

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКОЙ НАКЛАДКОЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Ю.Г. Коноплев, С.А. Кузнецов, А.А. Саченков, М.А. Точкасова

Аннотация

В работе решена задача определения напряжений, возникающих между прямоугольной пластиной и жесткой накладкой при установившихся вынужденных колебаниях, и прогиба срединной поверхности пластинки. Получено аналитическое решение задачи и проведены численные эксперименты. Исследовано влияние учета деформаций поперечного сдвига и инерции вращения пластины, положения и массивности накладки, а также краевых условий на распределение контактных напряжений и спектр собственных частот.

Ключевые слова: контактная задача, функция влияния, колебания.

1. Постановка задачи

Контактными задачами теории оболочек принято называть задачи о взаимодействии тонкостенных элементов между собой и с упругими или жесткими телами (штампами). Искомые величинами в этих задачах являются контактные напряжения и область контакта, если она неизвестна.

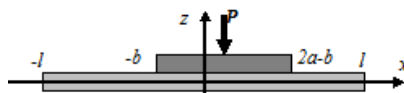


Рис. 1. Постановка задачи

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых авторами в [1]. На основе линейной теории пластин с учетом поперечного обжатия в области контакта даны постановка и решение контактной задачи взаимодействия колеблющейся жесткой накладки с прямоугольной пластиной, находящейся в условиях цилиндрического изгиба (рис. 1). Силы трения между пластиной и накладкой не учитываются. Ядро интегрального уравнения $G(x, \xi)$ (функция влияния) получено на основе уточненной теории пластин, учитывающей деформации поперечного сдвига и инерцию вращения [2], и теории обобщенных функций как точное решение дифференциального уравнения изгиба пластины при установившихся вынужденных колебаниях

$$LG(x, \xi) = L_1 \delta(x - \xi) \quad (1)$$

с тремя вариантами граничных условий:

- оба края пластины зашпелены (ЖЗ+ЖЗ)

$$G(\pm l, \xi) = G'_x(\pm l, \xi) = 0; \quad (2)$$

- оба края пластины шарнирно оперты (ШО+ШО)

$$G(\pm l, \xi) = G''_x(\pm l, \xi) = 0; \quad (3)$$

- один край пластины зажат, другой свободен (ЖЗ+СВ)

$$G(-l, \xi) = G'_x(-l, \xi) = G''_x(+l, \xi) = G'''_x(+l, \xi) = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} L &= \frac{d^4}{dx^4} + B \frac{d^2}{dx^2} + B, \quad L_1 = A - \frac{1}{k\mu h} \frac{d^2}{dx^2}, \\ B &= \omega^2 \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right), \quad B_1 = \frac{\omega^4}{V_1^2 V_2^2} - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad A = \frac{1}{D} - \frac{1}{k\mu h} \frac{\omega^2}{V_1^2}, \\ V_1^2 &= \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad V_2^2 = \frac{k\mu}{\rho}, \quad c^2 = \frac{D}{\rho h}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned}$$

ω – частота вынуждающей силы P , действующей на жесткую накладку, E , μ , ν – модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона, $k = 5/6$ – жесткость по поперечному сдвигу, D – изгибная жесткость пластины, h – толщина пластины.

Как известно [3, 4], постановка контактных задач для тонкостенных объектов на основе классической теории Кирхгофа–Лява приводит к решению математически некорректных задач. Некорректность проявляется в ряде противоречий: при гладкой форме объектов возникают разрывы на границе области контакта в усилиях, моментах и напряжениях; точечному контакту соответствует ненулевая реакция взаимодействия; прижимающая штамп сила неограниченно возрастает, если область контакта занимает всю длину элемента; невозможно удовлетворить нулевому условию для напряжений на границе контакта для объекта, не имеющего угловой точки и т. д.

Математически корректная постановка контактных задач теории пластин и оболочек заключается в моделировании условий контакта в виде равенства перемещений накладки перемещениям границы пластинки, состоящим, в свою очередь, из перемещений срединной плоскости в результате изгиба и из местных перемещений, характеризующих деформацию обжатия. Согласно этой постановке задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно контактных напряжений $\sigma(x)$:

$$k_0 \sigma(x) + \int_{-b}^{2a-b} G(x, \xi) \cdot \sigma(\xi) d\xi = V, \quad -b < x < 2a - b, \quad (5)$$

где $k_0 = \frac{13h(1-\nu^2)}{32E}$ – коэффициент обжатия, V – смещение накладки.

Уравнение движения накладки в случае установившихся вынужденных колебаний имеет вид

$$-M\omega^2 V = P - R, \quad R = \int_{-b}^{2a-b} \sigma(x) dx, \quad (6)$$

где M – масса накладки.

2. Функция влияния

Решение уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{1}{2(k_1^2 + k_2^2)} \left\{ C_1(\xi) \operatorname{ch} k_1 x + C_2(\xi) \operatorname{sh} k_1 x + C_3(\xi) \cos k_2 x + \right. \\ &\quad \left. + C_4(\xi) \sin k_2 x + 2\theta(x - \xi) \left[\frac{\alpha_1}{k_1} \operatorname{sh} k_1(x - \xi) - \frac{\alpha_2}{k_2} \operatorname{sh} k_2(x - \xi) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_1 = A - \frac{k_1^2}{k\mu h}, \quad \alpha_2 = A + \frac{k_2^2}{k\mu h}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{B^2 - 4B_1} - B}{2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4B_1}}{2}},$$

$\theta(x - \xi)$ – единичная функция Хевисайда.

Постоянные интегрирования $C_i(\xi)$ определяются из граничных условий (2)–(4). Обозначим $l_j = lk_j$, ($j = 1, 2$). Тогда постоянные $C_i(\xi)$ имеют вид:

- для (ЖЗ+ЖЗ)

$$\begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ C_3(\xi) \\ C_3(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1 f_3}{k_1 f_1} & \frac{\alpha_1}{k_1} & \frac{\alpha_2}{f_1} & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{k_1} & \frac{\alpha_1 f_4}{k_1 f_2} & 0 & \frac{\alpha_2}{f_2} \\ \frac{\alpha_1}{k_1} & 0 & \frac{\alpha_2 f_4}{k_2 f_1} & -\frac{\alpha_2}{k_2} \\ 0 & \frac{\alpha_1}{f_2} & \frac{\alpha_2}{k_2} & -\frac{\alpha_2 f_3}{k_2 f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch } k_1 \xi \\ \text{sh } k_1 \xi \\ \cos k_2 \xi \\ \sin k_2 \xi \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= k_1 \text{sh } l_1 \cos l_2 + k_2 \sin l_2 \text{ch } l_1, \\ f_2 &= k_1 \text{ch } l_1 \sin l_2 - k_2 \cos l_2 \text{sh } l_1, \\ f_3 &= k_1 \text{ch } l_1 \cos l_2 + k_2 \sin l_2 \text{sh } l_1, \\ f_4 &= k_1 \text{sh } l_1 \sin l_2 - k_2 \cos l_2 \text{ch } l_1; \end{aligned}$$

- для (ШО+ШО)

$$\begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ C_3(\xi) \\ C_3(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{k_1} g_1 & \frac{\alpha_1}{k_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{k_1} & \frac{\alpha_1}{k_1 g_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{k_2} g_2 & -\frac{\alpha_2}{k_2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{k_2} & -\frac{\alpha_2}{k_2 g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch } k_1 \xi \\ \text{sh } k_1 \xi \\ \cos k_2 \xi \\ \sin k_2 \xi \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} g_1 &= \frac{\text{sh } l_1}{\text{ch } l_1}, \\ g_2 &= \frac{\sin l_2}{\cos l_2}; \end{aligned}$$

- для (ЖЗ+СВ)

$$\begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ C_3(\xi) \\ C_3(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 k_2 r_3 & \frac{\alpha_1}{k_1} r_1 & -\frac{\alpha_2 k_2}{k_1} r_7 & \frac{\alpha_2 k_2}{k_1} r_8 \\ -\frac{\alpha_1}{k_1} r_1 & \alpha_1 k_2 r_4 & -\frac{\alpha_2 k_2}{k_1} r_9 & \frac{\alpha_2 k_2}{k_1} r_{10} \\ \frac{\alpha_1 k_1}{k_2} r_7 & -\frac{\alpha_1 k_1}{k_2} r_9 & -\alpha_2 k_1 r_6 & -\frac{\alpha_2}{k_2} r_2 \\ \frac{\alpha_1 k_1}{k_2} r_8 & -\frac{\alpha_1 k_1}{k_2} r_{10} & \frac{\alpha_2}{k_2} r_2 & \alpha_2 k_1 r_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch } k_1 \xi \\ \text{sh } k_1 \xi \\ \cos k_2 \xi \\ \sin k_2 \xi \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} r &= k_1^4 + k_2^4 + 2k_1^2 k_2^2 \text{ch } 2l_1 \cos 2l_2 + k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2) \text{sh } 2l_1 \sin 2l_2, \\ r_1 &= (2k_1^4 + 2k_1^2 k_2^2 \text{ch } 2l_1 \cos 2l_2 + k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2) \text{sh } 2l_1 \sin 2l_2)/r, \\ r_2 &= (2k_2^4 + 2k_1^2 k_2^2 \text{ch } 2l_1 \cos 2l_2 + k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2) \text{sh } 2l_1 \sin 2l_2)/r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_3 &= ((k_1^2 + k_2^2) \sin 2l_2 - (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{ch} 2l_1 \sin 2l_2 - 2k_1 k_2 \operatorname{sh} 2l_1 \cos 2l_2)/r, \\
r_4 &= ((k_1^2 + k_2^2) \sin 2l_2 + (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{ch} 2l_1 \sin 2l_2 + 2k_1 k_2 \operatorname{sh} 2l_1 \cos 2l_2)/r, \\
r_5 &= ((k_1^2 + k_2^2) \operatorname{sh} 2l_1 - (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{sh} 2l_1 \cos 2l_2 + 2k_1 k_2 \operatorname{ch} 2l_1 \sin 2l_2)/r, \\
r_6 &= ((k_1^2 + k_2^2) \operatorname{sh} 2l_1 + (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{sh} 2l_1 \cos 2l_2 - 2k_1 k_2 \operatorname{ch} 2l_1 \sin 2l_2)/r, \\
r_7 &= 2(k_2^2 - k_1^2)(k_2 \operatorname{sh} l_1 \cos l_2 - k_1 \operatorname{ch} l_1 \sin l_2)/r, \\
r_8 &= 2(k_2^2 + k_1^2)(k_2 \operatorname{sh} l_1 \sin l_2 + k_1 \operatorname{ch} l_1 \cos l_2)/r, \\
r_9 &= 2(k_2^2 + k_1^2)(k_2 \operatorname{ch} l_1 \cos l_2 - k_1 \operatorname{sh} l_1 \sin l_2)/r, \\
r_{10} &= 2(k_2^2 - k_1^2)(k_2 \operatorname{ch} l_1 \sin l_2 + k_1 \operatorname{sh} l_1 \cos l_2)/r.
\end{aligned}$$

3. Метод решения интегральных уравнений контактных задач

Для решения интегрального уравнения (5) применим метод сведения к краевой задаче, предложенный Ю.П. Артюхиным для одномерных статических контактных задач и развитый впоследствии С.А. Кузнецовым [5] для двумерных.

Применим оператор L к уравнению (5). Так как $LG(x, \xi) = L_1 \delta(x - \xi)$, то

$$k_0 L \sigma(x) + \int_{-b}^{2a-b} L_1 \delta(x - \xi) \cdot \sigma(\xi) d\xi = LV.$$

С учетом фильтрующих свойств δ -функции получим

$$k_0 L \sigma(x) + L_1 \sigma(x) = LV.$$

Введем новую неизвестную функцию $U(x)$, связанную с искомой функцией дифференциальным соотношением

$$L_1 U(x) = V - k_0 \sigma(x). \quad (7)$$

В силу произвола введенной функции, возникающего при интегрировании выражения (7), положим

$$\sigma(x) = LU(x). \quad (8)$$

Тогда из (7), (8) следует уравнение

$$k_0 LU(x) + L_1 U(x) = V. \quad (9)$$

Подставив (8) в уравнение (5), получим

$$\int_{-b}^{2a-b} G(x, \xi) \cdot LU(\xi) d\xi = L_1 U(x). \quad (10)$$

Интегрируя по частям, нетрудно привести (10) к виду

$$\int_{-b}^{2a-b} L_\xi G(x, \xi) \cdot U(\xi) d\xi + \Psi[G, U] = L_1 U(x),$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi[G, U] \equiv & \{G(x, \xi) \cdot U'''(\xi) - G'(x, \xi)[U''(\xi) + BU(\xi)] + \\
& + [G''_\xi(x, \xi) + BG(x, \xi)]U'(\xi) - G'''_\xi(x, \xi) \cdot U(\xi)\} \Big|_{-b}^{2a-b}. \quad (11)
\end{aligned}$$

С учетом фильтрующих свойств δ -функции

$$\int_{-b}^{2a-b} L_{\xi} G(x, \xi) \cdot U(\xi) d\xi = L_1 U(x),$$

и следовательно, (11) принимает вид

$$\Psi[G, U] = 0. \quad (12)$$

Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (5) сведена к решению краевой задачи (9), (12).

4. Амплитуды контактного давления и жесткого смещения накладки

Определяя функцию $U(x)$ из краевой задачи (9), (12), найдем с помощью (7) и (6) амплитуды контактного давления и жесткого смещения накладки:

$$\sigma(x) = \frac{V}{A + k_0 B_1} (B_1 - A_{12} \operatorname{ch} \lambda_1 x \cos \lambda_2 x - A_{21} \operatorname{sh} \lambda_1 x \sin \lambda_2 x - \\ - A_{34} \operatorname{sh} \lambda_1 x \cos \lambda_2 x - A_{43} \operatorname{ch} \lambda_1 x \sin \lambda_2 x),$$

$$V = \frac{P(A + k_0 B_1)}{2aB_1 - M\omega^2(A + k_0 B_1) - \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}(Y_1 + Y_2)},$$

$$Y_1 = (\lambda_1 A_{12} - \lambda_2 A_{21})(sc_1 + sc_2) + (\lambda_1 A_{21} + \lambda_2 A_{12})(cs_1 + cs_2),$$

$$Y_2 = (\lambda_1 A_{34} - \lambda_2 A_{43})(-cc_1 + cc_2) + (\lambda_1 A_{43} + \lambda_2 A_{34})(-ss_1 + ss_2),$$

$$A_{12} = (A/k_0 - n_3 K)A_1 - n_4 K A_2, \quad A_{34} = (A/k_0 - n_3 K)A_3 - n_4 K A_4, \\ A_{21} = (A/k_0 - n_3 K)A_2 + n_4 K A_1, \quad A_{43} = (A/k_0 - n_3 K)A_4 + n_4 K A_3,$$

$$\lambda_1 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{B_1 + A/k_0} + \frac{1}{4}(K - B) \right]^{1/2}, \quad K = \frac{1}{k_0 k \mu h}, \\ \lambda_2 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{B_1 + A/k_0} - \frac{1}{4}(K - B) \right]^{1/2},$$

A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, являются решением системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \beta_4 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}.$$

Для граничных условий (ЖЗ+ЖЗ) и (ЖЗ+СВ) α_{ij} , β_i имеют вид:

$$\beta_1 = F_{17} + F_{18}, \quad \beta_2 = F_{27} - F_{28}, \quad \beta_3 = F_{37} + F_{38}, \quad \beta_4 = -F_{47} + F_{48}, \\ \alpha_{11} = -F_{11}Z_{11} - F_{12}Z_{12} + F_{13}Z_{13} + F_{14}Z_{14} + F_{15}Z_{15} + F_{16}Z_{16} - F_{17}cc_1 - F_{18}cc_2, \\ \alpha_{12} = -F_{11}Z_{21} - F_{12}Z_{22} + F_{13}Z_{23} + F_{14}Z_{24} + F_{15}Z_{25} + F_{16}Z_{26} - F_{17}ss_1 - F_{18}ss_2, \\ \alpha_{13} = +F_{11}Z_{31} - F_{12}Z_{32} - F_{13}Z_{33} + F_{14}Z_{34} - F_{15}Z_{35} + F_{16}Z_{36} + F_{17}sc_1 - F_{18}sc_2, \\ \alpha_{14} = +F_{11}Z_{41} - F_{12}Z_{42} - F_{13}Z_{43} + F_{14}Z_{44} - F_{15}Z_{45} + F_{16}Z_{46} + F_{17}cs_1 - F_{18}cs_2,$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{21} &= +F_{21}Z_{11} - F_{22}Z_{12} + F_{23}Z_{13} - F_{24}Z_{14} - F_{25}Z_{15} + F_{26}Z_{16} - F_{27}cc_1 + F_{28}cc_2, \\
\alpha_{22} &= +F_{21}Z_{21} - F_{22}Z_{22} + F_{23}Z_{23} - F_{24}Z_{24} - F_{25}Z_{25} + F_{26}Z_{26} - F_{27}ss_1 + F_{28}ss_2, \\
\alpha_{23} &= -F_{21}Z_{31} - F_{22}Z_{32} - F_{23}Z_{33} - F_{24}Z_{34} + F_{25}Z_{35} + F_{26}Z_{36} + F_{27}sc_1 - F_{28}sc_2, \\
\alpha_{24} &= -F_{21}Z_{41} - F_{22}Z_{42} - F_{23}Z_{43} - F_{24}Z_{44} + F_{25}Z_{45} + F_{26}Z_{46} + F_{27}cs_1 - F_{28}cs_2, \\
\alpha_{31} &= +F_{31}Z_{11} + F_{32}Z_{12} - F_{33}Z_{13} - F_{34}Z_{14} + F_{35}Z_{15} + F_{36}Z_{16} - F_{37}cc_1 - F_{38}cc_2, \\
\alpha_{32} &= +F_{31}Z_{21} + F_{32}Z_{22} - F_{33}Z_{23} - F_{34}Z_{24} + F_{35}Z_{25} + F_{36}Z_{26} - F_{37}ss_1 - F_{38}ss_2, \\
\alpha_{33} &= -F_{31}Z_{31} + F_{32}Z_{32} + F_{33}Z_{33} - F_{34}Z_{34} - F_{35}Z_{35} + F_{36}Z_{36} + F_{37}sc_1 - F_{38}sc_2, \\
\alpha_{34} &= -F_{31}Z_{41} + F_{32}Z_{42} + F_{33}Z_{43} - F_{34}Z_{44} - F_{35}Z_{45} + F_{36}Z_{46} + F_{37}cs_1 - F_{38}cs_2, \\
\alpha_{41} &= -F_{41}Z_{11} + F_{42}Z_{12} + F_{43}Z_{13} - F_{44}Z_{14} - F_{45}Z_{15} + F_{46}Z_{16} + F_{47}cc_1 - F_{48}cc_2, \\
\alpha_{42} &= -F_{41}Z_{21} + F_{42}Z_{22} + F_{43}Z_{23} - F_{44}Z_{24} - F_{45}Z_{25} + F_{46}Z_{26} + F_{47}ss_1 - F_{48}ss_2, \\
\alpha_{43} &= +F_{41}Z_{31} + F_{42}Z_{32} - F_{43}Z_{33} - F_{44}Z_{34} + F_{45}Z_{35} + F_{46}Z_{36} - F_{47}sc_1 - F_{48}sc_2, \\
\alpha_{44} &= +F_{41}Z_{41} + F_{42}Z_{42} - F_{43}Z_{43} - F_{44}Z_{44} + F_{45}Z_{45} + F_{46}Z_{46} - F_{47}cs_1 - F_{48}cs_2.
\end{aligned}$$

Для граничного условия (ШО+ШО) α_{ij} , β_i имеют вид:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -k_2^2(F_{13} + F_{14}), \quad \beta_2 = k_2^2(F_{13} - F_{14}), \quad \beta_3 = k_1^2(F_{23} + F_{24}), \quad \beta_4 = -k_1^2(F_{23} - F_{24}), \\
\alpha_{11} &= -F_{11}\frac{(k_2^2Z_{11} + Z_{15})}{k_1} - F_{12}\frac{(k_2^2Z_{12} + Z_{16})}{k_1} + F_{13}(k_2^2cc_1 + Z_{13}) + F_{14}(k_2^2cc_2 + Z_{14}), \\
\alpha_{12} &= -F_{11}\frac{(k_2^2Z_{21} + Z_{25})}{k_1} - F_{12}\frac{(k_2^2Z_{22} + Z_{26})}{k_1} + F_{13}(k_2^2ss_1 + Z_{23}) + F_{14}(k_2^2ss_2 + Z_{24}), \\
\alpha_{13} &= F_{11}\frac{(k_2^2Z_{31} + Z_{35})}{k_1} - F_{12}\frac{(k_2^2Z_{32} + Z_{36})}{k_1} - F_{13}(k_2^2sc_1 + Z_{33}) + F_{14}(k_2^2sc_2 + Z_{34}), \\
\alpha_{14} &= F_{11}\frac{(k_2^2Z_{41} + Z_{45})}{k_1} - F_{12}\frac{(k_2^2Z_{42} + Z_{46})}{k_1} - F_{13}(k_2^2cs_1 + Z_{43}) + F_{14}(k_2^2cs_2 + Z_{44}), \\
\alpha_{21} &= F_{11}\frac{(k_2^2Z_{11} + Z_{15})}{k_1} - F_{12}\frac{(k_2^2Z_{12} + Z_{16})}{k_1} - F_{13}(k_2^2cc_1 + Z_{13}) + F_{14}(k_2^2cc_2 + Z_{14}), \\
\alpha_{22} &= F_{11}\frac{(k_2^2Z_{21} + Z_{25})}{k_1} - F_{12}\frac{(k_2^2Z_{22} + Z_{26})}{k_1} - F_{13}(k_2^2ss_1 + Z_{23}) + F_{14}(k_2^2ss_2 + Z_{24}), \\
\alpha_{23} &= -F_{11}\frac{(k_2^2Z_{31} + Z_{35})}{k_1} - F_{12}\frac{(k_2^2Z_{32} + Z_{36})}{k_1} + F_{13}(k_2^2sc_1 + Z_{33}) + F_{14}(k_2^2sc_2 + Z_{34}), \\
\alpha_{24} &= -F_{11}\frac{(k_2^2Z_{41} + Z_{45})}{k_1} - F_{12}\frac{(k_2^2Z_{42} + Z_{46})}{k_1} + F_{13}(k_2^2cs_1 + Z_{43}) + F_{14}(k_2^2cs_2 + Z_{44}), \\
\alpha_{31} &= -F_{21}\frac{(k_1^2Z_{11} - Z_{15})}{k_2} - F_{22}\frac{(k_1^2Z_{12} - Z_{16})}{k_2} - F_{23}(k_1^2cc_1 - Z_{13}) - F_{24}(k_1^2cc_2 - Z_{14}), \\
\alpha_{32} &= -F_{21}\frac{(k_1^2Z_{21} - Z_{25})}{k_2} - F_{22}\frac{(k_1^2Z_{22} - Z_{26})}{k_2} - F_{23}(k_1^2ss_1 - Z_{23}) - F_{24}(k_1^2ss_2 - Z_{24}), \\
\alpha_{33} &= F_{21}\frac{(k_1^2Z_{31} - Z_{35})}{k_2} - F_{22}\frac{(k_1^2Z_{32} - Z_{36})}{k_2} + F_{23}(k_1^2sc_1 - Z_{33}) - F_{24}(k_1^2sc_2 - Z_{34}), \\
\alpha_{34} &= F_{21}\frac{(k_1^2Z_{41} - Z_{45})}{k_2} - F_{22}\frac{(k_1^2Z_{42} - Z_{46})}{k_2} + F_{23}(k_1^2cs_1 - Z_{43}) - F_{24}(k_1^2cs_2 - Z_{44}), \\
\alpha_{41} &= F_{21}\frac{(k_1^2Z_{11} - Z_{15})}{k_2} - F_{22}\frac{(k_1^2Z_{12} - Z_{16})}{k_2} + F_{23}(k_1^2cc_1 - Z_{13}) - F_{24}(k_1^2cc_2 - Z_{14}), \\
\alpha_{42} &= F_{21}\frac{(k_1^2Z_{21} - Z_{25})}{k_2} - F_{22}\frac{(k_1^2Z_{22} - Z_{26})}{k_2} + F_{23}(k_1^2ss_1 - Z_{23}) - F_{24}(k_1^2ss_2 - Z_{24}),
\end{aligned}$$

$$\alpha_{43} = -F_{21} \frac{(k_1^2 Z_{31} - Z_{35})}{k_2} - F_{22} \frac{(k_1^2 Z_{32} - Z_{36})}{k_2} - F_{23}(k_1^2 sc_1 - Z_{33}) - F_{24}(k_1^2 sc_2 - Z_{34}),$$

$$\alpha_{44} = -F_{21} \frac{(k_1^2 Z_{41} - Z_{45})}{k_2} - F_{22} \frac{(k_1^2 Z_{42} - Z_{46})}{k_2} - F_{23}(k_1^2 cs_1 - Z_{43}) - F_{24}(k_1^2 cs_2 - Z_{44}).$$

Для $i = 1, 2$

$$Z_{1i} = \lambda_1 sc_i - \lambda_2 cs_i, \quad Z_{1(i+2)} = n_3 cc_i - n_4 ss_i, \quad Z_{1(i+4)} = n_1 sc_i - n_2 cs_i,$$

$$Z_{2i} = \lambda_1 cs_i + \lambda_2 sc_i, \quad Z_{2(i+2)} = n_3 ss_i + n_4 cc_i, \quad Z_{2(i+4)} = n_1 cs_i + n_2 sc_i,$$

$$Z_{3i} = \lambda_1 cc_i - \lambda_2 ss_i, \quad Z_{3(i+2)} = n_3 cs_i - n_4 sc_i, \quad Z_{3(i+4)} = n_1 cc_i - n_2 ss_i,$$

$$Z_{4i} = \lambda_1 ss_i + \lambda_2 cc_i, \quad Z_{4(i+2)} = n_3 cs_i + n_4 sc_i, \quad Z_{4(i+4)} = n_1 cc_i + n_2 ss_i,$$

$$\begin{aligned} cc_i &= \operatorname{ch} b_i \lambda_1 \cos b_i \lambda_2, & n_1 &= \lambda_1^3 - 3\lambda_1 \lambda_2^2, \\ ss_i &= \operatorname{sh} b_i \lambda_1 \sin b_i \lambda_2, & n_2 &= 3\lambda_1^2 \lambda_2 - \lambda_2^3, & \varphi_1 &= \frac{f_3}{f_1}, & \varphi_3 &= \frac{f_4}{f_1}, & b_1 &= b, \\ sc_i &= \operatorname{sh} b_i \lambda_1 \cos b_i \lambda_2, & n_3 &= \lambda_1^2 - \lambda_2^2, & \varphi_2 &= \frac{f_4}{f_2}, & \varphi_4 &= \frac{f_3}{f_2}, & b_2 &= 2a - b, \\ cs_i &= \operatorname{ch} b_i \lambda_1 \sin b_i \lambda_2, & n_4 &= 2\lambda_1 \lambda_2, \end{aligned}$$

Коэффициенты F_{ij} вычисляются по формулам:

- для граничных условий (ЖЗ+ЖЗ):

$$F_{1i} = \frac{\alpha_1}{k_1} k_2^2 (-\operatorname{sh} b_i k_1 + \varphi_1 \operatorname{ch} b_i k_1) + \frac{\alpha_2}{f_1} k_1^2 \cos b_i k_2,$$

$$F_{1(i+2)} = \alpha_1 (-\operatorname{ch} b_i k_1 + \varphi_1 \operatorname{sh} b_i k_1) + \frac{\alpha_2}{f_1} k_2 \sin b_i k_2,$$

$$F_{1(i+4)} = \frac{\alpha_1}{k_1} (\operatorname{sh} b_i k_1 - \varphi_1 \operatorname{ch} b_i k_1) + \frac{\alpha_2}{f_1} \cos b_i k_2,$$

$$F_{1(i+6)} = \alpha_1 k_2^2 (\operatorname{ch} b_i k_1 - \varphi_1 \operatorname{sh} b_i k_1) + \frac{\alpha_2}{f_1} k_1^2 k_2 \sin b_i k_2,$$

$$F_{2i} = \frac{\alpha_1}{k_1} k_2^2 (\operatorname{ch} b_i k_1 - \varphi_2 \operatorname{sh} b_i k_1) + \frac{\alpha_2}{f_2} k_1^2 \sin b_i k_2,$$

$$F_{2(i+2)} = \alpha_1 (-\operatorname{sh} b_i k_1 + \varphi_2 \operatorname{ch} b_i k_1) + \frac{\alpha_2}{f_2} k_2 \cos b_i k_2,$$

$$F_{2(i+4)} = \frac{\alpha_1}{k_1} (-\operatorname{ch} b_i k_1 + \varphi_2 \operatorname{sh} b_i k_1) + \frac{\alpha_2}{f_2} \sin b_i k_2,$$

$$F_{2(i+6)} = \alpha_1 k_2^2 (\operatorname{sh} b_i k_1 - \varphi_2 \operatorname{ch} b_i k_1) + \frac{\alpha_2}{f_2} k_1^2 k_2 \cos b_i k_2,$$

$$F_{3i} = \frac{\alpha_1}{f_1} k_2^2 \operatorname{ch} b_i k_1 - \frac{\alpha_2}{k_2} k_1^2 (\varphi_3 \cos b_i k_2 - \sin b_i k_2),$$

$$F_{3(i+2)} = \frac{\alpha_1}{f_1} k_1 \operatorname{sh} b_i k_1 - \alpha_2 (\varphi_3 \sin b_i k_2 + \cos b_i k_2),$$

$$F_{3(i+4)} = \frac{\alpha_1}{f_1} \operatorname{ch} b_i k_1 + \frac{\alpha_2}{k_2} (\varphi_3 \cos b_i k_2 - \sin b_i k_2),$$

$$F_{3(i+6)} = \frac{\alpha_1}{f_1} k_1 k_2^2 \operatorname{sh} b_i k_1 + \alpha_2 k_1^2 (\varphi_3 \sin b_i k_2 + \cos b_i k_2),$$

$$F_{4i} = \frac{\alpha_1}{f_2} k_2^2 \operatorname{sh} b_i k_1 + \frac{\alpha_2}{k_2} k_1^2 (\varphi_4 \sin b_i k_2 - \cos b_i k_2),$$

$$F_{4(i+2)} = \frac{\alpha_1}{f_2} k_1 \operatorname{ch} b_i k_1 - \alpha_2 (\varphi_4 \cos b_i k_2 + \sin b_i k_2),$$

$$F_{4(i+4)} = \frac{\alpha_1}{f_2} \operatorname{sh} b_i k_1 - \frac{\alpha_2}{k_2} (\varphi_4 \sin b_i k_2 - \cos b_i k_2),$$

$$F_{4(i+6)} = \frac{\alpha_1}{f_2} k_1 k_2^2 \operatorname{ch} b_i k_1 + \alpha_2 k_1^2 (\varphi_4 \cos b_i k_2 + \sin b_i k_2);$$

- для граничных условий (ШО+ШО):

$$\begin{aligned} F_{1i} &= g_1 \operatorname{ch} b_i k_1 - \operatorname{sh} b_i k_1, \\ F_{1(i+2)} &= -\operatorname{ch} b_i k_1 + g_1 \operatorname{sh} b_i k_1, \\ F_{2i} &= g_2 \cos b_i k_2 - \sin b_i k_2, \\ F_{2(i+2)} &= \cos b_i k_2 + g_2 \sin b_i k_2; \end{aligned}$$

- для граничных условий для (ЖЗ+СВ):

$$\begin{aligned} F_{11} &= \alpha_2 k_1 k_2 (-r_7 \cos b_1 k_2 - r_8 \sin b_1 k_2) + \alpha_1 k_2^2 (-r_3 k_2 \operatorname{ch} b_1 k_1 - \frac{2-r_1}{k_1} \operatorname{sh} b_1 k_1), \\ F_{12} &= \alpha_2 k_1 k_2 (-r_7 \cos b_2 k_2 + r_8 \sin b_2 k_2) + \alpha_1 k_2^2 (-r_3 k_2 \operatorname{ch} b_2 k_1 - \frac{r_1}{k_1} \operatorname{sh} b_2 k_1), \\ F_{13} &= \frac{\alpha_2 k_2^2}{k_1} (r_8 \cos b_1 k_2 - r_7 \sin b_1 k_2) + \alpha_1 (-(2-r_1) \operatorname{ch} b_1 k_1 - r_3 k_1 k_2 \operatorname{sh} b_1 k_1), \\ F_{14} &= \frac{\alpha_2 k_2^2}{k_1} (-r_8 \cos b_2 k_2 - r_7 \sin b_2 k_2) + \alpha_1 (-r_1 \operatorname{ch} b_2 k_1 - r_3 k_1 k_2 \operatorname{sh} b_2 k_1), \\ F_{15} &= \frac{\alpha_2 k_2}{k_1} (-r_7 \cos b_1 k_2 - r_8 \sin b_1 k_2) + \alpha_1 (r_3 k_2 \operatorname{ch} b_1 k_1 + \frac{2-r_1}{k_1} \operatorname{sh} b_1 k_1), \\ F_{16} &= \frac{\alpha_2 k_2}{k_1} (-r_7 \cos b_1 k_2 + r_8 \sin b_2 k_2) + \alpha_1 (r_3 k_2 \operatorname{ch} b_2 k_1 + \frac{r_1}{k_1} \operatorname{sh} b_2 k_1), \\ F_{17} &= \alpha_2 k_1 k_2^2 (r_8 \cos b_1 k_2 - r_7 \sin b_1 k_2) + \alpha_1 k_2^2 ((2-r_1) \operatorname{ch} b_1 k_1 + r_3 k_1 k_2 \operatorname{sh} b_1 k_1), \\ F_{18} &= \alpha_2 k_1 k_2^2 (-r_8 \cos b_2 k_2 - r_7 \sin b_2 k_2) + \alpha_1 k_2^2 (r_1 \operatorname{ch} b_2 k_1 + r_3 k_1 k_2 \operatorname{sh} b_2 k_1), \\ F_{21} &= \alpha_2 k_1 k_2 (r_9 \cos b_1 k_2 + r_{10} \sin b_1 k_2) + \alpha_1 k_2^2 (\frac{2-r_1}{k_1} \operatorname{ch} b_1 k_1 - r_4 k_2 \operatorname{sh} b_1 k_1), \\ F_{22} &= \alpha_2 k_1 k_2 (-r_9 \cos b_2 k_2 + r_{10} \sin b_2 k_2) + \alpha_1 k_2^2 (\frac{r_1}{k_1} \operatorname{ch} b_2 k_1 - r_4 k_2 \operatorname{sh} b_2 k_1), \\ F_{23} &= \frac{\alpha_2 k_2^2}{k_1} (r_{10} \cos b_1 k_2 - r_9 \sin b_1 k_2) + \alpha_1 (r_4 k_1 k_2 \operatorname{ch} b_1 k_1 - (2-r_1) \operatorname{sh} b_1 k_1), \\ F_{24} &= \frac{\alpha_2 k_2^2}{k_1} (r_{10} \cos b_2 k_2 + r_9 \sin b_2 k_2) + \alpha_1 (r_4 k_1 k_2 \operatorname{ch} b_2 k_1 - r_1 \operatorname{sh} b_2 k_1), \\ F_{25} &= \frac{\alpha_2 k_2}{k_1} (r_9 \cos b_1 k_2 + r_{10} \sin b_1 k_2) + \alpha_1 (-\frac{2-r_1}{k_1} \operatorname{ch} b_1 k_1 + r_4 k_2 \operatorname{sh} b_1 k_1), \\ F_{26} &= \frac{\alpha_2 k_2}{k_1} (-r_9 \cos b_2 k_2 + r_{10} \sin b_2 k_2) + \alpha_1 (-\frac{r_1}{k_1} \operatorname{ch} b_2 k_1 + r_4 k_2 \operatorname{sh} b_2 k_1), \\ F_{27} &= \alpha_2 k_1 k_2^2 (r_{10} \cos b_1 k_2 - r_9 \sin b_1 k_2) + \alpha_1 k_2^2 (-r_4 k_1 k_2 \operatorname{ch} b_1 k_1 + (2-r_1) \operatorname{sh} b_1 k_1), \\ F_{28} &= \alpha_2 k_1 k_2^2 (r_{10} \cos b_2 k_2 + r_9 \sin b_2 k_2) + \alpha_1 k_2^2 (-r_4 k_1 k_2 \operatorname{ch} b_2 k_1 + r_1 \operatorname{sh} b_2 k_1), \\ F_{31} &= \alpha_1 k_1 k_2 (r_7 \operatorname{ch} b_1 k_1 + r_9 \operatorname{sh} b_1 k_1) + \alpha_2 k_1^2 (r_6 k_1 \cos b_1 k_2 + \frac{2-r_2}{k_2} \sin b_1 k_2), \\ F_{32} &= \alpha_1 k_1 k_2 (r_7 \operatorname{ch} b_2 k_1 - r_9 \operatorname{sh} b_2 k_1) + \alpha_2 k_1^2 (r_6 k_1 \cos b_2 k_2 + \frac{r_2}{k_2} \sin b_2 k_2), \\ F_{33} &= \frac{\alpha_1 k_1^2}{k_2} (r_9 \operatorname{ch} b_1 k_1 + r_7 \operatorname{sh} b_1 k_1) + \alpha_2 (-(2-r_2) \cos b_1 k_2 + r_6 k_1 k_2 \sin b_1 k_2), \\ F_{34} &= \frac{\alpha_1 k_1^2}{k_2} (-r_9 \operatorname{ch} b_2 k_1 + r_7 \operatorname{sh} b_2 k_1) + \alpha_2 (-r_2 \cos b_2 k_2 + r_6 k_1 k_2 \sin b_2 k_2), \\ F_{35} &= \frac{\alpha_1 k_1}{k_2} (r_7 \operatorname{ch} b_1 k_1 + r_9 \operatorname{sh} b_1 k_1) + \alpha_2 (-r_6 k_1 \cos b_1 k_2 - \frac{2-r_2}{k_2} \sin b_1 k_2), \end{aligned}$$

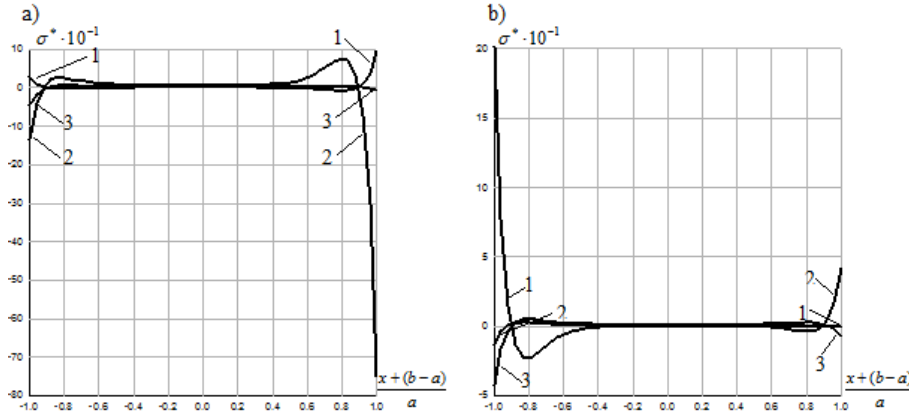


Рис. 2. Распределение контактного давления

$$\begin{aligned}
 F_{36} &= \frac{\alpha_1 k_1}{k_2} (r_7 \operatorname{ch} b_2 k_1 - r_9 \operatorname{sh} b_2 k_1) + \alpha_2 (-r_6 k_1 \cos b_2 k_2 - \frac{r_2}{k_2} \sin b_2 k_2), \\
 F_{37} &= \alpha_1 k_2 k_1^2 (r_9 \operatorname{ch} b_1 k_1 + r_7 \operatorname{sh} b_1 k_1) + \alpha_2 k_1^2 ((2 - r_2) \cos b_1 k_2 - r_6 k_1 k_2 \sin b_1 k_2), \\
 F_{38} &= \alpha_1 k_2 k_1^2 (-r_9 \operatorname{ch} b_2 k_1 + r_7 \operatorname{sh} b_2 k_1) + \alpha_2 k_1^2 (r_2 \cos b_2 k_2 - r_6 k_1 k_2 \sin b_2 k_2), \\
 F_{41} &= \alpha_1 k_1 k_2 (-r_8 \operatorname{ch} b_1 k_1 - r_{10} \operatorname{sh} b_1 k_1) + \alpha_2 k_1^2 (-\frac{2 - r_2}{k_2} \cos b_1 k_2 - r_5 k_1 \sin b_1 k_2), \\
 F_{42} &= \alpha_1 k_1 k_2 (r_8 \operatorname{ch} b_2 k_1 - r_{10} \operatorname{sh} b_2 k_1) + \alpha_2 k_1^2 (-\frac{r_2}{k_2} \cos b_2 k_2 - r_5 k_1 \sin b_2 k_2), \\
 F_{43} &= \frac{\alpha_1 k_1^2}{k_2} (-r_{10} \operatorname{ch} b_1 k_1 - r_8 \operatorname{sh} b_1 k_1) + \alpha_2 (r_5 k_1 k_2 \cos b_1 k_2 - (2 - r_2) \sin b_1 k_2), \\
 F_{44} &= \frac{\alpha_1 k_1^2}{k_2} (-r_{10} \operatorname{ch} b_2 k_1 + r_8 \operatorname{sh} b_2 k_1) + \alpha_2 (r_5 k_1 k_2 \cos b_2 k_2 - r_2 \sin b_2 k_2), \\
 F_{45} &= \frac{\alpha_1 k_1}{k_2} (-r_8 \operatorname{ch} b_1 k_1 - r_{10} \operatorname{sh} b_1 k_1) + \alpha_2 (\frac{2 - r_2}{k_2} \cos b_1 k_2 + r_5 k_1 \sin b_1 k_2), \\
 F_{46} &= \frac{\alpha_1 k_1}{k_2} (r_8 \operatorname{ch} b_2 k_1 - r_{10} \operatorname{sh} b_2 k_1) + \alpha_2 (\frac{r_2}{k_2} \cos b_2 k_2 + r_5 k_1 \sin b_2 k_2), \\
 F_{47} &= \alpha_1 k_2 k_1^2 (-r_{10} \operatorname{ch} b_1 k_1 - r_8 \operatorname{sh} b_1 k_1) + \alpha_2 k_1^2 (-r_5 k_1 k_2 \cos b_1 k_2 + (2 - r_2) \sin b_1 k_2), \\
 F_{48} &= \alpha_1 k_2 k_1^2 (-r_{10} \operatorname{ch} b_2 k_1 + r_8 \operatorname{sh} b_2 k_1) + \alpha_2 k_1^2 (-r_5 k_1 k_2 \cos b_2 k_2 + r_2 \sin b_2 k_2).
 \end{aligned}$$

При проведении расчетов принималось: $E = 2.185 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $b = 2a/3$. Полученные численные результаты, частично представленные на (рис. 2–7) ($\sigma^*(x) = \sigma(x) \cdot h/P$ – безразмерный параметр напряжений, $a_0 = 2a/h = 10$, $M_0 = M_{\text{накл}}/M_{\text{пл}}$ – относительная масса жесткой накладки), позволяют сделать следующие выводы.

Качественная картина распределения давления вдоль области контакта (рис. 2) совпадает с распределением контактного давления при статическом нагружении. Рис. 2, а соответствует пластине с заземленными краями, а рис. 2, б – пластине, у которой один край заземлен, другой свободен. При этом кривая 1 соответствует расчету с частотой вынуждающей силы ω равной 1 Гц, кривая 2 – 1950 Гц, кривая 3 – 7000 Гц. Кроме того, на рис. 2–5: $M_0 = 0, 1$, $2l/h = 20$.

На рис. 3–7 показаны зависимости максимальных напряжений от частоты вынуждающей гармонической силы. Здесь $a_0 = 2a/h = 10$, $b = 2a/3$, кривая 1 соответствует расчету с учетом деформаций поперечного обжатия, сдвига и инерции

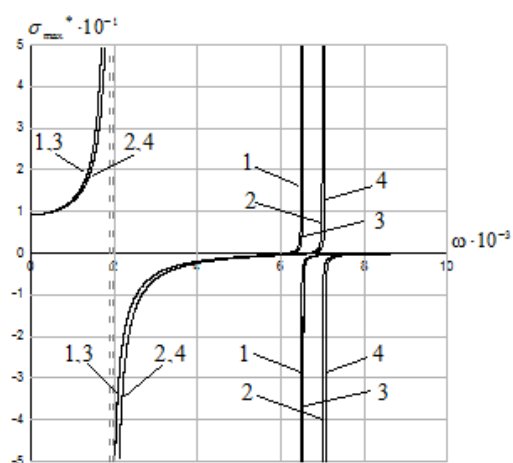


Рис. 3. Пластина с заземленными краями

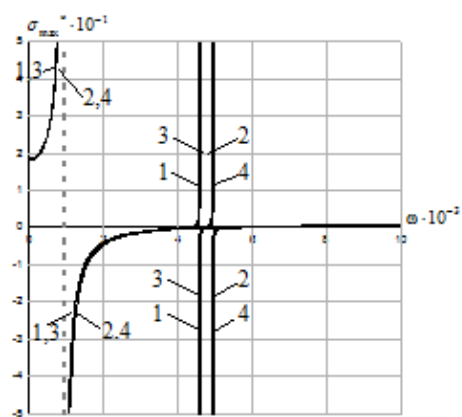


Рис. 4. Пластина с шарнирно-опертыми краями

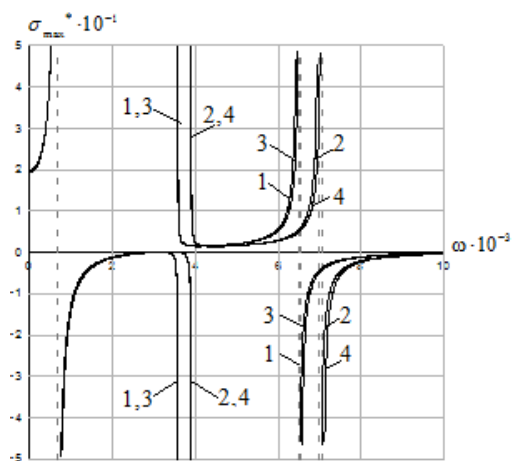
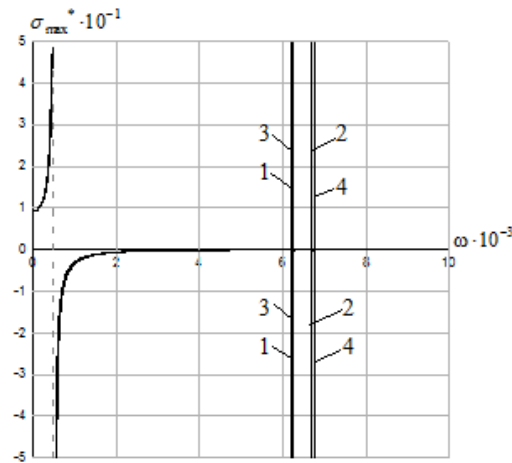
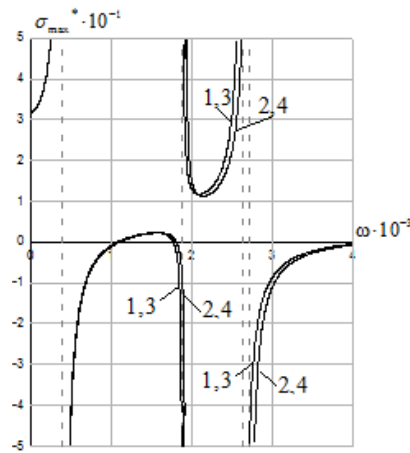


Рис. 5. Один край пластины заземлен, другой свободен

Рис. 6. Пластина с защемленными краями, $M_0 = 10$, $2l/h = 20$ Рис. 7. Пластина с защемленными краями, $M_0 = 0, 1$, $2l/h = 50$

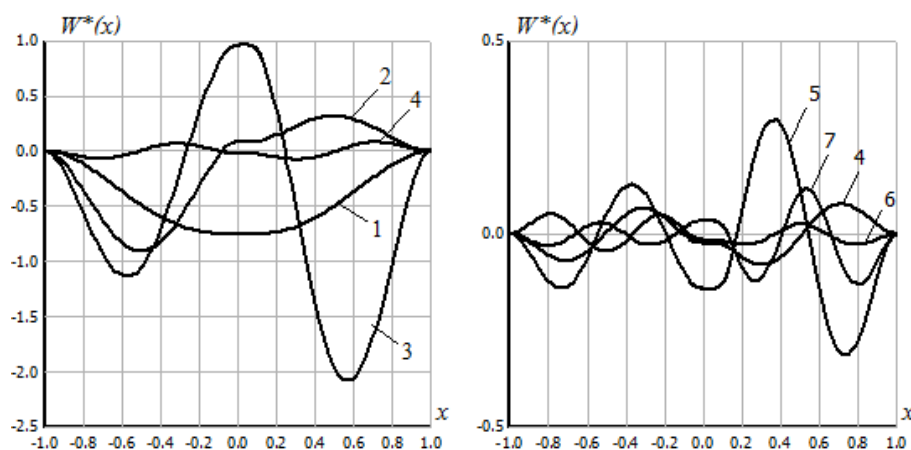
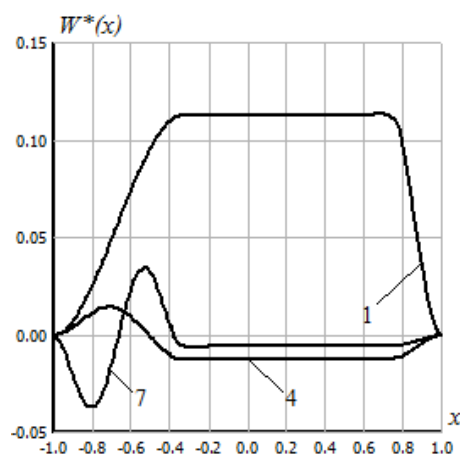
вращения, 2 – учету обжатия и инерции вращения, 3 – учету обжатия и сдвига, 4 – учету одного лишь обжатия.

Относительно граничного условия (ЖЗ+ЖЗ) (рис. 3) у (ШО+ШО) (рис. 4) частота основного тона колебаний пластинки с жесткой накладкой почти в 2 раза меньше, спектр собственных частот плотнее и смещен влево.

Для граничного условия (ЖЗ+СВ) (рис. 5) по сравнению с (ЖЗ+ЖЗ) частота основного тона колебаний пластинки с накладкой почти в 2.5 раз меньше, а по сравнению с (ШО+ШО) спектр собственных частот плотнее и смещен влево. Начиная с третьей частоты собственных колебаний, которая совпадает со второй для граничного условия (ЖЗ+ЖЗ), спектры собственных частот для граничных условий (ЖЗ+СВ) и (ЖЗ+ЖЗ) совпадают.

Учет деформаций поперечного сдвига и инерции вращения мало влияет на результаты при малых толщинах пластин (рис. 3, 7).

Увеличение относительной массы жесткой накладки понижает частоту основного тона колебаний пластинки с накладкой. Понижаются и все остальные собственные частоты, то есть весь спектр собственных частот смещается влево (рис. 3, 6).

Рис. 8. Пластина с защемленными краями, $a_0 = 2$ Рис. 9. Пластина с защемленными краями, $a_0 = 12$

Уменьшение относительной толщины пластинки уплотняет спектр собственных частот (рис. 3, 7).

Пренебрежение деформациями сдвига завышает значение собственных частот. Это завышение незначительно для низших частот и существенно для высших.

При определении частоты основного тона колебаний инерцию вращения можно не учитывать; пренебрежение инерций вращения при определении второй и последующих собственных частот колебаний пластинки с жесткой накладкой приводит к погрешностям порядка 200–300 Гц.

Задачу определения контактных напряжений при частотах, достаточно далеких от резонансных, можно решать с учетом одного лишь поперечного обжатия пластины, пренебрегая как сдвигом, так и инерцией вращения.

При увеличении частоты колебаний от нуля до ω_1 – частоты основного тона уровень напряжений также повышается. Существует такие $\omega > \omega_1$, при которых уровень напряжений значительно ниже статического.

Видно, что для различных граничных условий в целях уменьшения амплитуды контактных напряжений можно управлять спектром собственных частот колебаний пластины с накладкой путем изменения относительной массы накладки M_0

и (или) относительной толщины пластины, так же как и для пластины с защемленными краями (см. рис. 3, 6, 7) [1].

5. Формы колебаний пластинок

Нами исследовано также влияние размера и массивности накладки на прогиб пластинки при установившихся вынужденных колебаниях

$$W(x) = k_0 \sigma(x) + \int_{-b}^{2a-b} G(x, \xi) \cdot \sigma(\xi) d\xi, \quad -l \geq x \leq l.$$

Формы колебаний пластинки при различных частотах для малой жесткой накладки и большой накладки для пластины ($M_0 = 01$, $2l/h = 20$) с защемленными краями показаны на рис. 8, 9 для параметра прогиба $W^*(x) = W(x) \cdot 10^9/P$. На рис. 8, 9 кривая 1 соответствует расчету с частотой вынуждающей силы ω , равной 1500 Гц, 2 – 3500 Гц, 3 – 4500 Гц, 4 – 9500 Гц, 5 – 11000 Гц, 6 – 17000 Гц, 7 – 19000 Гц.

Подтверждено, что когда частота вынуждающей силы близка к i -й собственной частоте, форма вынужденных колебаний пластинки совпадает с собственной формой i -го порядка. Другими словами, вынужденные колебания пластинки с жесткой накладкой почти точно воспроизводят форму одного из собственных колебаний пластинки. При увеличении размера накладки спектр собственных частот колебаний пластинки со накладкой смещается вправо и уплотняется, поэтому уменьшение размера жесткой накладки увеличивает количество собственных форм. С увеличением частоты прогиб срединной поверхности пластины уменьшается.

Summary

Yu.G. Konoplev, S.A. Kuznetsov, A.A. Sachenkov, M.A. Tochkasova. Investigation of Contact Interaction of a Rectangular Plate with a Hard Cover Plate under Harmonic Vibrations.

The article is devoted to the determination of the stresses arising between a rectangular plate and a hard cover plate, and the deflection of the median surface of the plate under steady forced vibrations. An analytical solution of the problem is obtained, and numerical experiments are made. It is investigated how accounting of the transverse shear deformation and the rotational inertia of the plate, the position and massiveness of the cover plate, and the boundary conditions influence the distribution of the contact stresses and the spectrum of natural frequencies.

Key words: contact problem, influence function (Green's function), vibrations.

Литература

1. Кузнецов С.А., Точкасова М.А. Контактное взаимодействие пластины и штампа при гармонических колебаниях // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2007. – Т. 36. – С. 125 – 128.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. Артюхин Ю.П., Карасев С.Н. Применение уточненной теории оболочек при решении контактных задач // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. – С. 132–153.
4. Попов Г.Я., Толкачев В.М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. – 1980. – № 4. – С. 192–206.

-
5. *Кузнецов С.А.* Неосесимметричная контактная задача для тонкой пластины, лежащей на упругом основании, при внецентренном положении штампа // *Механика сплошных сред: Тез. докл. Респ. науч.-техн. конф.* – Наб. Челны, 1982. – С. 105.

Поступила в редакцию
17.11.10

Коноплев Юрий Геннадьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Кузнецов Сергей Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *skoal@ksu.ru*

Саченков Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Точкасова Мария Анатольевна – аспирант кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *maria_toch@mail.ru*