УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 153, кн. 3 Физико-математические науки *2011*

УДК 514.7

КВАЗИГРУППЫ БОЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИМИ ТРИ-ТКАНИ

Г.А. Толстихина

Аннотация

Понятия локальной гладкой квазигруппы и квазигруппы преобразований являются естественным обобщением понятий группы Ли и группы Ли преобразований. Квазигруппа преобразований, определяемая как действие локальной гладкой q-мерной квазигруппы $Q(*)$ на гладком p-мерном многообразии Y, $(1 \le p \le q)$, может быть задана гладкой функцией

$$f: \ Q \times Y \to Y, \quad z = f(a, y), \quad a \in Q, \quad y, \ z \in Y.$$

С другой стороны, уравнение $z = f(a, y)$ определяет три-ткань $QW(p, q, q)$, образованную на многообразии $\mathcal{M}$ одним слоением p-мерных слоев $a = \mathrm{const}$ и двумя слоениями q-мерных слоев: $y = const$ и $z = f(a, y) = \mathrm{const}$. Такой подход позволяет использовать методы теории три-тканей для изучения различных классов локальных гладких квазигрупп преобразований, в том числе квазигрупп Бола преобразований, которые характеризуются некоторым условием на функцию f.

Ключевые слова: квазигруппа, квазигруппа преобразований, квазигруппа Бола, три-ткань, три-ткань Бола, конфигурация на три-ткани, сердцевина три-ткани Бола, локально симметрическая структура.

1. Три-ткани $W(p, q, r)$, образованные слоениями разных размерностей

Определение 1. Три-тканью $W(p, q, r)$ $(p \le r, \ q \le r)$ на дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ размерности $p+q$ называется совокупность трех гладких слоений λ_1, λ_2 и λ_3, слои которых имеют соответственно размерности p, q и r, причем любые два из этих слоений находятся в общем положении.

Согласно [1], слоения ткани $W(p, q, r)$ могут быть заданы в некоторых локальных координатах на многообразии $\mathcal{M}$ уравнениями

$$\lambda_1: \ x = \mathrm{const}, \quad \lambda_2: \ y = \mathrm{const}, \quad \lambda_3: \ z = f(x, y) = \mathrm{const}, \tag{1}$$

где $x = (x^1, \dots, x^q)$, $x \in X$, $y = (y^1, \dots, y^p)$, $y \in Y$, $z = (z^1, \dots, z^\lambda)$, $\lambda = p + q - r$, $z \in Z$, $f = (f^1, \dots, f^\lambda)$, f – гладкая функция и ранги матриц Якоби $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ максимальны в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$. Множества X, Y и Z размерности соответственно q, p и $p + q - r$ являются базами слоений три-ткани $W(p, q, r)$.

Уравнение

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

связывает параметры x, y и z слоев первого, второго и третьего слоений три-ткани $W(p, q, r)$, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$, и называется *уравнением три-ткани* $W(p, q, r)$.

С другой стороны, уравнение (2) определяет трехбазисную бинарную операцию

$$(\cdot): \ X \times Y \to Z, \quad z = f(x, y) \equiv x \cdot y, \tag{3}$$

которая называется *локальным координатным группоидом три-ткани* $W(p, q, r)$.

При $p = q = r$ уравнение $z = x \cdot y$ локально однозначно разрешимо относительно переменных x и y, поэтому операция $(\cdot)$ является гладкой локальной квазигруппой. Она называется локальной координатной квазигруппой соответствующей три-ткани $W(r, r, r)$ [2]. Для три-ткани $W(p, q, r)$ размерности многообразий X, Y и Z, вообще говоря, различны, поэтому операция $(\cdot)$ квазигруппой, вообще говоря, не является.

Переменные x, y и z, входящие в уравнение (2), допускают преобразования вида

$$\widetilde{x} = \alpha(x), \quad \widetilde{y} = \beta(y), \quad \widetilde{z} = \gamma(z), \tag{4}$$

где α, β, γ – локальные диффеоморфизмы. Тройка локальных биекций (α, β, γ) называется *изотопическим преобразованием*, или *изотопией*. Изотопическим преобразованием (4) уравнение (2) приводится к виду

$$\widetilde{z} = \widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\widetilde{x}), \beta^{-1}(\widetilde{y})).$$

Последнее определяет координатный группоид некоторой другой ткани $\widetilde{W}(p, q, r)$. Три-ткани $W(p, q, r)$ и $\widetilde{W}(p, q, r)$, координатные группоиды которых изотопны, являются эквивалентными [1].

Основы дифференциально-геометрической теории (p, q, r)-тканей заложены М.А. Акивисом и В.В. Гольдбергом (см. [3]).

2. Квазигруппы Бола преобразований и определяемые ими обобщенные левые три-ткани Бола

Определение 2. Пусть $Q(*)$ – локальная дифференцируемая q-мерная квазигруппа, Y – гладкое p-мерное многообразие $(p \leq q)$ и на прямом произведении $Q \times Y$ задана гладкая функция

$$f: \ Q \times Y \to Y, \quad z = f(a, y), \tag{5}$$

такая, что

1) в каждой точке множества $Q \times Y$ ранги матриц $\left(\dfrac{\partial f}{\partial a}\right)$ и $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ максимальны;

2) для любых $y \in Y$ и $a, b \in Q$ выполняется условие

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(a * b, y), \tag{6}$$

где $f^{-1}: \ Q \times Y \to Y$, $y = f^{-1}(a, z)$.

Тогда будем говорить, что функция f определяет действие квазигруппы $Q(*)$ на многообразии Y по правилу (6).

Рассмотрим три-ткань $W(p, q, q)$, образованную на многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$ тремя слоениями

$$\lambda_1: \ a = \text{const}, \quad \lambda_2: \ y = \text{const}, \quad \lambda_3: \ z = f(a, y) = c\text{const}$$

размерностей соответственно p, q и q. В [4] показано, что тождеству (6) на ткани $QW(\rho, r, r)$ соответствует конфигурация, аналогичная известной левой конфигурации Бола B_l (см. рис. 1, где, как обычно, слои первого, второго и третьего слоений

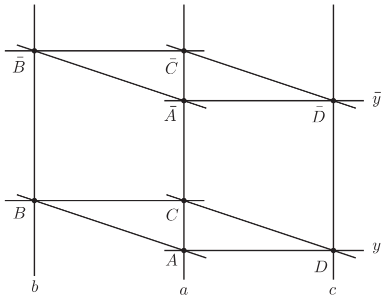

Рис. 1

ткани изображаются вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями соответственно).

В самом деле, пусть a и b – два произвольных достаточно близких вертикальных слоя три-ткани $W(p,q,q)$. Они определяют вертикальный слой $c = a * b$. Возьмем произвольный горизонтальный слой y (рис. 1). Точку пересечения горизонтального слоя y и вертикального слоя a обозначим через A. Через A проходит единственный наклонный слой $f(a,y)$. Этот слой пересекает вертикальный слой b в некоторой точке B. Через B проходит единственный горизонтальный слой $f^{-1}(b, f(a,y))$, который, в свою очередь, пересекает вертикальный слой a в некоторой точке C. Через C проходит единственный наклонный слой $f(a, f^{-1}(b, f(a,y)))$. С другой стороны, слой y пересекает вертикальный слой c в некоторой точке, обозначим эту точку через D. Через D проходит единственный наклонный слой $f(c,y)$. Равенство (6) означает, что точки C и D лежат на одном наклонном слое.

Если провести аналогичное построение, начав с другого горизонтального слоя $\overline{y}$, то получатся новые точки $\overline{C}$ и $\overline{D}$, которые также лежат на одном наклонном слое в силу того же равенства (6). В результате получается конфигурация $A\,B\,C\,D\,\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$, аналогичная левой конфигурации Бола B_l на три-ткани, образованной слоениями одинаковой размерности (см. [5]).

Таким образом, тождеству (6) соответствует условие замыкания на три-ткани $W(p,q,q)$ конфигураций, изображенных на рис. 1.

Согласно [4], квазигруппа $Q(*)$, действующая на многообразии Y по правилу (6), является идемпотентой ($a * a = a$), левообратимой ($a * (a * b) = b$) и леводистрибутивной ($a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$), а значит, изотопна левой лупе Бола [6]. Напомним [7], что лупа (квазигруппа с единицей) с операцией ($\circ$) называется левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола $(u \circ (v \circ u)) \circ w = u \circ (v \circ (u \circ w))$.

Определение 3. Гладкое действие $f:\ Q \times Y \to Y$ локальной дифференцируемой квазигруппы Бола $Q(*)$ на гладком многообразии Y, определяемое правилом (6), называется квазигруппой Бола преобразований. Квазигруппа Бола $Q(*)$ называется параметрической квазигруппой квазигруппы Бола преобразований.

Определение 4. Три-ткань $W(p,q,q)$, определяемая квазигруппой Бола преобразований, называется обобщенной левой тканью Бола и обозначается как $B_l(p,q,q)$.

Квазигруппа Бола преобразований $f:\ Q \times Y \to Y$ является локальным координатным группоидом три-ткани $B_l(p,q,q)$ и рассматривается с точностью до изотопических преобразований вида (4).

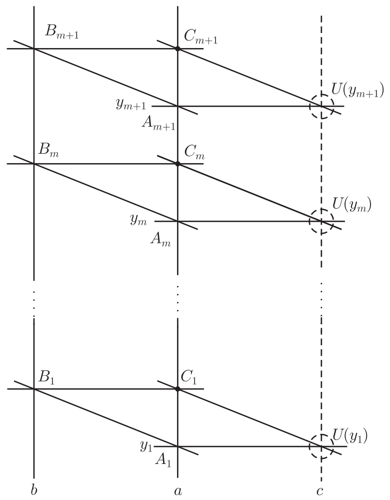

Рис. 2

В частности, при $p = q$ получаем левую ткань Бола $B_l \equiv B_l(q,q,q)$, образованную тремя гладкими q-мерными слоениями. При этом функция f определяет локальную координатную квазигруппу ткани B_l, изотопную левой лупе Бола [2].

Согласно [8], три-ткань $B_l(p,q,q)$ характеризуется замыканием всех достаточно малых обобщенных левых конфигураций Бола (рис. 2). Напомним их определение.

На произвольной три-ткани $W(p,q,q)$ фиксируем два достаточно близких вертикальных слоя a, b и $m = [q/p]$, а также достаточно близких горизонтальных слоев с параметрами y_μ, $\mu = 1,\dots,m$. Каждый из них определяет слои $A_\mu B_\mu$, $B_\mu C_\mu$ (рис. 2) и соответствующее подмногообразие $U(y_\mu) = f(a,y_\mu) \cap f^{-1}(a, f(b,y_\mu))$ размерности $q-p$. На многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$ размерности $q+p$ существует p-мерный вертикальный слой ткани $W(p,q,q)$, трансверсальный подмногообразиям $U(y_1),\dots,U(y_m)$. Но $m+1$ многообразий $U(y_{\overline{\mu}})$, $\overline{\mu} = 1,\dots,m+1$, уже не имеют, вообще говоря, общей трансверсали, являющейся вертикальным слоем ткани $W(p,q,q)$.

Определение 5. Конфигурация, образованная двумя вертикальными слоями a и b и «параллелограммами» вида $A_{\overline{\mu}}B_{\overline{\mu}}C_{\overline{\mu}}U(y_{\overline{\mu}})$, $\overline{\mu} = 1,\dots,m+1$, называется обобщенной левой конфигурацией Бола и обозначается $B_l(1,m)$.

Будем говорить, что конфигурация $B_l(1,m)$ замыкается, если существует единственный вертикальный слой три-ткани $W(p,q,q)$, трансверсальный всем достаточно близким подмногообразиям $U(y_{\overline{\mu}})$, $\overline{\mu} = 1,\dots,m+1$, входящим в эту конфигурацию. В [8] доказана следующая

Теорема 1. *Если на три-ткани $W(p,q,q)$ замыкаются все конфигурации $B_l(1,m)$, то она является обобщенной левой тканью Бола $B_l(p,q,q)$.*

При $q = p$ конфигурация $B_l(1,m)$ становится левой конфигурацией Бола (B_l) на три-ткани $B_l(q,q,q)$, образованной слоениями одинаковой размерности q [5], так как $m = [q/p] = 1$. При этом уравнение $c = a * b$ связывает параметры a, b и c вертикальных слоев три-ткани B_l, входящих в произвольную конфигурацию (B_l). В соответствии с [9] квазигруппа $(*)$ названа *сердцевиной* три-ткани $B_l(q,q,q)$.

Сердцевина обобщенной левой ткани Бола $B_l(p,q,q)$ определяется аналогично [10]. Она также задается уравнением $c = a * b$, которое, с другой стороны, определяет параметрическую квазигруппу соответствующей квазигруппы Бола преобразований.

3. Локальные симметрии на три-ткани $B_l(p,q,q)$

Согласно [4], на базе Q первого слоения λ_1 три-ткани $B_l(p,q,q)$ индуцируется локально симметрическая структура. Она определяется семейством гладких функций S_a таких, что $S_a(b) = a * b$ для любых $a \in Q$ и $b \in U_a \subset Q$, где U_a – достаточно малая окрестность точки a. Так как операция $(*)$ идемпотентна, левообратима и леводистрибутивна (см. выше), то функции S_a являются локальными симметриями [7]. Справедлива

Теорема 2. *База первого слоения три-ткани $B_l(p,q,q)$ является локально симметрическим пространством.*

Пример. Уравнения

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1 - a^3 y^2 (a^2 + y^2), \\ z^2 = a^2 + y^2 \end{cases} \tag{7}$$

определяют действие трехпараметрической квазигруппы Бола

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1 - (a^2 - b^2)(a^2(a^3 - b^3) + a^3(a^2 - b^2)), \\ c^2 = 2a^2 - b^2, \\ c^3 = 2a^3 - b^3 \end{cases} \tag{8}$$

на двумерном многообразии [1]. С другой стороны, уравнения (7) задают обобщенную левую три-ткань Бола $B_l(2,3,3)$, сердцевина которой (и соответствующая симметрическая структура) определяется уравнениями (8). Другие примеры квазигрупп Бола преобразований и определяемых ими три-тканей см. в [11].

В заключение отметим, что изучением квазигрупп преобразований занимались А.И. Баталин [12], А.И. Нестеров [13] и др. (см. об этом в [1, 14]). В работах П.О. Михеева [15, 16] квазигруппа преобразований рассматривается как семейство преобразований гладкого многообразия, не замкнутое, вообще говоря, относительно композиции. В нашей работе [4] квазигруппа преобразований определяется как действие локальной гладкой q-мерной квазигруппы $Q(*)$ на гладком p-мерном многообразии Y $(1 \le p \le q)$ и задается гладкой функцией (5). Предложенный подход позволяет эффективно применить методы теории три-тканей для изучения локальных гладких квазигрупп Бола преобразований. Отметим также, что методы и результаты теории (p,q,r)-тканей могут применяться в разных разделах математики и физики, поскольку три-ткань $W(p,q,r)$ представляет собой геометрический аналог гладкой функции двух переменных общего вида $f:\ X \times Y \to Z$.

Summary

G.A. Tolstikhina. Bol Transformation Quasigroups and Three-Webs Defined by Them.

The notions of a local smooth quasigroup and a quasigroup of transformations are natural generalizations of the notions of the Lie group and the Lie transformation group. We define the quasigroup of transformations as an action f of the local smooth q-dimensional quasigroup $Q(*)$ on the smooth p-dimensional manifold Y $(1 \le p \le q)$ given by a smooth function

$$f:\ Q \times Y \to Y, \quad z = f(a,y), \quad a \in Q, \quad y,\ z \in Y.$$

On the other hand, the equation $z = f(a,y)$ defines the three-web $QW(p,q,q)$ formed by a foliation of p-dimensional leaves $a = \text{const}$ and two foliations of q-dimensional leaves $y = \text{const}$ and $z = f(a,y) = \text{const}$ on the manifold $Q \times Y$. Thus, we can use the three-web theory methods to study different classes of smooth local quasigroups of transformations. In the present paper, we investigate Bol quasigroups of transformations characterized by some condition on the function f.

Key words: quasigroup, quasigroup of transformations, Bol quasigroup, three-web, Bol three-web, three-web configuration, core of Bol three-web, locally symmetric space structure.

Литература

1. *Толстихина Г.А.* Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей // Соврем. матем. и ее приложения. – 2005. – Т. 32. – С. 29–116.
2. *Акивис М.А., Шелехов А.М.* Многомерные три-ткани и их приложения. – Тверь: ТвГУ, 2010. – 308 с.
3. *Акивис М.А., Гольдберг В.В.* О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 203, № 2. – С. 263–266.
4. *Толстихина Г.А., Шелехов А.М.* О квазигруппах Бола преобразований // Докл. РАН. – 2005. – Т. 401, № 2. – С. 166–168.
5. *Акивис М.А.* О три-тканях многомерных поверхностей // Труды геом. сем. ВИНИТИ АН СССР. – 1969. – Т. 2. – С. 7–31.
6. *Акивис М.А., Герасименко С.А.* О некоторых фигурах замыкания на многообразиях с симметрией // Ткани и квазигруппы. – Калинин, 1982. – С. 7–11.
7. *Сабинин Л.В., Михеев П.О.* Теория гладких луп Бола. – М.: Ун-т дружбы народов, 1985. – 80 с.
8. *Толстихина Г.А., Шелехов А.М.* О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 5. – С. 56–62.
9. *Белоусов В.Д.* Сердцевина лупы Бола // Исследования по общей алгебре. – Кишинев, 1965. – С. 53–65.
10. *Толстихина Г.А.* Дифференциально-геометрические структуры на три-тканях, образованных слоениями разных размерностей // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М., 2010. – Т. 124. – С. 287–327.
11. *Толстихина Г.А.* О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $B_l(p,q,q)$ // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 2. – С. 247–255.
12. *Batalin I.A.* Quasigroup construction and first class constraints // J. Math. Phys. – 1981. – V. 22, No 9. – P. 1837–1849.
13. *Нестеров А.И.* Квазигрупповые идеи в физике // Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике: Тр. Ин-та физики. – Тарту, 1990. – Т. 66. – С. 107–120.
14. *Лыхмус Я., Паал Э., Соргсепп Л.* Неассоциативность в математике и физике // Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике: Тр. Ин-та физики. – Тарту, 1990. – Т. 66. – С. 8–22.
15. *Михеев П.О.* О лупах преобразований. – Деп. в ВИНИТИ 1985. № 4531-85.
16. *Miheev P.O.* Quasigroups of transformations // Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике: Тр. Ин-та физики. – Тарту, 1990. – Т. 66. – С. 54–66.

Поступила в редакцию
19.06.11

Толстихина Галина Аркадьевна – доктор физико-математических наук, доцент, проректор по научной работе Тверского государственного университета.

E-mail: *science@tversu.ru*