчетов с результатами, полученными методом [3], показало хорошее совпадение. В настоящей работе этот метод обобщен на случай трехэлементного крылового профиля.

## 1. Постановка задачи

В физической плоскости  $z = x + iy$  искомый трехэлементный крыловой профиль  $L_z = L_1 \cup L_2 \cup L_3$  обтекается установившимся потенциальным потоком ИНЖ с заданной скоростью  $v_\infty$  на бесконечности (рис. 1, а). Точки  $A_k$  – точки разветвления потока, точки  $B_k$  – точки схода потока с внутренними к области течения  $G_z$  углами равными  $2\pi$ . Здесь и далее  $k = 1, 2, 3$  – индекс элемента профиля. Начало координат выбрано в задней кромке  $B_1$  первого элемента профиля, а ось абсцисс  $x$  направлена вдоль скорости  $v_\infty$  набегающего потока. На контуре каждого из элементов крылового профиля задано распределение скорости  $v_k(s)$ , где  $s \in [0, l_k]$  – дуговая абсцисса,  $l_k$  – периметр. Заданы расход  $Q_1$  между первым и вторым, расход  $Q_2$  между вторым и третьим элементами крылового профиля и величины  $\Delta\varphi_2 = \varphi_{a2} - \varphi_{a1}$  и  $\Delta\varphi_3 = \varphi_{a3} - \varphi_{a1}$  – разницы значений потенциала скорости в критических точках  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ .

Требуется определить форму  $L_z$  контура трехэлементного крылового профиля.

## 2. Сведение к вспомогательной задаче

Приближенный метод проектирования двухэлементного крылового профиля подробно изложен в работе [10]. Его обобщение на случай трехэлементного крылового профиля, в отличие от других методов, не требует привлечения иного, более сложного математического аппарата решения краевых задач в многосвязных областях. Усложнение состоит лишь в введении двух дополнительных каналов отбора и выдува и появлении связанных с ними добавочных слагаемых в формулах, дополнительных неизвестных и уравнений для их определения. Поэтому в изложении

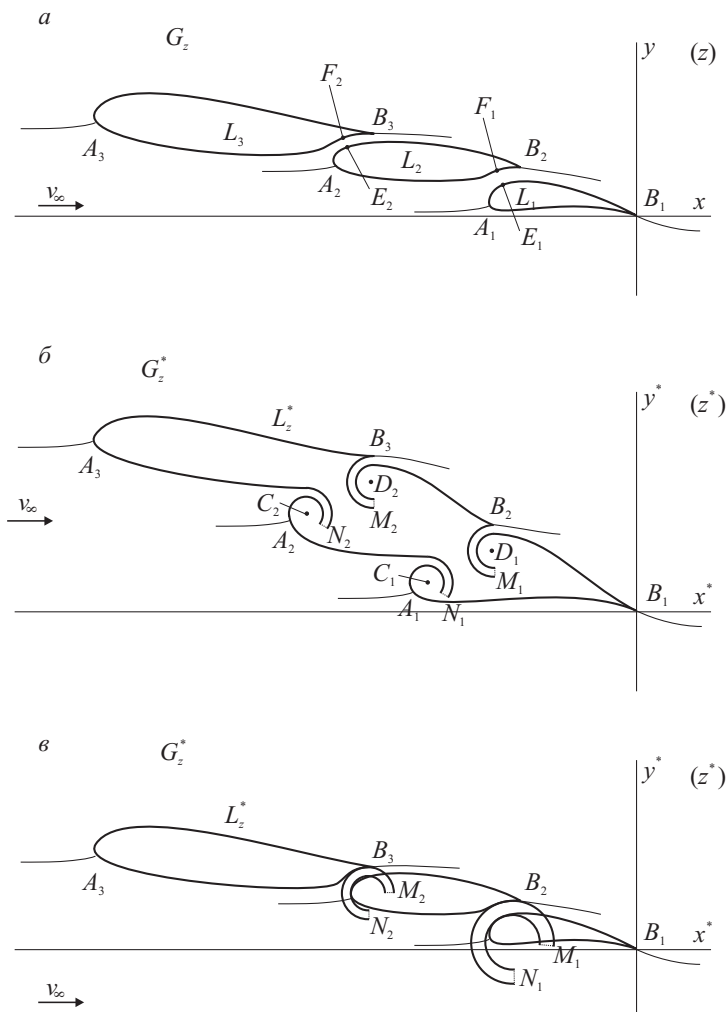


Рис. 1. Физическая плоскость  $z$  для исходной задачи (а); физическая плоскости  $z^*$  для вспомогательной задачи при несовпадающих (б) и совпадающих (в) центрах каналов

метода решения настоящей работы подробные пояснения будут опущены.

При сделанных предположениях введем в плоскости  $z$  функцию комплексного потенциала  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , приняв  $w = 0$  в точке  $A_1$ . Вычислим распределение потенциала скорости по контуру каждого элемента крылового профиля

$$\varphi_k(s) = \int_{s_{ak}}^s v_k(s) ds + \Delta\varphi_k, \quad s \in [0, l_k],$$

где  $s_{ak}$  – дуговые абсциссы точек  $A_k$ , а  $\Delta\varphi_1 = 0$ . Тогда циркуляцию по каждому из элементов определим по формуле  $\Gamma_k = \varphi_k(l_k) - \varphi_k(0)$ , а циркуляцию на бесконечности – как  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ .

Предлагаемый приближенный метод решения основан на преобразовании, позволяющем свести краевую задачу для трехсвязной области в плоскости  $z$  к задаче в односвязной области в плоскости  $z^*$  путем введения в рассмотрение профиля  $L_z^*$  с двумя устройствами отбора и двумя устройствами выдува (рис. 1, б), которые

моделируются круговыми каналами с постоянными скоростями на стенках [11]. Обозначим через  $N_1, N_2$  бесконечно удаленные точки каналов отбора и через  $M_1, M_2$  – бесконечно удаленные точки каналов выдува. При условии равенства расходов и скоростей на внешней и внутренней стенках каналов радиусы окружностей, к которым асимптотически стремятся стенки, будут равны. Потребовав совпадения центров  $C_1, D_1$  и  $C_2, D_2$  асимптотических окружностей для каналов, получим контур  $L_z^*$ , совпадающий по форме с контуром  $L_z$  всюду, кроме окрестности каналов (рис. 1, б).

По аналогии с работой [10] на контуре  $L_z$  в канале между первым и вторым элементами профиля выберем точку  $E_1$  с дуговой абсциссой  $s_{e1}$  на верхней поверхности контура  $L_1$  и точку  $F_1$  с дуговой абсциссой  $s_{f1}$  на нижней поверхности контура  $L_2$  так, чтобы  $\varphi_1(s_{e1}) = \varphi_2(s_{f1})$ . На контуре  $L_z^*$  точке  $E_1$  будет соответствовать две точки: точка  $E_{n1}$  на стенке  $N_1A_1$  канала отбора и точка  $E_{m1}$  на стенке  $M_1B_1$  канала выдува. Точке  $F_1$  будет соответствовать точки  $F_{n1}$  на стенке  $N_1A_2$  канала отбора и  $F_{m1}$  на стенке  $M_1B_2$  канала выдува. Аналогично между вторым и третьим элементами введем точку  $E_2$  с дуговой абсциссой  $s_{e2}$  на верхней поверхности контура  $L_2$  и точку  $F_2$  с дуговой абсциссой  $s_{f2}$  на нижней поверхности контура  $L_3$  так, чтобы  $\varphi_2(s_{e2}) = \varphi_3(s_{f2})$ . На контуре  $L_z^*$  им будут соответствовать точки  $E_{n2}, E_{m2}$  и  $F_{n2}, F_{m2}$ .

### 3. Постановка вспомогательной задачи

В физической плоскости  $z^* = x^* + iy^*$  искомый крыловой профиль  $B_1A_1N_1A_2N_2A_3B_3M_2B_2M_1B_1$  обтекается установившимся потенциальным потоком ИНЖ со скоростью  $v_\infty$  на бесконечности. За начало координат выберем точку  $B_1$ , ось абсцисс  $x^*$  проведем параллельно скорости набегающего потока. На профиле имеются устройства отбора и выдува потока, моделируемые круговыми каналами с постоянными скоростями, бесконечно удаленные точки которых обозначены как  $N_1, N_2$  и  $M_1, M_2$  соответственно. Выдуваемая из каналов  $M_1, M_2$  жидкость имеет те же параметры, что и внешний поток. Заданы циркуляция  $\Gamma$  на бесконечности, расход  $Q_1$  в каналах  $N_1$  и  $M_1$ , расход  $Q_2$  в каналах  $N_2$  и  $M_2$  и величины  $\Delta\varphi_2 = \varphi_{a2} - \varphi_{a1}$  и  $\Delta\varphi_3 = \varphi_{a3} - \varphi_{a1}$  – разницы значений потенциала скорости в критических точках  $A_1, A_2$  и  $A_1$ . На искомом контуре задано также распределение скорости  $v(s)$ . Так как контур  $L_z^*$  имеет восемь участков (стенки кольцевых каналов), на которых дуговая абсцисса стремится к бесконечности, то функция  $v(s)$  будет многозначной. Зададим ее так, чтобы дуговые абсциссы совпадающих точек контуров  $L_z$  и  $L_z^*$  вне стенок каналов были равны:

$$v(s) = \begin{cases} v_1(s), & s \in [0, s_{e1}], \text{ на } B_1A_1E_{n1}, & v_{c1}, & s \in [s_{e1}, \infty), \text{ на } E_{n1}N_1, \\ -v_{c2}, & s \in (-\infty, s_{f1}], \text{ на } N_1F_{n1}, & v_2(s), & s \in [s_{f1}, s_{e2}], \text{ на } F_{n1}A_2E_{n2}, \\ v_{c3}, & s \in [s_{e2}, \infty), \text{ на } E_{n2}N_2, & -v_{c4}, & s \in (-\infty, s_{f2}], \text{ на } N_2F_{n2}, \\ v_3(s), & s \in [s_{f2}, l_3], \text{ на } F_{n2}A_3B_3, & v_3(s), & s \in [0, s_{f2}], \text{ на } B_3F_{m2}, \\ -v_{c4}, & s \in [s_{f2}, \infty), \text{ на } F_{m2}M_2, & v_{c3}, & s \in (-\infty, s_{e2}], \text{ на } M_2E_{m2}, \\ v_2(s), & s \in [s_{e2}, l_2], \text{ на } E_{m2}B_2, & v_2(s), & s \in [0, s_{f1}], \text{ на } B_2F_{m1}, \\ -v_{c2}, & s \in [s_{f1}, \infty), \text{ на } F_{m1}M_1, & v_{c1}, & s \in (-\infty, s_{e1}], \text{ на } M_1E_{m1}, \\ v_1(s), & s \in [s_{e1}, l_1], \text{ на } E_{m1}B_1. \end{cases}$$

Модули скорости на стенках каналов выберем равными  $v_{c1} = v_1(s_{e1})$ ,  $v_{c2} = -v_2(s_{f1})$ ,  $v_{c3} = v_2(s_{e2})$ ,  $v_{c4} = -v_3(s_{f2})$ .

Требуется определить форму контура  $L_z^*$ .

#### 4. Решение вспомогательной задачи

Введем в рассмотрение область  $G_\zeta$  – внешность круга единичного радиуса в канонической плоскости  $\zeta = \rho e^{i\gamma}$ . Для взаимно однозначного отображения областей  $G_\zeta$  и  $G_z^*$  (внешности профиля с каналами) предполагается соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей  $z^*$  и  $\zeta$  и переход точки  $z = 0$  в точку  $\zeta = 1$ . В канонической плоскости имеем обтекание окружности с расположенными на ней точечными стоками в точках  $N_1, N_2$  и источниками в точках  $M_1, M_2$ . Комплексный потенциал  $w(\zeta)$  течения имеет вид

$$w(\zeta) = u_0 \left( \zeta e^{-i\beta} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j}{\pi} \ln \frac{\zeta - \zeta_{mj}}{\zeta - \zeta_{nj}} + C_0, \quad (1)$$

где  $u_0$  и  $\beta$  – модуль и аргумент скорости набегающего потока в плоскости  $\zeta$ ,  $\zeta_{nj} = e^{i\gamma_{nj}}$  и  $\zeta_{mj} = e^{i\gamma_{mj}}$  – координаты точек  $N_j$  и  $M_j$ , а  $C_0 = C_1 + iC_2$  – комплексная постоянная. Обозначим через  $\zeta_{ak} = e^{i\gamma_{ak}}$ ,  $\zeta_{bk} = e^{i\gamma_{bk}}$  координаты точек  $A_k$  и  $B_k$  соответственно, причем  $\gamma_{b1} = 0$ , то есть  $\zeta_{b1} = 1$ . Комплексно сопряженную скорость найдем, продифференцировав выражение (1):

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 \left( e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i \zeta} + \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j}{\pi} \left( \frac{1}{\zeta - \zeta_{mj}} - \frac{1}{\zeta - \zeta_{nj}} \right). \quad (2)$$

Выделив вещественную часть в (1), определим значение потенциала скорости на границе  $\zeta = e^{i\gamma}$ :

$$\varphi(\gamma) = 2u_0 \cos(\gamma - \beta) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} + \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j}{\pi} \left[ \ln \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_{mj}}{2} \right| - \ln \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_{nj}}{2} \right| \right] + C_1.$$

На рис. 2, *a, б* схематично показаны области в плоскости комплексного потенциала для обтекания трехэлементного крылового профиля и профиля с каналами отбора и выдува потока, обозначим их через  $G_w$  и  $G_w^*$  соответственно. Видно, что значения потенциала скорости в совпадающих точках контуров  $L_z$  и  $L_z^*$  могут не совпадать. Существенным является то, что для трехэлементного профиля разницы между значениями функции потенциала скорости в точках  $B_k$  при подходе к ним сверху и снизу равны  $\Gamma_k$ , а для профиля с каналами отбора и выдува эти разницы равны  $\Gamma$  в точке  $B_1$  и 0 в точках  $B_2, B_3$ .

Для решения обратной задачи метод сопоставления плоскостей (см., например, [5, с. 17]) можно использовать только после дополнительного преобразования, которое графически проиллюстрировано на рис. 2 и подробно описано в [10]. Основываясь на этом преобразовании, введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{\varphi}(\gamma) = \begin{cases} \varphi(\gamma) - \Gamma_2 - \Gamma_3, & 0 \leq \gamma < \gamma_{b2}, \\ \varphi(\gamma) - \Gamma_2, & \gamma_{b2} \leq \gamma < \gamma_{b3}, \\ \varphi(\gamma), & \gamma_{b3} < \gamma \leq 2\pi, \end{cases}$$

значения которой будут совпадать со значениями функций  $\varphi_k(s)$  в соответствующих точках<sup>1</sup> контура  $L_z$  и единичной окружности в плоскости  $\zeta$ .

<sup>1</sup>Точки контура  $L_z$ , соответствующие точкам единичной окружности, есть точки, совпадающие с точками контура  $L_z^*$  (вне окрестности каналов), переходящими в точки единичной окружности при конформном отображении областей  $G_z^*$  и  $G_\zeta$ .

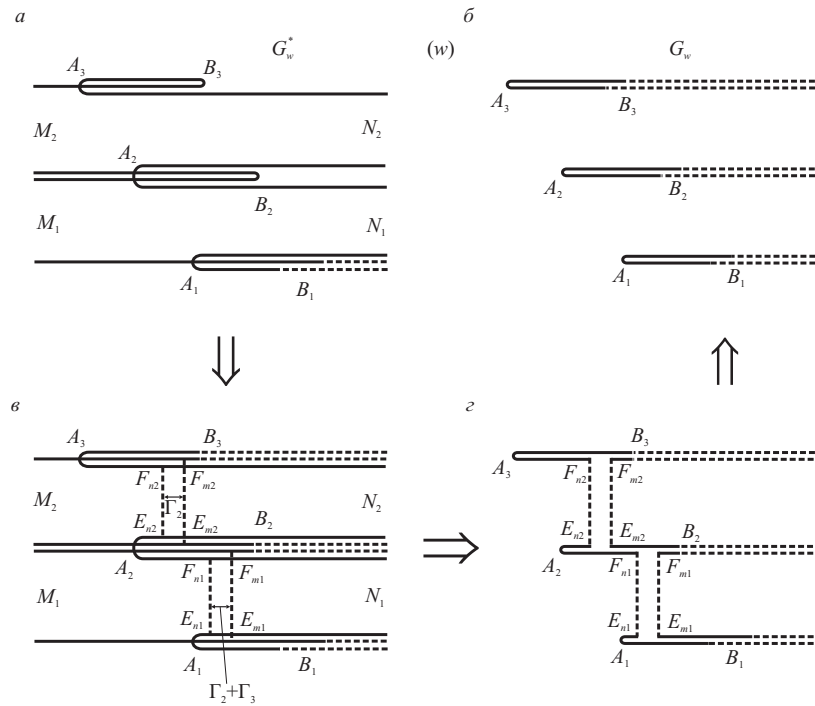


Рис. 2. Сведение к вспомогательной задаче на примере плоскости комплексного потенциала  $w$

В приведенных выше формулах расчета обтекания окружности с особенностями присутствует тринадцать неизвестных величин:  $u_0, \beta, C_1, C_2, \gamma_{a1}, \gamma_{a2}, \gamma_{a3}, \gamma_{b2}, \gamma_{b3}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}$ . Для их нахождения используем условия заданности функции тока в точке  $A_1$  и потенциала скорости в точках  $A_k$  и  $B_k$ :

$$\psi(\gamma_{a1}) = 0, \quad \tilde{\varphi}(\gamma_{ak}) = \Delta\varphi_k, \quad \tilde{\varphi}(\gamma_{bk} + 0) = \varphi_k(l_k) \quad (3)$$

вместе с условиями обращения в нуль скорости потока в критических точках

$$\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_{ak}, \zeta_{bk}} = 0. \quad (4)$$

Полученную систему тринадцати нелинейных уравнений разобьем на две более простые.

*Система 1.* Считаем известными  $u_0, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}$ . Тогда из уравнения  $\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = 0$  с учетом (2) определим

$$\beta = \arcsin \left\{ \frac{1}{4\pi u_0} \left[ \Gamma - \sum_{j=1}^2 Q_j \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_{nj}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma_{mj}}{2} \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Приведем (2) к общему знаменателю:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{P(\zeta)}{2\pi i \zeta^2 (\zeta - \zeta_{n1})(\zeta - \zeta_{n2})(\zeta - \zeta_{m1})(\zeta - \zeta_{m2})},$$

где  $P(\zeta)$  – полином шестой степени. Следовательно, (4) эквивалентно алгебраическому уравнению  $P(\zeta) = 0$ , решив которое, найдем  $\zeta_{a1}, \zeta_{a2}, \zeta_{a3}, \zeta_{b2}, \zeta_{b3}$ , то есть

определим  $\gamma_{a1}, \gamma_{a2}, \gamma_{a3}, \gamma_{b2}, \gamma_{b3}$ . В силу (5) шестым корнем будет  $\zeta = 1$ , то есть степень  $P(\zeta)$  можно понизить.

*Система 2.* Исключим константу  $C_1$  из системы (3), так как она входит в каждое из уравнений этой системы, кроме первого, как слагаемое:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\gamma_{a2}) - \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) - \Delta\varphi_2 &= f_1(u_0, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}) = 0, \\ \tilde{\varphi}(\gamma_{a3}) - \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) - \Delta\varphi_3 &= f_2(u_0, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}) = 0, \\ \tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) - \varphi_1(l_1) &= f_3(u_0, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}) = 0, \\ \tilde{\varphi}(\gamma_{b2} + 0) - \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) - \varphi_2(l_2) &= f_4(u_0, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}) = 0, \\ \tilde{\varphi}(\gamma_{b3} + 0) - \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) - \varphi_3(l_3) &= f_5(u_0, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}) = 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Система (6) пяти нелинейных уравнений относительно неизвестных  $u_0, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}$  решается численно методом Ньютона. При каждом вычислении функций  $f_i(u_0, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2})$  происходит решение системы 1. Константа  $C_0$  затем находится из условия  $w(\zeta_{a1}) = 0$ .

Определим зависимость  $s(\gamma)$  дуговой абсциссы контура  $L_z^*$  от угловой координаты в плоскости  $\zeta$  вне каналов отбора и выдува, сопоставляя функции  $\varphi_k(s)$  и  $\tilde{\varphi}(\gamma)$ . На участках, соответствующих окрестностям каналов, найдем  $s(\gamma)$ , интегрируя дифференциальное уравнение  $\frac{ds}{d\gamma} = \frac{u(\gamma)}{v_{ck}}$ , где скорость  $u(\gamma)$  на границе круга вычислим, взяв модуль от выражения (2):

$$u(\gamma) = 4u_0 \prod_{j=1}^3 \left[ \sin \frac{\gamma - \gamma_{aj}}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_{bj}}{2} \right] \prod_{j=1}^2 \left[ \sin \frac{\gamma - \gamma_{nj}}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_{mj}}{2} \right]^{-1}.$$

Обозначим  $\chi(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz^*} = \ln |v| - i\theta$  функцию Жуковского–Мичела, где  $v = v[s(\gamma)]$  и  $\theta$  – модуль и аргумент вектора скорости в плоскости  $z^*$  соответственно. Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \chi - \chi_0 = \tilde{S} + i\tilde{\theta},\tag{7}$$

где  $\chi_0(\zeta) = S_0 + i\theta_0$  – функция, содержащая особенности  $\chi(\zeta)$ :

$$\chi_0(\zeta) = \sum_{j=1}^3 \ln \left( 1 - \frac{\zeta_{aj}}{\zeta} \right) + \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{ia_j}{\pi} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\zeta_{nj}}{\zeta} \right) - \ln \left( 1 - \frac{\zeta_{mj}}{\zeta} \right) \right] \right\}.\tag{8}$$

Здесь  $a_1 = \ln(v_{c2}/v_{c1})$ ,  $a_2 = \ln(v_{c4}/v_{c3})$ .

Функцию  $\tilde{S}(\gamma)$  запишем, выделив действительную часть  $\tilde{\chi}(\zeta)$  с учетом (8):

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\gamma) &= \ln |v| - \sum_{j=1}^3 \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_{aj}}{2} \right| + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{a_j}{2\pi} [\gamma_{nj} - \gamma_{mj} + \pi(\operatorname{sgn}(\gamma - \gamma_{nj}) - \operatorname{sgn}(\gamma - \gamma_{mj}))] \right\},\end{aligned}$$

где  $\operatorname{sgn}(x) = \{-1, x < 0; 0, x = 0; 1, x > 0\}$ . Тогда восстановим  $\tilde{\chi}(\zeta)$ , решив задачу Шварца в области  $G_\zeta$  по известной действительной части  $\tilde{S}(\gamma)$ .

Переписав (2) в виде

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} \prod_{j=1}^3 [(\zeta - \zeta_{aj})(\zeta - \zeta_{bj})] \prod_{j=1}^2 [(\zeta - \zeta_{nj})(\zeta - \zeta_{mj})]^{-1} \zeta^{-2}$$

и разрешив (7) с учетом (8) относительно комплексно сопряженной скорости

$$\frac{dw}{dz^*} = \prod_{j=1}^3 (\zeta - \zeta_{aj}) \prod_{j=1}^2 \left( \frac{\zeta - \zeta_{nj}}{\zeta - \zeta_{mj}} \right)^{ia_j/\pi} \frac{e^{\tilde{\chi}(\zeta)}}{\zeta^2},$$

найдем

$$\frac{dz^*}{d\zeta} = \frac{dw}{d\zeta} / \frac{dw}{dz^*} = u_0 e^{-i\beta} \prod_{j=1}^3 (\zeta - \zeta_{bj}) \prod_{j=1}^2 \left[ (\zeta - \zeta_{nj})^{1+ia_j/\pi} (\zeta - \zeta_{mj})^{1-ia_j/\pi} \right]^{-1} e^{-\tilde{\chi}(\zeta)}.$$

Проинтегрировав это выражение по контуру  $\zeta = e^{i\gamma}$  с учетом условия  $z^*|_{\zeta=1} = 0$ , построим контур  $L_z^*$ . Форму контура  $L_z$  трехэлементного крылового профиля определим способом, описанным в работе [10].

### 5. Условия разрешимости

Условия разрешимости ОКЗА получим, записав соответствующие формулы из работы [9] для случая трехэлементного крылового профиля. Условие совпадения скорости набегающего потока, определяемого в ходе решения, с заданным не изменится:

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln v_\infty.$$

Условия замкнутости контура  $L_z^*$  запишутся в виде

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \sum_{j=1}^2 [\pi(\cos \gamma_{nj} + \cos \gamma_{mj}) + a_j(\sin \gamma_{mj} - \sin \gamma_{nj})] - \pi(\cos \gamma_{b2} + \cos \gamma_{b3} + 1),$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \sum_{j=1}^2 [\pi(\sin \gamma_{nj} + \sin \gamma_{mj}) + a_j(\cos \gamma_{nj} - \cos \gamma_{mj})] - \pi(\sin \gamma_{b2} + \sin \gamma_{b3}).$$

Добавив к этим уравнениям условия совпадения центров каналов  $C_1, D_1$  и  $C_2, D_2$ , получим систему семи нелинейных уравнений, для удовлетворения которых введем семь свободных параметров в задаваемом распределении скоростей  $v_k(s)$ .

Коэффициент подъемной силы вычислим по формулам, приведенным в работе [10], с той лишь поправкой, что при обезразмеривании используем характерный линейный размер  $(l_1 + l_2 + l_3)/2$  – полусумму периметров трех элементов крылового профиля.

### 6. Пример численного расчета

Для проведения числового расчета выберем распределения скорости  $v_k(s)$  в виде, аналогичном приведенному в работе [10]. В качестве свободных параметров используем  $v_0, s_{1k}, s_{2k}$ . Систему семи нелинейных уравнений, к которым сведены условия разрешимости, решим численным методом Ньютона.

В качестве примера проведем расчет по проектированию крылового профиля с предкрылком и закрылком. За исходные данные возьмем следующие значения:  $v_\infty = 1, Q_1 = Q_2 = 0.05, \Delta\varphi_2 = -0.6, \Delta\varphi_3 = -0.72, l_1 = l_3 = 0.4, l_2 = 1.6$ . На рис. 3, *a* сплошной линией показан результат построения крылового профиля с каналами отбора и выдува, а пунктирной – полученный крыловой профиль с предкрылком и закрылком. Исходное распределение скорости  $v(x)$  для



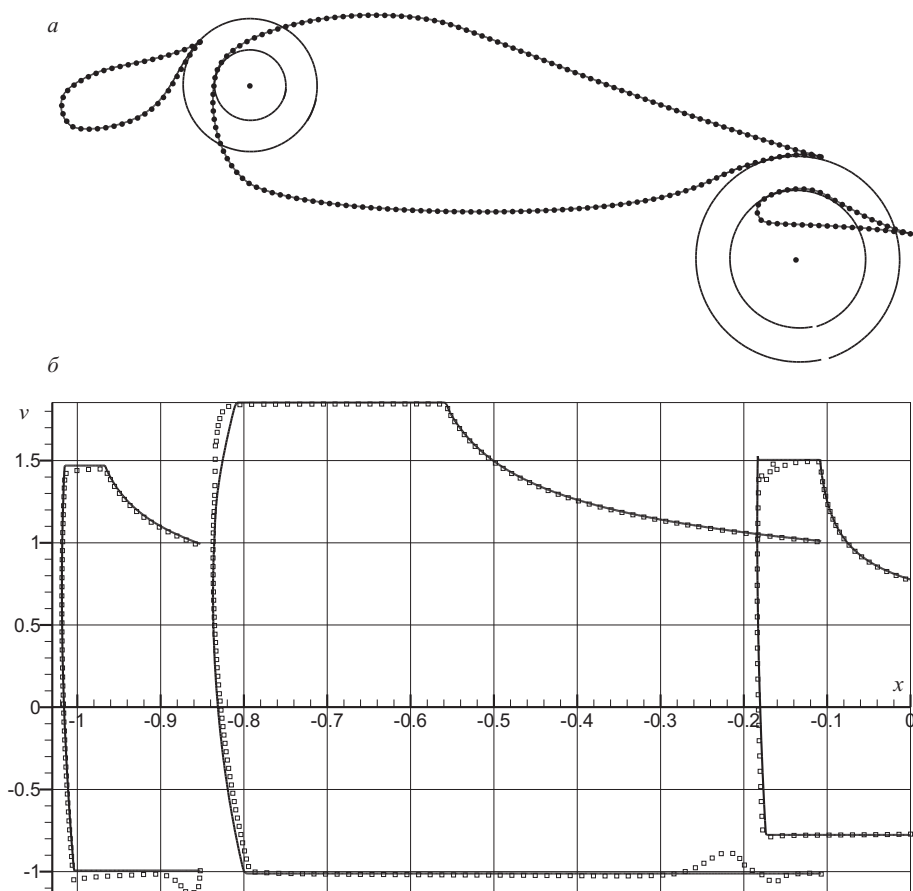


Рис. 3. Результат численного расчета: (а) – спроектированный профиль с предкрылком и закрылком, (б) – распределения скорости  $v_k(x)$

спроектированного трехэлементного крылового профиля изображено на рис. 3, б в зависимости от абсциссы  $x$  сплошной линией. Коэффициент подъемной силы построенного крылового профиля  $c_y = 1.04$ .

Для проверки достоверности полученного результата было проведено решение прямой краевой задачи аэрогидродинамики по расчету обтекания спроектированного трехэлементного крылового профиля панельным методом [12]. Результат расчета представлен на рис. 3, б квадратными символами. Видно хорошее совпадение результатов по всей длине контуров трехэлементного профиля, за исключением окрестности каналов между элементами.

Автор выражает благодарность Н.Б. Ильинскому и Д.Ф. Абзалилову за советы и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (гос. контракт № П1124).

### Summary

*R.F. Mardanov.* An Approximate Method for Design of a Three-Element Airfoil.

An approximate method for designing a three-element airfoil by a given velocity distribution on its surface as a function of the arc abscissa is formulated. The main point of the method is

the reduction of a triply-connected flow region to a simply-connected one, located on a many-sheeted Riemann surface, by inserting flow suction and blowing channels, asymptotically tending to circular, between the airfoil elements. Examples of design calculations are presented.

**Key words:** inverse boundary-value problem of aerodynamics, three-element airfoil, flap, slat.

#### Литература

1. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1994. – 440 с.
2. *Ильинский А.Н., Ильинский Н.Б., Маклаков Д.В., Поташев А.В.* Метод аэродинамического проектирования крылового профиля экраноплана // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1995. – № 2. – С. 54–62.
3. *Абзаллилов Д.Ф., Волков П.А., Ильинский Н.Б.* Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики для двухэлементного крылового профиля // Изв. РАН. МЖГ. – 2004. – № 3. – С. 16–24.
4. *Насыров Р.М.* Определение формы биплана по заданному распределению скорости по поверхности профилей, его составляющих // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1953. – Т. 113, кн. 10. – С. 31–41.
5. *Тумашев Г.Г., Нуржин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.
6. *Казбан А.М.* Определение формы трех профилей по известному на них распределению скорости // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1956. – Т. 116, кн. 5. – С. 32–37.
7. *Марданов Р.Ф.* Об одном подходе к проектированию профиля крыла вблизи экрана // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2003. – № 2. – С. 35–38.
8. *Марданов Р.Ф.* Решение одной обратной краевой задачи аэрогидродинамики // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 2(537). – С. 27–34.
9. *Марданов Р.Ф.* Об одном подходе к проектированию многоэлементного крылового профиля // Аэромеханика и газовая динамика. – 2003. – № 2. – С. 31–36.
10. *Абзаллилов Д.Ф., Марданов Р.Ф.* Приближенный метод проектирования двухэлементного крылового профиля // Прикл. механика и техн. физика. – 2011. – Т. 52, – № 5. – С. 104–114.
11. *Степанов Г.Ю.* Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // Изв. РАН. МЖГ. – 1993. – № 4. – С. 30–42.
12. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552 с.

Поступила в редакцию  
17.11.10

---

**Марданов Ренат Фаритович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аэрогидромеханики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Renat.Mardanov@ksu.ru*